



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS LIBRES DE BLOQUEO
PARA PROBLEMAS ELASTODINÁMICOS DE ESTRUCTURAS
DELGADAS

Director de memoria: Rodolfo Rodríguez A.
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Co-Director de memoria: Frank Sanhueza E.
Departamento de Ingeniería Civil
Facultad de Ingeniería
Universidad Católica de la Santísima Concepción

Memoria para optar al título de
Ingeniero Civil Matemático

PATRICK VEGA ROMÁN
MARZO 2014
CONCEPCIÓN - CHILE

Método de elementos finitos libres de bloqueo para problemas elastodinámicos de estructuras delgadas

Directores de Memoria:

Dr. Rodolfo Rodríguez Alonso
Dr. Frank Emilio Sanhueza Espinoza

Memoria para optar al título de
Ingeniero Civil Matemático

Autor:

Patrick Andrés Vega Román

Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Marzo 2014

Comisión examinadora : Dr. Rommel Bustinza P.

Dr. David Mora H.

Dr. Rodolfo Rodríguez A.

Dr. Frank Sanhueza E.

Este documento está preparado para ser imprimido por una cara.

*A mis padres,
mi abuela
y a la que me acompañó
durante este camino.*

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios por la vida, la salud y por estar siempre cuidándome, a Elsa y Patricio, mis padres, por la formación que me dieron y por su apoyo incondicional en todo el amplio sentido de la palabra, a mis amigos y compañeros, los del día a día y a los que veía poco, gracias por los gratos momentos de trabajo, juerga y apoyo en las duras. A los profesores que fueron parte de mi formación académica, cada cual a su manera, y a un montón de gente en la facultad que de una u otra forma aportó su granito de arena.

A mis directores de memoria, a Frank por el apoyo y aportes durante el desarrollo de esta memoria de título, y al profesor Rodolfo Rodríguez, que desde el primer curso que tuve con él, hasta el desarrollo de esta memoria, ha sido ejemplo de profesionalismo, amabilidad y paciencia.

Al proyecto ANANUM (Anillo de Investigación en Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales Parciales), ACT1118, CONICYT, por financiar parcialmente este trabajo.



Y al final, pero no menos importante, a Yazmina, mi polola, por ser una amiga y compañera que durante el desarrollo de este trabajo me brindó su apoyo, consejo, gruñidos, comprensión y afecto.

Gracias a todos, en general, quienes hicieron más grato mi pasar por esta etapa de mi vida.

Resumen

En el presente trabajo se tratará el problema elastodinámico de vigas de Timoshenko, partiendo de una caracterización constructiva de las ecuaciones que describen el comportamiento de la viga en elastodinámica, adaptando resultados de existencia, unicidad, regularidad y comportamiento en el límite, en un sentido a precisar, de nuestro problema (siguiendo la línea de [8]). Posteriormente, se hará un estudio experimental del fenómeno de bloqueo (fenómeno que será descrito más adelante), a través del uso de un método numérico apropiado y de la interpretación de los resultados de la implementación de éste.

Inicialmente, se desarrolla una breve introducción en que se manifiesta la necesidad del estudio de este problema.

Luego, se introduce la versión estática de las ecuaciones a estudiar mediante una construcción basada en métodos de energía y principios variacionales, para así establecer el problema variacional dinámico que estudiaremos en lo que sigue.

Posteriormente, se presentan resultados de existencia, unicidad y regularidad, basados en métodos de estimación a priori para ecuaciones hiperbólicas (usando herramientas como la desigualdad de Gronwall) y un resultado en que se establece la relación entre una familia de problemas (cada uno de ellos el ya estudiado pero asociado a un espesor fijo, como parámetro) con un problema límite de dicha familia, a saber, los problemas elastodinámicos de la viga de Timoshenko y Euler-Bernoulli, respectivamente.

A su vez, se formula un método de elementos finitos para modelar el problema evolutivo de Timoshenko, con el uso de integración reducida, que permitirá tratar el problema sin sufrir de bloqueo numérico.

Continuamos con una primera aproximación a la estimación a priori del error de método, la de la semidiscretización temporal.

A modo ilustrativo, se presentan experimentos numéricos para la validación del método libre de bloqueo y determinación experimental de los órdenes de convergencia para el mismo

método.

Por último, se presentan conclusiones de este trabajo y trabajo futuro. Se incluye además un breve apéndice en que se justifica, de manera experimental, el uso de un método libre de bloqueo.

Índice

Agradecimientos	VI
Resumen	VII
1. Introducción	1
1.1. Motivación para el estudio del bloqueo	1
1.2. Acercamiento a los problemas dinámicos	2
2. Teoría de vigas	4
2.1. Teoría de vigas de Euler-Bernoulli	5
2.2. Teoría de vigas de Timoshenko	7
3. Viga de Timoshenko en elastodinámica	10
3.1. El principio de Hamilton	10
3.2. Formulación variacional del problema elastodinámico	11
4. Existencia, unicidad y regularidad	14
4.1. Existencia y unicidad	14
4.2. Regularidad	18
5. Relación con la viga de Euler-Bernoulli	24
6. Discretización del problema	28
6.1. Semidiscretización espacial	28
6.1.1. Discretización estándar	29
6.1.2. Integración reducida	30
6.2. Discretización temporal	31
6.2.1. Método de Newmark	32
7. Estimación de error a priori para el esquema semidiscreto	34

8. Experimentos numéricos	43
8.1. Herramientas para validar la implementación	43
8.2. Determinación experimental de los órdenes de convergencia	45
9. Conclusiones y trabajo futuro	50
A. Justificación experimental del método libre de bloqueo	51
B. Algunos resultados	53
Bibliografía	55

Índice de figuras

8.1. Curvas de error para los desplazamientos y rotaciones usando integración reducida en el término de corte.	49
A.1. Curvas de error para los desplazamientos y rotaciones sin uso de integración reducida en el término de corte.	51

Índice de Tablas

8.1. Error $L^2(0, T; L^2)$ ($\times 10^{-3}$) para los desplazamientos con integración reducida en el término de corte.	47
8.2. Error $L^2(0, T; L^2)$ ($\times 10^{-3}$) para los rotaciones con integración reducida en el término de corte.	47
8.3. Orden de convergencia experimental para el desplazamiento (discretización espacial).	48
8.4. Orden de convergencia experimental para la rotación (discretización espacial).	48
8.5. Orden de convergencia experimental para el desplazamiento (discretización temporal).	49
8.6. Orden de convergencia experimental para la rotación (discretización temporal).	49

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación para el estudio del bloqueo

La principal motivación de este proyecto es hacer un aporte al análisis numérico de métodos de elementos finitos para problemas dinámicos de estructuras elásticas delgadas en régimen transitorio.

Los problemas elásticos estacionarios para estructuras delgadas (modelo de Timoshenko para vigas y arcos, modelo de Reissner-Mindlin para placas, modelo de Naghdi para láminas, etc.) involucran formas bilineales continuas y elípticas para las que, en principio, los métodos de elementos finitos estándar serían adecuados para su solución numérica. Sin embargo, estos métodos sufren del así llamado fenómeno de *bloqueo* (“*locking*”). Este fenómeno se manifiesta en que las soluciones numéricas obtenidas no aproximan en absoluto a la solución verdadera, hasta que el tamaño de la malla sea inferior a un cierto umbral (el cual, típicamente, resulta prohibitivamente pequeño). La razón de este comportamiento es el que el cociente entre las constantes de continuidad y elipticidad de la forma bilineal es proporcional al recíproco del espesor de la estructura al cuadrado. Este cociente puede ser muy grande para estructuras delgadas y afecta la constante de las estimaciones del error del método. El fenómeno de bloqueo fue estudiado en detalle en [2].

Por esta razón, se han diseñado diversos métodos que no sufren de bloqueo y que brindan buenas aproximaciones de la solución para estructuras delgadas, aún para mallas groseras. El estudio analítico y experimental de métodos libres de bloqueo para problemas estacionarios de placas es un tema profundamente estudiado desde hace muchos años. Una muy buena presentación del análisis de estos métodos, en el caso de placas de Reissner-Mindlin, aparece en la monografía [5].

1.2. Acercamiento a los problemas dinámicos

Recientemente, se ha extendido el análisis de métodos libres de bloqueo a problemas dinámicos armónicos (determinación de modos libres de vibración [3]) y al estudio de estabilidad (pandeo [6]). En cambio, el estudio de problemas elastodinámicos en régimen transitorio apenas se ha iniciado, pese a que los métodos analizados en régimen estacionario son ampliamente utilizados en la práctica ingenieril también en estos problemas. Aparentemente, las únicas referencias para el problema elastodinámico son las de Shen R. Wu [8, 7], cuyos resultados para los elementos MITC4 no resultan concluyentes. En efecto, si bien Wu presenta estimaciones del error con constantes que no degeneran cuando el espesor de la placa es muy pequeño, estas estimaciones también dependen de normas de la solución que no se sabe que sean independientes de este espesor.

