Universidad de Concepción

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Estimadores de error a posteriori para un problema de mecánica de fluidos

Tesis presentada por Roberto Antonio Molina Sepúlveda
para optar al título de Ingeniero Civil Matemático

2012

Departamento de Ingeniería Matemática

Agradecimientos

Antes de nada me gustaría agradecer a todas las personas que me han ayudado en el camino. Por su guía, el buen humor, sus consejos y la inspiración que me dieron en estos meses de trabajo. Agradezco además a mi profesor guía, Dr. Rodolfo Araya Durán por recomendar este tema y confiar en mis capacidades para realizar este proyecto.
Finalmente quisiera agradecer a mi madre, mi padre, mis hermanos y amigos por su apoyo y lealtad en la realización de esta memoria de titulación.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El estudio de la mecánica de fluidos ha sido durante muchos años foco de interés de matemáticos, ingenieros y científicos en general, por el gran valor que tiene para predecir el comportamiento de elementos como el agua, aire y otros fluidos, lo que tiene muchas aplicaciones en diversas áreas del conocimiento, tales como la física, biología, el medio ambiente, etc. La histórica y constante búsqueda para comprender por completo el comportamiento de los fluidos se ve frenada por el fundamental hecho físico que, en general, el flujo de un fluido es un fenómeno no lineal. Este hecho es evidente si consideramos las ecuaciones que han sido planteadas para modelar la dinámica de fluidos en mecánica continua. En este sentido, una de las principales ecuaciones que modelan el comportamiento de un fluido fueron derivadas por el ingeniero francés Claude-Louis Navier en el año 1822 y posteriormente reescritas por el matemático irlandés George Gabriel Stokes quien en 1845 derivó las mismas ecuaciones, pero de la forma que se conocen y trabajan hoy en día. Este conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales hasta el día de hoy no tienen una solución general explícita, salvo algunos casos particulares, por este motivo es necesario (en un principio) hacer simplificaciones de las mismas. En una de sus formas (para el caso de un fluido incompresible) las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser escritas de la siguiente forma

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \nabla p \;= \boldsymbol{f}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \text{ en } \Omega$$

donde $\boldsymbol{u}$ representa el campo de velocidades del fluido, p el campo de presiones, ν corresponde a la viscocidad del fluido, $\boldsymbol{f}$ es un término fuente y Ω es el dominio que ocupa el

fluido.
Una de las primeras simplificaciones a estas ecuaciones es eliminar por completo el término no lineal y así obtener el llamado problema de Stokes. Esta simplificación linealiza el problema, pero es válida para fluidos con una baja viscosidad dinámica y presenta grandes problemas a la hora de modelar fenómenos como por ejemplo una esfera moviéndose dentro de un fluido. Es por esto que en el año 1927 Carl Wilhelm Oseen presentó otra linealización de las ecuaciones de Navier-Stokes donde se incluye la influencia del campo convectivo al que está sometido el fluido, ecuaciones que presentaremos más adelante.

Figura 1.1: Carl Wilhelm Oseen

Aunque las ecuaciones de Navier-Stokes no tienen una solución explícita, existen hoy en día herramientas de simulación numérica y computacional que nos permiten aproximar los valores de la solución, y que en la mayoría de las aplicaciones es lo que se busca. En este sentido el Método de Elementos Finitos (MEF) es una de las principales herramientas para encontrar soluciones numéricas de importantes ecuaciones en derivadas parciales como las ya mencionadas.
Como las ecuaciones de Navier-Stokes son no lineales, es necesario combinar el Método de Elementos Finitos con algún método iterativo que nos permita aproximar su solución. Algunos de estos métodos resuelven en cada iteración un problema como el planteado por Oseen, motivo por el cual es de gran importancia resolver estas ecuaciones de manera eficiente, ya que esto implicaría un gran avance a la hora de intentar solucionar el problema no lineal. No obstante lo anterior, la aproximación hecha por Oseen permite capturar importantes fenómenos que se producen en fluidos en régimen turbulento y así evitar resolver las ecuaciones de Navier-Stokes completas.

A pesar de que el Método de Elementos Finitos nos permite resolver el problema de Oseen, este presenta ciertas falencias tanto teóricas como prácticas que en esta tesis se pretende mejorar. En ese sentido el problema de elegir los "mejores" espacios de aproximación para la solución del MEF es una de las primeras tareas a abordar si queremos utilizarlo de forma eficiente.
Dentro de los espacios de aproximación del MEF más utilizados están los del tipo $\mathbb{P}_1^2/\mathbb{P}_1$, es decir, aproximar la velocidad y la presión por funciones continuas y $\mathbb{P}_1$ a trozos, la ventaja de esto es su fácil implementación computacional, sin embargo esta aproximación no es estable si queremos resolver ya sea Stokes u Oseen, en el sentido que no satisfacen la llamada condición inf-*sup* (introducida por Babuška en [10] y Brezzi en [19]) y por lo tanto el buen planteamiento del problema discreto no está asegurado, de donde el método puede no converger a la solución, independiente de que tan fino sea el mallado del dominio, más detalles se pueden revisar en Ern y Guermond [26] (Cap. 4.2.3).
Al hablar de discretización nos referimos a la cantidad de grados de libertad con los que aproximamos la solución continua y mientras mejor sea ésta, mayor es el sistema lineal asociado que se debe resolver, lo que numérica y computacionalmente puede presentar grandes complicaciones. Por este motivo surgen nuevos problemas si intentamos encontrar soluciones a casos donde el término convectivo es el dominante y por lo tanto se producen capas límites o zonas de gradientes fuertes que serán capturados por el MEF siempre y cuando la discretización sea muy fina.
Para evitar estos problemas, en los últimos años se han desarrollado nuevos esquemas que mejoran el MEF clásico pues hacen que nuestra solución aproximada sea estable, es decir, aseguran el buen planteamiento de la solución discreta, dentro de estos están los llamados Streamline Upwind Petrov Galerkin (SUPG) introducidos por Brooks y Hughes [22], están también los llamados Galerkin Least Squares (GLS) Franca y Frey [27], entre otros. Estos métodos agregan términos extra a la formulación con características a mencionar más adelante. Además estos métodos también mejoran la captura de capas límites sin la necesidad de discretizaciones muy finas.

Uno de los principales temas de estudio del MEF es saber que tan buena es la solución encontrada, es decir poder conocer el valor del error de aproximación $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|$ en alguna norma, aquí $\boldsymbol{u}$ es la solución del problema continuo y $\boldsymbol{u}_h$ corresponde a la solución discreta calculada numéricamente. Para conseguir esto, recurrimos en primera instancia a una *estimación a priori*, es decir una estimación del tipo:

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\| \leq Ch^k \|\boldsymbol{u}\|$$

donde h es un parámetro que depende de la discretización, $k \in \mathbb{N}$ y C es una constante positiva que no depende de h . Esto permite asegurar la convergencia del método, pero no ofrece una respuesta al problema de evaluar el error, pues el valor de C y de la solución $\boldsymbol{u}$ no siempre se conocen, por lo que no podremos calcularlo y tener un control de nuestra aproximación. Por este motivo es necesario considerar una *estimación a posteriori* del error, es decir una estimación del tipo:

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\| \leq C\,\mathcal{H}(h, \boldsymbol{u}_h, \mathbf{A})$$

donde $\mathcal{H}$ es una función conocida que depende del parámetro h, de la aproximación $\boldsymbol{u}_h$ y de la forma bilineal $\mathbf{A}$ que define el problema. Estas estimaciones permiten calcular una cota superior para el error, además de proporcionar información a nivel local que nos permitirá conocer con mayor precisión donde se producen los mayores errores y así poder refinar la malla (representación del dominio donde se busca la solución) sin que sea necesario aumentar los grados de libertad en todo el dominio.

Aunque los métodos estabilizados ofrecen una muy buena alternativa para arreglar las falencias del MEF, existen casos donde no son del todo precisos y es necesario hacer uso de herramientas como el análisis de error a posteriori ya mencionado, para así lograr soluciones que son aceptables en las aplicaciones del modelo.

Esta tesis está compuesta de la siguiente forma: En el capítulo 2 damos a conocer las definiciones y notaciones más importantes a usar durante la tesis, también mostramos la existencia y unicidad de la solución para el problema continuo, esto es necesario pues en la demostración se entregan algunos resultados a utilizar en capítulos posteriores. En el capítulo 3 detallamos la derivación del método RELP para la ecuación de Oseen, mediante una estrategia de enriquecimiento, además probamos los resultados de estabilidad y consistencia del método junto con un análisis de convergencia para el mismo. En el capítulo 4 definimos un estimador de error a posteriori de tipo residual para el método estabilizado y presentamos el principal resultado de esta tesis que corresponde a la equivalencia del estimador con el error. Finalmente, en el capítulo 5, testeamos numéricamente el método junto con el estimador y validamos los resultados obtenidos teóricamente. En el capítulo final de esta tesis presentamos las conclusiones y futuras líneas de trabajo.

Capítulo 2

Notaciones y problema modelo

En este capítulo presentamos las principales definiciones y notaciones a utilizar en la tesis, donde adoptamos las clásicas notaciones encontradas en la literatura. Además planteamos el problema modelo a trabajar y mostramos el buen planteamiento del mismo, en su forma débil.

2.1. Definición del problema y notaciones

Denotaremos por $(\cdot,\cdot)_D$ al producto interior en $L^2(D)$ (o en $L^2(D)^2$ o $L^2(D)^{2\times 2}$ si es necesario), $\|\cdot\|_{s,D}$ ($|\cdot|_{s,D}$) la norma (seminorma) en $H^s(D)$ (o en $H^s(D)^2$ si es necesario). Como es usual, $H^0(D) = L^2(D)$, $|\cdot|_{0,D} = \|\cdot\|_{0,D}$, y $L^\infty(D)$ es el espacio de funciones esencialmente acotadas en D, con la norma $\|\cdot\|_{\infty,D}$. Dado Ω, un dominio abierto acotado, conexo de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal, consideremos una triangulación $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ (malla), es decir, una partición de $\bar{\Omega}$ en triángulos K, tales que $\forall K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$, $K_1 \neq K_2$, se tiene que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, o $K_1 \cap K_2$ es un vértice de ambos triángulos, o bien corresponde a un lado común de ambos. Supondremos que $\mathcal{T}_h$ se construye usando triángulos K y definimos, $h_K := diam(K)$, $\rho_K := \sup\{diam(S) : S \text{ círculo inscrito en } K\}$, y $h := \max\{h_K : K \in \mathcal{T}_h\}$.
Denotemos por $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$, es decir, existe $\sigma_0 > 0$ tal que

$$\forall h,\ \forall K \in \mathcal{T}_h,\ \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma_0. \tag{2.1}$$

Definimos el conjunto de lados internos de la triangulación $\mathcal{E}_h := \{F : F \text{ lado interno de } \mathcal{T}_h\}$. Para cada $F \in \mathcal{E}_h$, sea $h_F := |F|$. Definimos el conjunto de vertices de K y F por $N(K)$ y $N(F)$ respectivamente y además el conjunto de lados de cada triángulo por $\mathcal{E}(K) := \{F : F \subseteq \partial K\}$.
Denotamos por $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{s}$ a los vectores normal exterior y tangentes a ∂K, respectivamente. Además $\partial_{\boldsymbol{s}}$ y $\partial_{\boldsymbol{n}}$ son los operadores derivada tangencial y normal respectivamente, $[\![v]\!]$ es el salto a través de F de $v \in L^2(\Omega)$ o de $\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^2$ cuando corresponda, y Π_S, $S \subset \mathbb{R}^2$, es la proyección ortogonal sobre el espacio de las constantes, es decir,

$$\Pi_S(q) := \frac{(q,1)_S}{|S|},$$

donde $|S|$ es la medida de S (área si $S = K \in \mathcal{T}_h$, y largo si $S = F \in \mathcal{E}_h$). Definimos el operador fluctuación sobre K como sigue

$$\chi_h := \mathbf{I} - \Pi_K. \tag{2.2}$$

Las definiciones anteriores se extienden, de manera evidente a funciones vectoriales y su notación es la misma.
Para $K \in \mathcal{T}_h$ y $F \in \mathcal{E}_h$ definimos las vecindades:

$$\begin{aligned} \omega_K &:= \bigcup_{\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}(K')\neq\emptyset} K', \quad \omega_F := \bigcup_{F\in\mathcal{E}(K')} K' \\ \tilde{\omega}_K &:= \bigcup_{N(K)\cap N(K')\neq\emptyset} K', \quad \tilde{\omega}_F := \bigcup_{K'\cap F\neq\emptyset} K' \end{aligned} \tag{2.3}$$

Denotamos por $\mathbf{V} := H_0^1(\Omega)^2$ donde

$$H_0^1(\Omega) := \left\{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ en } \Gamma := \partial\Omega \text{ en el sentido de trazas}\right\},$$

y por $Q := L_0^2(\Omega)$ las funciones de $L^2(\Omega)$ con media nula, es decir

$$L_0^2(\Omega) := \left\{q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q = 0\right\}.$$

En lo que sigue, V_h denota el espacio de elementos finitos formado por funciones continuas lineales a trozos con traza nula en $\partial\Omega$, es decir

$$V_h := \left\{ v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_K \in \mathbb{P}_1(K) \, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \cap H_0^1(\Omega), \tag{2.4}$$

la extensión de este espacio a funciones vectoriales es $\mathbf{V}_h := [V_h]^2$. El espacio de elementos finitos para aproximar la presión está dado por

$$Q_h^1 := \left\{ q \in C^0(\bar{\Omega}) : q|_K \in \mathbb{P}_1(K) \, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \cap L_0^2(\Omega), \tag{2.5}$$

esto, en el caso de usar interpolaciones continuas para la presión, en otro caso usamos

$$Q_h^l := \left\{ q \in L_0^2(\Omega) : q|_K \in \mathbb{P}_l(K) \, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \tag{2.6}$$

donde $l = 0, 1$. Finalmente introducimos los espacios

$$\begin{aligned} H_0^1(\mathcal{T}_h) &:= \left\{ v : v|_K \in H_0^1(K) \, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \\ L_0^2(\mathcal{T}_h) &:= \left\{ v : v|_K \in L_0^2(K) \, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}. \end{aligned}$$

Denotamos por G_h^l al complemento ortogonal de $Q_h^l \cap L_0^2(\mathcal{T}_h)$ en $L_0^2(\mathcal{T}_h)$, con Q_h^l definido en (2.6)

Con las notaciones anteriores, estamos en condiciones de presentar el problema a trabajar en esta tesis.
En este trabajo estudiamos el siguiente problema de Oseen:

Hallar $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ y $p : \Omega \to \mathbb{R}$ *tales que* :

$$(Os) \quad \left\{ \begin{array}{rll} -\nu\Delta\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} + \nabla p & = \boldsymbol{f} & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} & = 0 & \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{u} & = \mathbf{0} & \text{en } \Gamma := \partial\Omega, \end{array} \right.$$

donde ν es una constante positiva que representa la viscocidad cinemática del fluído, $\boldsymbol{a} \in L^\infty(\Omega)^2 \cap H^1(\Omega)^2$ es un campo solenoidal en Ω, es decir $\nabla \cdot \boldsymbol{a} = 0$, $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^2$ es una función regular que representa los términos fuente.

Nota 1. *Por simplicidad consideramos la ecuación de Oseen con condiciones de contorno nulas, pues el paso a una ecuación más general sigue las extensiones clásicas de elementos finitos a fronteras mixtas y con condiciones de borde no nulas.*

2.2. Formulación Variacional

A continuación debemos encontrar la formulación variacional o forma débil del problema (Os), esto con el objetivo de probar el buen planteamiento de nuestro problema (existencia y unicidad de la solución débil). Para probar lo anterior, utilizaremos la teoría de Babuška-Brezzi junto a otros resultados de análisis funcional.
Sean $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V} = H_0^1(\Omega)^2$ y $q \in Q = L_0^2(\Omega)$ dos funciones cualquiera (llamadas funciones test), multiplicando la primera ecuación en (Os) por $\boldsymbol{v}$ y la segunda por q e integrando, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega -\nu\Delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \int_\Omega (\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} + \int_\Omega \nabla p\cdot\boldsymbol{v} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \\ \int_\Omega q(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) &= 0, \end{aligned}$$

utilizando la primera identidad de Green en el primer y tercer término, tenemos

$$\begin{aligned} \nu\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{v} - \nu\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{v} + \int_\Omega(\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} - \int_\Omega p(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \int_{\partial\Omega} p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \\ \int_\Omega q(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) &= 0, \end{aligned}$$

usando el hecho que $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^2$, la formulación variacional mixta del problema (Os) está dada por
$Hallar\ (\boldsymbol{u}, p) \in \mathbf{V}\times Q \quad tal\, que:$

$$\begin{aligned} \nu\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{v} + \int_\Omega(\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} - \int_\Omega p(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) &= \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \quad \forall\boldsymbol{v}\in\mathbf{V} \\ \int_\Omega q(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) &= 0 \qquad\quad \forall q\in Q. \end{aligned}$$

Definimos las siguientes formas bilineales, $a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $b : \mathbf{V} \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$$a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{w})_\Omega + ((\nabla \boldsymbol{v})\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w})_\Omega \tag{2.7}$$

$$b(\boldsymbol{v}, q) := -\,(q, \nabla \cdot \boldsymbol{v})_\Omega \tag{2.8}$$

así nuestro problema se puede escribir como:

$Hallar\ (\boldsymbol{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q \quad tal\, que :$

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) &= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_\Omega \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V} \\ b(\boldsymbol{u}, q) &= 0 \qquad\qquad\ \ \forall q \in Q. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sobre los espacios $\mathbf{V}$ y Q definimos las siguientes normas

$$|\boldsymbol{v}| := \sqrt{\nu}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}, \tag{2.10}$$

$$\|q\| := \frac{1}{\sqrt{\nu}}\|q\|_{0,\Omega}. \tag{2.11}$$

Estas normas inducen la siguiente norma en el espacio producto $\mathbf{V} \times Q$

$$|\!|\!|(\boldsymbol{w}, t)|\!|\!| := \left\{|\boldsymbol{w}|^2 + \|t\|^2\right\}^{1/2} \qquad \forall (\boldsymbol{w}, t) \in \mathbf{V} \times Q. \tag{2.12}$$

Gracias a la desigualdad de Poincaré en $H_0^1(\Omega)$, se tiene que la seminorma definida en (2.10) es también una norma en este espacio.

Lo siguiente es probar la continuidad de la formas bilineales a y b, en efecto, sean $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbf{V}$, tenemos

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= \nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{w})_\Omega + ((\nabla \boldsymbol{v})\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w})_\Omega \\ &\leq \nu|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}|\boldsymbol{w}|_{1,\Omega} + \|(\nabla \boldsymbol{v})\boldsymbol{a}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega} \\ &\leq |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}| + \|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}\|\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega} \\ &\leq |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}| + C\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}|\boldsymbol{w}|_{1,\Omega} \\ &\leq |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}| + C\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}}{\nu}|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}| \\ &\leq C\,\text{máx}\left\{1, \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}}{\nu}\right\}|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|, \end{aligned}$$

donde la constante C depende de la constante de Poincaré, es decir, solamente de $|\Omega|$, y por lo tanto es independiente de los parámetros físicos ν y $\boldsymbol{a}$.
Por otra parte, usando la desigualdad de Cauchy Schwarz obtenemos

$$b(\boldsymbol{v}, q) = -(q, \nabla \cdot \boldsymbol{v})_\Omega \leq \|q\|_{0,\Omega} |\boldsymbol{v}|_{1,\Omega} = \|q\| |\boldsymbol{v}|.$$

Además, la forma bilineal b satisface la condición inf-sup, en efecto, como el operador *div* es un isomorfismo de $\mathbf{W}^\perp$ en Q (ver Corolario 2.4 en [34]) con $\mathbf{W} := \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{V} : \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\}$, se tiene que para todo $q \in Q$ existe un único $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}^\perp$ tal que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = q \quad \text{y} \quad |\boldsymbol{v}|_{1,\Omega} \leq C\|q\|_{0,\Omega},$$

de donde

$$\sup_{\boldsymbol{w} \in \mathbf{V}} \frac{b(\boldsymbol{w}, q)}{|\boldsymbol{w}|} \geq \frac{-b(\boldsymbol{v}, q)}{\sqrt{\nu}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}} = \frac{(q, \nabla \cdot \boldsymbol{v})_\Omega}{\sqrt{\nu}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}} = \frac{\|q\|_{0,\Omega}^2}{\sqrt{\nu}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}},$$

y así

$$\sup_{\boldsymbol{w} \in \mathbf{V}} \frac{b(\boldsymbol{w}, q)}{|\boldsymbol{w}|} \geq \beta \|q\|. \tag{2.13}$$

Notemos por último que a es $\mathbf{V}$-elíptica, en efecto, sea $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$, entonces como $\nabla \cdot \boldsymbol{a} = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) &= \nu(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{v})_\Omega + ((\nabla \boldsymbol{v})\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})_\Omega \\ &= \nu|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}^2 - \frac{1}{2}(\nabla \cdot \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})_\Omega \\ &= |\boldsymbol{v}|^2. \end{aligned}$$

Con todo lo anterior, se tiene que, por la teoría de Babuška-Brezzi (o por Corolario 4.1 en [34]), el problema (2.9) tiene única solución.
El problema (2.9) se puede escribir equivalentemente, de la siguiente forma:
$Hallar\ (\boldsymbol{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q \quad tal\, que:$

$$\mathbf{A}((\boldsymbol{u}, p), (\boldsymbol{v}, q)) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_\Omega \quad \forall (\boldsymbol{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q, \tag{2.14}$$

donde

$$\mathbf{A}((\boldsymbol{u},p),(\boldsymbol{v},q)) := \nu(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})_\Omega + ((\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{a},\boldsymbol{v})_\Omega - (p,\nabla\cdot\boldsymbol{v})_\Omega + (q,\nabla\cdot\boldsymbol{u})_\Omega, \tag{2.15}$$

de donde, es claro que también tiene solución única.