El objetivo de este proyecto es contribuir al análisis de la solución numérica del problema elastodinámico de estructuras delgadas. En particular, se estudió el problema elastodinámico de vigas de Timoshenko. Éste es un problema unidimensional cuyo análisis en el caso estático [1] constituyó el primer aporte al estudio de los métodos libres de bloqueo. En este contexto unidimensional, se demostró el buen planteo del problema elastodinámico y se estudió su comportamiento asintótico cuando el espesor se hace pequeño. Luego, se introdujo un método numérico basado en la discretización espacial por elementos finitos de [1] combinado con el esquema de Newmark para la discretización temporal. Se estudió teóricamente la semidiscretización y experimentalmente la discretización total.

En lo que sigue, se describe el contenido de los restantes capítulos de esta memoria.

El segundo capítulo introduce la versión estática de las ecuaciones a estudiar mediante una construcción basada en métodos de energía y principios variacionales. El capítulo 3, siguiendo la línea del capítulo 2, termina estableciendo el problema variacional dinámico que estudiaremos en lo que sigue.

En los capítulos 4 y 5 se presentan resultados de existencia, unicidad y regularidad, basados en métodos de estimación a priori para ecuaciones hiperbólicas (usando herramientas como la desigualdad de Gronwall) y un resultado en que se establece la relación entre una familia de problemas (cada uno de ellos el ya estudiado, pero asociado a un espesor fijo como parámetro) con el problema límite de dicha familia, a saber, los problemas elastodinámico de la viga de Timoshenko y Euler-Bernoulli, respectivamente.

A su vez, en el capítulo 6 se formula un método de elementos finitos para modelar el problema evolutivo de Timoshenko, con el uso de integración reducida, que permitirá tratar el problema sin sufrir de bloqueo numérico.

El capítulo 7 exhibe un primer acercamiento a la obtención de una estimación a priori para el error del método: la estimación a priori del error para la semidiscretización espacial.

En el capítulo 8, se presentan experimentos numéricos para la validación del método libre de bloqueo y determinación experimental de los órdenes de convergencia para el mismo método.

Por último, en el capítulo 9 se presentan conclusiones de este trabajo y trabajo futuro. Se incluyen, además, dos breves apéndices: uno donde se justifica, de manera experimental, el uso de un método libre de bloqueo y otro con algunos resultados utilizados durante el desarrollo de esta memoria.

Capítulo 2

Teoría de vigas

Una viga es un elemento estructural elástico tridimensional con una dimensión significativamente mayor a las otras dos, que además está sujeto a cargas que producen en él un fenómeno llamado flexión. Conocer las tensiones y esfuerzos producidos por dicha flexión es de suma importancia en ingeniería estructural para calcular qué cargas puede soportar una viga, con determinados parámetros físicos y geométricos, sin colapsar.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de una viga pueden ser derivadas de la mecánica vectorial, o bien vía métodos de energía y principios variacionales. En mecánica vectorial, las fuerzas y momentos presentes son sumados para obtener ecuaciones de equilibrio o movimiento. En métodos de energía, los principios de trabajo virtual o sus derivados, tales como el principio de mínima energía potencial o energía complementaria, son usados para obtener las ecuaciones. Si bien ambos métodos pueden entregarnos las mismas ecuaciones, los métodos de energía tienen la ventaja de proporcionar información sobre la forma de las condiciones de contorno.

Comenzaremos tratando el problema estático, cuyas ecuaciones se sustentan en el principio de trabajo virtual. Para el problema dinámico, la deducción se sigue de la versión dinámica del principio de trabajo virtual: el principio de Hamilton.

Para describir una teoría de vigas, que nos permitirá representar la cinemática de las deformaciones, introducimos el siguiente sistema de referencias: la coordenada x es tomada a lo largo de la viga, la coordenada z a lo largo del espesor (la altura) de la viga y la coordenada y es tomada a lo ancho de la viga. En general, en una teoría de vigas, todas las cargas aplicadas y la geometría son tales que los desplazamientos (u^x, u^y, u^z) a lo largo de las coordenadas (x, y, z) son sólo funciones de las coordenadas x y z . Aquí asumimos que el desplazamiento u^y es idénticamente cero.

La más simple de las teorías de vigas es la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, la cual está

basada en el campo de desplazamientos

$$\begin{aligned} u_0^x(x, z) &= -z \frac{dw_0}{dx}, \\ u_0^z(x, z) &= w_0(x), \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde w_0 es el desplazamiento transversal del punto $(x, 0)$, que representa un punto sobre el plano medio de la viga ($z = 0$), y el subíndice 0 denota que las cantidades son referentes a la teoría de Euler-Bernoulli. El campo de desplazamientos en la ecuación (2.1) implica que las fibras normales al plano medio antes de la deformación permanecen normales al plano medio después de la deformación. Este supuesto nos indica que no estamos considerando deformaciones transversales normales ni de corte.

La siguiente teoría de vigas a considerar es la de Timoshenko, que es la más cercana en complejidad a Euler-Bernoulli, la cual se basa en el campo de desplazamientos

$$\begin{aligned} u_\zeta^x(x, z) &= -z\beta_\zeta(x), \\ u_\zeta^z(x, z) &= w_\zeta(x), \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde w_ζ denota el desplazamiento transversal del punto $(x, 0)$, β_ζ la rotación de la sección transversal y el subíndice ζ denota que las cantidades refieren a la teoría de Timoshenko (en las siguientes secciones, ζ denotará el espesor de la viga). En la teoría de vigas de Timoshenko el supuesto de normalidad de la teoría de Euler-Bernoulli es relajado, y se incluye una deformación transversal de corte constante respecto de la coordenada del espesor (y su esfuerzo de corte obtenido de la ecuación constitutiva). La teoría de vigas de Timoshenko requiere factores de corrección para compensar el error debido a suponer que el esfuerzo de corte es constante.

2.1. Teoría de vigas de Euler-Bernoulli

Dada una deformación virtual de la viga, la energía potencial δU de la misma está dada por

$$\delta U = \int_0^L \int_A \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dA dx, \quad (2.3)$$

donde δ es el símbolo de variación, A el área de la sección transversal de la viga uniforme, L el largo de la viga, σ_{xx} la tensión axial y ε_{xx} la deformación normal. Notamos que la energía de deformación asociada a la deformación de corte es nula en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli.

Usando la relación lineal de deformación-desplazamiento,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0^x}{\partial x} = -z \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \quad (2.4)$$

en la ecuación (2.3), obtenemos

$$\delta U = - \int_0^L M_{xx}^0 \frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} dx, \quad (2.5)$$

donde M_{xx}^0 es el momento flector

$$M_{xx}^0 = \int_A z \sigma_{xx} dA. \quad (2.6)$$

Assumiendo que la densidad de carga volumétrica $q(x)$ actúa sobre el centroide de la viga y que no se aplican más cargas, el trabajo virtual realizado por la densidad de carga volumétrica q está dada por

$$\delta V = - \int_0^L q A \delta w_0 dx. \quad (2.7)$$

El principio de desplazamientos virtuales establece que si un cuerpo está en equilibrio, entonces $\delta U + \delta V = 0$. Así, tenemos

$$\delta U + \delta V = - \int_0^L \left(M_{xx}^0 \frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} + q A \delta w_0 \right) dx = 0. \quad (2.8)$$

Integrando por partes dos veces el primer término en la ecuación (2.8) llegamos a

$$\int_0^L \left(- \frac{d^2 M_{xx}^0}{dx^2} - q A \right) \delta w_0 dx + \left[M_{xx}^0 \frac{d \delta w_0}{dx} - \frac{d M_{xx}^0}{dx} \delta w_0 \right]_0^L = 0. \quad (2.9)$$

De la arbitrariedad de δw_0 en ($0 < x < L$), obtenemos la ecuación de equilibrio

$$- \frac{d^2 M_{xx}^0}{dx^2} = q A \quad \text{para } 0 < x < L. \quad (2.10)$$

Es útil introducir la fuerza de corte Q_x^0 y reescribir la ecuación de equilibrio (2.10) de la siguiente forma:

$$- \frac{d M_{xx}^0}{dx} + Q_x^0 = 0, \quad - \frac{d Q_x^0}{dx} = q A. \quad (2.11)$$

La forma de las condiciones de contorno de la teoría de Euler-Bernoulli está dada por el término de frontera en la ecuación (2.9). Es claro que el desplazamiento w_0 es conocido o la fuerza de corte es especificada en un punto sobre la frontera. Además, la inclinación $\frac{dw_0}{dx}$ es especificada o el momento flector es conocido en un punto de frontera. Así, tenemos que especificar

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 \\ \frac{dw_0}{dx} \end{array} \right\} \text{ o } \left\{ \begin{array}{l} Q_x^0 \equiv \frac{d M_{xx}^0}{dx} \\ M_{xx}^0 \end{array} \right\}. \quad (2.12)$$

Especificar w_0 o $\frac{dw_0}{dx}$ es conocido como una condición de contorno esencial, cinemática o geométrica mientras que especificar Q_x^0 o M_{xx}^0 es conocido como una condición de contorno natural, estática o de fuerza.

De la ley de Hooke, podemos escribir

$$\sigma_{xx} = E_x \varepsilon_{xx} = -E_x z \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \quad (2.13)$$

donde E_x es el módulo de Young. Así, tenemos

$$M_{xx}^0 = \int_A z \sigma_{xx} dA = -D_{xx} \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \quad (2.14)$$

con $D_{xx} = E_x J_{yy}$, donde $J_{yy} = \int_A z^2 dA$ es el segundo momento de área con respecto al eje y y A es el área de la sección transversal de la viga. Insertando (2.14) en (2.11) y (2.12), llegamos a

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D_{xx} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) = qA \quad \text{para } 0 < x < L, \quad (2.15)$$

dados

$$\left\{ \begin{array}{c} w_0 \\ \frac{dw_0}{dx} \end{array} \right\} \text{ o } \left\{ \begin{array}{c} Q_x^0 \equiv -\frac{d}{dx} \left(D_{xx} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) \\ M_{xx}^0 = -D_{xx} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

en la frontera.

Para mayor información sobre condiciones de contorno estándar asociadas con las teoría de vigas de Euler-Bernoulli, ver, por ejemplo, [16].

2.2. Teoría de vigas de Timoshenko

Dado el campo de desplazamientos (2.2), las relaciones de deformación-desplazamiento quedan dadas por

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_\zeta^x}{\partial x} = -z \frac{d\beta_\zeta}{dx}, \quad (2.17)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial u_\zeta^x}{\partial z} + \frac{\partial u_\zeta^z}{\partial x} = -\beta_\zeta + \frac{dw_\zeta}{dx}. \quad (2.18)$$

Notamos que la deformación transversal de corte es no nula. Por lo tanto, la energía

potencial virtual δU incluye la energía virtual asociada a la deformación de corte, es decir

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) dA dx \\ &= \int_0^L \int_A \left[\sigma_{xx} z \frac{d\delta \beta_\zeta}{dx} + \sigma_{xz} \left(-\delta \beta_\zeta + \frac{d\delta w_\zeta}{dx} \right) \right] dA dx \\ &= \int_0^L \left[M_{xx}^\zeta \frac{d\delta \beta_\zeta}{dx} + Q_x^\zeta \left(-\delta \beta_\zeta + \frac{d\delta w_\zeta}{dx} \right) \right] dx.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Aquí, σ_{xx} es la tensión normal, σ_{xz} la tensión transversal de corte y M_{xx}^ζ y Q_x^ζ son el momento de flexión y la fuerza de corte, respectivamente:

$$M_{xx}^\zeta = \int_A z \sigma_{xx} dA, \quad Q_x^\zeta = \int_A \sigma_{xz} dA. \quad (2.20)$$

Como antes, asumimos que la densidad de carga volumétrica $q(x)$ actúa sobre el centroide de la viga de Timoshenko. El trabajo virtual asociado a la densidad de carga volumétrica q está dada por

$$\delta V = - \int_0^L q A \delta w_\zeta dx. \quad (2.21)$$

Sustituyendo las expresiones para δU y δV en $\delta W = \delta U + \delta V$, e integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^L \left[M_{xx}^\zeta \frac{d\delta \beta_\zeta}{dx} + Q_x^\zeta \left(-\delta \beta_\zeta + \frac{d\delta w_\zeta}{dx} \right) - \delta w_\zeta q A \right] dx \\ &= \int_0^L \left[\left(-\frac{dM_{xx}^\zeta}{dx} + Q_x^\zeta \right) \delta \beta_\zeta + \left(-\frac{dQ_x^\zeta}{dx} - q A \right) \delta w_\zeta \right] dx \\ &\quad + \left[M_{xx}^\zeta \delta \beta_\zeta + Q_x^\zeta \delta w_\zeta \right]_0^L.\end{aligned}\quad (2.22)$$

Poniendo los coeficientes de δw_ζ y $\delta \beta_\zeta$ iguales a 0 en $0 < x < L$, obtenemos las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$-\frac{dM_{xx}^\zeta}{dx} + Q_x^\zeta = 0, \quad -\frac{dQ_x^\zeta}{dx} = qA. \quad (2.23)$$

Las condiciones de contorno de la teoría de vigas de Timoshenko son de la forma

$$\left\{ \begin{array}{c} w_\zeta \\ \beta_\zeta \end{array} \right\} \text{ o } \left\{ \begin{array}{c} Q_x^\zeta \\ M_{xx}^\zeta \end{array} \right\}. \quad (2.24)$$

Usando las relaciones constitutivas

$$\sigma_{xx} = E_x \varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{xz} = G_{xz} \varepsilon_{xz}, \quad (2.25)$$

donde G_{xz} es el módulo de corte, podemos expresar el momento de flexión y la fuerza de corte en términos de los desplazamientos generalizados (w_ζ, β_ζ)

$$M_{xx}^\zeta = \int_A z \sigma_{xx} dA = -D_{xx} \frac{d\beta_\zeta}{dx}, \quad (2.26)$$

$$Q_x^\zeta = \kappa \int_A \sigma_{xz} dA = \kappa A_{xz} \left(-\beta_\zeta + \frac{dw_\zeta}{dx} \right), \quad (2.27)$$

donde

$$D_{xx} = \int_A E_x z^2 dA = E_x J_{yy}, \quad A_{xz} = \int_A G_{xz} dA = G_{xz} A, \quad (2.28)$$

y κ es el factor de corrección de corte que introducimos para compensar el error cuasado por suponer una distribución de esfuerzo de corte constante a través del espesor de la viga.

Sustituyendo M_{xx}^ζ y Q_x^ζ de las ecuaciones (2.26) y (2.27) en (2.23) y (2.24), obtenemos las ecuaciones y condiciones de contorno en términos de los desplazamientos generalizados:

$$-\frac{d}{dx} \left(D_{xx} \frac{d\beta_\zeta}{dx} \right) + \kappa A_{xz} \left(\frac{dw_\zeta}{dx} - \beta_\zeta \right) = 0, \quad (2.29)$$

$$-\frac{d}{dx} \left[\kappa A_{xz} \left(\frac{dw_\zeta}{dx} - \beta_\zeta \right) \right] = qA, \quad (2.30)$$

para $0 < x < L$ y

$$\left\{ \begin{array}{c} w_\zeta \\ \beta_\zeta \end{array} \right\} \text{ o } \left\{ \begin{array}{c} \kappa A_{xz} \left(\frac{dw_\zeta}{dx} - \beta_\zeta \right) \\ D_{xx} \frac{d\beta_\zeta}{dx} \end{array} \right\}, \quad (2.31)$$

especificados en la frontera.

Sobre condiciones de contorno estándar asociadas con la teoría de vigas de Timoshenko se puede encontrar mayor detalle en, por ejemplo, [16].

Capítulo 3

Viga de Timoshenko en elastodinámica

3.1. El principio de Hamilton

Como se mencionaba en la sección anterior, para obtener las ecuaciones del problema elastodinámico modelado por la teoría de vigas de Timoshenko, usamos el principio de Hamilton:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + V - K) dt = 0, \quad (3.1)$$

donde K es la energía cinética, en nuestro caso, dada por

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \dot{w}_\zeta^2 + \rho J_{yy} \dot{\beta}_\zeta^2 \right] dx. \quad (3.2)$$

De aquí en adelante, los puntos sobre una función denotarán derivadas temporales: \dot{u} y \ddot{u} denotarán la primera y segunda derivada de u , respectivamente.

Si dicho término se incluye en la deducción de las ecuaciones, integrando por partes con respecto a la variable temporal y notando que

$$\delta w(x, t_1) = \delta w(x, t_2) = \delta \beta(x, t_1) = \delta \beta(x, t_2) = 0,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ -\rho A \ddot{w}_\zeta + \frac{d}{dx} \left[\kappa G_{xz} A \left(\frac{dw_\zeta}{dx} - \beta_\zeta \right) \right] + qA \right\} \delta w_\zeta dx dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[-\rho J_{yy} \ddot{\beta}_\zeta + \frac{d}{dx} \left(E_x J_{yy} \frac{d\beta_\zeta}{dx} \right) + \kappa G_{xz} A \left(\frac{dw_\zeta}{dx} - \beta_\zeta \right) \right] \delta \beta_\zeta dx dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left[\kappa G_{xz} A \left(\frac{dw_\zeta}{dx} - \beta_\zeta \right) \delta w_\zeta \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(E_x J_{yy} \frac{d\beta_\zeta}{dx} \right) \delta \beta_\zeta \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dado que δw_ζ y $\delta \beta_\zeta$ son arbitrarios, salvo donde se prescriban condiciones de contorno geométricas, la ecuación (3.3) nos conduce a las siguientes EDPs de movimiento:

$$\rho J_{yy} \ddot{\beta}_\zeta - \frac{d}{dx} \left(E_x J_{yy} \frac{d\beta_\zeta}{dx} \right) - \kappa G_{xz} A \left(\frac{dw_\zeta}{dx} - \beta_\zeta \right) = 0, \quad (3.4)$$

$$\rho A \ddot{w}_\zeta^2 - \frac{d}{dx} \left[\kappa G_{xz} A \left(\frac{dw_\zeta}{dx} - \beta_\zeta \right) \right] = qA, \quad (3.5)$$

sujetas a condiciones iniciales y de contorno prescritas.