Nota 2. *El problema (Os), visto en su formulación débil* (2.14)*, es el problema base a tratar en esta tesis, tanto en el análisis a priori como a posteriori.*

Capítulo 3

El método RELP

El concepto de método de elementos finitos estabilizados ha sido aplicado exitosamente a los problemas de Oseen y Navier-Stokes en los últimos años (ver por ejemplo [27] y [8]). Como mencionamos anteriormente, estos métodos agregan términos extra a la formulación mejorando la estabilidad sin afectar la convergencia del mismo. Los términos extra pueden o no depender de los residuos de las ecuaciones fuertes y son ponderados por parámetros previamente fijados que dependen de la malla. En la búsqueda de parámetros óptimos es que los métodos estabilizados comenzaron a ser obtenidos usando la estrategia de enriquecer los espacios de aproximación de la solución.
Dentro de los métodos no residuales, los llamados Local Projection (LPS) se han vuelto muy utilizados pues agregan términos simétricos a la formulación, pero presentan el problema de necesitar una estructura de datos especial para su implementación. Como alternativa a esto tenemos los métodos llamados Polynomial Pressure Projection methods (LPPS) en donde el cálculo se realiza a nivel de cada elemento y no necesita mallas especiales, lo que simplifica la computación de ellos.
Ninguno de los dos métodos anteriores es fuertemente consistente, aunque la consistencia está acotada por el error de discretización, lo que hace que ambos sean muy costosos (computacionalmente) para altos órdenes de interpolación. Otro punto en común es el hecho que ninguno ha sido derivado como resultado de una estrategia de enriquecimiento. Motivado por lo anterior es que en Barrenechea y Valentin [14] se adoptó una estrategia de enriquecimiento para obtener nuevos métodos LPS basados en residuos para la ecuación de Stokes llamados Residual Local Projection (RELP).

En este capítulo mostraremos y explicaremos el trabajo realizado por Barrenechea y Valentin [12], es decir, la extensión a la ecuación de Oseen de lo desarrollado por estos autores en sus trabajos anteriores. Derivación del método RELP, estabilidad, consistencia y convergencia del mismo son los puntos que trataremos en este capítulo. Realizaremos algunas modificaciones, con el fin de mostrar la convergencia del método en los espacios de interpolación que serán utilizados en el análisis a posteriori y en la implementación computacional.

3.1. Definición del método

El método de proyección local (RELP) que será analizado en este trabajo está dado por,

$Hallar\, (\boldsymbol{u}_1, p_l) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^l \quad tal\, que:$

$$\mathbf{B}((\boldsymbol{u}_1, p_l), (\boldsymbol{v}_1, q_l)) = \mathbf{F}(\boldsymbol{v}_1, q_l) \quad \forall (\boldsymbol{v}_1, q_l) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^l. \tag{3.1}$$

La forma bilineal $\mathbf{B}$ se descompone en la suma de los términos de Galerkin y los estabilizados, de la siguiente forma: $\mathbf{B}(\cdot,\cdot) := \mathbf{A}(\cdot,\cdot) + \mathbf{B}_{\mathcal{T}}(\cdot,\cdot) + \mathbf{B}_{\mathcal{E}}(\cdot,\cdot)$, donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\mathcal{T}}((\boldsymbol{u}_1, p_l), (\boldsymbol{v}_1, q_l)) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu} \Big(\chi_h(p_l + \boldsymbol{x} \cdot (\nabla \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a}), \chi_h(q_l + \boldsymbol{x} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}) \Big)_K, \\
\mathbf{B}_{\mathcal{E}}((\boldsymbol{u}_1, p_l), (\boldsymbol{v}_1, q_l)) &= \sum_{F \in \mathcal{E}_h} \tau_F \Big(\Pi_F([\![\nu \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}_1 + p_l \boldsymbol{n}]\!]), \Pi_F([\![\nu \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v}_1 + q_l \boldsymbol{n}]\!]) \Big)_F,
\end{aligned}$$

además $\mathbf{F}(\boldsymbol{v}_1, q_l) := (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_1)_\Omega + \mathbf{F}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{v}_1, q_l)$, donde

$$\mathbf{F}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{v}_1, q_l) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu} \Big(\chi_h(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f}), \chi_h(q_l + \boldsymbol{x} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}) \Big)_K,$$

el parámetro α_K se define

$$\alpha_K := \max\{1, Pe_K\}^{-1}, \tag{3.2}$$

donde

$$Pe_K := \frac{|\boldsymbol{a}|_K h_K}{18\nu} \;\text{ y }\; |\boldsymbol{a}|_K := \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{0,K}}{|K|^{1/2}}$$

y τ_F está dado por

$$\tau_F = \begin{cases} \dfrac{h_F}{12\nu} & \text{si } |\boldsymbol{a}| = 0 \\ \dfrac{1}{2|\boldsymbol{a}|} - \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|\left(1 - exp\left(\dfrac{|\boldsymbol{a}|h_F}{\nu}\right)\right)}\left(1 + \dfrac{\nu}{|\boldsymbol{a}|h_F}\left(1 - exp\left(\dfrac{|\boldsymbol{a}|h_F}{\nu}\right)\right)\right) & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{3.3}$$

donde $|\boldsymbol{a}| := \dfrac{1}{h_F^{1/2}}\|\{\boldsymbol{a}\}\|_{0,F}$ y para $F = \partial K^+ \cap \partial K^- \in \mathcal{E}_h$, $\{\boldsymbol{a}\} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}|_{K^+} + \boldsymbol{a}|_{K^-})$.

3.2. Derivación

El objetivo de esta sección es encontrar de forma explícita los términos estabilizados. Para ello comenzamos con un par de espacios de interpolación no estables $\mathbf{V}_h \times Q_h^l$, donde $l = 0, 1$, para la velocidad y la presión.
Como no existen indicaciones de cómo fijar los espacios para enriquecer la solución, los haremos tan "grandes" como podamos. Para el caso del espacio de búsqueda de la solución seleccionamos

$$[\mathbf{V}_h + H_0^1(\Omega)^2] \times [Q_h^l + L_0^2(\mathcal{T}_h)],$$

así la solución exacta $(\boldsymbol{u}, p)$ es aproximada por

$$(\boldsymbol{u}_h, p_h) := (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_e, p_l + p_e),$$

donde $(\boldsymbol{u}_1, p_l) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^l$ y $(\boldsymbol{u}_e, p_e) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\mathcal{T}_h)$.
El espacio de enriquecimiento de las funciones test, lo seleccionamos a través de las sumas directas

$$[\mathbf{V}_h \oplus H_0^1(\mathcal{T}_h)^2] \times [Q_h^l \oplus G_h^l],$$

donde G_h^l corresponde al complemento ortogonal de $Q_h^l \cap L_0^2(\mathcal{T}_h)$ en $L_0^2(\mathcal{T}_h)$. Esta elección hace que la función test $(\boldsymbol{v}_h, q_h)$ sea únicamente descompuesta en $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_b, q_l + q_b)$, con $(\boldsymbol{v}_1, q_l) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^l$ y $(\boldsymbol{v}_b, q_b) \in H_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \times G_h^l$.

Nota 3. *Para asegurar que $\boldsymbol{u}_h \in \mathbf{V}_h$ debemos imponer la continuidad de $\boldsymbol{u}_e$ mediante una condición de trasmisión no homogénea en los lados internos, definida en las ecuaciones*

(3.10) *y* (3.11)*. Adicionalmente las funciones en el espacio test para la velocidad pertenecen a* $\mathbf{V}_h$*, pero el espacio es distinto del espacio donde buscamos la solución.*

En lo que sigue, y para derivar el método, supondremos que $\boldsymbol{a}|_K, \boldsymbol{f}|_K \in \mathbb{R}^2$ para todo $K \in \mathcal{T}_h$ y que $[\![\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{n}]\!]|_F = 0$ para todo $F \in \mathcal{E}_h$, es decir $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}$ es continuo a través de los lados internos de $\mathcal{T}_h$.
Proponemos el siguiente esquema de tipo Petrov-Galerkin para el problema (2.14).
$Hallar\ (\boldsymbol{u}_h, p_h) \in [\mathbf{V}_h + H_0^1(\Omega)^2] \times [Q_h^l + L_0^2(\mathcal{T}_h)] \quad tal\ que:$

$$\mathbf{A}((\boldsymbol{u}_h, p_h), (\boldsymbol{v}_h, q_h)) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h)_\Omega \quad \forall (\boldsymbol{v}_h, q_h) \in [\mathbf{V}_h \oplus H_0^1(\mathcal{T}_h)^2] \times [Q_h^l \oplus G_h^l]. \tag{3.4}$$

Notemos que el problema anterior se puede reescribir equivalentemente, de la siguiente forma

$$\begin{gathered} \mathbf{A}((\boldsymbol{u}_h, p_h), (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_b, q_l + q_b)) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_b)_\Omega \\ \mathbf{A}((\boldsymbol{u}_h, p_h), (\boldsymbol{v}_1, q_l)) + \mathbf{A}((\boldsymbol{u}_h, p_h), (\boldsymbol{v}_b, q_b)) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_1)_\Omega + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_b)_\Omega \end{gathered}$$

$\forall (\boldsymbol{v}_1, q_l) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^l$, $\forall (\boldsymbol{v}_b, q_b) \in H_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \times G_h^l$, en particular, tomando alternativamente $(\boldsymbol{v}_1, q_l) = (\mathbf{0}, 0)$ y $(\boldsymbol{v}_b, q_b) = (\mathbf{0}, 0)$ se tiene que lo anterior es equivalente al sistema

$$\mathbf{A}((\boldsymbol{u}_h, p_h), (\boldsymbol{v}_1, q_l)) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_1)_\Omega \quad \forall (\boldsymbol{v}_1, q_l) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^l \tag{3.5}$$

$$\mathbf{A}((\boldsymbol{u}_h, p_h), (\boldsymbol{v}_b, q_b)) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_b)_\Omega \quad \forall (\boldsymbol{v}_b, q_b) \in H_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \times G_h^l. \tag{3.6}$$

De la segunda ecuación, es claro que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \{((\nabla \boldsymbol{u}_h)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_b)_K + \nu(\nabla \boldsymbol{u}_h, \nabla \boldsymbol{v}_b)_K - (p_h, \nabla \cdot \boldsymbol{v}_b)_K + (q_b, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h)_K\} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_b)_K$$

$\forall (\boldsymbol{v}_b, q_b) \in H_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \times G_h^l$, en particular, para $(\boldsymbol{v}_b, q_b)$ tal que se anule fuera de K, y para todo $K \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{aligned} ((\nabla \boldsymbol{u}_h)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_b)_K + \nu(\nabla \boldsymbol{u}_h, \nabla \boldsymbol{v}_b)_K - (p_h, \nabla \cdot \boldsymbol{v}_b)_K + (q_b, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h)_K = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_b)_K \\ \forall (\boldsymbol{v}_b, q_b) \in H_0^1(K)^2 \times G_h^l, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \end{aligned} \tag{3.7}$$

usando el hecho que $\boldsymbol{v}_b$ se anula en ∂K e integrando por partes, se sigue que

$$\begin{aligned}((\nabla \boldsymbol{u}_h)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_b)_K + \nu(\nabla \boldsymbol{u}_h, \nabla \boldsymbol{v}_b)_K - \nu(\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_b)_{\partial K}& \\ -(p_h, \nabla \cdot \boldsymbol{v}_b)_K + (p_h \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_b)_{\partial K} + (q_b, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h)_K &= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_b)_K \\ ((\nabla \boldsymbol{u}_h)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_b)_K - \nu(\Delta \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_b)_K + (\nabla p_h, \boldsymbol{v}_b)_K + (q_b, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h)_K &= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_b)_K \\ (-\nu\Delta \boldsymbol{u}_h + (\nabla \boldsymbol{u}_h)\boldsymbol{a} + \nabla p_h, \boldsymbol{v}_b)_K + (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h, q_b)_K &= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_b)_K\end{aligned}$$

considerando, en particular, $\boldsymbol{v}_b = 0$ y $q_b = 0$, lo anterior es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{aligned}(-\nu\Delta \boldsymbol{u}_h + (\nabla \boldsymbol{u}_h)\boldsymbol{a} + \nabla p_h, \boldsymbol{v}_b)_K &= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_b)_K & \forall \boldsymbol{v}_b \in H_0^1(K)^2 \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h, q_b)_K &= 0 & \forall q_b \in G_h^l,\end{aligned}$$

y de la definición de $\boldsymbol{u}_h$, se sigue que

$$\begin{aligned}(-\nu\Delta \boldsymbol{u}_e + (\nabla \boldsymbol{u}_e)\boldsymbol{a} + \nabla p_e, \boldsymbol{v}_b)_K &= (\boldsymbol{f} + \nu\Delta \boldsymbol{u}_1 - (\nabla \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a} - \nabla p_l, \boldsymbol{v}_b)_K & \forall \boldsymbol{v}_b \in H_0^1(K)^2 \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_e, q_b)_K &= -(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1, q_b)_K = 0 & \forall q_b \in G_h^l,\end{aligned}$$

de donde, es claro que (3.7) corresponde a la forma débil del problema

$$(\nabla \boldsymbol{u}_e)\boldsymbol{a} - \nu\Delta \boldsymbol{u}_e + \nabla p_e = \boldsymbol{R}^M, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u}_e \in \mathbb{P}_l(K) \text{ en } K, \tag{3.8}$$

donde

$$\boldsymbol{R}^M = \boldsymbol{R}^M(\boldsymbol{u}_1, p_l) := \boldsymbol{f} - (\nabla \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a} + \nu\Delta \boldsymbol{u}_1 - \nabla p_l. \tag{3.9}$$

Ahora para completar el problema diferencial (3.8), imponemos la siguiente condición de contorno en $\boldsymbol{u}_e$:

$$\boldsymbol{u}_e = \mathbf{g}_e \text{ para todo } F \subset \partial K, \tag{3.10}$$

donde $\mathbf{g}_e = 0$ si $F \subset \partial\Omega$. En el caso que $F \in \mathcal{E}_h$, $\mathbf{g}_e$ es la solución de

$$|\boldsymbol{a}|\partial_{\boldsymbol{s}}\mathbf{g}_e - \nu\partial_{\mathbf{ss}}\mathbf{g}_e = \frac{1}{h_F}\Pi_F([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_1 + p_l\boldsymbol{n}]\!]) \quad \text{en } F, \quad \mathbf{g}_e = 0 \text{ en los nodos.} \tag{3.11}$$

Observemos que el lado derecho de la ecuación (3.11) depende del residuo sobre los lados internos, además la elección del coeficiente advectivo que multiplica al término $\partial_{\boldsymbol{s}}\mathbf{g}_e$ no es única, pero en este caso fue motivada por los resultados numéricos de [29].

Volvamos al problema de Oseen local para calcular $(\boldsymbol{u}_e, p_e)$. De las ecuaciones (3.8) y (3.11), se sigue que $(\boldsymbol{u}_e, p_e)$ hereda los grados de libertad de $(\boldsymbol{u}_1, p_l)$, pues la solución del problema local de Oseen es única, además por el principio de superposición se puede descomponer $(\boldsymbol{u}_e, p_e)$ como sigue $(\boldsymbol{u}_e, p_e) := (\boldsymbol{u}_e^M, p_e^M) + (\boldsymbol{u}_e^G, p_e^G) + (\boldsymbol{u}_e^D, p_e^D)$ donde cada par satisface, respectivamente,

$$\begin{aligned} (\nabla \boldsymbol{u}_e^M)\boldsymbol{a} - \nu\Delta\boldsymbol{u}_e^M + \nabla p_e^M = \boldsymbol{R}^M, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}_e^M &= 0 \text{ en } K \\ \boldsymbol{u}_e^M &= \mathbf{0} \text{ en } \partial K \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \boldsymbol{u}_e^G)\boldsymbol{a} - \nu\Delta\boldsymbol{u}_e^G + \nabla p_e^G = \mathbf{0}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}_e^G &\in \mathbb{P}_l(K) \text{ en } K \\ \boldsymbol{u}_e^G &= \mathbf{0} \text{ en } \partial K \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \boldsymbol{u}_e^D)\boldsymbol{a} - \nu\Delta\boldsymbol{u}_e^D + \nabla p_e^D = \mathbf{0}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}_e^D &\in \mathbb{P}_l(K) \text{ en } K \\ \boldsymbol{u}_e^D &= \mathbf{g}_e \text{ en } \partial K. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Lo que queda es completar los problemas (3.13) y (3.14), es decir, imponer condiciones a los términos de la divergencia local. Con este objetivo, notemos primero que la solución de (3.12) está dada por $\boldsymbol{u}_e^M = 0$, luego de la ecuacion $\nabla p_e^M = \boldsymbol{R}^M$, se sigue que

$$p_e^M = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{R}^M + cte. \tag{3.15}$$

Ahora, como $p_e^M \in L_0^2(K)$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_K \left\{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{R}^M + cte\right\} = 0 \\ \int_K \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{R}^M + |K| cte = 0, \end{aligned}$$

de donde

$$cte = -\frac{\int_K \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{R}^M}{|K|} = -\Pi_K(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{R}^M),$$

así

$$p_e^M = p_e^M(\boldsymbol{R}^M) = (\mathbf{I} - \Pi_K)(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{R}^M) = \chi_h(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f} - \boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}\cdot\nabla p_l) \in \mathbb{P}_1(K). \tag{3.16}$$

Por consiguiente, para asegurar que el problema está bien puesto y reforzar la dependencia de las funciones enriquecidas con respecto a los residuos, completamos la ecuación (3.13) como sigue:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_e^G = -\frac{\alpha_K}{\nu} p_e^M(\boldsymbol{R}^M) \text{ en K}, \tag{3.17}$$

donde α_K está definido por la ecuación (3.2).
Para el caso de la ecuación (3.14), por el Teorema de la divergencia de Gauss, y usando la condición de borde, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_K \nabla \cdot \boldsymbol{u}_e^D &= \int_{\partial K} \boldsymbol{u}_e^D \cdot \boldsymbol{n} \\ &= \int_{\partial K} \boldsymbol{g}_e \cdot \boldsymbol{n},\end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_e^D = \frac{\int_{\partial K} \mathbf{g}_e \cdot \boldsymbol{n}}{|K|} \text{ en K}. \tag{3.18}$$

Hasta este punto hemos resuelto formalmente la ecuación (3.7), obteniendo una función enriquecida $(\boldsymbol{u}_e, p_e)$ descompuesta como la suma de soluciones únicas de los problemas locales anteriores. Nos queda entonces hacer que $(\boldsymbol{u}_h, p_h) := (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_e, p_l + p_e)$ cumpla la ecuación (3.5). Usando el hecho que $\boldsymbol{u}_e^M = 0$ el problema (3.5) es: *Hallar* $(\boldsymbol{u}_1, p_l) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^l$ *tal que :*

$$\begin{aligned}((\nabla \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1)_\Omega &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[((\nabla \boldsymbol{u}_e^G)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1)_K + ((\nabla \boldsymbol{u}_e^D)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1)_K\right] + \nu(\nabla \boldsymbol{u}_1, \nabla \boldsymbol{v}_1)_\Omega \\ &+ \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[(\nabla \boldsymbol{u}_e^G, \nabla \boldsymbol{v}_1)_K + (\nabla \boldsymbol{u}_e^D, \nabla \boldsymbol{v}_1)_K\right] - (p_l, \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (p_e, \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1)_K \\ &+ (q_l, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_1)_\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[(q_l, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_e^G)_K + (q_l, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_e^D)_K\right] = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_1)_\Omega,\end{aligned} \tag{3.19}$$

para todo $(\boldsymbol{v}_1, q_l) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^l$.
En lo que sigue mostraremos como tratar los términos extras y cómo algunos de ellos pueden ser simplificados. Primero, los términos relacionados con $\boldsymbol{u}_e^G$, integrando por partes, se reducen a

$$-\int_K \Delta \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{u}_e^G = \int_K \nabla \boldsymbol{v}_1 : \nabla \boldsymbol{u}_e^G - \int_{\partial K} \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{u}_e^G,$$

de donde, usando el hecho que $\boldsymbol{v}_1|_K \in \mathbb{P}_1(K)^2$ y que $\boldsymbol{u}_e^G = 0$ en ∂K, se tiene

$$\left(\nabla \boldsymbol{u}_e^G, \nabla \boldsymbol{v}_1\right)_K = 0, \tag{3.20}$$

además como $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}$ es continuo a través de los lados internos, se tiene

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} ((\nabla \boldsymbol{u}_e^G)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1)_K = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\boldsymbol{u}_e^G, (\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a})_K, \tag{3.21}$$

por último de (3.17) obtenemos

$$(q_l, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_e^G)_K = -\frac{\alpha_K}{\nu}(q_l, p_e^M(\boldsymbol{R}^M))_K. \tag{3.22}$$

Usando la identidad $(\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} = \nabla p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a})$, que viene del hecho que $p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}) = \chi_h(\boldsymbol{x} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a})$, y usando integración por partes, la igualdad (3.21) puede ser reescrita, como sigue:

$$\begin{aligned}(p_e^M, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_e^G)_K &= (p_e^M \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}_e^G)_{\partial K} - (\nabla p_e^M, \boldsymbol{u}_e^G)_K \\ &= -(\nabla p_e^M, \boldsymbol{u}_e^G)_K,\end{aligned} \tag{3.23}$$

luego, usando (3.17) obtenemos:

$$\begin{aligned}- \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\boldsymbol{u}_e^G, (\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a})_K &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\boldsymbol{u}_e^G, \nabla p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}))_K \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_e^G, p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}))_K \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu}(p_e^M(\boldsymbol{R}^M), p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}))_K.\end{aligned}$$

Nuevamente, del hecho que $p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}) = \chi_h(\boldsymbol{x} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a})$, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{K \in \mathcal{T}_h} ((\nabla \boldsymbol{u}_e^G)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1)_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (q_l, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_e^G)_K &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big[((\nabla \boldsymbol{u}_e^G)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1)_K + (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_e^G, q_l)_K\Big] \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu} \left(p_e^M(\boldsymbol{R}^M), \chi_h(\boldsymbol{x} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}) + q_l\right)_K,\end{aligned} \tag{3.24}$$

como $p_e^M \in L_0^2(K)$, se tiene

$$\int_K \Pi_K(q_l) p_e^M = 0,$$

de donde

$$\frac{\alpha_K}{\nu}(p_e^M, \Pi_K(q_l))_K = 0,$$

así

$$-\frac{\alpha_K}{\nu}(p_e^M, q_l)_K = -\frac{\alpha_K}{\nu}(p_e^M, \chi_h(q_l))_K,$$

luego (3.24) se reduce a

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} ((\nabla \boldsymbol{u}_e^G)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1)_K + (q_l, \nabla\cdot \boldsymbol{u}_e^G)_K = -\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu}(p_e^M(\boldsymbol{R}^M), \chi_h(\boldsymbol{x}\cdot(\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + q_l))_K. \tag{3.25}$$

Para tratar los términos que involucran $\boldsymbol{u}_e^D$ seguimos pasos análogos, de donde obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{T}_h} ((\nabla \boldsymbol{u}_e^D)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1)_K &= -\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\boldsymbol{u}_e^D, (\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a})_K,\\ \nu(\nabla \boldsymbol{u}_e^D, \nabla \boldsymbol{v}_1)_K &= (\boldsymbol{u}_e^D, \nu\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v}_1)_{\partial K},\end{aligned}$$

e integrando por partes obtenemos

$$(q_l, \nabla\cdot \boldsymbol{u}_e^D)_K = -(\nabla q_l, \boldsymbol{u}_e^D)_K + (q_l \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}_e^D)_{\partial K}, \tag{3.26}$$

así

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \nu(\nabla \boldsymbol{u}_e^D, &\nabla \boldsymbol{v}_1)_K + ((\nabla \boldsymbol{u}_e^D)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1)_K + (q_l, \nabla\cdot \boldsymbol{u}_e^D)_K\\ &= -\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\boldsymbol{u}_e^D, (\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_l)_K + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\boldsymbol{u}_e^D, \nu\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v}_1 + q_l \boldsymbol{n})_{\partial K}\\ &= -\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\boldsymbol{u}_e^D, (\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_l)_K + \sum_{F\in\mathcal{E}_h} (\boldsymbol{u}_e^D, [\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v}_1 + q_l \boldsymbol{n}]\!])_F.\end{aligned} \tag{3.27}$$

El término asociado a los lados internos se puede reescribir convenientemente, de acuerdo a [5], en efecto, como $\Pi_F([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_1 + p_l\boldsymbol{n}]\!])|_F$ es una función constante, entonces

$$\mathbf{g}_e = g_F \Pi_F([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_1 + p_l\boldsymbol{n}]\!]), \tag{3.28}$$

donde para todo $F \in \mathcal{E}_h$, g_F es la solución de

$$|\boldsymbol{a}|\partial_{\boldsymbol{s}} g_F - \nu\partial_{\mathbf{ss}} g_F = \frac{1}{h_F} \text{ en F}, \quad g_F = 0 \text{ en los nodos}, \tag{3.29}$$

de donde

$$\left(\boldsymbol{u}_e^D, [\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1 + q_l\boldsymbol{n}]\!]\right)_F = \int_F g_F \, \Pi_F([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_1 + p_l\boldsymbol{n}]\!])|_F \cdot [\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1 + q_l\boldsymbol{n}]\!]|_F \, ,$$

usando el hecho que $\Pi_F([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_1 + q_l\boldsymbol{n}]\!])|_F = [\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1 + q_l\boldsymbol{n}]\!]|_F$, pues $q_0|_F \in \mathbb{R}$ y $[\![q_1\boldsymbol{n}]\!]= 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{u}_e^D, [\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1 + q_l\boldsymbol{n}]\!]\right)_F &= \Pi_F([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_1 + p_l\boldsymbol{n}]\!])|_F \cdot [\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1 + q_l\boldsymbol{n}]\!]|_F \int_F g_F \\
&= \Pi_F([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_1 + p_l\boldsymbol{n}]\!])|_F \cdot \Pi_F([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1 + q_l\boldsymbol{n}]\!])|_F \int_F g_F \\
&= \frac{(g_F, 1)_F}{|F|} (\Pi_F([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_1 + p_l\boldsymbol{n}]\!]), \Pi_F([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1 + q_l\boldsymbol{n}]\!]))_F.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Luego, si $|\boldsymbol{a}| = 0$, la solución de la ecuación (3.29) es un polinomio de grado dos en cada uno de los lados F. Si $|\boldsymbol{a}| \neq 0$, entonces

$$g_F(\boldsymbol{x}(t)) = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|} \left(\frac{t}{h_F} - \frac{1 - \exp(\frac{|\boldsymbol{a}|}{\nu} t)}{1 - \exp(\frac{|\boldsymbol{a}|}{\nu} h_F)} \right), \tag{3.31}$$

para $t \in [0, h_F]$. Entonces, usando (3.30) y (3.31) podemos reescribir (3.27) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu(\nabla \boldsymbol{u}_e^D, &\nabla \boldsymbol{v}_1)_K + ((\nabla \boldsymbol{u}_e^D)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1)_K + (q_l, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_e^D)_K \\
&= -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\boldsymbol{u}_e^D, (\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_l)_K \\
&\quad + \sum_{F \in \mathcal{E}_h} \tau_F (\Pi_F([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_1 + p_l\boldsymbol{n}]\!]), \Pi_F([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1 + q_l\boldsymbol{n}]\!]))_F,
\end{aligned}$$

donde el parámetro τ_F está dado por

$$\begin{aligned}\tau_F &:= \frac{(g_F,1)_F}{|F|}\\ &= \begin{cases} \dfrac{h_F}{12\nu} & \text{si } |\boldsymbol{a}|=0\\ \dfrac{1}{2|\boldsymbol{a}|} - \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|(1-\exp(\frac{|\boldsymbol{a}|}{\nu}h_F))}\left(1+\dfrac{\nu}{|\boldsymbol{a}|h_F}\left(1-\exp\left(\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{\nu}h_F\right)\right)\right) & \text{en otro caso.}\end{cases}\end{aligned}$$

Finalmente, notemos que como $p_e \in L^2_0(K)$ se tiene

$$\begin{aligned}(p_e, \nabla\cdot\boldsymbol{v}_1)_K &= \int_K (\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1)p_e\\ &= (\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1)\int_K p_e = 0,\end{aligned}$$

de donde el término relacionado con p_e en (3.19) se anula. Por lo tanto, usando el resultado anterior, (3.19) se reduce a

$$\mathbf{B}((\boldsymbol{u}_1,p_l),(\boldsymbol{v}_1,q_l)) - \sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{u}_e^D, (\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_l)_K = \mathbf{F}(\boldsymbol{v}_1,q_l).$$

Finalmente, siguiendo pasos análogos a [14] el método (3.1) se obtiene al eliminar el término $\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{u}_e^D, (\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_l)_K$ pues no afecta la convergencia del método.

Observaciones

A continuación presentamos algunas notas con respecto a la derivación del método, principalmente adicionaremos un nuevo término a la formulación y simplificaremos los términos estabilizados sobre los lados internos de la malla.

• Aunque no aparece en la derivación del método, un término del tipo "*div* − *div*" será agregado a la formulación. La definición exacta de este término es

$$\mathbf{B}_\gamma((\boldsymbol{u}_1,p_l),(\boldsymbol{v}_1,q_l)) := \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\gamma}{\nu}(\chi_h((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1)), \chi_h((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1)))_K$$

donde

$$\gamma := \frac{1}{\text{máx}\{1, \frac{Pe_K}{24}\}}$$

La derivación de este término en la formulación anterior es un problema abierto para la ecuación de Oseen. Es claro que no afectará al buen planteamiento del problema discreto, pero si la consistencia del método (ortogonalidad del error), sin embargo, debe ser incorporado para capturar de manera efectiva problemas de capas límite internas, en el borde o cuando se trabaja con viscocidades pequeñas ($\nu \ll 1$).
De lo anterior, nuestro método se puede escribir de la siguiente forma:
Hallar $(\boldsymbol{u}_1, p_l) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^l$ *tal que :*

$$\tilde{\mathbf{B}}((\boldsymbol{u}_1, p_l), (\boldsymbol{v}_1, q_l)) = \mathbf{F}(\boldsymbol{v}_1, q_l) \quad \forall (\boldsymbol{v}_1, q_l) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^l, \tag{3.32}$$

donde $\tilde{\mathbf{B}}(\cdot,\cdot) := \mathbf{A}(\cdot,\cdot) + \mathbf{B}_{\mathcal{T}}(\cdot,\cdot) + \mathbf{B}_{\mathcal{E}}(\cdot,\cdot) + \mathbf{B}_{\gamma}(\cdot,\cdot)$.

Con lo anterior, obtenemos un nuevo método estabilizado que será utilizado en el análisis de error a posteriori y en los experimentos numéricos, pero será omitido en el análisis de error a priori.

• En el caso de aproximar la presión por funciones continuas lineales a trozos la forma bilineal $\mathbf{B}_{\mathcal{E}}$ se reduce a

$$\mathbf{B}_{\mathcal{E}}((\boldsymbol{u}_1, p_l), (\boldsymbol{v}_1, q_l)) = \sum_{F \in \mathcal{E}_h} \tau_F([\![\nu \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}_1]\!], [\![\nu \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v}_1]\!])_F.$$

Más adelante veremos que la presencia de estos saltos no afecta la precisión del método y los resultados obtenidos sin ellos son casi idénticos. No obstante, en todos los experimentos numéricos los saltos fueron considerados para que el método esté completo.

3.3. Análisis de error a priori: Caso $\mathbb{P}_1^2 \times \mathbb{P}_1$

En esta sección analizaremos la existencia y unicidad de la solución discreta, además presentamos estimaciones de error que garantizan la convergencia del método RELP asumiendo una aproximación por funciones continuas, tanto para la velocidad como para la presión. Para el caso $\mathbb{P}_1^2 \times \mathbb{P}_0$ podemos revisar lo realizado en Barrenechea y Valentin [12]. Por simplicidad, y análogamente a la derivación del método, asumiremos que $\boldsymbol{a}|_K$, $\boldsymbol{f}|_K \in \mathbb{R}^2$ y $[\![\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}]\!]|_F = 0$.

Comenzamos notando que el método RELP (3.1) puede ser reescrito en forma equivalente y consistente de la siguiente manera: *Hallar* $(\boldsymbol{u}_1, p_1) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^1$, tal que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}((\boldsymbol{u}_1,p_1),(\boldsymbol{v}_1,q_1)) + \mathbf{B}_{\mathcal{T}}((\boldsymbol{u}_1,p_1),(\boldsymbol{v}_1,q_1)) + \mathbf{B}_{\mathcal{E}}((\boldsymbol{u}_1,p_1),(\boldsymbol{v}_1,q_1)) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_1)_\Omega + \mathbf{F}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{v}_1,q_1), \quad \forall (\boldsymbol{v}_1,q_1)\in \mathbf{V}_h\times Q_h^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}((\boldsymbol{u}_1,p_1),(\boldsymbol{v}_1,q_1)) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha_K}{\nu}\Big(\chi_h(p_1+\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a}), \chi_h(q_1+\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a})\Big)_K \\
&\quad + \mathbf{B}_{\mathcal{E}}((\boldsymbol{u}_1,p_1),(\boldsymbol{v}_1,q_1) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_1)_\Omega + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha_K}{\nu}\Big(\chi_h(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f}), \chi_h(q_1+\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a})\Big)_K
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}((\boldsymbol{u}_1,p_1),(\boldsymbol{v}_1,q_1)) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha_K}{\nu}\Big(\chi_h(p_1+\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f}), \chi_h(q_1+\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a})\Big)_K \\
&\quad + \mathbf{B}_{\mathcal{E}}((\boldsymbol{u}_1,p_1),(\boldsymbol{v}_1,q_1)) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_1)_\Omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}((\boldsymbol{u}_1,p_1),(\boldsymbol{v}_1,q_1)) \\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha_K}{\nu}\Big(\chi_h(\boldsymbol{x}\cdot\nabla p_1 - \boldsymbol{x}\cdot\nu\Delta\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f}), \chi_h(\boldsymbol{x}\cdot\nabla q_1+\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a})\Big)_K \\
&\quad + \mathbf{B}_{\mathcal{E}}((\boldsymbol{u}_1,p_1),(\boldsymbol{v}_1,q_1)) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_1)_\Omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}((\boldsymbol{u}_1,p_1),(\boldsymbol{v}_1,q_1)) - \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha_K}{\nu}\Big(\chi_h(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{R}^M), \chi_h(\boldsymbol{x}\cdot(\nabla q_1+(\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}))\Big)_K \\
&\quad + \mathbf{B}_{\mathcal{E}}((\boldsymbol{u}_1,p_1),(\boldsymbol{v}_1,q_1)) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_1)_\Omega,
\end{aligned}$$

de donde, usando (3.16), el problema (3.1) es equivalente a: *Hallar* $(\boldsymbol{u}_1, p_1) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^1$ *tal que* :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}((\boldsymbol{u}_1,p_1),(\boldsymbol{v}_1,q_1)) - \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha_K}{\nu}(p_e^M(\boldsymbol{R}^M), p_e^M((\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}+\nabla q_1))_K& \\
+\mathbf{B}_{\mathcal{E}}((\boldsymbol{u}_1,p_1),(\boldsymbol{v}_1,q_1)) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_1)_\Omega,&
\end{aligned} \tag{3.33}$$

para todo $(\boldsymbol{v}_1, q_1) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^1$.

3.3.1. Resultados técnicos

Antes de los resultados principales, necesitamos resultados técnicos, el primero resume algunas de las propiedades del proyector ortogonal Π_K.

Lema 1. *Existe una constante $C > 0$, independiende de h, tal que*

$$\|\Pi_K(v)\|_{0,K} \leq \|v\|_{0,K} \qquad \forall v \in L^2(K), \tag{3.34}$$

$$\|\chi_h(v)\|_{0,K} \leq C h_K |v|_{1,K} \qquad \forall v \in H^1(K). \tag{3.35}$$

Demostración. Ver Lema 1.131 y Proposición 1.134, respectivamente en [26]. □

El siguiente lema tiene que ver con la solución del problema local (3.12)

Lema 2. *Sea $\boldsymbol{v} \in L^2(K)^2$ y sea $(\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}), p_e^M(\boldsymbol{v}))$ la solución del problema*

$$\begin{aligned} (\nabla \boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}))\boldsymbol{a} - \nu \Delta \boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}) + \nabla p_e^M(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}) = 0 \ \text{en } K \\ \boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}) = 0 \ \text{en } \partial K, \end{aligned} \tag{3.36}$$

entonces existe una constante $C > 0$, independiente de $h_K, \boldsymbol{a}$ y ν, tal que

$$\nu |\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})|_{1,K} + \|p_e^M(\boldsymbol{v})\|_{0,K} \leq C h_K \,\text{máx}\left\{1, \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K} h_K}{\nu}\right\} \|\boldsymbol{v}\|_{0,K}. \tag{3.37}$$

Además, si $\boldsymbol{v} \in H^1(K)^2$, entonces

$$\nu |\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})|_{1,K} \leq \frac{h_K^2}{\pi} |\boldsymbol{v}|_{1,K}. \tag{3.38}$$

Demostración. Primero, de la formulación débil del problema (3.36) se tiene

$$\begin{aligned} ((\nabla \boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}))\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w})_K + \nu(\nabla \boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}), \nabla \boldsymbol{w})_K - (p_e^M(\boldsymbol{v}), \nabla \cdot \boldsymbol{w})_K \\ +(q, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}))_K = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_K \quad \forall (\boldsymbol{w}, q) \in H_0^1(K)^2 \times L_0^2(K). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Considerando $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})$ y $q = p_e^M(\boldsymbol{v})$ obtenemos

$$\nu |\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})|_{1,K}^2 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}))_K,$$

usando Cauchy-Schwarz

$$\nu|\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})|_{1,K}^2 \leq \|\boldsymbol{v}\|_{0,K}\|\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})\|_{0,K},$$

y aplicando la desigualdad de Poincaré para dominios convexos (ver Payne y Weinberger [39]) a $\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})$ vemos que $\|\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})\|_{0,K} \leq \frac{h_K}{\pi}|\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})|_{1,K}$, de donde

$$\nu|\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})|_{1,K} \leq \frac{h_K}{\pi}\|\boldsymbol{v}\|_{0,K}. \tag{3.40}$$

Por otra parte, es claro que el operador $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{u}_e^M$ es lineal, pues corresponde a la única solución del problema lineal (3.39).
Sea $\boldsymbol{v}_0 = \Pi_K(\boldsymbol{v})$, como $\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}_0) \in \mathbb{P}_1(K)^2$ y es tal que $\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}_0)|_{\partial K} = \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}_0) = \boldsymbol{0}$ con lo que se tiene

$$\begin{aligned}
\nu|\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})|_{1,K} &= \nu|\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}_0)|_{1,K} \\
&= \nu|\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0)|_{1,K} \\
&\leq \frac{h_K}{\pi}\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0\|_{0,K} \\
&\leq \frac{h_K^2}{\pi}|\boldsymbol{v}|_{1,K},
\end{aligned}$$

de donde obtenemos (3.38). Luego, usando la condición inf-sup (2.13), la forma débil del problema (3.36), la desigualdad de Poincaré y la ecuación (3.40) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|p_e^M(\boldsymbol{v})\|_{0,K} &\leq \beta \sup_{\boldsymbol{w}\in H_0^1(K)^2} \frac{-\left(p_e^M(\boldsymbol{v}), \nabla\cdot\boldsymbol{w}\right)_K}{|\boldsymbol{w}|_{1,K}} \\
&= \beta \sup_{\boldsymbol{w}\in H_0^1(K)^2} \frac{-\nu\left(\nabla\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}), \nabla\boldsymbol{w}\right)_K - \left((\nabla\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}))\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}\right)_K + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_K}{|\boldsymbol{w}|_{1,K}} \\
&\leq \beta \sup_{\boldsymbol{w}\in H_0^1(K)^2} \frac{\nu\|\nabla\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})\|_{0,K}\|\nabla\boldsymbol{w}\|_{0,K} + \|(\nabla\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v}))\boldsymbol{a}\|_{0,K}\|\boldsymbol{w}\|_{0,K} + \|\boldsymbol{v}\|_{0,K}\|\boldsymbol{w}\|_{0,K}}{|\boldsymbol{w}|_{1,K}} \\
&\leq \beta \sup_{\boldsymbol{w}\in H_0^1(K)^2} \frac{\nu|\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})|_{1,K}|\boldsymbol{w}|_{1,K} + h_K\|\nabla\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})\|_{0,K}\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}|\boldsymbol{w}|_{1,K} + h_K\|\boldsymbol{v}\|_{0,K}|\boldsymbol{w}|_{1,K}}{|\boldsymbol{w}|_{1,K}} \\
&= \beta(\nu|\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})|_{1,K} + \|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}h_K|\boldsymbol{u}_e^M(\boldsymbol{v})|_{1,K} + h_K\|\boldsymbol{v}\|_{0,K})
\end{aligned}$$

$$\leq \beta(h_K\|\boldsymbol{v}\|_{0,K} + \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}h_K^2}{\nu}\|\boldsymbol{v}\|_{0,K} + h_K\|\boldsymbol{v}\|_{0,K})$$
$$\leq C\beta h_K \,\text{máx}\left\{1, \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}h_K}{\nu}\right\}\|\boldsymbol{v}\|_{0,K}.$$

Finalmente, la constante inf-sup $\beta > 0$ es acotada como sigue (cf. [31], Lema III.3.1)

$$\beta \leq C\left(\frac{h_K}{\rho_K}\right)^2\left(1 + \frac{h_K}{\rho_K}\right), \tag{3.41}$$

donde ρ_K es el diámetro de la bola inscrita en K, y C no depende de K o h_K. Por lo tanto, la desigualdad (3.37) se obtiene usando la regularidad de la familia $\{\mathcal{T}_h\}$ y (3.40). $\square$

El siguiente resultado nos entrega más información del comportamiento asintótico del parámetro de estabilización τ_F.

Lema 3. *Dado $F \in \mathcal{E}_h$, definimos*

$$\hat{\tau}_F := \frac{1}{2|\boldsymbol{a}|}\,\text{mín}\{1, Pe_F\}, \quad Pe_F := \frac{|\boldsymbol{a}|h_F}{\nu} \tag{3.42}$$

si $|\boldsymbol{a}| \neq 0$, y $\hat{\tau}_F := \dfrac{h_F}{12\nu}$ en otro caso. Entonces, se tiene la siguiente equivalencia

$$C\hat{\tau}_F \leq \tau_F \leq \hat{\tau}_F,$$

donde C es una constante positiva independiente de h, ν y $\boldsymbol{a}$. En particular,

$$\tau_F \leq \frac{h_F}{2\nu}.$$

Demostración. Primero, escribimos el parámetro de estabilización τ_F de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\tau_F &= \frac{1}{2|\boldsymbol{a}|} - \frac{1}{|\boldsymbol{a}|(1-e^{Pe_F})}\left(1 + \frac{1}{Pe_F}(1-e^{Pe_F})\right)\\
&= \frac{1}{2|\boldsymbol{a}|} - \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\left(\frac{1}{(1-e^{Pe_F})} + \frac{1}{Pe_F}\right)\\
&= \frac{1}{2|\boldsymbol{a}|} - \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\frac{Pe_F + 1 - e^{Pe_F}}{Pe_F(1-e^{Pe_F})}.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Dividimos la demostración en dos partes

Cota inferior: Es claro que

$$\frac{Pe_F + 1 - e^{Pe_F}}{Pe_F(1 - e^{Pe_F})} = \frac{1}{Pe_F} + \frac{1}{1 - e^{Pe_F}}. \tag{3.44}$$

Si $Pe_F > 4$ se tiene

$$\tau_F = \frac{1}{2|\boldsymbol{a}|} - \frac{1}{|\boldsymbol{a}|Pe_F} - \frac{1}{|\boldsymbol{a}|(e^{Pe_F} - 1)} \geq \frac{1}{4|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{2}\frac{1}{2|\boldsymbol{a}|}\,\text{mín}\{1, Pe_F\} = \frac{1}{2}\hat{\tau}_F.$$

Si $Pe_F \leq 4$ usamos una expansión por series de Taylor en la función exponencial para obtener

$$g_F(t) = \frac{1}{2|\boldsymbol{a}|}\left(\frac{t}{h_F} - \frac{1 - e^{\frac{|\boldsymbol{a}|t}{\nu}}}{1 - e^{Pe_F}}\right) = \frac{1}{2|\boldsymbol{a}|}\left(\frac{t}{h_F} + \frac{1}{e^{Pe_F} - 1} - \frac{e^{\frac{|\boldsymbol{a}|t}{\nu}}}{e^{Pe_F} - 1}\right) \geq \frac{|\boldsymbol{a}|t(h_F - t)}{4\nu^2(e^{Pe_F} - 1)},$$

de donde

$$\begin{aligned}
\tau_F &= \frac{(g_F, 1)_F}{|F|} \\
&= \frac{1}{|F|}\int_0^{h_F} g_F(t)dt \\
&\geq \frac{1}{|F|}\int_0^{h_F} \frac{|\boldsymbol{a}|t(h_F - t)}{4\nu^2(e^{Pe_F} - 1)}dt \\
&= \frac{|\boldsymbol{a}|}{4\nu^2 h_F(e^{Pe_F} - 1)}\int_0^{h_F} t(h_F - t)dt \\
&= \frac{Pe_F}{4\nu h_F^2(e^{Pe_F} - 1)}\left[\frac{h_F t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^{h_F} \\
&\geq \frac{Pe_F}{(e^{Pe_F} - 1)}\frac{h_F}{24\nu}.
\end{aligned}$$

Finalmente, como la función $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ es decreciente y $\frac{4}{e^4 - 1} = 0{,}0746$, entonces

$$\tau_F \geq 0{,}0746\frac{h_F}{24\nu} = \frac{C}{24|\boldsymbol{a}|}Pe_F \geq C\hat{\tau}_F.$$

Cota superior: Primero, usando (3.43) y el hecho que $Pe_F + 1 - e^{Pe_F} \leq 0$ obtenemos

$$\tau_F \leq \frac{1}{2|\boldsymbol{a}|},$$

entonces, si $Pe_F > 1$ se tiene que

$$\tau_F \leq \frac{1}{2|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{2|\boldsymbol{a}|} \min\{1, Pe_F\} = \hat{\tau}_F.$$

Finalmente, si $Pe_F \leq 1$, realizando una expansión por series de Taylor tenemos que

$$g_F(t) \leq \frac{1}{2|\boldsymbol{a}|} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\boldsymbol{a}|^n h_F^{n-1}}{\nu^n n!} t}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\boldsymbol{a}|^n h_F^n}{\nu^n n!}} \leq \frac{t}{4\nu},$$

y entonces

$$\tau_F = \frac{1}{h_F}(g_F, 1)_F \leq \frac{h_F}{8\nu} = \frac{Pe_F}{8|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{8|\boldsymbol{a}|} \min\{1, Pe_F\} = \frac{1}{4}\hat{\tau}_F,$$

lo que completa la demostración. $\square$

Nota 4. *Recordemos algunas desigualdades estándar que necesitaremos (ver Ern y Guermond [26]).*
Existe $C > 0$, independiente de K, tal que

$$\|v\|_{0,F}^2 \leq C(h_K^{-1} \|v\|_{0,K}^2 + h_K |v|_{1,K}^2), \tag{3.45}$$

para cada lado $F \subset \partial K$ y para todo $v \in H^1(K)$. Además recordemos la desigualdad inversa.
Existe $C_I > 0$, independiente de K, tal que

$$C_I h_K \|\nabla q\|_{0,K} \leq \|q\|_{0,K}, \tag{3.46}$$

para todo $K \in \mathcal{T}_h$ y $q \in \mathbb{P}_1(K)$.