3.2. Formulación variacional del problema elastodinámico

En adelante, omitiremos los subíndices de las cantidades asociadas a propiedades físicas de la viga, pues las supondremos constantes, y denotaremos por u', u'', \dots las derivadas de u respecto de x . Reescribiendo (3.4)-(3.5), obtenemos:

$$\rho J \ddot{\beta}_\zeta - EJ \beta_\zeta'' - \lambda A (w'_\zeta - \beta_\zeta) = 0, \quad (3.6)$$

$$\rho A \ddot{w}_\zeta - \lambda A (w'_\zeta - \beta_\zeta)' = qA, \quad (3.7)$$

bajo condiciones iniciales y de contorno conocidas, donde E es el módulo de Young, J el momento de área, A el área de la sección transversal y ρ es la densidad. Denotamos $\lambda = G\kappa$, con G el módulo de corte y κ un factor de corrección para el módulo de corte, introducido para el balance del esfuerzo de corte nulo en la superficie de la viga.

Por simplicidad, consideramos las ecuaciones definidas sobre un intervalo I en \mathbb{R} , con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas, es decir,

$$\beta_\zeta(t, 0) = \beta_\zeta(t, L) = w_\zeta(t, 0) = w_\zeta(t, L) = 0, \quad (3.8)$$

y condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \beta_\zeta(0, x) &= B^0(x), & w_\zeta(0, x) &= W^0(x), \\ \dot{\beta}_\zeta(0, x) &= B^1(x), & \dot{w}_\zeta(0, x) &= W^1(x). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Adoptaremos la notación usual de espacios de Sobolev. El método de Galerkin nos lleva al siguiente problema:

Problema elastodinámico de Timoshenko

Hallar $\beta_\zeta, w_\zeta : [0, T] \rightarrow V = H_0^1(I)$ tales que

$$\begin{aligned} \rho J \langle \ddot{\beta}_\zeta, \eta \rangle + \rho A \langle \ddot{w}_\zeta, v \rangle \\ + EJ \langle \beta'_\zeta, \eta' \rangle + \lambda A \langle w'_\zeta - \beta_\zeta, v' - \eta \rangle = \langle qA, v \rangle, \\ \forall \eta, v \in V, \text{ c.t.p. } t \in [0, T], \end{aligned}$$

bajo las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \beta_\zeta(0, x) = B^0(x), \quad w_\zeta(0, x) = W^0(x), \\ \dot{\beta}_\zeta(0, x) = B^1(x), \quad \dot{w}_\zeta(0, x) = W^1(x), \end{aligned}$$

donde (\cdot, \cdot) denota el producto interior usual en $L^2(I)$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la dualidad $V' \times V$.

Es un hecho conocido que los métodos de elementos finitos estándar aplicados a problemas como el de Timoshenko elastodinámico sufren del fenómeno de bloqueo numérico, lo que nos lleva a resultados que están lejos de describir lo que estamos modelando en el caso de estructuras muy delgadas, a menos que el tamaño de la malla sea excesivamente pequeño. Este fenómeno se debe a las diferentes escalas a las que están, respecto del espesor de la viga, los términos de flexión y de corte (los dos últimos términos del lado izquierdo de la ecuación elastodinámica de Timoshenko).

Un marco de trabajo adecuado para el análisis matemático del bloqueo se obtiene reescalando las ecuaciones con el fin de obtener una familia de problemas con un límite bien definido cuando el espesor se hace infinitamente pequeño. Para ello, introducimos el siguiente parámetro adimensional, característico del espesor de la viga:

$$\zeta^2 := \frac{J}{A}. \quad (3.10)$$

Haciendo abuso de notación, nos referiremos a este parámetro simplemente como espesor.

Por último, dado un espacio de Banach X , con norma $\|\cdot\|_X$, usaremos la siguiente notación para los espacios funcionales:

$$\begin{aligned} L^2(X) &= L^2(0, T; X) \\ &:= \left\{ v : [0, T] \rightarrow X \mid \|v\|_{L^2(0, T; X)} = \left(\int_0^T (\|v\|_X)^2 dt \right)^{1/2} < \infty \right\}, \\ L^\infty(X) &= L^\infty(0, T; X) \\ &:= \left\{ v : [0, T] \rightarrow X \mid \|v\|_{L^\infty(0, T; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} (\|v\|_X) < \infty \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Capítulo 4

Existencia, unicidad y regularidad

Haciendo uso del escalamiento definido en el capítulo anterior, reescribimos nuestro problema, introduciendo cantidades auxiliares $\hat{\rho}$ y g tales que

$$\rho = \hat{\rho}\zeta^2 \quad \text{y} \quad q = g\zeta^2. \quad (4.1)$$

Esta reescritura permite obtener una familia de problemas que tendrá un límite cuando $\zeta \rightarrow 0$. Así, obtenemos el siguiente problema:

Problema elastodinámico de Timoshenko (versión escalada)

Hallar $\beta_\zeta, w_\zeta : [0, T] \rightarrow V = H_0^1(I)$ tales que

$$\begin{aligned} \hat{\rho}\zeta^2 \langle \ddot{\beta}_\zeta, \eta \rangle + \hat{\rho} \langle \ddot{w}_\zeta, v \rangle \\ + E \langle \beta'_\zeta, \eta' \rangle + \lambda\zeta^{-2} (w'_\zeta - \beta_\zeta, v' - \eta) = \langle g, v \rangle, \\ \forall \eta, v \in V, \text{ c.t.p. } t \in [0, T] \end{aligned}$$

y condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \beta_\zeta(0, x) = B^0(x), \quad w_\zeta(0, x) = W^0(x), \\ \dot{\beta}_\zeta(0, x) = B^1(x), \quad \dot{w}_\zeta(0, x) = W^1(x). \end{aligned}$$

Durante las demostraciones, omitiremos el subíndice ζ por comodidad.

4.1. Existencia y unicidad

Para garantizar la existencia y unicidad de solución para el problema escalado, utilizaremos el método de estimación a priori para ecuaciones hiperbólicas lineales de segundo orden en el tiempo.

Teorema 4.1.1 (Existencia y unicidad).

Si $g \in L^2(L^2(I))$; $B^0, W^0 \in H_0^1(I)$; y $B^1, W^1 \in L^2(I)$, existe una única solución (β_ζ, w_ζ) del problema escalado, que satisface $\beta_\zeta, w_\zeta \in L^\infty(H_0^1(I))$, $\dot{\beta}_\zeta, \dot{w}_\zeta \in L^\infty(L^2(I))$, y $\ddot{\beta}_\zeta, \ddot{w}_\zeta \in L^\infty(H^{-1}(I))$. Más aún, existe una constante $C > 0$, independiente de los parámetros materiales, tal que

$$\begin{aligned} \hat{\rho}\zeta^2 \|\dot{\beta}_\zeta\|_{L^2(I)}^2 + \hat{\rho} \|\dot{w}_\zeta\|_{L^2(I)}^2 + E \|\beta_\zeta\|_{H_0^1(I)}^2 + \lambda\zeta^{-2} \|w'_\zeta - \beta_\zeta\|_{L^2(I)}^2 \\ \leq C \left(\hat{\rho}\zeta^2 \|B^1\|_{L^2(I)}^2 + \hat{\rho} \|W^1\|_{L^2(I)}^2 \right. \\ \left. + E \|B^0\|_{H_0^1(I)}^2 + \lambda\zeta^{-2} \|W^{0r} - B^0\|_{L^2(I)}^2 \right. \\ \left. + \hat{\rho}^{-1} \|g\|_{L^2(L^2(I))}^2 \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

Demostración. Encontraremos una solución del problema escalado mediante la construcción de cierta aproximación finito-dimensional de orden n , del mismo, y luego pasando al límite en n . El conocido método de Galerkin.

Más precisamente, sean $\psi_i(x)$, $i = 1, \dots$, funciones suaves tales que

$$\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty \text{ es una base ortogonal de } H_0^1(I) \quad (4.3)$$

y

$$\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty \text{ es una base ortonormal de } L^2(I). \quad (4.4)$$

(Por ejemplo, podemos tomar $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ como el conjunto completo de autofunciones, apropiadamente normalizadas, del operador $-\Delta$ en $H_0^1(I)$: ver subsección 6.5.1. de [13]).