Usando las desigualdades anteriores, encontramos que los términos extras en la ecuación (3.33) son, en algún sentido, equivalentes a una estabilización del tipo “streamline”. Esto lo notamos en el siguiente resultado.

Lema 4. *La función $p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1)$, solución de la ecuación (3.36), satisface*

$$C_I h_K \|(\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1\|_{0,K} \leq \|p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1)\|_{0,K} \leq \frac{h_K}{\pi}\|(\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1\|_{0,K}, \quad (3.47)$$

para todo $\boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{P}_1(K)^2$, $q_1 \in \mathbb{P}_1(K)$.

Demostración. Usando el hecho que $(\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1 = \nabla p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1)$ y de la desigualdad inversa (3.46) obtenemos

$$\|p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1)\|_{0,K} \geq C_I h_K \|\nabla p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1)\|_{0,K} = C_I h_K \|(\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1\|_{0,K}.$$

Por otra parte, como $p_e^M \in L_0^2(K)$ aplicamos la desigualdad de Poincaré generalizada en K y obtenemos

$$\begin{aligned}\|p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1)\|_{0,K} &\leq \frac{h_K}{\pi}\|\nabla p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1)\|_{0,K} \\ &= \frac{h_K}{\pi}\|(\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1\|_{0,K}.\end{aligned}$$

□

3.3.2. Resultados principales

Lo siguiente es probar la existencia y unicidad de la solución del problema (3.33), para ello definimos la norma, malla-dependiente, $\|\cdot\|_h$ dada por

$$\|(\boldsymbol{v}_1, q_1)\|_h := \left[\nu|\boldsymbol{v}_1|_{1,\Omega}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha_K h_K^2}{\nu}\|(\nabla \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1\|_{0,K}^2 + \sum_{F\in\mathcal{E}_h}\tau_F\|[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1]\!]\|_{0,F}^2\right]^{1/2}, \quad (3.48)$$

para todo $(\boldsymbol{v}_1, q_1) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^1$.
Entonces presentamos los siguientes resultados de estabilidad y consistencia para el método RELP.

Lema 5. *Existe una constante positiva C, independiente de h, $\boldsymbol{a}$ y ν, tal que para todo $(\boldsymbol{v}_1, q_1) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^1$*

$$\mathbf{B}((\boldsymbol{v}_1, q_1), (\boldsymbol{v}_1, q_1)) \geq C\,\|(\boldsymbol{v}_1, q_1)\|_h^2, \quad (3.49)$$

y así (3.33) tiene una única solución. Además, sea $(\boldsymbol{u}, p) \in H^2(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)$ la solución del problema (Os) y $(\boldsymbol{u}_1, p_1)$ la solución de (3.33). Entonces

$$\mathbf{B}((\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1, p - p_1), (\boldsymbol{v}_1, q_1)) = 0, \quad \forall (\boldsymbol{v}_1, q_1) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^1. \tag{3.50}$$

Demostración. La elipticidad es inmediata de la definición de la forma bilineal $\mathbf{B}(\cdot, \cdot)$, en efecto,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}((\boldsymbol{v}_1, q_1), (\boldsymbol{v}_1, q_1)) = {} & \mathbf{A}((\boldsymbol{v}_1, q_1), (\boldsymbol{v}_1, q_1)) \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu} \Big(\chi_h(q_1 + \boldsymbol{x} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}_1) \boldsymbol{a}), \chi_h(q_1 + \boldsymbol{x} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}_1) \boldsymbol{a}) \Big)_K \\
& + \sum_{F \in \mathcal{E}_h} \tau_F (\Pi_F(\llbracket \nu \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v}_1 + q_1 \boldsymbol{n} \rrbracket), \Pi_F(\llbracket \nu \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v}_1 + q_1 \boldsymbol{n} \rrbracket))_F \\
= {} & \nu |\boldsymbol{v}_1|_{1,\Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu} \| p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1) \boldsymbol{a} + \nabla q_1) \|_{0,K}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_h} \tau_F \| \llbracket \nu \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v}_1 \rrbracket \|_{0,F}^2,
\end{aligned}$$

y usando el Lema 4, con $C = min\{1, C_I^2\}$, se tiene (3.49).
En cuanto a la consistencia, notemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}((\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1, p - p_1), (\boldsymbol{v}_1, q_1)) &= \mathbf{B}((\boldsymbol{u}, p), (\boldsymbol{v}_1, q_1)) - \mathbf{B}((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, q_1)) \\
&= \mathbf{A}((\boldsymbol{u}, p), (\boldsymbol{v}_1, q_1)) + \mathbf{B}_{\mathcal{T}}((\boldsymbol{u}, p), (\boldsymbol{v}_1, q_1)) + \mathbf{B}_{\mathcal{E}}((\boldsymbol{u}, p), (\boldsymbol{v}_1, q_1)) \\
&\quad - \mathbf{B}((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, q_1)) \\
&= \mathbf{A}((\boldsymbol{u}, p), (\boldsymbol{v}_1, q_1)) + \mathbf{F}_{\mathcal{T}}((\boldsymbol{v}_1, q_1)) \\
&\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu} (p_e^M(\boldsymbol{R}^M(\boldsymbol{u}, p)), p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1) \boldsymbol{a} + \nabla q_1))_K \\
&\quad + \mathbf{B}_{\mathcal{E}}((\boldsymbol{u}, p), (\boldsymbol{v}_1, q_1)) - \mathbf{B}((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, q_1)) \\
&= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu} (p_e^M(\boldsymbol{R}^M(\boldsymbol{u}, p)), p_e^M((\nabla \boldsymbol{v}_1) \boldsymbol{a} + \nabla q_1))_K \\
&\quad + \mathbf{B}_{\mathcal{E}}((\boldsymbol{u}, p), (\boldsymbol{v}_1, q_1)),
\end{aligned}$$

como $\boldsymbol{u} \in H^2(\Omega)^2$ y $p \in H^1(\Omega)$ entonces $\llbracket \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u} \rrbracket = 0$ y $\llbracket p \rrbracket = 0$ en lados internos F, y así los términos asociados a los saltos se anulan. El término extra en los elementos también se anula usando el hecho que $p_e^M(\boldsymbol{R}^M(\boldsymbol{u}, p)) = 0$ para cada $K \in \mathcal{T}_h$. □

Para demostrar el resultado principal de esta sección introducimos el interpolante de Clément C_h (Ver Ern y Guermond [26]), con la obvia extensión a funciones evaluadas vectorialmente, el cual satisface

$$\begin{aligned} \|v - C_h(v)\|_{l,K} &\leq C h_K^{m-l} |v|_{m,\tilde{\omega}_K}, \\ \|v - C_h(v)\|_{0,F} &\leq C h_F^{m-\frac{1}{2}} |v|_{m,\tilde{\omega}_F}, \end{aligned} \tag{3.51}$$

para todo $v \in H^m(\Omega)$, donde $0 \leq l \leq m$, $m = 1, 2$, la constante C es positiva, independiente de h. Recordemos que las vecindades $\tilde{\omega}_K$ y $\tilde{\omega}_F$ fueron definidos en (2.3).

Teorema 1. *Supongamos que* $(\boldsymbol{u}, p)$*, solución de la ecuación* (2.14)*, pertenece a* $H^2(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)$ *y sea* $(\boldsymbol{u}_1, p_1)$ *la solución de la ecuación* (3.33)*. Entonces, existe* $C > 0$*, independiente de* h*,* $\boldsymbol{a}$ *y* ν*, tal que*

$$\|(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1, p - p_1)\|_h \leq Ch \left(\sqrt{\nu}\, \text{máx}\{1, \vartheta^{3/2}\} \|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} |p|_{1,\Omega} \right), \tag{3.52}$$

donde $\vartheta := \dfrac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}\, h}{18\nu}$.

Demostración. Sea $(\tilde{\boldsymbol{u}}_1, \tilde{p}_1) = (C_h(\boldsymbol{u}), C_h(p) - \Pi_\Omega(C_h(p)))$, sean $(\boldsymbol{w}_1, q_1) := (\boldsymbol{u}_1 - \tilde{\boldsymbol{u}}_1, p_1 - \tilde{p}_1)$ y $(\zeta^{\boldsymbol{u}}, \zeta^p) := (\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_1, p - \tilde{p}_1)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1, p - p_1)\|_h &= \|(\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_1 + \tilde{\boldsymbol{u}}_1 - \boldsymbol{u}_1, p - \tilde{p}_1 + \tilde{p}_1 - p_1)\|_h \\ &= \|(\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_1, p - \tilde{p}_1) + (\tilde{\boldsymbol{u}}_1 - \boldsymbol{u}_1, \tilde{p}_1 - p_1)\|_h \\ &\leq \|(\zeta^{\boldsymbol{u}}, \zeta^p)\|_h + \|(\boldsymbol{w}_1, q_1)\|_h, \end{aligned} \tag{3.53}$$

es claro que el error de interpolación ζ^p también satisface la primera desigualdad en (3.51), entonces el término $\|(\zeta^{\boldsymbol{u}}, \zeta^p)\|_h$ es acotado usando (3.51), la desigualdad de trazas local (3.45), la regularidad de la malla y el Lema 3. Con lo que obtenemos

$$\|(\zeta^{\boldsymbol{u}}, \zeta^p)\|_h^2 \leq \nu |\zeta^{\boldsymbol{u}}|_{1,\Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K h_K^2}{\nu} \| (\nabla \zeta^{\boldsymbol{u}})\, \boldsymbol{a} + \nabla \zeta^p \|_{0,K}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_h} \frac{h_F}{2\nu} \| [\![\nu \partial_{\boldsymbol{n}} \zeta^{\boldsymbol{u}}]\!] \|_{0,F}^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \nu|\zeta^{\boldsymbol{u}}|_{1,\Omega}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K h_K^2}{\nu}\| \left(\nabla\zeta^{\boldsymbol{u}}\right) \boldsymbol{a} + \nabla\zeta^p\|_{0,K}^2 + C\frac{1}{\nu}\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K\|\nu\nabla\zeta^{\boldsymbol{u}}\|_{0,\partial K}^2 \\
&\leq \nu|\zeta^{\boldsymbol{u}}|_{1,\Omega}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}^2 h_K^2}{\nu}|\zeta^{\boldsymbol{u}}|_{1,K}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha_K h_K^2}{\nu}\|\nabla\zeta^p\|_{0,K}^2 \\
&\quad + C\frac{1}{\nu}\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\nu\nabla\zeta^{\boldsymbol{u}}\|_{0,K}^2 + h_K^2|\nu\nabla\boldsymbol{u}|_{1,K}^2 \\
&\leq \nu|\zeta^{\boldsymbol{u}}|_{1,\Omega}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{18|K|^{1/2}}{\|\boldsymbol{a}\|_{0,K}}\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}^2 h_K|\zeta^{\boldsymbol{u}}|_{1,K}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{h_K^2}{\nu}|\zeta^p|_{1,K}^2 \\
&\quad + C\frac{1}{\nu}\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\nu\nabla\zeta^{\boldsymbol{u}}\|_{0,K}^2 + h_K^2|\nu\nabla\boldsymbol{u}|_{1,K}^2 \\
&\leq \nu|\zeta^{\boldsymbol{u}}|_{1,\Omega}^2 + C\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{1}{18\|\boldsymbol{a}\|_{0,K}}\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}^2 h_K^2|\zeta^{\boldsymbol{u}}|_{1,K}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{h_K^2}{\nu}|\zeta^p|_{1,K}^2 \\
&\quad + C\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \nu\|\nabla\zeta^{\boldsymbol{u}}\|_{0,K}^2 + h_K^2\nu|\nabla\boldsymbol{u}|_{1,K}^2 \\
&\leq \nu|\zeta^{\boldsymbol{u}}|_{1,\Omega}^2 + C\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}h_K}{18}|\zeta^{\boldsymbol{u}}|_{1,K}^2 \\
&\quad + C\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \nu|\zeta^{\boldsymbol{u}}|_{1,K}^2 + \nu h_K^2|\boldsymbol{u}|_{2,K}^2 + \frac{h_K^2}{\nu}|p|_{1,\tilde{\omega}_K}^2\right\} \\
&\leq C_1\nu h^2|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}^2 + C_2\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}h^3}{18}|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}^2 \\
&\quad + C\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \nu h_K^2|\boldsymbol{u}|_{2,K}^2 + \nu h_K^2|\boldsymbol{u}|_{2,K}^2 + \frac{h_K^2}{\nu}|p|_{1,\tilde{\omega}_K}^2\right\} \\
&\leq C\left\{\nu h^2|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}^2 + \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}h^3}{18}|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}^2 + \frac{h^2}{\nu}|p|_{1,\Omega}^2\right\} \\
&= Ch^2\left\{\nu|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}^2 + \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}h}{18}|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{\nu}|p|_{1,\Omega}^2\right\} \\
&= Ch^2\left\{\nu\left[|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}^2 + \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}h}{18\nu}|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}^2\right] + \frac{1}{\nu}|p|_{1,\Omega}^2\right\} \\
&\leq Ch^2\left(\nu\,\text{máx}\{1,\vartheta\}|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{\nu}|p|_{1,\Omega}^2\right). \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

Para el término $\|(\boldsymbol{w}_1, q_1)\|_h$ en (3.53) usamos los Lemas 4, 5, el hecho que $\boldsymbol{a}$ es un campo solenoidal, integramos por partes y usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, obtenemos

$$
\begin{aligned}
C\|(\boldsymbol{w}_1,q_1)\|_h^2 &\leq \mathbf{B}((\boldsymbol{w}_1,q_1),(\boldsymbol{w}_1,q_1))\\
&= \mathbf{B}((\boldsymbol{u}_1-\tilde{\boldsymbol{u}}_1,p_1-\tilde{p}_1),(\boldsymbol{w}_1,q_1)) + \mathbf{B}((\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1,p-p_1),(\boldsymbol{w}_1,q_1))\\
&= \mathbf{B}((\zeta^{\boldsymbol{u}},\zeta^p),(\boldsymbol{w}_1,q_1))\\
&= \nu(\nabla\zeta^{\boldsymbol{u}},\nabla\boldsymbol{w}_1)_\Omega - (\zeta^p,\nabla\cdot\boldsymbol{w}_1)_\Omega + (q_1,\nabla\cdot\zeta^{\boldsymbol{u}})_\Omega + ((\nabla\zeta^{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{a},\boldsymbol{w}_1)_\Omega\\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha_K}{\nu}\left(\chi_h\left(\boldsymbol{x}\cdot((\nabla\zeta^{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{a}+\nabla\zeta^p)\right),\chi_h(\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{a}+q_1)\right)_K\\
&\quad + \sum_{F\in\mathcal{E}_h}\tau_F\left([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\zeta^{\boldsymbol{u}}]\!],[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{w}_1]\!]\right)_F\\
&\leq \nu(\nabla\zeta^{\boldsymbol{u}},\nabla\boldsymbol{w}_1)_\Omega - (\nabla\cdot\boldsymbol{a},\zeta^{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{w}_1)_\Omega\\
&\quad - \sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\zeta^p,\nabla\cdot\boldsymbol{w}_1)_K - (\nabla q_1+(\nabla\boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{a},\zeta^{\boldsymbol{u}})_K\\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha_K}{\nu}\left(p_e^M\left((\nabla\zeta^{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{a}-\nu\Delta\boldsymbol{u}+\nabla p\right),p_e^M((\nabla\boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{a}+\nabla q_1)\right)_K\\
&\quad + \sum_{F\in\mathcal{E}_h}\tau_F\left([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\zeta^{\boldsymbol{u}}]\!],[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{w}_1]\!]\right)_F\\
&\leq \nu|\zeta^{\boldsymbol{u}}|_{1,\Omega}|\boldsymbol{w}_1|_{1,\Omega} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\zeta^p\|_{0,K}|\boldsymbol{w}_1|_{1,K}\\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\alpha_K}}h_K^{-1}\|\zeta^{\boldsymbol{u}}\|_{0,K}\frac{\sqrt{\alpha_K}}{\sqrt{\nu}}h_K\|(\nabla\boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{a}+\nabla q_1\|_{0,K}\\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha_K}{\nu}\left\|p_e^M\left((\nabla\zeta^{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{a}-\nu\Delta\boldsymbol{u}+\nabla p\right)\right\|_{0,K}\left\|p_e^M((\nabla\boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{a}+\nabla q_1)\right\|_{0,K}\\
&\quad + \sum_{F\in\mathcal{E}_h}\tau_F\,\|[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\zeta^{\boldsymbol{u}}]\!]\|_{0,F}\,\|[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{w}_1]\!]\|_{0,F}\\
&\leq C\left\{\nu|\zeta^{\boldsymbol{u}}|_{1,\Omega}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left[\nu\alpha_K^{-1}h_K^{-2}\|\zeta^{\boldsymbol{u}}\|_{0,K}^2+\frac{1}{\nu}\|\zeta^p\|_{0,K}^2\right] + \sum_{F\in\mathcal{E}_h}\tau_F\,\|[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\zeta^{\boldsymbol{u}}]\!]\|_{0,F}^2\right.\\
&\qquad\left. + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha_K}{\nu}\left\|p_e^M\left((\nabla\zeta^{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{a}-\nu\Delta\boldsymbol{u}+\nabla p\right)\right\|_{0,K}^2\right\}^{1/2}\left\{\nu|\boldsymbol{w}_1|_{1,\Omega}^2\right.\\
&\qquad\left. + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha_K h_K^2}{\nu}\|(\nabla\boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{a}+\nabla q_1\|_{0,K}^2 + \sum_{F\in\mathcal{E}_h}\tau_F\,\|[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{w}_1]\!]\|_{0,F}^2\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \nu \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |\boldsymbol{w}_1|^2_{1,K} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu} \left\| p_e^M((\nabla \boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1)\right\|^2_{0,K} \Bigg\}^{1/2} \\
&\leq C \Bigg\{ \|(\zeta^{\boldsymbol{u}}, \zeta^p)\|_h^2 + \nu \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left[\alpha_K^{-1} h_K^{-2} \|\zeta^{\boldsymbol{u}}\|^2_{0,K} + \frac{h_K^2}{\nu}|p|^2_{1,\tilde{\omega}_K} \right] \\
&\qquad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu} \left[\|p_e^M((\nabla\zeta^{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{a})\|^2_{0,K} + \|p_e^M(-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p)\|^2_{0,K} \right] \Bigg\}^{1/2} \\
&\quad \Bigg\{ \|(\boldsymbol{w}_1, q_1)\|_h^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu} \|p_e^M((\nabla \boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1)\|^2_{0,K} \Bigg\}^{1/2} .
\end{aligned}
$$

Definamos $\alpha := \text{máx}\{\alpha_K : K \in \mathcal{T}_h\}$, entonces, por los Lemas 1, 2 y 4, la linealidad de p_e^M, la identidad $p_e^M(\nabla p) = \chi_h(p)$, (3.51) y la regularidad de la malla, obtenemos

$$
\begin{aligned}
C\|(\boldsymbol{w}_1, q_1)\|_h^2 &\leq C \Bigg\{ \|(\zeta^{\boldsymbol{u}}, \zeta^p)\|_h^2 + \nu \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left[\alpha_K^{-1} h_K^2 |\boldsymbol{u}|^2_{2,\tilde{\omega}_K} + \frac{h_K^2}{\nu}|p|^2_{1,\tilde{\omega}_K} \right] \\
&\qquad + C \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K \|\boldsymbol{a}\|^2_{\infty,K} h_K^4}{\nu} |\boldsymbol{u}|^2_{2,\tilde{\omega}_K} \\
&\qquad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu} \|p_e^M(-\nu\Delta\boldsymbol{u})\|^2_{0,K} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu} \|p_e^M(\nabla p)\|^2_{0,K} \Bigg\}^{1/2} \\
&\qquad \Bigg\{ \|(\boldsymbol{w}_1, q_1)\|_h^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K h_K^2}{\nu} \|(\nabla \boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{a} + \nabla q_1\|^2_{0,K} \Bigg\}^{1/2} \\
&\leq C \Bigg\{ \|(\zeta^{\boldsymbol{u}}, \zeta^p)\|_h^2 + \text{máx}\left\{1, \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega} h}{18\nu}\right\} \nu h^2 |\boldsymbol{u}|^2_{2,\Omega} + \frac{h^2}{\nu}|p|^2_{1,\Omega} \\
&\qquad + \frac{\alpha\|\boldsymbol{a}\|^2_{\infty,\Omega} h^4}{\nu} \text{máx}\left\{1, \frac{\|\boldsymbol{a}\|^2_{\infty,\Omega} h^2}{\nu^2}\right\} |\boldsymbol{u}|^2_{2,\Omega} \\
&\qquad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K}{\nu} \left[\nu |\boldsymbol{u}_e^M(\nu\Delta\boldsymbol{u})|_{1,K} + \|p_e^M(\nu\Delta\boldsymbol{u})\|_{0,K} \right]^2 \\
&\qquad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha_K h_K^2}{\nu} |p|^2_{1,K} \Bigg\}^{1/2} \|(\boldsymbol{w}_1, q_1)\|_h \\
&\leq C \Bigg\{ \|(\zeta^{\boldsymbol{u}}, \zeta^p)\|_h^2 + \text{máx}\left\{1, \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega} h}{18\nu}\right\} \nu h^2 |\boldsymbol{u}|^2_{2,\Omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{\alpha\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}^2 h^4}{\nu} \operatorname{máx}\left\{1, \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}^2 h^2}{\nu^2}\right\} |\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}^2 \\
&+ \alpha \operatorname{máx}\left\{1, \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}^2 h^2}{\nu^2}\right\} \nu h^2 |\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}^2 + \frac{h^2}{\nu}|p|_{1,\Omega}^2 \Bigg\}^{1/2} \|(\boldsymbol{w}_1, q_1)\|_h \\
\leq C &\left\{ \|(\zeta^{\boldsymbol{u}}, \zeta^p)\|_h^2 + \nu \operatorname{máx}\left\{1, \left(\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega} h}{18\nu}\right)^3\right\} h^2 |\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}^2 + \frac{h^2}{\nu}|p|_{1,\Omega}^2 \right\}^{1/2} \|(\boldsymbol{w}_1, q_1)\|_h .
\end{aligned} \tag{3.55}
$$

Así (3.52) se obtiene, usando (3.54) y (3.55) en (3.53).

□

Capítulo 4

Estimador de Error a Posteriori

En este capítulo introducimos y analizamos un estimador de error a posteriori de tipo residual para el método RELP estudiado en el capítulo anterior. Al igual que en secciones anteriores, supondremos, por simplicidad que $\boldsymbol{a}|_K, \boldsymbol{f}|_K \in \mathbb{R}^2$ y supondremos una aproximación $\mathbb{P}_1^2 \times \mathbb{P}_1$, de donde las funciones que aproximan a la presión son continuas. En el caso de no considerar $\boldsymbol{f}$ constante a trozos, términos de orden superior podrían aparecer en el análisis sin que afecten significativamente al mismo.

4.1. Resultados Preliminares

En esta sección introducimos las funciones burbuja y otras definiciones necesarias más adelante para la demostración del teorema principal de este capítulo.
Para todo $K \in \mathcal{T}_h$, definimos la función burbuja por elemento, por

$$b_K := 27 \prod_{x \in N(K)} \lambda_x \,,$$

donde λ_x denota la coordenada baricéntrica asociada al nodo x y $N(K)$ es el conjunto de vértices de K. Sea $\hat{K}$ el triángulo de referencia, de vértices $\hat{\mathbf{n}}_1 := (1,0)$, $\hat{\mathbf{n}}_2 := (0,1)$, $\hat{\mathbf{n}}_3 := (0,0)$, entonces

$$b_{\hat{F}} := 4\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_3 \text{ en } \hat{K},$$

donde $\hat{F} := \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1\}$. Luego, sea $F \in \mathcal{E}_h$ y supongamos que $\omega_F = K_1 \cup K_2$, entonces definimos $G_{F,i}$ como la transformación afín (que preserva la orientación) dada en la Figura 4.1 y tal que $G_{F,i}(\hat{K}) = K_i$ y $G_{F,i}(\hat{F}) = F, i = 1, 2$.

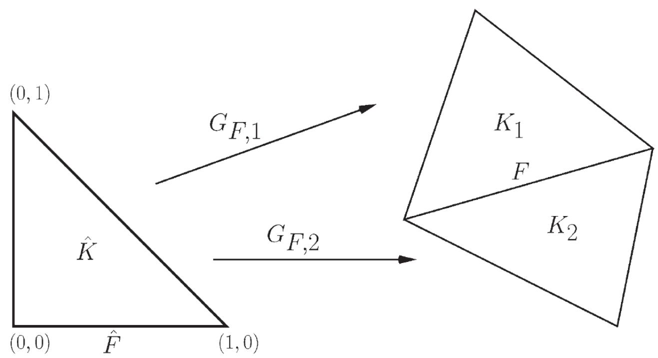


Figura 4.1: Transformación Afín $G_{F,i}$, $i = 1, 2$.

Definimos la función burbuja asociada a $F \in \mathcal{E}_h$ por

$$b_F := \begin{cases} b_{\hat{F}} \circ G_{F,i}^{-1} & \text{en } K_i, i = 1, 2 \\ 0 & \text{en } \Omega \backslash \omega_F \end{cases}$$

Sea $\hat{\Upsilon} := \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y sea $\hat{Q} : \mathbb{R}^2 \to \hat{\Upsilon}$ la proyeción ortogonal de $\mathbb{R}^2$ en $\hat{\Upsilon}$. Introducimos el operador de levantamiento $\hat{P}_{\hat{F}} : \mathbb{P}_k(\hat{F}) \to \mathbb{P}_k(\hat{K})$ por

$$\hat{P}_{\hat{F}}(\hat{s}) = \hat{s} \circ \hat{Q} \quad \forall \hat{s} \in \mathbb{P}_k(\hat{F}).$$

Sea $K_i \subseteq \omega_F$, definimos otro operador de levantamiento $\hat{P}_{F,K_i} : \mathbb{P}_k(F) \to \mathbb{P}_k(K_i)$ por

$$P_{F,K_i}(s) = \hat{P}_{\hat{F}}(s \circ G_{F,i}) \circ G_{F,i}^{-1}.$$

Usando estas notaciones se puede definir un último operador de levantamiento P_F : $\mathbb{P}_k(F) \to \mathbb{P}_k(\omega_F)$ por

$$P_F(s) := \begin{cases} P_{F,K_1}(s) & \text{en } K_1 \\ P_{F,K_2}(s) & \text{en } K_2 \end{cases}, \quad \forall s \in \mathbb{P}_k(F),$$

y para $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{P}_k(F)^2$ denotamos

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{s}) = (P_F(s_1), P_F(s_2)). \tag{4.1}$$

4.2. Estimador Residual

En esta sección introducimos el estimador de error de tipo residual, basándonos en [6] y analizamos teóricamente el comportamiento del mismo.
Para todo $K \in \mathcal{T}_h$ y para todo $F \in \mathcal{E}_h$, definimos los siguientes residuos

$$\mathbf{R}_K := (\boldsymbol{f} + \nu \Delta \boldsymbol{u}_1 - (\nabla \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a} - \nabla p_1)\,|_K \tag{4.2}$$

$$\mathbf{R}_F := [\![-\nu \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}_1]\!]_F. \tag{4.3}$$

De esta definición, integrando por partes, obtenemos que para todo $(\boldsymbol{v}, q)$ en $\mathbf{V} \times Q$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}((\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}}, e^p), (\boldsymbol{v}, q)) &= \nu(\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1), \nabla \boldsymbol{v})_\Omega + ((\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1))\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})_\Omega - (p - p_1, \nabla \cdot \boldsymbol{v})_\Omega \\
&\quad + (q, \nabla \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1))_\Omega \\
&= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_\Omega - \nu(\nabla \boldsymbol{u}_1, \nabla \boldsymbol{v})_\Omega - ((\nabla \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})_\Omega + (p_1, \nabla \cdot \boldsymbol{v})_\Omega \\
&\quad - (q, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_1)_\Omega \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big\{ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_K - \nu(\nabla \boldsymbol{u}_1, \nabla \boldsymbol{v})_K - ((\nabla \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})_K + (p_1, \nabla \cdot \boldsymbol{v})_K \Big\} \\
&\quad - (q, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_1)_\Omega \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big\{ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_K + (\nu \Delta \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v})_K - ((\nabla \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})_K - (\nabla p_1, \boldsymbol{v})_K \Big\} \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big\{ -(\nu \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v})_{\partial K} + (p_1 \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v})_{\partial K} \Big\} - (q, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_1)_\Omega \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\boldsymbol{f} + \nu \Delta \boldsymbol{u}_1 - (\nabla \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a} - \nabla p_1, \boldsymbol{v})_K \\
&\quad + \sum_{F \in \mathcal{E}_h} ([\![-\nu \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}_1 + p_1 \boldsymbol{n}]\!], \boldsymbol{v})_F - (q, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_1)_\Omega,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathbf{A}((\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}}, e^p), (\boldsymbol{v}, q)) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\mathbf{R}_K, \boldsymbol{v})_K + \sum_{F\in\mathcal{E}_h} (\mathbf{R}_F, \boldsymbol{v})_F - (q, \nabla\cdot\boldsymbol{u}_1)_\Omega, \tag{4.4}$$

donde $\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}} := \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1$ y $e^p := p - p_1$. Recordemos que $(\boldsymbol{u}, p) \in \mathbf{V}\times Q$ es la solución del problema continuo (2.14) y de ahora en adelante $(\boldsymbol{u}_1, p_1) \in \mathbf{V}_h \times Q_h^1$ es la solución entregada por el método (3.32).

Luego, de la definición de los residuos y del método estabilizado, se tiene que para todo $\boldsymbol{v}_1 \in \mathbf{V}_h$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}((\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}}, e^p), (\boldsymbol{v}_1, 0)) &= \mathbf{A}((\boldsymbol{u}, p), (\boldsymbol{v}_1, 0)) - \mathbf{A}((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, 0)) \\
&= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_1)_\Omega - \mathbf{A}((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, 0)) \\
&= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_1)_\Omega - \tilde{\mathbf{B}}((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, 0)) + \mathbf{B}_{\mathcal{T}}((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, 0)) \\
&\quad + \mathbf{B}_\gamma((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, 0)) + \mathbf{B}_{\mathcal{E}}((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, 0)) \\
&= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_1)_\Omega - \mathbf{F}(\boldsymbol{v}_1, 0) + \mathbf{B}_{\mathcal{T}}((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, 0)) \\
&\quad + \mathbf{B}_\gamma((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, 0)) + \mathbf{B}_{\mathcal{E}}((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, 0)) \\
&= -\mathbf{F}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{v}_1, 0) + \mathbf{B}_{\mathcal{T}}((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, 0)) \\
&\quad + \mathbf{B}_\gamma((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, 0)) + \mathbf{B}_{\mathcal{E}}((\boldsymbol{u}_1, p_1), (\boldsymbol{v}_1, 0)) \\
&= -\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha}{\nu} (\chi_h(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f}), \chi_h(\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}))_K \\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha}{\nu} (\chi_h(p_1 + \boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a}), \chi_h(\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}))_K \\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\gamma}{\nu} (\chi_h((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1)), \chi_h((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1)))_K \\
&\quad + \sum_{F\in\mathcal{E}_h} \tau_F ([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_1]\!], [\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1]\!])_F \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha}{\nu} (\chi_h(\boldsymbol{x}\cdot(-\boldsymbol{f} + \nabla p_1 + (\nabla\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a})), \chi_h(\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}))_K \\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\gamma}{\nu} \|\chi_h((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1))\|_{0,K} \|\chi_h((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1))\|_{0,K} \\
&\quad + \sum_{F\in\mathcal{E}_h} \tau_F ([\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_1]\!], [\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1]\!])_F
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\alpha}{\nu}\|\chi_h(\boldsymbol{x}\cdot(-\boldsymbol{f}+\nabla p_1+(\nabla\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a})\|_{0,K}\|\chi_h(\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a})\|_{0,K}\\
&\quad+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\gamma}{\nu}h_K^2|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1)|_{1,K}|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1)|_{1,K}\\
&\quad+\sum_{F\in\mathcal{E}_h}\tau_F\|[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_1]\!]\|_{0,F}\|[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1]\!]\|_{0,F}\\
&\leq C\Bigg\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha}{\nu}h_K^2|\boldsymbol{x}\cdot(-\boldsymbol{f}+\nabla p_1+(\nabla\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a})|_{1,K}|\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a})|_{1,K}\\
&\qquad+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\gamma}{\nu}h_K^2|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1|\,|\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1|\,|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}|_{1,K}^2\\
&\qquad+\sum_{F\in\mathcal{E}_h}\tau_F\|\mathbf{R}_F\|_{0,F}\|[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1]\!]\|_{0,F}\Bigg\}\\
&\leq C\Bigg\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha}{\nu}h_K^2\|(-\boldsymbol{f}+\nabla p_1+(\nabla\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a})\|_{0,K}\|(\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a})\|_{0,K}\\
&\qquad+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\gamma\|\boldsymbol{a}\|_{0,K}^2}{\nu}\frac{h_K^2}{|K|}\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\|_{0,K}\|\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1\|_{0,K}\\
&\qquad+\sum_{F\in\mathcal{E}_h}\tau_F\|\mathbf{R}_F\|_{0,F}\|[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1]\!]\|_{0,F}\Bigg\}\\
&\leq C\Bigg\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\alpha}{\nu}h_K^2\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}\|(\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}\|_{0,K}+\sum_{F\in\mathcal{E}_h}\tau_F\|\mathbf{R}_F\|_{0,F}\|[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1]\!]\|_{0,F}\\
&\qquad+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\gamma\|\boldsymbol{a}\|_{0,K}^2}{\nu}\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\|_{0,K}\|\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1\|_{0,K}\Bigg\}\\
&\leq C\Bigg\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{h_K^2}{Pe_K\nu}\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}\|(\nabla\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{a}\|_{0,K}+\sum_{F\in\mathcal{E}_h}\tau_F\|\mathbf{R}_F\|_{0,F}\|[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1]\!]\|_{0,F}\\
&\qquad+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{0,K}^2}{Pe_K\nu}\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\|_{0,K}\|\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1\|_{0,K}\Bigg\}\\
&\leq C\Bigg\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}h_K\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}|\boldsymbol{v}_1|_{1,K}+\sum_{F\in\mathcal{E}_h}\tau_F\|\mathbf{R}_F\|_{0,F}\|[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}_1]\!]\|_{0,F}\\
&\qquad+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\boldsymbol{a}\|_{0,K}\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\|_{0,K}|\boldsymbol{v}_1|_{1,K}\Bigg\}
\end{aligned}\tag{4.5}
$$

donde la constante C es positiva e independiente de h, ν y $\boldsymbol{a}$.
El siguiente resultado corresponde a una condición inf-sup para la forma bilineal $\mathbf{A}$ definida en (2.15).

Lema 6. *Sea $(\boldsymbol{v},q)\in\mathbf{V}\times Q$, entonces existe una constante positiva C, independiente de h, ν y $\boldsymbol{a}$, tal que*

$$\sqrt{\nu}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\|q\|_{0,\Omega}\leq C\,\text{máx}\left\{1,\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}}{\nu}\right\}^2\sup_{(\boldsymbol{w},t)\in\mathbf{V}\times Q-\{\mathbf{0}\}}\frac{\mathbf{A}((\boldsymbol{v},q),(\boldsymbol{w},t))}{\sqrt{\nu}|\boldsymbol{w}|_{1,\Omega}+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\|t\|_{0,\Omega}} \tag{4.6}$$

Demostración. Para la demostración revisamos la Proposición 2.36 en [26], de donde tenemos los siguientes resultados

$$\sqrt{\nu}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}\leq\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\|a\|_{(\mathbf{V}\times\mathbf{V})'}}{\beta}\right)\right)\sup_{(\boldsymbol{w},t)\in\mathbf{V}\times Q-\{\mathbf{0}\}}\frac{\mathbf{A}((\boldsymbol{v},q),(\boldsymbol{w},t))}{\sqrt{\nu}|\boldsymbol{w}|_{1,\Omega}+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\|t\|_{0,\Omega}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{\nu}}\|q\|_{0,\Omega}\leq\frac{1}{\beta}\left(1+\|a\|_{(\mathbf{V}\times\mathbf{V})'}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\|a\|_{(\mathbf{V}\times\mathbf{V})'}}{\beta}\right)\right)\right)\sup_{(\boldsymbol{w},t)\in\mathbf{V}\times Q-\{\mathbf{0}\}}\frac{\mathbf{A}((\boldsymbol{v},q),(\boldsymbol{w},t))}{\sqrt{\nu}|\boldsymbol{w}|_{1,\Omega}+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\|t\|_{0,\Omega}},$$

donde α y β son constantes que vienen de las condiciones inf-sup de las formas a y b respectivamente, que en nuestro caso son independientes de h, ν y $\boldsymbol{a}$. Luego, usamos el hecho que

$$\|a\|_{(\mathbf{V}\times\mathbf{V})'}:=\sup_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbf{V},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\neq\mathbf{0}}\frac{a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}{\sqrt{\nu}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}\sqrt{\nu}|\boldsymbol{w}|_{1,\Omega}}\leq C_1\,\text{máx}\left\{1,\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}}{\nu}\right\}$$

de donde se tiene el resultado y la constante C depende de la constante de Poincaré en $H_0^1(\Omega)^2$, de α y de β, es decir, es independiente de h, ν y $\boldsymbol{a}$ □

4.2.1. Resultado Principal

A continuación presentamos el estimador de error a posteriori de tipo residual y mostramos su equivalencia con el error de aproximación del método RELP.
Definimos el estimador residual η como sigue:

$$\eta:=\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\eta_{R,K}^2\right\}^{1/2},$$

donde para cada $K \in \mathcal{T}_h$

$$\eta_{R,K}^2 := \frac{h_K^2}{\nu}\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}^2 + \frac{1}{2}\sum_{F\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}_h}\frac{h_F}{\nu}\|\mathbf{R}_F\|_{0,F}^2 + \nu\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\|_{0,K}^2. \tag{4.7}$$

Con las definiciones anteriores, presentamos el teorema principal de este capítulo que muestra la equivalencia entre este estimador y el error de aproximación obtenido al utilizar el método RELP.

Teorema 2. *Sea $(\boldsymbol{u}, p) \in \mathbf{V}\times Q$ la solución de (2.14) y sea $(\boldsymbol{u}_1, p_1) \in \mathbf{V}_h\times Q_h^1$ la solución de (3.32), entonces existen constantes positivas C_1 y C_2, independientes de h, ν y $\boldsymbol{a}$, tales que*

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1| + \|p-p_1\| \le C_1 \max\left\{1, \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}}{\nu}\right\}^3 \eta, \tag{4.8}$$

$$C_2 \max\left\{1, \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{0,\omega_K}}{\nu}\right\}^{-1} \eta_{R,K} \le \sqrt{\nu}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1|_{1,\omega_K} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\|p-p_1\|_{0,\omega_K}. \tag{4.9}$$

Demostración. Cota superior :
Sea $(\boldsymbol{v}, q) \in H_0^1(\Omega)^2\times L_0^2(\Omega)$ y sea $\tilde{\boldsymbol{v}}_1 := \mathcal{C}_h(\boldsymbol{v}) \in \mathbf{V}_h$ el interpolante de Clément. Aplicando (4.4) a $(\boldsymbol{v}-\tilde{\boldsymbol{v}}_1, q)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}((\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}}, e^p), (\boldsymbol{v}-\tilde{\boldsymbol{v}}_1, q)) &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\mathbf{R}_K, \boldsymbol{v}-\tilde{\boldsymbol{v}}_1)_K + \sum_{F\in\mathcal{E}_h}(\mathbf{R}_F, \boldsymbol{v}-\tilde{\boldsymbol{v}}_1)_F - (q, \nabla\cdot\boldsymbol{u}_1)_\Omega \\
&\le \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}\|\boldsymbol{v}-\tilde{\boldsymbol{v}}_1\|_{0,K} + \sum_{F\in\mathcal{E}_h}\|\mathbf{R}_F\|_{0,F}\|\boldsymbol{v}-\tilde{\boldsymbol{v}}_1\|_{0,F} \\
&\quad + \|q\|_{0,\Omega}\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\|_{0,\Omega},
\end{aligned}$$

luego, por lo anterior y la desigualdad (4.5) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}((\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}}, e^p), (\boldsymbol{v}, q)) &= \mathbf{A}((\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}}, e^p), (\boldsymbol{v}-\tilde{\boldsymbol{v}}_1, q)) + \mathbf{A}((\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}}, e^p), (\tilde{\boldsymbol{v}}_1, 0)) \\
&\le C\Bigg\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}\|\boldsymbol{v}-\tilde{\boldsymbol{v}}_1\|_{0,K} + \sum_{F\in\mathcal{E}_h}\|\mathbf{R}_F\|_{0,F}\|\boldsymbol{v}-\tilde{\boldsymbol{v}}_1\|_{0,F} \\
&\quad + \|q\|_{0,\Omega}\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\|_{0,\Omega} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}h_K\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}|\tilde{\boldsymbol{v}}_1|_{1,K} \\
&\quad + \sum_{F\in\mathcal{E}_h}\tau_F\|\mathbf{R}_F\|_{0,F}\|[\![\nu\partial_{\boldsymbol{n}}\tilde{\boldsymbol{v}}_1]\!]\|_{0,F}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\boldsymbol{a}\|_{0,K}\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\|_{0,K}|\tilde{\boldsymbol{v}}_1|_{1,K}\Bigg\} \\
&\leq C\Bigg\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}|\boldsymbol{v}|_{1,\tilde{\omega}_K} + \sum_{F\in\mathcal{E}_h} h_F^{1/2}\|\mathbf{R}_F\|_{0,F}|\boldsymbol{v}|_{1,\tilde{\omega}_F} \\
&\quad + \|q\|_{0,\Omega}\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\|_{0,\Omega} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}|\tilde{\boldsymbol{v}}_1|_{1,K} \\
&\quad + \sum_{F\in\mathcal{E}_h} h_F\|\mathbf{R}_F\|_{0,F}\|[\![\partial_{\boldsymbol{n}}\tilde{\boldsymbol{v}}_1]\!]\|_{0,F} \\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\boldsymbol{a}\|_{0,K}\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\|_{0,K}|\tilde{\boldsymbol{v}}_1|_{1,K}\Bigg\} \\
&\leq C\Bigg\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{h_K^2}{\nu}\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}^2 + \sum_{F\in\mathcal{E}_h} \frac{h_F}{\nu}\|\mathbf{R}_F\|_{0,F}^2 + \nu\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\|_{0,\Omega}^2\Bigg\}^{1/2} \\
&\quad \Bigg\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \nu|\boldsymbol{v}|_{1,\tilde{\omega}_K}^2 + \sum_{F\in\mathcal{E}_h} \nu|\boldsymbol{v}|_{1,\tilde{\omega}_F}^2 + \frac{1}{\nu}\|q\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \nu|\tilde{\boldsymbol{v}}_1|_{1,K}^2 \\
&\quad + \sum_{F\in\mathcal{E}_h} \nu h_F\|[\![\partial_{\boldsymbol{n}}\tilde{\boldsymbol{v}}_1]\!]\|_{0,F}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{0,K}^2}{\nu}|\tilde{\boldsymbol{v}}_1|_{1,K}^2\Bigg\}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Usando la regularidad de la malla, tenemos que

$$
\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \nu|\boldsymbol{v}|_{1,\tilde{\omega}_K}^2 + \sum_{F\in\mathcal{E}_h} \nu|\boldsymbol{v}|_{1,\tilde{\omega}_F}^2 \leq C\nu|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}^2,
$$

además

$$
\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{0,K}^2}{\nu}\|\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}_1\|_{0,K}^2 &\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{0,K}^2}{\nu}|\tilde{\boldsymbol{v}}_1|_{1,K}^2 \\
&\leq C\left(\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{0,\Omega}}{\nu}\right)^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \nu|\tilde{\boldsymbol{v}}_1|_{1,K}^2 \\
&\leq C\left(\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}}{\nu}\right)^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \nu|\tilde{\boldsymbol{v}}_1|_{1,K}^2 \\
&\leq C\left(\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}}{\nu}\right)^2 \nu|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}^2.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, usando el Teorema de trazas local (3.45), obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\nu|\tilde{\boldsymbol{v}}_1|^2_{1,K}+\sum_{F\in\mathcal{E}_h}\nu h_F\|[\![\partial_{\boldsymbol{n}}\tilde{\boldsymbol{v}}_1]\!]\|^2_{0,F} &\le C\left\{\nu|\boldsymbol{v}|^2_{1,\Omega}+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\nu h_K\|\partial_{\boldsymbol{n}}\tilde{\boldsymbol{v}}_1\|^2_{0,\partial K}\right\}\\ &\le C\left\{\nu|\boldsymbol{v}|^2_{1,\Omega}+\nu\sum_{K\in\mathcal{T}_h}h_K[h_K^{-1}|\tilde{\boldsymbol{v}}_1|^2_{1,K}+h_K|\tilde{\boldsymbol{v}}_1|^2_{2,K}]\right\}\\ &\le C\nu|\boldsymbol{v}|^2_{1,\Omega}.\end{aligned}$$