Ahora, fijamos $n \in \mathbb{Z}^+$, y busquemos funciones $\beta_n, w_n : [0, T] \rightarrow V_n$ de la forma

$$\beta_n(t, x) = \sum_{j=1}^n \beta_n^j(t) \psi_j(x), \quad w_n(t, x) = \sum_{j=1}^n w_n^j(t) \psi_j(x), \quad (4.5)$$

y resolveremos su problema asociado:

Hallar $\beta_n, w_n : [0, T] \rightarrow V_n := \text{span} \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ tales que

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}\zeta^2 \langle \ddot{\beta}_n, \eta \rangle + \widehat{\rho} \langle \ddot{w}_n, v \rangle + E(\beta'_n, \eta') + \lambda\zeta^{-2} (w'_n - \beta_n, v' - \eta) = (g, v), \\ \forall \eta, v \in V_n. \end{aligned} \quad (4.6)$$

El problema de aproximación (4.6) nos lleva al sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}\zeta^2 \ddot{\beta}_n^j(t) + \widehat{\rho}\ddot{w}_n^j(t) - E\beta_n^{j'}(t) + \lambda\zeta^{-2} (w_n^{j'}(t) - \beta_n^j(t)) = (\mathbf{g}(t), \psi_j), \\ 0 \leq t \leq T, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $\mathbf{g} : [0, T] \rightarrow L^2(I)$ está definida por $[\mathbf{g}(t)](x) := g(x, t)$, sujeto a las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \beta_n^j(0) &= (B^0, \psi_j) \quad (j = 1, \dots, n), \\ \dot{\beta}_n^j(0) &= (B^1, \psi_j) \quad (j = 1, \dots, n), \\ w_n^j(0) &= (W^0, \psi_j) \quad (j = 1, \dots, n), \\ \dot{w}_n^j(0) &= (W^1, \psi_j) \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (4.8)$$

De acuerdo a la teoría estándar para ecuaciones diferenciales ordinarias, existe una única función $(\beta_n^1(t), \dots, \beta_n^n(t), w_n^1(t), \dots, w_n^n(t))$ que satisface las condiciones iniciales y el sistema de EDOs para $0 \leq t \leq T$.

Ahora, usando $\eta = \dot{\beta}_n(t, x)$ y $v = \dot{w}_n(t, x)$ en (4.6), tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}\zeta^2 \langle \ddot{\beta}_n, \dot{\beta}_n \rangle + \widehat{\rho} \langle \ddot{w}_n, \dot{w}_n \rangle + E(\beta'_n, \dot{\beta}_n) + \lambda\zeta^{-2} (w'_n - \beta_n, \dot{w}_n - \dot{\beta}_n) \\ = (g, \dot{w}_n). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Como $(\dot{u}, u) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u\|_{L^2(I)}^2 \right]$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left\{ \widehat{\rho}\zeta^2 \|\dot{\beta}_n\|_{L^2(I)}^2 + \widehat{\rho} \|\dot{w}_n\|_{L^2(I)}^2 + E \|\beta'_n\|_{L^2(I)}^2 + \lambda\zeta^{-2} \|w'_n - \beta_n\|_{L^2(I)}^2 \right\} \right] \\ = (g, \dot{w}_n). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Usando las desigualdades de Cauchy-Schwarz y Cauchy con ε (B.2) tenemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \widehat{\rho} \zeta^2 \left\| \dot{\beta}_n \right\|_{L^2(I)}^2 + \widehat{\rho} \left\| \dot{w}_n \right\|_{L^2(I)}^2 + E \left\| \beta'_n \right\|_{L^2(I)}^2 + \lambda \zeta^{-2} \left\| w'_n - \beta_n \right\|_{L^2(I)}^2 \right\} \\
& \leq \|g\|_{L^2(I)} \|\dot{w}_n\|_{L^2(I)} \\
& \leq \frac{1}{2} \left\{ \widehat{\rho}^{-1} \|g\|_{L^2(I)}^2 + \widehat{\rho} \|\dot{w}_n\|_{L^2(I)}^2 \right\} \\
& \leq \frac{1}{2} \left\{ \widehat{\rho} \zeta^2 \left\| \dot{\beta}_n \right\|_{L^2(I)}^2 + \widehat{\rho} \|\dot{w}_n\|_{L^2(I)}^2 \right. \\
& \quad \left. + E \left\| \beta'_n \right\|_{L^2(I)}^2 + \lambda \zeta^{-2} \left\| w'_n - \beta_n \right\|_{L^2(I)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \widehat{\rho}^{-1} \|g\|_{L^2(I)}^2 \right\}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Así, para todo $t \in [0, T]$, gracias a la desigualdad de Gronwall (B.1), obtenemos

$$\begin{aligned}
& \widehat{\rho} \zeta^2 \left\| \dot{\beta}_n \right\|_{L^2(I)}^2 + \widehat{\rho} \|\dot{w}_n\|_{L^2(I)}^2 + E \|\beta_n\|_{H_0^1(I)}^2 + \lambda \zeta^{-2} \|w'_n - \beta_n\|_{L^2(I)}^2 \\
& \leq e^t \left[\widehat{\rho} \zeta^2 \left\| \dot{\beta}_n(0) \right\|_{L^2(I)}^2 + \widehat{\rho} \|\dot{w}_n(0)\|_{L^2(I)}^2 \right. \\
& \quad \left. + E \|\beta'_n(0)\|_{L^2(I)}^2 + \lambda \zeta^{-2} \|w'_n(0) - \beta_n(0)\|_{L^2(I)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \int_0^t \widehat{\rho}^{-1} \|g\|_{L^2(I)}^2 ds \right] \\
& \leq e^T \left[\widehat{\rho} \zeta^2 \left\| \dot{\beta}_n(0) \right\|_{L^2(I)}^2 + \widehat{\rho} \|\dot{w}_n(0)\|_{L^2(I)}^2 \right. \\
& \quad \left. + E \|\beta_n(0)\|_{H_0^1(I)}^2 + \lambda \zeta^{-2} \|w'_n(0) - \beta_n(0)\|_{L^2(I)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \widehat{\rho}^{-1} \|g\|_{L^2(L^2(I))}^2 \right]. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Notamos además que, para todo $t \in [0, T]$

$$\|w_n\|_{H_0^1(I)} \leq \|w'_n - \beta_n\|_{L^2(I)} + \|\beta_n\|_{L^2(I)}. \tag{4.13}$$

Por otro lado, sean $\varphi, \xi \in H_0^1(I)$ fijos, tales que $\|\varphi\|_{H_0^1(I)}, \|\xi\|_{H_0^1(I)} \leq 1$, y escribimos $\varphi = \varphi^1 + \varphi^2$ y $\xi = \xi^1 + \xi^2$ con

$$\varphi^1, \xi^1 \in \langle \{\psi_k\}_{k=1}^n \rangle \quad \text{y} \quad \varphi^2, \xi^2 \in \langle \{\psi_k\}_{k=1}^n \rangle^{\perp H_0^1(I)}.$$

Notamos que, gracias a la ortogonalidad de $\{\psi_k\}_{k=1}^n$ en $H_0^1(I)$,

$$\|\varphi^1\|_{H_0^1(I)}^2 + \|\varphi^2\|_{H_0^1(I)}^2 = \|\varphi\|_{H_0^1(I)}^2 \quad \text{y} \quad \|\xi^1\|_{H_0^1(I)}^2 + \|\xi^2\|_{H_0^1(I)}^2 = \|\xi\|_{H_0^1(I)}^2, \tag{4.14}$$

de donde

$$\|\varphi^1\|_{H_0^1(I)}, \|\xi^1\|_{H_0^1(I)} \leq 1. \quad (4.15)$$

Luego, usando (η, v) como $(\varphi, 0)$ y $(0, \xi)$ respectivamente en (4.6), tenemos que

$$\hat{\rho}\zeta^2 \langle \ddot{\beta}_n, \varphi \rangle = \hat{\rho}\zeta^2 (\ddot{\beta}_n, \varphi) = \hat{\rho}\zeta^2 (\ddot{\beta}_n, \varphi^1) = -E(\beta'_n, \varphi^{1'}) - \lambda\zeta^{-2}(w'_n - \beta_n, \varphi^{1'})$$

y

$$\hat{\rho} \langle \ddot{w}_n, \xi \rangle = \hat{\rho}(\ddot{w}_n, \xi) = \hat{\rho}(\ddot{w}_n, \xi^1) = (g, \xi^1) + \lambda\zeta^{-2}(w'_n - \beta_n, \xi^1). \quad (4.16)$$

Así, gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz y a (4.16), tenemos

$$|\langle \ddot{\beta}_n, \varphi \rangle| \leq \hat{\rho}^{-1}\zeta^{-2} \left(E \|\beta_n\|_{H_0^1(I)} + \lambda\zeta^{-2} \|w'_n - \beta_n\|_{L^2(I)} \right)$$

y

$$|\langle \ddot{w}_n, \xi \rangle| \leq \hat{\rho}^{-1} \left(\|g\|_{L^2(I)} + \lambda\zeta^{-2} \|w'_n - \beta_n\|_{L^2(I)} \right) \quad (4.17)$$

para casi todo tiempo $t \in [0, T]$.