Así, para todo $(\boldsymbol{v},q)\in\mathbf{V}\times Q$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}((\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}},e^p),(\boldsymbol{v},q)) &\le C\left\{\text{máx}\left\{1,\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}}{\nu}\right\}^2\nu|\boldsymbol{v}|^2_{1,\Omega}+\frac{1}{\nu}\|q\|^2_{0,\Omega}\right\}^{1/2}\eta\\ &\le C\,\text{máx}\left\{1,\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}}{\nu}\right\}\left\{\nu|\boldsymbol{v}|^2_{1,\Omega}+\frac{1}{\nu}\|q\|^2_{0,\Omega}\right\}^{1/2}\eta,\end{aligned}\tag{4.10}$$

por lo tanto, usamos el Lema 6, aplicado a $(\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}},e^p)\in\mathbf{V}\times Q$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{\nu}|\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}}|_{1,\Omega}+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\|e^p\|_{0,\Omega} &\le C\,\text{máx}\left\{1,\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}}{\nu}\right\}^2\sup_{(\boldsymbol{v},q)\in\mathbf{V}\times Q-\{0\}}\frac{\mathbf{A}((\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}},e^p),(\boldsymbol{v},q))}{\sqrt{\nu}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\|q\|_{0,\Omega}}\\ &\le C\,\text{máx}\left\{1,\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}}{\nu}\right\}^3\sup_{(\boldsymbol{v},q)\in\mathbf{V}\times Q-\{0\}}\frac{\{\nu|\boldsymbol{v}|^2_{1,\Omega}+\frac{1}{\nu}\|q\|^2_{0,\Omega}\}^{1/2}\eta}{\sqrt{\nu}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\|q\|_{0,\Omega}}\\ &\le C_1\,\text{máx}\left\{1,\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\Omega}}{\nu}\right\}^3\eta,\end{aligned}$$

lo que demuestra (4.8).

$Cota\, inferior$:

Para todo $K\in\mathcal{T}_h$ y $F\in\mathcal{E}_h$, sean b_K y b_F las funciones burbuja por elemento y por lado, respectivamente. Sea además $\mathbf{b}_K:=b_K\mathbf{R}_K$. Entonces se tiene los siguientes resultados

$$C\|\mathbf{R}_K\|^2_{0,K}\le(\mathbf{R}_K,\mathbf{b}_K)_K\le\|\mathbf{R}_K\|^2_{0,K}\tag{4.11}$$

$$C\|\mathbf{R}_F\|^2_{0,F}\le(\mathbf{R}_F,b_F\mathbf{R}_F)_F\le\|\mathbf{R}_F\|^2_{0,F}.\tag{4.12}$$

Las cotas superiores son claras, sabiendo que $b_K\le1$, que $b_F\le1$ y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Para las cotas inferiores citamos el trabajo realizado en el Lema 3.3 de [45] o en el Teorema 19 de [3], para el caso escalar y su extensión vectorial. Así, usando el hecho que $\mathbf{b}_K \in H_0^1(K)^2$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{R}_K, \mathbf{b}_K)_K &= \sum_{K' \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{R}_{K'}, \mathbf{b}_K)_{K'} = \mathbf{A}((\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1, p - p_1), (\mathbf{b}_K, 0)) \\
&= \nu(\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1), \nabla \mathbf{b}_K)_K + ((\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1))\boldsymbol{a}, \mathbf{b}_K)_K - (p - p_1, \nabla \cdot \mathbf{b}_K)_K \\
&\leq \nu|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1|_{1,K}|\mathbf{b}_K|_{1,K} + |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1|_{1,K}\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}\|\mathbf{b}_K\|_{0,K} + \|p - p_1\|_{0,K}|\mathbf{b}_K|_{1,K} \\
&\leq C \left\{ \nu h_K^{-1}|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1|_{1,K}\|\mathbf{b}_K\|_{0,K} + \left(\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{0,K}}{18|K|^{1/2}\nu} \right) \nu|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1|_{1,K}\|\mathbf{b}_K\|_{0,K} \right. \\
&\qquad \left. + h_K^{-1}\|p - p_1\|_{0,K}\|\mathbf{b}_K\|_{0,K} \right\} \\
&\leq C \left\{ \nu|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1|_{1,K} + \|p - p_1\|_{0,K} \right\} \text{máx} \left\{ \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{0,K}}{18|K|^{1/2}\nu}, h_K^{-1} \right\} \|\mathbf{b}_K\|_{0,K} \\
&\leq C \left\{ \sqrt{\nu}|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1|_{1,K} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\|p - p_1\|_{0,K} \right\} \sqrt{\nu} h_K^{-1} \text{máx}\{Pe_K, 1\}\|\mathbf{R}_K\|_{0,K},
\end{aligned}
$$

lo que implica que

$$
\alpha \frac{h_K}{\sqrt{\nu}}\|\mathbf{R}_K\|_{0,K} \leq C \left\{ \sqrt{\nu}|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1|_{1,K} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\|p - p_1\|_{0,K} \right\}, \tag{4.13}
$$

y también

$$
\frac{h_K}{\sqrt{\nu}}\|\mathbf{R}_K\|_{0,K} \leq C \,\text{máx} \left\{ 1, \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{0,\omega_K}}{\nu} \right\} \left\{ \sqrt{\nu}|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1|_{1,K} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\|p - p_1\|_{0,K} \right\}. \tag{4.14}
$$

Por otro lado, como $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)^2$ tenemos que $\nabla \cdot \boldsymbol{u} \in L_0^2(\Omega)$ de donde, por (2.14), $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ *ctp* en Ω. Usando este hecho, (4.11) y $b_K \in H_0^1(K)$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\|\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1\|_{0,K}^2 &= (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_1)_K \\
&\leq C(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1, b_K \nabla \cdot \boldsymbol{u}_1)_K \\
&= C(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1, b_K \nabla \cdot \boldsymbol{u}_1)_\Omega \\
&= C(\nabla \cdot (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}), b_K \nabla \cdot \boldsymbol{u}_1)_\Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= C(\nabla\cdot(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}), b_K\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1)_K\\
&\leq C|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1|_{1,K}\|b_K\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\|_{0,K}\\
&\leq C|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1|_{1,K}\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\|_{0,K},
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\sqrt{\nu}\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\|_{0,K} \leq C\,\text{máx}\{1, \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{0,\omega_K}}{\nu}\}\sqrt{\nu}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1|_{1,K}. \tag{4.15}
$$

Finalmente, sea $F\in\mathcal{E}_h$. Usando (4.12), la definición de $\mathbf{P}_F$, y el hecho que $b_F\in H_0^1(\omega_F)$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{R}_F\|_{0,F}^2 &\leq C(\mathbf{R}_F, b_F\mathbf{R}_F)_F\\
&\leq C\left\{\sum_{K\subseteq\omega_F}(\mathbf{R}_K, b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F))_K - \mathbf{A}((\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1, p-p_1),(b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F),0))\right\}\\
&\leq C\left\{\sum_{K\subseteq\omega_F}\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}\|b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)\|_{0,K} + ((\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1))\boldsymbol{a}, b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F))_\Omega\right.\\
&\qquad\left. + \nu(\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1),\nabla(b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)))_\Omega - (p-p_1,\nabla\cdot(b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)))_\Omega\right\}\\
&\leq C\left\{\sum_{K\subseteq\omega_F}\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}\|b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)\|_{0,K} + \sum_{K\subseteq\omega_F}((\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1))\boldsymbol{a}, b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F))_K\right.\\
&\qquad\left. + \nu(\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1),\nabla(b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)))_{\omega_F} - (p-p_1,\nabla\cdot(b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)))_{\omega_F}\right\}\\
&\leq C\left\{\sum_{K\subseteq\omega_F}\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}\|b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)\|_{0,K} + \sum_{K\subseteq\omega_F}\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1|_{1,K}\|b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)\|_{0,K}\right.\\
&\qquad\left. + \nu|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1|_{1,\omega_F}|b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F))|_{1,\omega_F} + \|p-p_1\|_{0,\omega_F}|(b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F))|_{1,\omega_F}\right\}\\
&\leq C\left\{\sum_{K\subseteq\omega_F}\frac{h_K\alpha}{\sqrt{\nu}}\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}\alpha^{-1}\sqrt{\nu}|b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)|_{1,K}\right.\\
&\qquad + \sum_{K\subseteq\omega_F}\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}h_K}{\nu}\sqrt{\nu}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1|_{1,K}\sqrt{\nu}|b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)|_{1,K}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \nu|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1|_{1,\omega_F}|b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)|_{1,\omega_F} + \|p-p_1\|_{0,\omega_F}|b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)|_{1,\omega_F}\Bigg\} \\
&\leq C\left\{\sum_{K\subseteq\omega_F}\frac{h_K^2\alpha^2}{\nu}\|\mathbf{R}_K\|_{0,K}^2 + \sum_{K\subseteq\omega_F}\nu|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1|_{1,K}^2\right. \\
&\qquad \left. + \nu|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1|_{1,\omega_F}^2 + \frac{1}{\nu}\|p-p_1\|_{0,\omega_F}^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{K\subseteq\omega_F}\alpha^{-2}\nu|b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)|_{1,K}^2\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{K\subseteq\omega_F}\frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}^2h_K^2}{\nu^2}\nu|b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)|_{1,K}^2 + 2\nu|b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)|_{1,\omega_F}^2\right\}^{1/2} \\
&\leq C\left\{\nu|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1|_{1,\omega_F}^2 + \frac{1}{\nu}\|p-p_1\|_{0,\omega_F}^2\right\}^{1/2} \\
&\qquad \left\{\sum_{K\subseteq\omega_F}\alpha^{-2} + \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}^2h_K^2}{\nu^2}\right\}^{1/2}\sqrt{\nu}|b_F\mathbf{P}_F(\mathbf{R}_F)|_{1,\omega_F} \\
&\leq C\left\{\nu|e^{\boldsymbol{u}}|_{1,\omega_F}^2 + \frac{1}{\nu}\|e^p\|_{0,\omega_F}^2\right\}^{1/2} \\
&\qquad \left\{\sum_{K\subseteq\omega_F}\left\{\text{máx}\{1, Pe_K\}^2 + \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}^2h_K^2}{\nu^2}\right\}\right\}^{1/2}\sqrt{\nu}h_F^{-1/2}\|\mathbf{R}_F\|_{0,F} \\
&\leq C\left\{\nu|e^{\boldsymbol{u}}|_{1,\omega_F}^2 + \frac{1}{\nu}\|e^p\|_{0,\omega_F}^2\right\}^{1/2}\text{máx}\left\{1, \frac{\|\boldsymbol{a}\|_{0,\omega_F}}{\nu}\right\}\sqrt{\nu}h_F^{-1/2}\|\mathbf{R}_F\|_{0,F}.
\end{aligned}
$$

Así, (4.9) es una consecuencia de esta última desigualdad, sumando sobre $F \in \mathcal{E}(K)$ y usando (4.14) y (4.15). $\square$

Capítulo 5

Resultados Numéricos

En este capítulo validaremos numéricamente las estimaciones de error a priori y a posteriori demostradas en capítulos anteriores, además mostraremos en detalle la implementación del método RELP, para el caso $\mathbb{P}_1^2 \times \mathbb{P}_1$.

5.1. Implementación

5.1.1. Resultados básicos

Para la implementación del método RELP y del estimador de error a posteriori utilizaremos las siguientes definiciones y resultados. Sea $\mathcal{T}_h$ una triángulación cualquiera de $\overline{\Omega}$ y sea $K \in \mathcal{T}_h$ un triángulo cualquiera de esa triangulación, entonces denotamos sus vértices por

$$\mathbf{n}_1 := \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix}, \mathbf{n}_2 := \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}, \mathbf{n}_3 := \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

Sea $\hat{K}$ el triángulo de referencia, es decir, el triángulo de vértices

$$\hat{\mathbf{n}}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{n}}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{n}}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por $\boldsymbol{x}$ y $\hat{\boldsymbol{x}}$ los sistemas coordenados dados por:

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\boldsymbol{x}} := \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix},$$

y consideremos la transformación afín invertible $\mathcal{F} : \hat{K} \to K$ tal que $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{n}}_i) = \mathbf{n}_i$, $i = 1, 2, 3$. (Ver Figura 5.1). Es claro que

$$\mathcal{F}(\hat{\boldsymbol{x}}) := \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}$$

Donde la matriz $\mathbf{C}$ y el vector $\boldsymbol{c}$ están dados por:

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} x^2 - x^1 & x^3 - x^1 \\ y^2 - y^1 & y^3 - y^1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix}$$

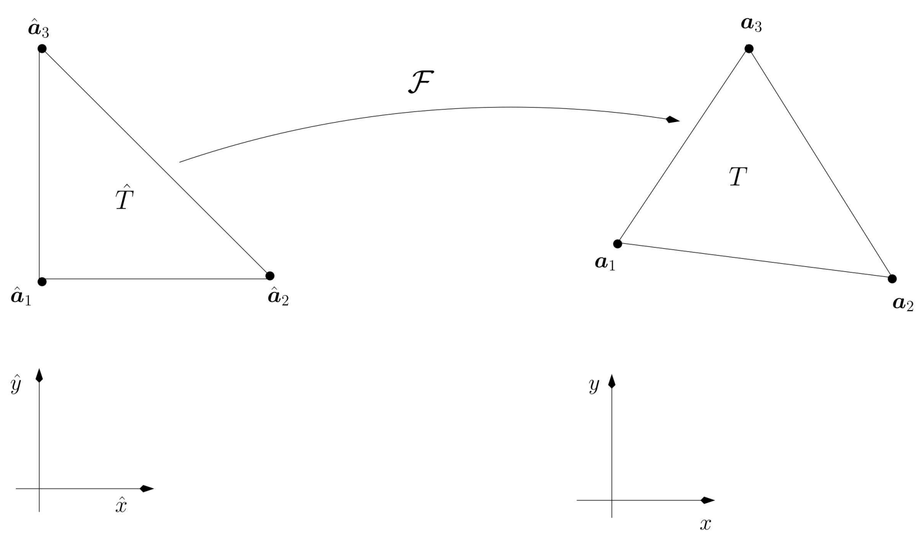


Figura 5.1: Transformación afín $\mathcal{F}$.

Nota 5. *Es claro que la transformación $\mathcal{F}$ es invertible y que $\mathcal{F}^{-1} : K \to \hat{K}$ está dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{x} - \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{c} = \hat{\boldsymbol{x}}.$$

Además

$$J_{\mathcal{F}} = \mathbf{C}$$
$$|J_{\mathcal{F}}| = \det(\boldsymbol{C}) = 2|K|.$$

Dado $u : K \to \mathbb{R}$, *sea* $\hat{u} : \hat{K} \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$\hat{u} := u \circ \mathcal{F}.$$

Usando la regla de la cadena obtenemos

$$\hat{\nabla}\hat{u} := \mathbf{C}^T \nabla u,$$

de donde

$$\nabla u := \mathbf{C}^{-T} \hat{\nabla}\hat{u}.$$

Por último recordamos la siguiente fórmula de integración

$$\int_K u\, d\boldsymbol{x} = |J_{\mathcal{F}}| \int_{\hat{K}} \hat{u}\, d\hat{\boldsymbol{x}}.$$

5.1.2. Esquema Matricial

En esta sección veremos cómo calcular la matriz elemental asociada a cada uno de los elementos de la triangulación. Recordemos que la solución aproximada estará dada por funciones continuas y lineales sobre cada elemento. En general esta forma de calcular la matriz elemental puede ser rápidamente extendida a órdenes de interpolación mayores así como a 3D.

Para los cálculos sobre K se usan las siguientes notaciones:

$$[P] := [p_1 \quad p_2 \quad p_3]_{1\times 3},$$

$$[DP] := \begin{bmatrix} \partial_1 p_1 & \partial_1 p_2 & \partial_1 p_3, \\ \\ \partial_2 p_1 & \partial_2 p_2 & \partial_2 p_3 \end{bmatrix}_{2\times 3},$$

donde p_i, $i = 1, 3$ son las funciones de base de V_h sobre cada triángulo K y ∂_1, ∂_2 son las derivadas con respecto a cada variable. Notemos que para el triángulo de referencia, las funciones de base son:

$$[\hat{P}] := [1 - \hat{x} - \hat{y} \quad \hat{x} \quad \hat{y}]_{1\times 3}$$

Así podemos escribir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{|K} &= [\boldsymbol{P}][\boldsymbol{u}], \\ p_{|K} &= [P][p], \\ \boldsymbol{x}_{|K} &= [\boldsymbol{P}][\boldsymbol{x}], \end{aligned}$$

donde

$$[\boldsymbol{P}] := \begin{bmatrix} [P] & 0 \\ & \\ 0 & [P] \end{bmatrix}_{2\times 6},$$

$$[\boldsymbol{u}] := \begin{bmatrix} u_1(\mathbf{n}_1) \\ u_1(\mathbf{n}_2) \\ u_1(\mathbf{n}_3) \\ u_2(\mathbf{n}_1) \\ u_2(\mathbf{n}_2) \\ u_2(\mathbf{n}_3) \end{bmatrix}_{6\times 1} = \begin{bmatrix} [u_1]_{3\times 1} \\ \\ [u_2]_{3\times 1} \end{bmatrix},$$

$$[p] := \begin{bmatrix} p(\mathbf{n}_1) \\ p(\mathbf{n}_2) \\ p(\mathbf{n}_3) \end{bmatrix}_{3\times 1},$$

y

$$[\boldsymbol{x}] := \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix}_{6\times 1}.$$

Además

$$\nabla \boldsymbol{u}_{|_K} = [\boldsymbol{DP}]\,[\boldsymbol{u}]\,,$$

donde

$$[\boldsymbol{DP}] := \begin{bmatrix} [DP] & 0 \\ & \\ 0 & [DP] \end{bmatrix}_{4\times 6}.$$

Para la construcción de las matrices locales, notemos primero que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\cdot(\nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{x}\cdot \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 \\ & \\ \partial_1 u_1 & \partial_2 u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{x}\cdot \begin{pmatrix} a_1\partial_1 u_1 + a_2\partial_2 u_1 \\ \\ a_1\partial_1 u_1 + a_2\partial_2 u_2 \end{pmatrix} \\ &= [\boldsymbol{x}]^T_{1\times 6}\,[\boldsymbol{P}]^T_{6\times 2}\,[\boldsymbol{P}]_{2\times 6}\,[\boldsymbol{a}_b]_{6\times 4}\,[\boldsymbol{DP}]_{4\times 6}\,[\boldsymbol{u}]_{6\times 1}\,, \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) &= (a_1 x + a_2 y)(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) \\ &= [P]_{1\times 3}[\boldsymbol{a}_{\mathbf{a}}]_{3\times 2}\,[\boldsymbol{P}]_{2\times 6}\,[\boldsymbol{x}]_{6\times 1}\,[Z]_{1\times 4}\,[\boldsymbol{DP}]_{4\times 6}\,[\boldsymbol{u}]_{6\times 1}\,, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} [Z]_{1\times 4} &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \\ [\boldsymbol{a}_{\mathbf{a}}]_{3\times 2} &= \begin{pmatrix} a_1(n_1) & a_2(n_1) \\ a_1(n_2) & a_2(n_2) \\ a_1(n_3) & a_2(n_3) \end{pmatrix} \\ [\boldsymbol{a}_b]_{6\times 4} &= \begin{pmatrix} [\boldsymbol{a}_{\mathbf{a}}]_{3\times 2} & 0 \\ & \\ 0 & [\boldsymbol{a}_{\mathbf{a}}]_{3\times 2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nota 6. *Otra forma de implementar el campo advectivo, en vez de interpolar sobre cada triángulo, es calcular la proyección de* $\boldsymbol{a}$ *sobre las constantes, es decir*

$$[\boldsymbol{P}]_{2\times 6}\,[\boldsymbol{a}_b]_{6\times 4} \approx [\boldsymbol{a}]_{2\times 4} = \begin{pmatrix} \Pi_K(a_1) & \Pi_K(a_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_K(a_1) & \Pi_K(a_2) \end{pmatrix}.$$

Los resultados obtenidos de esta forma no presentan diferencias significativas con respecto a interpolar $\boldsymbol{a}$.