Como $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty, \{w_n\}_{n=1}^\infty, \{\dot{\beta}_n\}_{n=1}^\infty, \{\dot{w}_n\}_{n=1}^\infty, \{\ddot{\beta}_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{\ddot{w}_n\}_{n=1}^\infty$ son acotadas, a pares, en $L^\infty(H_0^1(I)), L^\infty(L^2(I))$ y $L^\infty(H^{-1}(I))$, respectivamente, y $L^\infty(X)$ es el dual de $L^1(X)$ (con $X = H_0^1(I), L^2(I)$ ó $H^{-1}(I)$), que es un Banach separable, existen subsucesiones tales que

$$\begin{aligned} \beta_{n_l} &\rightarrow \beta, w_{n_l} \rightarrow w && \text{débil-}\star \text{ en } L^\infty(H_0^1(I)), \\ \dot{\beta}_{n_l} &\rightarrow \dot{\beta}, \dot{w}_{n_l} \rightarrow \dot{w} && \text{débil-}\star \text{ en } L^\infty(L^2(I)), \\ \ddot{\beta}_{n_l} &\rightarrow \ddot{\beta}, \ddot{w}_{n_l} \rightarrow \ddot{w} && \text{débil-}\star \text{ en } L^\infty(H^{-1}(I)), \end{aligned} \quad (4.18)$$

que junto con (4.12) y la Proposición 3.13 (iii) (B.3) de [15], nos permiten concluir (4.2).

Se puede probar que (β_ζ, w_ζ) satisface las condiciones iniciales y la formulación variacional (ver por ejemplo [13]), así (β_ζ, w_ζ) es una solución del problema elastodinámico de Timoshenko escalado.

Para la unicidad, si consideramos $g = 0, B^0 = W^0 = B^1 = W^1 = 0$, de (4.2) se tiene que $\beta_\zeta = w_\zeta = 0$, es decir, (β_ζ, w_ζ) es la única solución del problema escalado. \square

4.2. Regularidad

A continuación, presentamos un resultado de regularidad adicional:

Teorema 4.2.1 (Regularidad adicional).

Bajo las condiciones del Teorema 4.1.1, si además $\dot{g} \in L^2(L^2(I))$; $B^0, W^0 \in H^2(I)$; y $B^1, W^1 \in H_0^1(I)$, entonces la solución del problema escalado satisface $\beta_\zeta, w_\zeta \in L^\infty(H^2(I))$, $\dot{\beta}_\zeta, \dot{w}_\zeta \in L^\infty(H_0^1(I))$, $\ddot{\beta}_\zeta, \ddot{w}_\zeta \in L^\infty(L^2(I))$, y se verifica la siguiente estimación a priori

$$\begin{aligned} & \hat{\rho}\zeta^2 \|\ddot{\beta}_\zeta\|_{L^2(I)}^2 + \hat{\rho}\|\ddot{w}_\zeta\|_{L^2(I)}^2 + E\|\dot{\beta}_\zeta\|_{H_0^1(I)}^2 + \zeta^{-2}\|\dot{w}_\zeta - \dot{\beta}_\zeta\|_{L^2(I)}^2 \\ & \leq C\left(\hat{\rho}^{-1}\zeta^{-2}\left(E^2\|B^0\|_{H^2(I)}^2 + \lambda^2\zeta^{-4}\|W^{0r} - B^0\|_{L^2(I)}^2\right)\right. \\ & \quad \left.+ \hat{\rho}^{-1}\left(\lambda^2\zeta^{-4}\|W^{0r} - B^0\|_{H_0^1(I)}^2 + \|g(0)\|_{L^2(I)}^2\right)\right. \\ & \quad \left.+ E\|B^1\|_{H_0^1(I)}^2 + \lambda\zeta^{-2}\|W^{0r} - B^0\|_{L^2(I)}^2\right. \\ & \quad \left.+ \hat{\rho}^{-1}\|g\|_{L^2(L^2(I))}^2\right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$E\|\beta_\zeta\|_{H^2(I)} \leq C\left(\hat{\rho}\zeta^2\|\ddot{\beta}_\zeta\|_{L^2(I)} + \lambda\zeta^{-2}\|w'_\zeta - \beta'_\zeta\|_{L^2(I)}\right), \quad (4.20)$$

$$\lambda\zeta^{-2}\|w_\zeta\|_{H^2(I)} \leq C\left(\hat{\rho}\|\ddot{w}_\zeta\|_{L^2(I)} + \lambda\zeta^{-2}\|\beta_\zeta\|_{H_0^1(I)} + \|g\|_{L^2(I)}\right), \quad (4.21)$$

donde las cotas de $\|w'_\zeta - \beta'_\zeta\|_{L^2(I)}$ y $\|\beta_\zeta\|_{H_0^1(I)}$ están establecidas en el Teorema 4.1.1.

Demostración. Aplicamos el método para ecuaciones hiperbólicas demostrado en [13]. Del Teorema 4.1.1, $\dot{\beta}_n^j, \dot{w}_n^j \in H^1([0, T])$. Derivando (4.6) con respecto a t , obtenemos que $\ddot{\beta}_n^j, \ddot{w}_n^j \in L^2([0, T])$. Una estimación a priori como (4.2) nos dice que

$$\begin{aligned} & \hat{\rho}\zeta^2 \|\ddot{\beta}_n\|_{L^2(I)}^2 + \hat{\rho}\|\ddot{w}_n\|_{L^2(I)}^2 + E\|\dot{\beta}_n\|_{H_0^1(I)}^2 + \lambda\zeta^{-2}\|\dot{w}_n - \dot{\beta}_n\|_{L^2(I)}^2 \\ & \leq C\left[\hat{\rho}\zeta^2\|\ddot{\beta}_n(0)\|_{L^2(I)}^2 + \hat{\rho}\|\ddot{w}_n(0)\|_{L^2(I)}^2\right. \\ & \quad \left.+ E\|\dot{\beta}_n(0)\|_{H_0^1(I)}^2 + \lambda\zeta^{-2}\|\dot{w}_n(0) - \dot{\beta}_n(0)\|_{L^2(I)}^2\right. \\ & \quad \left.+ \hat{\rho}^{-1}\|\dot{g}\|_{L^2(L^2(I))}^2\right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

De (3.6) y (3.7), obtenemos que $\ddot{\beta}(0), \ddot{w}(0) \in L^2(I)$,

$$\widehat{\rho}\zeta^2 \left\| \ddot{\beta}(0) \right\|_{L^2(I)} \leq E \|\beta(0)\|_{H^2(I)} + \lambda\zeta^{-2} \|w'(0) - \beta(0)\|_{L^2(I)} \quad (4.23)$$

y

$$\widehat{\rho} \|\ddot{w}(0)\|_{L^2(I)} \leq \lambda\zeta^{-2} \|w'(0) - \beta(0)\|_{H_0^1(I)} + \|g(0)\|_{L^2(I)}. \quad (4.24)$$

Un argumento de acotamiento y compacidad nos lleva a concluir que $\ddot{\beta}_n \rightarrow \ddot{\beta}, \ddot{w}_n \rightarrow \ddot{w}$ débil- \star en $L^\infty(L^2(I))$. Por lo tanto, (4.22) implica (4.19).

Por otro lado, reescribimos (3.6) y (3.7):

$$-E\beta'' = -\widehat{\rho}\zeta^2 \ddot{\beta} + \lambda\zeta^{-2} (w' - \beta) \quad (4.25)$$

$$-\lambda\zeta^{-2} w'' = g - \widehat{\rho}\ddot{w} - \lambda\zeta^{-2} \beta'. \quad (4.26)$$

Para algún tiempo fijo t , los lados derechos de las ecuaciones (4.25) y (4.26) están en $L^2(I)$. Como en ambas ecuaciones el operador del lado izquierdo es $H_0^1(I)$ -elíptico, de acuerdo a la teoría de ecuaciones elípticas, con un dominio suave I , $\beta, w \in H^2(I)$, tenemos las estimaciones

$$\begin{aligned} E \|\beta\|_{H^2(I)} &\leq C \left(\widehat{\rho}\zeta^2 \left\| \ddot{\beta} \right\|_{L^2(I)} + \lambda\zeta^{-2} \|w' - \beta\|_{L^2(I)} \right), \\ \lambda\zeta^{-2} \|w\|_{H^2(I)} &\leq C \left(\widehat{\rho} \|\ddot{w}\|_{L^2(I)} + \lambda\zeta^{-2} \|\beta\|_{H_0^1(I)} + \|g\|_{L^2(I)} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

□

Ahora, estamos en condiciones de extender el Teorema 4.1.1 a mayores regularidades. Por simplicidad, la dependencia de los parámetros materiales no se expresará de manera explícita.

Teorema 4.2.2 (Regularidad de mayor orden).