Previo al cálculo de las matrices locales debemos calcular las matrices de proyección sobre cada elemento, es decir

$$\begin{aligned} \Pi_K(p) &= \Pi_K([P][p]) \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{|K|}\int_K [P]\right)}_{\Pi_p}[p], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_K(\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}) &= \Pi_K\Big([\boldsymbol{x}]^T[\boldsymbol{P}]^T[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{a}_b][\boldsymbol{DP}][\boldsymbol{u}]\Big) \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{|K|}\int_K [\boldsymbol{x}]^T[\boldsymbol{P}]^T[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{a}_b][\boldsymbol{DP}]\right)}_{\Pi_x}[\boldsymbol{u}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_K((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\nabla\cdot\boldsymbol{u})) &= \Pi_K\Big([P][\boldsymbol{a}_{\mathbf{a}}]\,[\boldsymbol{P}]\,[\boldsymbol{x}]\,[Z]\,[\boldsymbol{DP}]\,[\boldsymbol{u}]\Big) \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{|K|}\int_K [P][\boldsymbol{a}_{\mathbf{a}}]\,[\boldsymbol{P}]\,[\boldsymbol{x}]\,[Z]\,[\boldsymbol{DP}]\right)}_{\Pi_{div}}[\boldsymbol{u}], \end{aligned}$$

así obtenemos las identidades siguientes:

$$\begin{aligned} \chi_h(p) &= [P - \Pi_p]\,[p] \\ \chi_h(\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}) &= \big[[\boldsymbol{x}]^T[\boldsymbol{P}]^T[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{a}_b][\boldsymbol{DP}] - \Pi_x\big]\,[\boldsymbol{u}] \\ \chi_h((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\nabla\cdot\boldsymbol{u})) &= [[P][\boldsymbol{a}_{\mathbf{a}}]\,[\boldsymbol{P}]\,[\boldsymbol{x}]\,[Z]\,[\boldsymbol{DP}] - \Pi_{div}]\,[\boldsymbol{u}]. \end{aligned}$$

Luego podemos calcular las matrices locales para el método RELP, de la siguiente forma

$$(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v})_K = [\boldsymbol{v}]^T \underbrace{\left(\int_K [\boldsymbol{DP}]_{6\times 4}^T [\boldsymbol{DP}]_{4\times 6} dx \right)}_{K_1} [\boldsymbol{u}]$$

$$((\nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})_K = [\boldsymbol{v}]^T \underbrace{\left(\int_K [\boldsymbol{P}]_{6\times 2}^T [\boldsymbol{P}]_{2\times 6} [\boldsymbol{a}_b]_{6\times 4} [\boldsymbol{DP}]_{4\times 6} dx \right)}_{K_2} [\boldsymbol{u}]$$

$$(p, \nabla \cdot \boldsymbol{v})_K = [\boldsymbol{v}]^T \underbrace{\left(\int_K [\boldsymbol{DP}]_{6\times 4}^T [Z]_{4\times 1}^T [P]_{1\times 3} dx \right)}_{K_3} [p]$$

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{u}, q)_K = [q]^T \underbrace{\left(\int_K [P]_{3\times 1}^T [Z]_{1\times 4} [\boldsymbol{DP}]_{4\times 6} dx \right)}_{K_4} [\boldsymbol{u}]$$

$$(\chi_h(p), \chi_h(q))_K = [q]^T \underbrace{\left(\int_K [P - \Pi_p]^T [P - \Pi_p] dx \right)}_{K_5} [p]$$

$$(\chi_h(p), \chi_h(\boldsymbol{x} \cdot (\nabla \boldsymbol{v})\boldsymbol{a}))_K = [\boldsymbol{v}]^T \underbrace{\left(\int_K \left[[\boldsymbol{x}]^T [\boldsymbol{P}]^T [\boldsymbol{P}] [\boldsymbol{a}_b] [\boldsymbol{DP}] - \Pi_x \right]^T [P - \Pi_p] dx \right)}_{K_6} [p]$$

$$(\chi_h(\boldsymbol{x} \cdot (\nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{a}), \chi_h(q))_K = [q]^T \underbrace{\left(\int_K \left[[P] - \Pi_p \right]^T \left[[\boldsymbol{x}]^T [\boldsymbol{P}]^T [\boldsymbol{P}] [\boldsymbol{a}_b] [\boldsymbol{DP}] - \Pi_x \right] dx \right)}_{K_7} [\boldsymbol{u}]$$

$$\begin{aligned} &(\chi_h(\boldsymbol{x} \cdot (\nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{a}), \chi_h(\boldsymbol{x} \cdot (\nabla \boldsymbol{v})\boldsymbol{a}))_K = \\ &\qquad = [\boldsymbol{v}]^T \underbrace{\left(\int_K \left[[\boldsymbol{x}]^T [\boldsymbol{P}]^T [\boldsymbol{P}] [\boldsymbol{a}_b] [\boldsymbol{DP}] - \Pi_x \right]^T \left[[\boldsymbol{x}]^T [\boldsymbol{P}]^T [\boldsymbol{P}] [\boldsymbol{a}_b] [\boldsymbol{DP}] - \Pi_x \right] dx \right)}_{K_8} [\boldsymbol{u}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\chi_h((\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})(\nabla \cdot \boldsymbol{u})),\ \chi_h((\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})(\nabla \cdot \boldsymbol{v})))_K = \\ &\qquad = [\boldsymbol{v}]^T \underbrace{\left(\int_K \left[[P] [\boldsymbol{a}_{\mathbf{a}}] \, [\boldsymbol{P}] \, [\boldsymbol{x}] \, [Z] \, [\boldsymbol{DP}] - \Pi_{div} \right]^T \left[[P] [\boldsymbol{a}_{\mathbf{a}}] \, [\boldsymbol{P}] \, [\boldsymbol{x}] \, [Z] \, [\boldsymbol{DP}] - \Pi_{div} \right] dx \right)}_{K_9} [\boldsymbol{u}], \end{aligned}$$

es claro que $K_4 = K_3^T$ y que $K_7 = K_6^T$ lo que facilita el cálculo de éstas matrices.

Así la matriz elemental está dada por:

$$\boldsymbol{K}_K = \left[\begin{array}{c|c} \nu K_1 + K_2 + K_8 + K_9 & -K_3 + K_6 \\ \hline K_4 + K_7 & K_5 \end{array}\right]_{9\times 9}. \tag{5.1}$$

Para el caso de los saltos, sobre cada triángulo, se tiene

$$\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \boldsymbol{u})|_K = [\boldsymbol{n}]^T_{2\times 4} \left[\boldsymbol{DP}\right]_{4\times 6} [\boldsymbol{u}]_{6\times 1}$$

$$[\boldsymbol{n}] := \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{n} \end{bmatrix}_{4\times 2},$$

donde $\boldsymbol{n}$ es la normal exterior a K. Sea $F = K^+ \cap K^-$, entonces obtenemos que

$$\begin{aligned} [\![\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}]\!] &= \partial_{\boldsymbol{n}^+} \boldsymbol{u} + \partial_{\boldsymbol{n}^-} \boldsymbol{u} \\ &= \left[[\boldsymbol{n}]^T \left[\boldsymbol{DP}^+\right] - [\boldsymbol{n}]^T \left[\boldsymbol{DP}^-\right] \right] [\boldsymbol{u}], \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} ([\![\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}]\!], [\![\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v}]\!])_F = [\boldsymbol{v}]^T \int_F \left[[\boldsymbol{n}]^T \left[\boldsymbol{DP}^+\right] - [\boldsymbol{n}]^T \left[\boldsymbol{DP}^-\right] \right]^T \left[[\boldsymbol{n}]^T \left[\boldsymbol{DP}^+\right] - [\boldsymbol{n}]^T \left[\boldsymbol{DP}^-\right] \right] [\boldsymbol{u}] \\ = \quad [\boldsymbol{v}]^T \underbrace{\int_F \left[\left[\boldsymbol{DP}^+\right]^T [\boldsymbol{n}] [\boldsymbol{n}]^T \left[\boldsymbol{DP}^+\right] \right]}_{K_{F_1}} [\boldsymbol{u}] \\ - [\boldsymbol{v}]^T \underbrace{\int_F \left[\left[\boldsymbol{DP}^+\right]^T [\boldsymbol{n}] [\boldsymbol{n}]^T \left[\boldsymbol{DP}^-\right] \right]}_{K_{F_2}} [\boldsymbol{u}] \\ - [\boldsymbol{v}]^T \underbrace{\int_F \left[\left[\boldsymbol{DP}^-\right]^T [\boldsymbol{n}] [\boldsymbol{n}]^T \left[\boldsymbol{DP}^+\right] \right]}_{K_{F_3}} [\boldsymbol{u}] \\ + [\boldsymbol{v}]^T \underbrace{\int_F \left[\left[\boldsymbol{DP}^-\right]^T [\boldsymbol{n}] [\boldsymbol{n}]^T \left[\boldsymbol{DP}^-\right] \right]}_{K_{F_4}} [\boldsymbol{u}], \end{aligned}$$

y así tenemos las matrices correspondientes a los saltos $K_{F_1}, K_{F_2}, K_{F_3}, K_{F_4}$.

5.1.3. Vector de fuerza elemental

Siguiendo pasos análogos a lo anterior, obtenemos

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f} = [\boldsymbol{x}]^T[\boldsymbol{P}]^T[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{f}],$$

donde utilizamos la interpolación $\mathbb{P}_1$ de $\boldsymbol{f}$ sobre el triángulo K. Así

$$\begin{aligned}\Pi_K(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f}) &= \Pi_K\Big([\boldsymbol{x}]^T[\boldsymbol{P}]^T[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{f}]\Big)\\ &= \underbrace{\frac{1}{|K|}\int_K [\boldsymbol{x}]^T[\boldsymbol{P}]^T[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{f}],}_{\Pi_f}\end{aligned}$$

y luego

$$\chi_h(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f}) = [\boldsymbol{x}]^T[\boldsymbol{P}]^T[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{f}] - \Pi_f.$$

Por lo tanto, los vectores locales del método RELP están dados por

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_K &= [\boldsymbol{v}]^T \underbrace{\big([\boldsymbol{P}]^T[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{f}]\big)}_{F_1}\\ (\chi_h(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f}), \chi_h(q))_K &= [q]^T \underbrace{\int_K [P - \Pi_p]^T \big[[\boldsymbol{x}]^T[\boldsymbol{P}]^T[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{f}] - \Pi_f\big]}_{F_2}\\ (\chi_h(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f}), \chi_h(\boldsymbol{x} \cdot (\nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{a}))_K &= [\boldsymbol{v}]^T \underbrace{\int_K \big[[\boldsymbol{x}]^T[\boldsymbol{P}]^T[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{a}_b][\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}] - \Pi_x\big]^T \big[[\boldsymbol{x}]^T[\boldsymbol{P}]^T[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{f}] - \Pi_f\big]}_{F_3},\end{aligned}$$

así el vector elemental del lado derecho está dado por:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} [F1 + F3]_{6\times 1} \\ [F2]_{3\times 1} \end{bmatrix}_{9\times 1}. \tag{5.2}$$

5.2. Experimentos numéricos

En esta seccion, presentamos cuatro validaciones numéricas del análisis de error a priori y de la calidad del estimador a posteriori. Realizaremos pruebas de convergencia del método planteado y lo compararemos con los resultados obtenidos usando el método SUPG. Además, usando el estimador residual, refinaremos mallas utilizando la información local que entrega.

5.2.1. Caso analítico

En este caso el dominio es $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ y el campo advectivo está dado por $\boldsymbol{a} = (1,1)^t$. Consideramos la función $\boldsymbol{f}$ y las condiciones de borde de modo que la solución del problema está dada por:

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \sin(y) \\ e^x \cos(y) \end{pmatrix},$$

$$p(x,y) = -e^x(\sin(y) + \cos(y)) - (e-1)(\cos(1) - 1 - \sin(1)).$$

En la Figuras 5.2 y 5.3 podemos ver los gráficos del comportamiento de los errores, tanto para la velocidad como para la presión. Los resultados muestran en ambos casos, el orden de convergencia esperado.

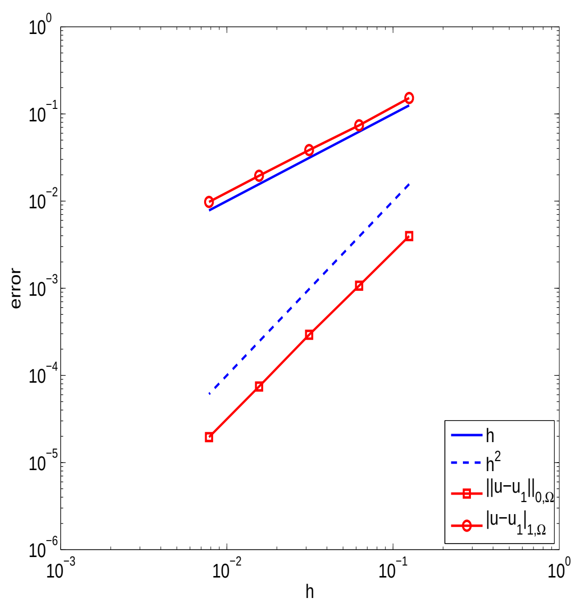


Figura 5.2: Convergencia de $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega}$ y $|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_{1,\Omega}$ para $\nu = 10^{-6}$.

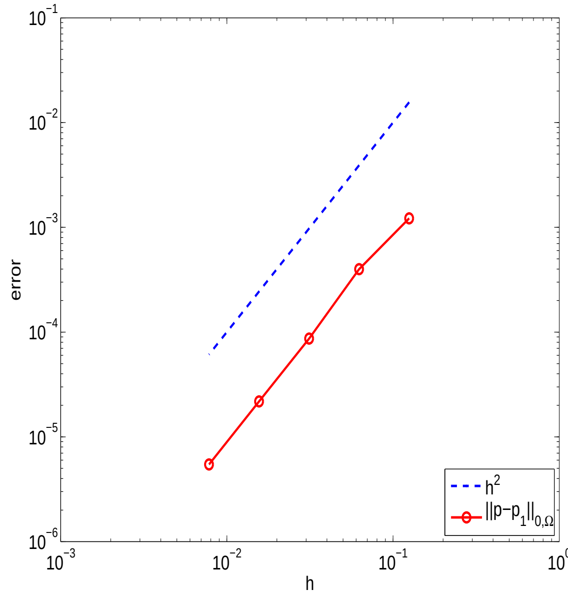


Figura 5.3: Convergencia de $\|p - p_1\|_{0,\Omega}$ para $\nu = 10^{-6}$.

Definamos ahora la siguiente norma, llamada norma de la energía

$$\|(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1, p - p_1)\|_{E,\Omega} := \left\{ \nu |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1|_{1,\Omega}^2 + \frac{1}{\nu} \|p - p_1\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2}, \tag{5.3}$$

con esta norma, podemos comparar la convergencia del presente método contra previas alternativas como el método SUPG [22], lo que se ve en la Figura 5.4

Además podemos evaluar el comportamiento del estimador con respecto al error en esta norma. Definiremos también, para evaluar nuestro estimador, el *índice de efectividad global*, como sigue,

$$\theta := \frac{\eta}{\|(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, p - p_1)\|_{E,\Omega}}. \tag{5.4}$$

Este índice entrega una idea de la calidad del estimador cuando aproxima al error. En general, se busca que θ se mantenga acotado cuando h tiende a 0.

Los resultados de convergencia del estimador y del error los podemos ver en la Figura 5.5, donde tanto el estimador como el error tienen el mismo comportamiento asintótico. En la Tabla 5.1 mostramos la efectividad del estimador cuando $h \to 0$ y vemos que el índice de efectividad se mantiene acotado.

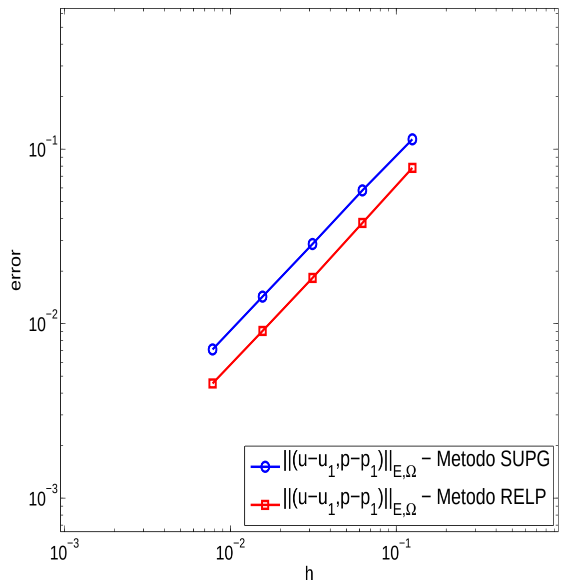


Figura 5.4: Convergencia de $\|(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1, p-p_1)\|_{E,\Omega}$ para los métodos RELP y SUPG, para $\nu = 1$.

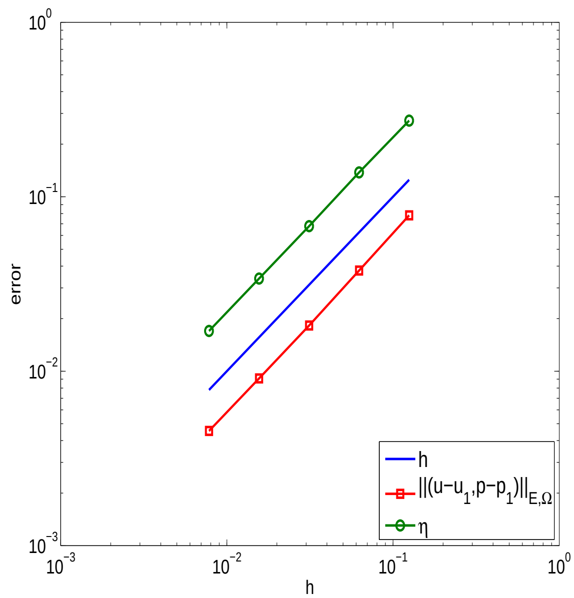


Figura 5.5: Convergencia de $\|(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1, p-p_1)\|_{E,\Omega}$ y de η para $\nu = 1$

h	$\|(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1, p-p_1)\|_{E,\Omega}$	η	θ
0.1250	7.813E-002	0.273	3.492
6.2500E-002	3.776E-002	0.138	3.648
3.1250E-002	1.828E-002	6.777E-002	3.707
1.5625E-002	9.089E-003	3.394E-002	3.734
7.8125E-003	4.544E-003	1.700E-002	3.742

Cuadro 5.1: Indice de efectividad cuando $h \to 0$

La siguiente prueba tiene que ver con la sensibilidad del estimador cuando $\nu \to 0$ lo que se ve en la Tabla 5.2 donde vemos que el estimador no varia significativamente comparado con la variacion de ν.

ν	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
θ	3.7339	3.7345	3.8029	5.1375	7.9599	8.0374	8.0378

Cuadro 5.2: Indice de efectividad cuando $\nu \to 0$

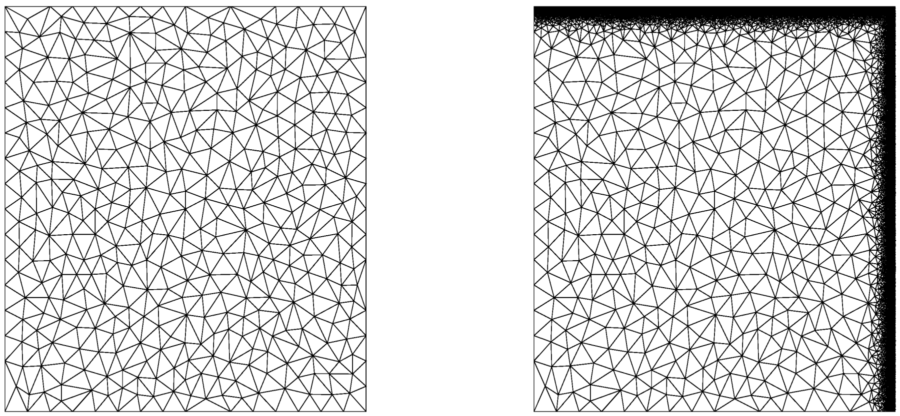
5.2.2. Capas límite

En el siguiente caso el dominio es $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ y el campo advectivo está dado por $\boldsymbol{a} = (1,1)^t$. Consideramos la función $\boldsymbol{f}$ y las condiciones de borde de modo que la solución del problema está dada por:

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{\frac{y}{\nu}} - e^{\frac{1}{\nu}}}{1 - e^{\frac{1}{\nu}}} \\[2ex] \dfrac{e^{\frac{x}{\nu}} - e^{\frac{1}{\nu}}}{1 - e^{\frac{1}{\nu}}} \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

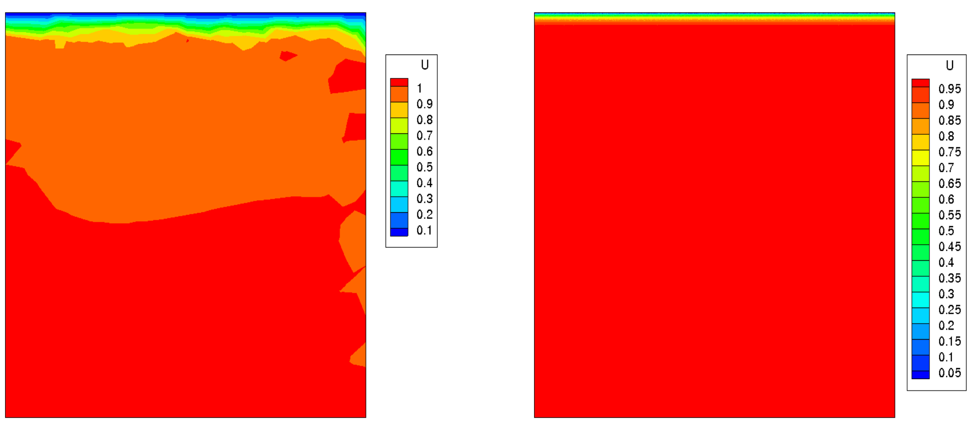
$$p(x,y) = x - y \tag{5.6}$$

En este caso, cuando ν es cercano a cero, se producen capas límites en los bordes del dominio $y = 1$ y $x = 1$, díficiles de capturar por el método de elementos finitos. Como el estimador a posteriori se calcula a nivel local, podemos mejorar la solución refinando la malla donde el estimador tiene valores mayores, para ello escogemos los triángulos que cumplen $\eta_{R,K} \geq \delta \max\{\eta_{R,K} : K \in \mathcal{T}_h\}$, para algún $0 < \delta < 1$, en nuestro caso elegimos $\delta = \frac{1}{2}$.