Asumamos para algún $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} B^0, W^0 &\in H^{p+1}(I) \cap H_0^1(I), \\ B^1, W^1 &\in H^p(I) \cap H_0^1(I), \\ \frac{\partial^k g}{\partial t^k} &\in L^2(H^{p-k}(I)), \quad k = 0, 1, \dots, p \end{aligned} \quad (4.28)$$

y que para $p \geq 2$ se tienen las siguientes condiciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned} B^{k+2} &= \hat{\rho}^{-1} \zeta^{-2} \left(EB^{k''} + \lambda \zeta^{-2} (W^{k'} - B^k) \right) \in H_0^1(I), \\ W^{k+2} &= \hat{\rho}^{-1} \left(\frac{\partial^k g(0)}{\partial t^k} + \lambda \zeta^{-2} (W^{k'} - B^k)' \right) \in H_0^1(I), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$k = 0, 1, \dots, p - 2.$

Entonces, para $k = 0, 1, \dots, p - 1$, la solución del problema escalado satisface:

$$\frac{\partial^k \beta}{\partial t^k}, \frac{\partial^k w}{\partial t^k} \in L^\infty(H^{p+1-k}(I)) \quad (4.30)$$

y

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial^k \beta}{\partial t^k} \right\|_{H^{p+1-k}(I)} + \left\| \frac{\partial^k w}{\partial t^k} \right\|_{H^{p+1-k}(I)} \\ &\leq C \left(\sum_{j=0}^p \left\| \frac{\partial^j g}{\partial t^j} \right\|_{L^2(H^{p-j}(I))} + \|B^0\|_{H^{p+1}(I)} + \|W^0\|_{H^{p+1}(I)} \right. \\ &\quad \left. + \|B^1\|_{H^p(I)} + \|W^1\|_{H^p(I)} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Demostración. Los casos de $p = 0$ y $p = 1$ fueron probados en los Teoremas 4.1.1 y 4.2.1, respectivamente. Para $p \geq 2$ procedemos por inducción sobre p . Asumimos que el teorema es válido para $p \leq q$ y asumimos que las condiciones (4.28) y (4.29) son válidas para $p = q + 1$. Denotamos

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \dot{\beta}, & \tilde{W} &= \dot{w}, & \tilde{g} &= \dot{g}, \\ \tilde{B}^k &= B^{k+1}, & \tilde{W}^k &= W^{k+1}, & k &= 0, 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Luego, $\tilde{B}^k, \tilde{W}^k, k = 0, 1, \dots, q$, satisfacen las condiciones de compatibilidad (4.29) para $p = q$, $\tilde{B}^0 = B^1$ y $\tilde{W}^0 = W^1 \in H^{q+1}(I) \cap H_0^1(I)$.

Para $k = 0, 1, \dots, q$,

$$\partial^k \tilde{g} / \partial t^k = \partial^{k+1} g / \partial t^{k+1} \in L^2 \left(H^{q-k}(I) \right). \quad (4.33)$$

De (4.28) y (4.29) con $p = q + 1$,

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{B}^1 \right\|_{H^q(I)} &= \left\| B^2 \right\|_{H^q(I)} \\ &\leq C \left(\zeta^2 \left\| B^0 \right\|_{H^{q+2}(I)} + \left\| W^0 \right\|_{H^{q+1}(I)} + \left\| B^0 \right\|_{H^q(I)} \right), \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{W}^1 \right\|_{H^q(I)} &= \left\| W^2 \right\|_{H^q(I)} \\ &\leq C \left(\left\| g(0) \right\|_{H^q(I)} + \left\| W^0 \right\|_{H^{q+2}(I)} + \left\| B^0 \right\|_{H^{q+1}(I)} \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Por lo tanto \tilde{B}^k, \tilde{W}^k , con $k = 0, 1$, satisfacen (4.28) para $p = q$.

Aplicamos la hipótesis de inducción y de (4.30) y (4.31) con $p = q$, para $k = 0, 1, \dots, q + 1$, obtenemos

$$\frac{\partial^k \tilde{B}}{\partial t^k}, \frac{\partial^k \tilde{W}}{\partial t^k} \in L^\infty \left(H^{q+1-k}(I) \right) \quad (4.36)$$

y

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial^k \tilde{\beta}}{\partial t^k} \right\|_{H^{q+1-k}(I)} + \left\| \frac{\partial^k \tilde{w}}{\partial t^k} \right\|_{H^{q+1-k}(I)} \\ &\leq C \left(\sum_{j=0}^q \left\| \frac{\partial^j \tilde{g}}{\partial t^j} \right\|_{L^2(H^{q-j}(I))} + \left\| \tilde{B}^0 \right\|_{H^{q+1}(I)} + \left\| \tilde{W}^0 \right\|_{H^{q+1}(I)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \tilde{B}^1 \right\|_{H^q(I)} + \left\| \tilde{W}^1 \right\|_{H^q(I)} \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Esto implica que, para $k = 1, \dots, q + 2$,

$$\frac{\partial^k \beta}{\partial t^k}, \frac{\partial^k w}{\partial t^k} \in L^\infty \left(H^{q+2-k}(I) \right) \quad (4.38)$$

y

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial^k \beta}{\partial t^k} \right\|_{H^{q+2-k}(I)} + \left\| \frac{\partial^k w}{\partial t^k} \right\|_{H^{q+2-k}(I)} \\ &\leq C \left(\sum_{j=0}^{q+1} \left\| \frac{\partial^j g}{\partial t^j} \right\|_{L^2(H^{q+1-j}(I))} + \left\| B^1 \right\|_{H^{q+1}(I)} + \left\| W^1 \right\|_{H^{q+1}(I)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| B^2 \right\|_{H^q(I)} + \left\| W^2 \right\|_{H^q(I)} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Como $I \subset \mathbb{R}$, $H^1(H^q(I)) \xrightarrow{\text{cont}} C^0(H^q(I))$ (ver, por ejemplo, [15]), y así

$$\|g(0)\|_{H^q(I)} \leq C \|g\|_{C^0(H^q(I))} \leq C \left(\|g\|_{L^2(H^q(I))} + \|\dot{g}\|_{L^2(H^q(I))} \right), \quad (4.40)$$

de donde podemos obtener estimaciones para B^2 y W^2 en (4.39), que a su vez nos ayudarán a estimar (4.39).

Por lo tanto, (4.31) es cierta para $p = q + 1$ y $k = 1, \dots, q + 2$. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\beta\|_{H^{q+2}(I)} &\leq C \left\| \hat{\rho} \zeta^2 \ddot{\beta} - \lambda \zeta^{-2} (w' - \beta) \right\|_{H^q(I)} \\ &\leq C \left(\|\ddot{\beta}\|_{H^q(I)} + \|w\|_{H^{q+1}(I)} + \|\beta\|_{H^q(I)} \right), \end{aligned} \quad (4.41)$$

y

$$\begin{aligned} \|w\|_{H^{q+2}(I)} &\leq C \left\| \hat{\rho} \ddot{w} + \lambda \zeta^{-2} \beta' - g \right\|_{H^q(I)} \\ &\leq C \left(\|\ddot{w}\|_{H^q(I)} + \|\beta\|_{H^{q+1}(I)} + \|g\|_{H^q(I)} \right), \end{aligned} \quad (4.42)$$

de donde,

$$\begin{aligned} &\|\beta\|_{H^{q+2}(I)} + \|w\|_{H^{q+2}(I)} \\ &\leq C \left(\sum_{j=0}^{q+1} \left\| \frac{\partial^j g}{\partial t^j} \right\|_{L^2(H^{q+1-j}(I))} + \|B^0\|_{H^{2+1}(I)} + \|W^0\|_{H^{q+2}(I)} \right. \\ &\quad \left. + \|B^1\|_{H^{q+1}(I)} + \|W^1\|_{H^{q+1}(I)} \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Así, (4.31) se verifica para $p = q + 1$ y $k = 0$, concluyendo la demostración. \square

Capítulo 5

Relación con la viga de Euler-Bernoulli

Para problemas estáticos, tenemos que, cuando $\zeta \rightarrow 0$, la solución de la viga de Timoshenko empotrada en ambos extremos se aproxima a la solución de la viga de Euler Bernoulli (ver, por ejemplo, Lema 2.1 en [10]). Como antes, $q = \zeta^2 g$. En tal caso, se demuestra que

$$\beta_\zeta \xrightarrow{\zeta \rightarrow 0} \beta_0, \quad w_\zeta \xrightarrow{\zeta \rightarrow 0} w_0,$$

donde $\beta_0 = w'_0$ y w_0 es la solución de la viga de Euler-Bernoulli

$$\begin{aligned} Ew_0'''' &= g \quad \text{en } (0, L), \\ w_0(0) &= w'_0(0) = w_0(L) = w'_0(L) = 0. \end{aligned}$$

Gracias al escalamiento de la carga, las ecuaciones de Euler-Bernoulli son independientes del espesor.

Para problemas dinámicos, la presencia del término de inercia, que contribuye a la energía cinética, hace que la ecuación de Euler-Bernoulli ya no sea independiente del espesor. Para tener a la viga de Euler-Bernoulli como referencia es que introdujimos el escalamiento de la densidad de masa dado por (4.1) junto con el de la carga.

Consideramos el problema elastodinámico Timoshenko escalado, con condiciones iniciales nulas, para presentar el siguiente resultado:

Teorema 5.0.3 (Problema límite).