(a) Malla original, 775 elementos (b) Malla adaptada, 38390 elementos

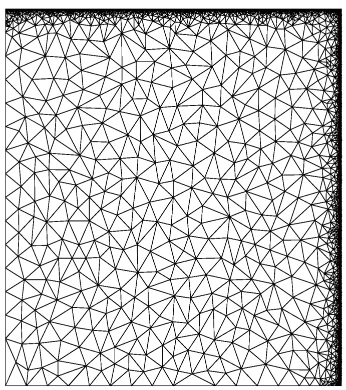
Figura 5.6: Mallas original y adaptada, para $\nu = 10^{-2}$.



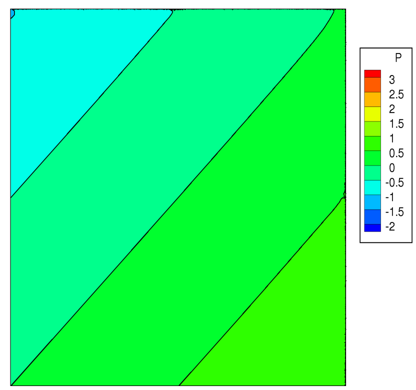
(a) Solución original (b) Solución adaptada

Figura 5.7: Primera componente de la velocidad, para $\nu = 10^{-2}$

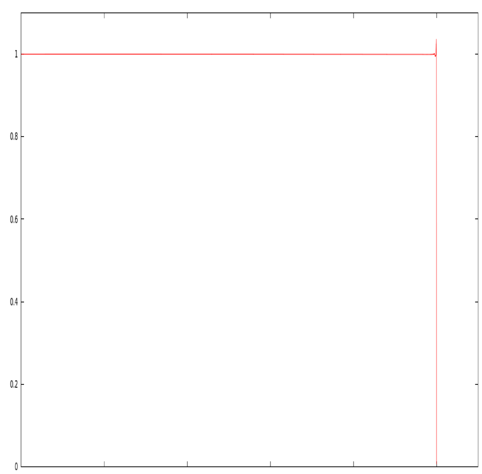
Esperamos que los más altos valores se encuentren en triángulos presentes en zonas de capas límite, lo que vemos en las mallas originales y refinadas de la Figura 5.6. Además en la Figura 5.7 mostramos la solución de la primera componente de la velocidad, tanto para la malla original como para la malla adaptada.
Si disminuimos el valor de ν a 10^{-6}, la capa límite es más cercana al borde y notamos en el corte de la Figura 5.8 que se producen oscilaciones controladas por el método.



(a) Malla adaptada, 37832 elementos



(b) Presión adaptada

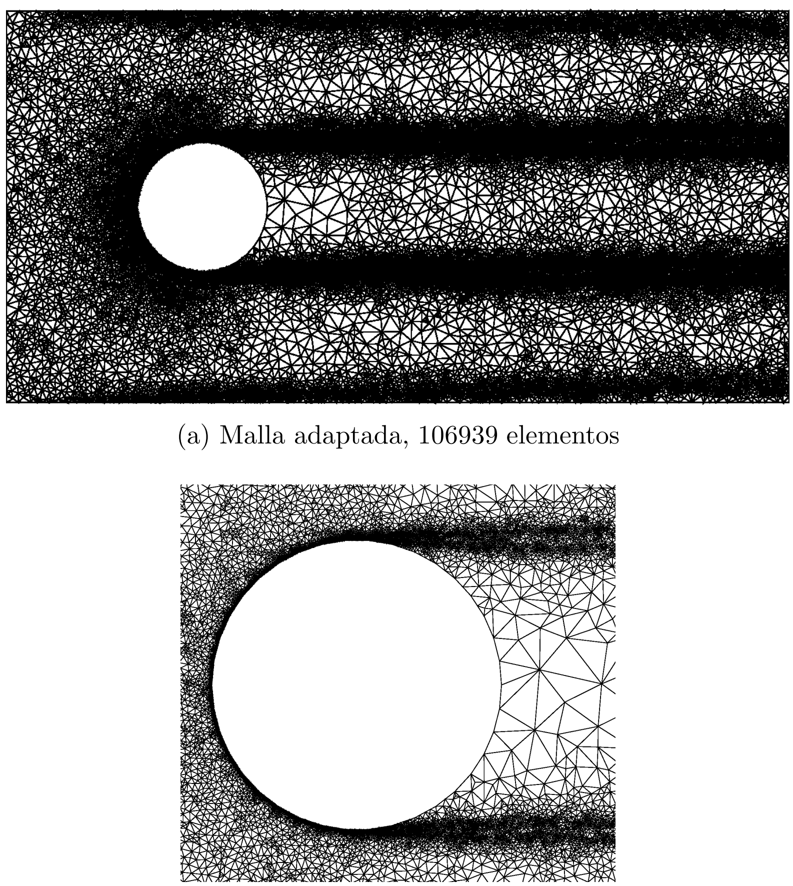


(c) Corte de la primera componente de la velocidad

Figura 5.8: Malla refinada, solución de la presión y corte en $x = 0{,}5$, con la malla refinada, para $\nu = 10^{-6}$

5.2.3. El cilindro

En este caso el dominio es $\Omega := (-3, 9) \times (-3, 3)$ al cual se le remueve un círculo centrado en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ de radio $r = 1$, el campo advectivo está dado por $\boldsymbol{a} = (1, 0)^t$, $\nu = 10^{-6}$ y $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. Además un perfil parabólico para la velocidad tangencial se impone en la entrada $x = -3$ y una presión nula a la salida $x = 9$. En el resto del contorno de Ω, (incluído el borde del círculo) la velocidad en ambas componentes es igual a cero.
Con todo lo anterior, es natural esperar la existencia de capas límite, tanto en la frontera del dominio como al interior, en especial el borde del círculo, lo cual es corroborado por la adaptación realizada con el estimador, lo que se ve en la Figura 5.9 en la malla adaptada, además realizamos un zoom alrededor del círculo, para ver en detalle la zona de mayor refinamiento.



(a) Malla adaptada, 106939 elementos

(b) Zoom

Figura 5.9: Malla adaptada, y zoom correspondiente.

También en la Figura 5.10 podemos ver la magnitud de la velocidad en el dominio, y en la Figura 5.11 vemos un corte de la primera componente de la velocidad,

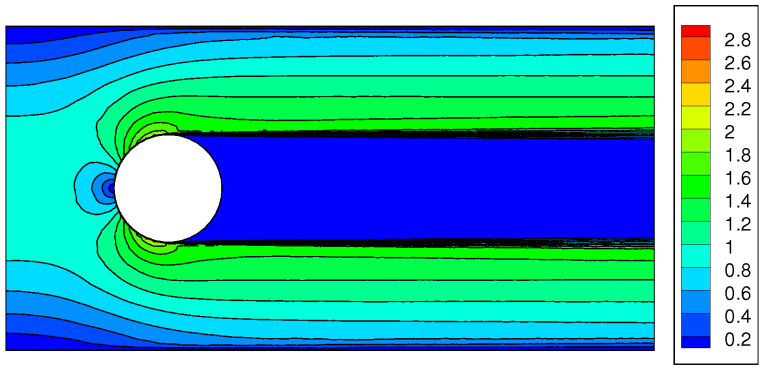


Figura 5.10: Magnitud de la velocidad

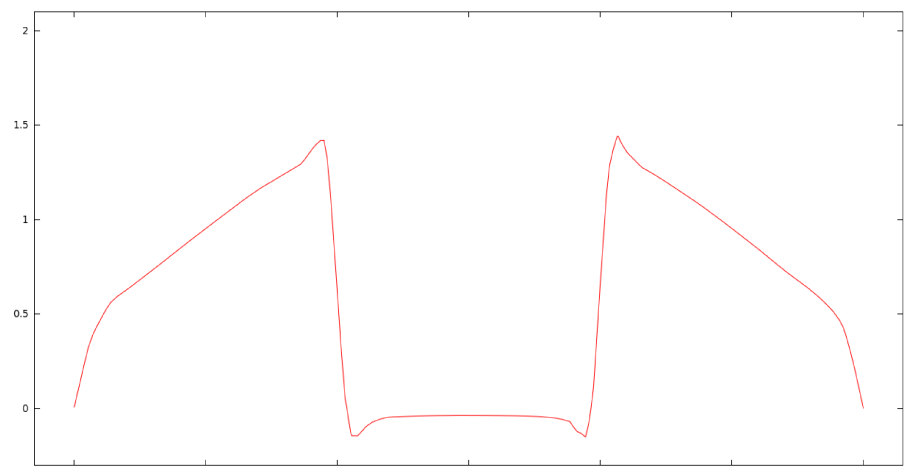


Figura 5.11: Corte en $x = 3$ de la primera componente de la velocidad

5.2.4. Dominio en forma de L

En este caso tratamos de ver el comportamiento de un fluído en un dominio en forma de L, para ello consideramos el dominio $\Omega = (0,3) \times (0,3) - (0,2) \times (1,3)$. Aquí $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$, el

campo advectivo está dado por $\boldsymbol{a} = (1,0)^t$ y $\nu = 10^{-4}$.
En la entrada $x = 0$ imponemos la velocidad $\boldsymbol{u} = (1,0)$ cuando $0 \leq y \leq 1/2$, además fijamos la presión a cero en la salida $y = 3$, por último fijamos la velocidad a cero en el resto del contorno.
En este caso notamos capas límite, tanto internas como en el borde, y como vemos en la Figura 5.12 el refinamiento es mayor en estas zonas.

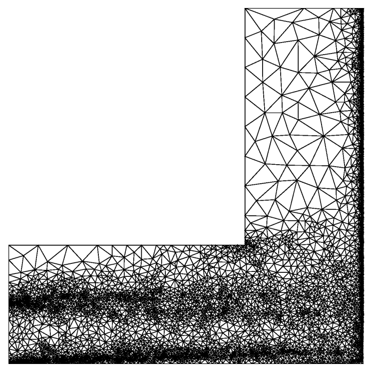
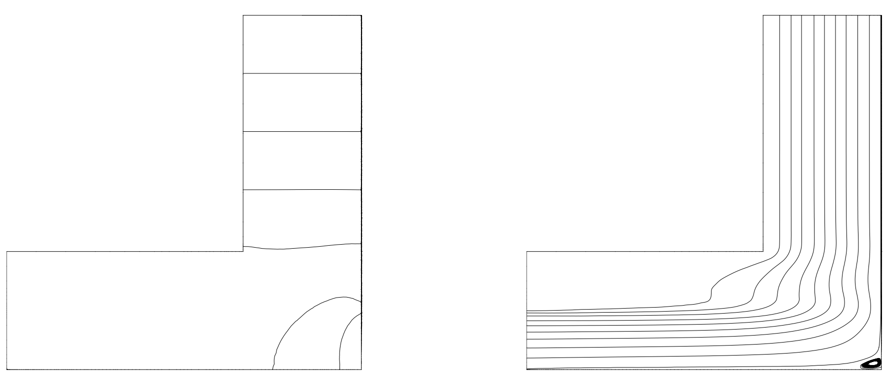


Figura 5.12: Malla final, 49970 elementos

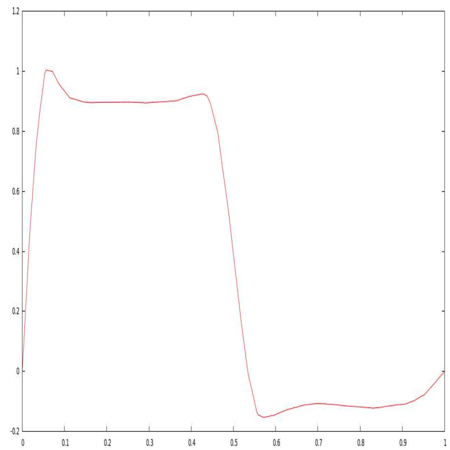
En la Figura 5.13 vemos los isovalores de la presión y además las líneas de corriente de la velocidad, donde notamos una recirculación en la esquina inferior derecha, capturada por el método.



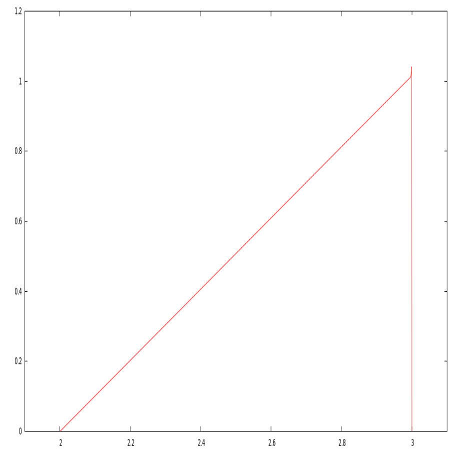
(a) Presión (b) Velocidad

Figura 5.13: Isolíneas de la presión (a) y líneas de corriente para la velocidad (b).

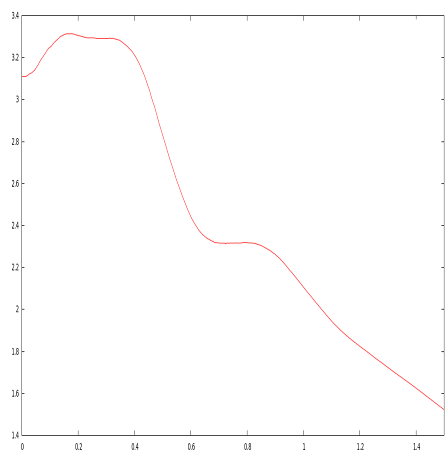
Finalmente realizamos cortes para ver la solución en puntos importantes del dominio, en la Figura 5.14 podemos ver los distintos resultados.



(a) Velocidad tangencial en $x = 1$



(b) Velocidad normal en $y = 2$



(c) Presión en $x = 3$

Figura 5.14: Cortes de la primera componente de la velocidad (a), segunda componente (b) y presión (c)

Los mismos cortes fueron realizados en [24] donde se obtuvieron similares resultados, tanto para las velocidades como para la presión.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo Futuro

Durante este trabajo se introdujo el nuevo método de elementos finitos estabilizados RELP aplicado a la ecuación de Oseen, para espacios de interpolación del tipo $\mathbb{P}_1^2 \times \mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_1^2 \times \mathbb{P}_0$. Se demostró el buen planteamiento del mismo y por lo tanto la estabilidad requerida, junto a la convergencia de método. Además, para este esquema, se definió y se analizó un estimador de error a posteriori residual que permite la adaptación de mallas, lo que mejora la calidad de la solución discreta. Este esquema junto con el estimador residual fueron validados por medio de experimentos numéricos.

Dentro de las posibles extensiones de este trabajo podemos nombrar

- Extender el método RELP a órdenes de interpolación superiores, donde el término $\Delta \boldsymbol{u}_h$ formaría parte de los términos extras añadidos.

- El análisis de la derivación y del error del método para el caso en 3D.

- Analizar el método para la ecuación general de Oseen y también el caso no estacionario.

- Usar las ventajas de este método a la hora de trabajar en régimen turbulento para tratar de encontrar soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes bajo esas condiciones.

Bibliografía

[1] M. Ainsworth y J. T. Oden. A posteriori error estimators for the Stokes and Oseen equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(1):228–245, 1997.

[2] M. Ainsworth y J.T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis.* Pure and applied mathematics. John Wiley & Sons, New York, 2000.

[3] R. Araya, G. R. Barrenechea, y A. Poza. An adaptive stabilized finite element method for the generalized Stokes problem. *J. Comput. Appl. Math*, 214:457–479, 2008.

[4] R. Araya, G.R. Barrenechea, L.P. Franca, y F. Valentin. Stabilization arising from PGEM: a review and further developments. *Appl. Numer. Math*, 59(9):2065–2081, 2009.

[5] R. Araya, G.R. Barrenechea, y F. Valentin. Stabilized finite element methods based on multiscale enrichment for the Stokes problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44:322–348, 2006.

[6] R. Araya, G.R. Barrenechea, y F. Valentin. A stabilized finite-element method for the Stokes problem including element and edge residuals. *IMA J. Numer. Anal*, 27:172–197, 2007.

[7] R. Araya, A. Poza, y E. P. Stephan. A hierarchical a posteriori error estimate for an advection–diffusion–reaction problem. *Math. Models Meth. Appl. Sci*, 15(7):1119–1139, 2005.

[8] R. Araya, A. Poza, y F. Valentin. On a hierarchical error estimator combined with a stabilized method for the Navier-Stokes equations. *Numer. Meth. Partial Differ. Equ*, 28:782–806, 2012.

[9] D.N. Arnold, F. Brezzi, y M. Fortin. A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, 23:337–344, 1984.

[10] I. Babuška. The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numer. Math*, 20:179–192, 1973.

[11] C. Baiocchi, F. Brezzi, y L. Franca. Virtual bubbles and Galerkin-Least-Squares type methods (Ga.L.S.). *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*, 105:125–141, 1993.

[12] G. R. Barrenechea y F. Valentin. A residual local projection method for the Oseen equation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*, 199:1906–1921, 2010.

[13] G.R. Barrenechea, L.P. Franca, y F. Valentin. A Petrov-Galerkin enriched method: a mass conservative finite element method for the Darcy equation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*, 196:2449–2464, 2007.

[14] G.R. Barrenechea y F. Valentin. Consistent local projection stabilized finite element methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 48:1801–1825, 2010.

[15] R. Becker y M. Braack. A finite element pressure gradient stabilization for the Stokes equations based on local projections. *Calcolo*, 38:173–199, 2001.

[16] M. Braack y E. Burman. Local projection stabilization for the Oseen problem and its interpretation as a variational multiscale method. *SIAM J. Numer. Anal*, 43:2544–2566, 2006.

[17] M. Braack, E. Burman, V. John, y G. Lube. Stabilized finite element methods for the generalized Oseen problem. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*, 196:853–866, 2007.

[18] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext Series. Springer, New York, 2010.

[19] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers. *Anal. Numer*, págs. 129–151, 1974.

[20] F. Brezzi, L. Franca, T.J. Hughes, y A. Russo. $b = \int g$. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*, 145:329–339, 1997.

[21] F. Brezzi y A. Russo. Choosing bubbles for advection–diffusion problems. *Math. Models Meth. Appl. Sci*, 4:571–587, 1994.

[22] A.N. Brooks y T.J.R. Hughes. Streamline upwind Petrov–Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier–Stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*, 32:199–259, 1982.

[23] E. Burman. Pressure projection stabilizations for Galerkin approximations of Stokes and Darcy's problem. *Numer. Meth. Partial Differ. Equ*, 24:127–143, 2008.

[24] R. Codina. Analysis of a stabilized finite element approximation of the Oseen equations using orthogonal subscales. *Appl. Numer. Math*, 58:264–283, 2008.

[25] C. Dohrmann y P. Bochev. A stabilized finite element method for the Stokes problem based on polynomial pressure projections. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 46:183–201, 2004.

[26] A. Ern y J.L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, New York, 2004.

[27] L. P. Franca y S. L. Frey. Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*, 99(2–3):209–233, 1992.

[28] L.P. Franca, A.L. Madureira, y F. Valentin. Towards multiscale functions: enriching finite element spaces with local but not bubble–like functions. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*, 194:3006–3021, 2005.

[29] L.P. Franca, J.V.A. Ramalho, y F. Valentin. Multiscale and Residual-Free Bubble functions for reaction–advection–diffusion problems. *Int. J. Multiscale Eng*, 3:297–312, 2005.

[30] L.P. Franca y F. Valentin. On an improved unusual stabilized finite element method for the advective–reactive–diffusive equation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*, 190:1785–1800, 2000.

[31] G. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, tomo I. Springer-Verlag, New York, 1994.

[32] S. Ganesan, G. Matthies, y L. Tobiska. Local projection stabilization of equal order interpolation applied to the Stokes problem. *Math. Comp*, 77:2039–2060, 2008.

[33] Z. Ge, M. Feng, y Y. He. Stabilized multiscale finite element method for the stationary Navier-Stokes equations. *J. Math. Anal. Appl*, 354:708–717, 2009.

[34] V. Girault y P.A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*. Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[35] Y. He y J. Li. A stabilized finite element method based on local polynomial pressure projection for the stationary Navier–Stokes equations. *Appl. Numer. Math*, 58:1503–1514, 2008.

[36] T.J.R. Hughes, G.R. Feijoo, L. Mazzei, y J. Quincy. The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*, 166:3–24, 1998.

[37] G. Lube y G. Rapin. Residual-based stabilized higher-order FEM for a generalized Oseen problem. *Math. Models Meth. Appl. Sci*, 16:949–966, 2006.

[38] C. W. Oseen. *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*. Akad. Verl.-Ges., Leipzig, 1927.

[39] L. Payne y H. Weinberger. An optimal Poincaré inequality for convex domains. *Arch. Rational Mech. Anal.*, págs. 286–292, 1960.

[40] H.G. Roos, M. Stynes, y L. Tobiska. *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations: convection-diffusion-reaction and flow problems*. Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[41] R. Temam. *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*. Cbms-Nsf Regional Conference Series in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1995.

[42] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Advances in numerical mathematics. Wiley-Teubner, Stuttgart, 1996.

[43] R. Verfürth. A posteriori error estimators for the Stokes problem. *Numer. Math*, 55:309–325, 1989.

[44] R. Verfürth. A posteriori error estimators for the Stokes problem II. Non-conforming discretizations. *Numer. Math*, 60:235–249, 1991.

[45] R. Verfürth. A posteriori error estimators for convetion-diffusion equations. *Numer. Math*, 80:641–663, 1998.