Asumimos $g \in H^1(L^2(I))$, $\dot{g} \in L^2(L^2(I))$, y sea $(\beta_\zeta, w_\zeta) \in L^\infty(H_0^1(I)) \times L^\infty(H_0^1(I))$ la solución del problema escalado con condiciones iniciales nulas. Entonces, cuando $\zeta \rightarrow 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} w_\zeta &\rightarrow w_0 \text{ débil-}\star \text{ en } L^\infty(H^2(I)), \\ \beta_\zeta &\rightarrow \beta_0, \dot{w}_\zeta \rightarrow \dot{w}_0 \text{ débil-}\star \text{ en } L^\infty(H^1(I)), \\ \ddot{w}_\zeta &\rightarrow \ddot{w}_0 \text{ débil-}\star \text{ en } L^\infty(L^2(I)). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Además,

$$\beta_0 = w_0' \quad (5.2)$$

y w_0 es la solución de un problema elastodinámico de viga de Euler-Bernoulli con condiciones de empotramiento

$$\hat{\rho} \ddot{w}_0 + E w_0'''' = g \quad (5.3)$$

vale decir

$$\begin{aligned} \hat{\rho} (\ddot{w}_0, v) + E (w_0'', v'') &= (g, v), \quad \forall v \in H_0^2(I), \\ w_0|_{\partial I} &= w_0'|_{\partial I} = 0, \\ w_0(0, x) &= \dot{w}_0(0, x) = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Demostración. Gracias a los Teoremas 4.1.1 y 4.2.1, tenemos una única solución $(\beta_\zeta, w_\zeta) \in L^\infty(H_0^1(I)) \times L^\infty(H^2(I))$ del problema elastodinámico de Timoshenko escalado, donde la constante genérica $C > 0$ de la estimación a priori es independiente de los parámetros materiales. Con las condiciones iniciales nulas, la estimación a priori del Teorema 4.1.1 se reduce a

$$\begin{aligned} \sqrt{\hat{I}\zeta} \|\dot{\beta}_\zeta\|_{L^2(I)} + \sqrt{\hat{\rho}} \|\dot{w}_\zeta\|_{L^2(I)} + \sqrt{E} \|\beta_\zeta\|_{H_0^1(I)} + \sqrt{\lambda\zeta^{-2}} \|w_\zeta' - \beta_\zeta\|_{L^2(I)} \\ \leq C \|g\|_{L^2(L^2(I))}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Por su parte, de la primera estimación del Teorema 4.2.1, se sigue

$$\begin{aligned} \sqrt{\hat{I}\zeta} \|\ddot{\beta}_\zeta\|_{L^2(I)} + \sqrt{\hat{\rho}} \|\ddot{w}_\zeta\|_{L^2(I)} + \sqrt{E} \|\dot{\beta}_\zeta\|_{H_0^1(I)} + \sqrt{\lambda\zeta^{-2}} \|\dot{w}_\zeta' - \dot{\beta}_\zeta\|_{L^2(I)} \\ \leq C \left(\|g(0)\|_{L^2(I)} + \|\dot{g}\|_{L^2(L^2(I))} \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

A su vez, de las estimaciones (4.21), (4.19), (4.20) y la desigualdad Poincaré, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|w_\zeta\|_{H^2(I)} &\leq C \left(\hat{\rho}\zeta^2\lambda^{-1} \|\ddot{w}_\zeta\|_{L^2(I)} + \|\beta_\zeta\|_{L^2(I)} + \zeta^2\lambda^{-1} \|g\|_{L^2(I)} \right) \\
&\leq C \left(\|\ddot{w}_\zeta\|_{L^2(I)} + \|\beta_\zeta\|_{L^2(I)} + \|g\|_{L^2(I)} \right), \quad C \text{ incluye a } \max \zeta \\
&\leq C \left(\|g(0)\|_{L^2(I)} + \|\dot{g}\|_{L^2(L^2(I))} + \|g\|_{L^2(L^2(I))} + \|g\|_{L^2(I)} \right) \\
&= C \left(\|g(0)\|_{L^2(I)} + \|g\|_{H^1(L^2(I))} + \|g\|_{L^2(I)} \right) \\
&\leq C \left(\|g(0)\|_{L^2(I)} + \|g\|_{H^1(L^2(I))} \right), \tag{5.7}
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene del hecho que $\|g\|_{L^2(I)} \leq \|g\|_{L^\infty(L^2(I))}$ en c.t.p. t y que para $I \subset \mathbb{R}$, $H^1(L^2(I)) \xrightarrow{\text{cont}} L^\infty(L^2(I))$.

Además, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\dot{w}_\zeta\|_{H_0^1(I)} &\leq C \left(\|\dot{w}_\zeta\|_{L^2(I)} + \|\dot{w}'_\zeta\|_{L^2(I)} \right) \\
&\leq C \left(\|\dot{w}_\zeta\|_{L^2(I)} + \|\dot{w}'_\zeta - \dot{\beta}_\zeta\|_{L^2(I)} + \|\dot{\beta}_\zeta\|_{L^2(I)} \right). \tag{5.8}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los acotamientos de w_ζ en $L^\infty(H^2(I))$, $\beta_\zeta, \dot{\beta}_\zeta, \dot{w}_\zeta$ en $L^\infty(H^1(I))$ y $\zeta\ddot{\beta}_\zeta, \ddot{w}$ en $L^\infty(L^2(I))$ son todos uniformes respecto del espesor. De lo anterior, podemos extraer subsucesiones convergentes

$$\begin{aligned}
w_\zeta &\rightarrow w_0 \text{ débil-}\star \text{ en } L^\infty(H^2(I)), \\
\beta_\zeta &\rightarrow \beta_0, \dot{\beta}_\zeta \rightarrow \dot{\beta}_0, \dot{w}_\zeta \rightarrow \dot{w}_0 \text{ débil-}\star \text{ en } L^\infty(H^1(I)), \\
\ddot{w}_\zeta &\rightarrow \ddot{w}_0 \text{ débil-}\star \text{ en } L^\infty(L^2(I)).
\end{aligned}$$

(Por simplicidad, denotamos de la misma forma a las subsucesiones que a las sucesiones).

Las condiciones iniciales $w_0(0, x) = \dot{w}_0(0, x) = 0$ son consecuencia del uso de condiciones iniciales nulas en nuestro problema elastodinámico. A su vez, la ecuación (5.5) implica

$$\sqrt{\lambda} \|w'_\zeta - \beta_\zeta\|_{L^2(I)} \leq C\zeta \|g\|_{L^2(L^2(I))} \rightarrow 0, \tag{5.9}$$

de donde $w'_0 - \beta_0 = 0$. Mientras, de las condiciones de contorno sobre (β_ζ, w_ζ) , se sigue

$$\beta_0|_{\partial I} = w_0|_{\partial I} = w'_0|_{\partial I} = 0. \tag{5.10}$$

La última ecuación implica que, para un dominio suave, $\frac{\partial w_0}{\partial n}|_{\partial I} = 0$.

Por otro lado, de (5.6), $\zeta^2 \|\ddot{\beta}_\zeta\|_{L^2(I)} \rightarrow 0$. Así, (3.6) nos dice que

$$-E\beta_\zeta'' - \lambda\zeta^{-2}(w_\zeta' - \beta_\zeta) \rightarrow 0, \quad (5.11)$$

o equivalentemente

$$(-E\beta_\zeta'' - \lambda\zeta^{-2}(w_\zeta' - \beta_\zeta), \eta) \rightarrow 0 \quad \forall \eta \in H_0^1(I). \quad (5.12)$$

De la convergencia de los β_ζ ,

$$(-\beta_\zeta'', \eta) = (\beta_\zeta', \eta') \rightarrow (\beta_0', \eta') = (-\beta_0'', \eta) \quad \forall \eta \in H_0^1(I), \quad (5.13)$$

esto es, $\beta_\zeta'' \rightarrow \beta_0''$ débil- \star en $L^\infty(H^{-1}(I))$, y por tanto,

$$\lambda\zeta^{-2}(w_\zeta' - \beta_\zeta) \rightarrow -E\beta_0'' \text{ débil-}\star \text{ en } L^\infty(H^{-1}(I)). \quad (5.14)$$

Por otro lado, de (3.7), para $v \in H_0^2(I)$ tenemos que

$$(\hat{\rho}\ddot{w}_\zeta, v) - (\lambda\zeta^{-2}(w_\zeta' - \beta_\zeta)', v) = (g, v). \quad (5.15)$$

Integrando por partes y tomando $\zeta \searrow 0$ se obtiene

$$(\hat{\rho}\ddot{w}_0, v) + (-E\beta_0'', v') = (g, v) \quad \forall v \in H_0^2(I). \quad (5.16)$$

Usando que $\beta_0 = w_0'$ e integrando por partes nuevamente, llegamos a

$$(\hat{\rho}\ddot{w}_0, v) + (Ew_0''''', v) = (g, v) \quad \forall v \in H_0^2(I), \quad (5.17)$$

es decir, $\hat{\rho}\ddot{w}_0 + Ew_0'''' = g$, en el sentido débil. Argumentos similares nos permiten concluir en el caso de la formulación variacional. \square

Capítulo 6

Discretización del problema

Para la resolución del problema elastodinámico de Timoshenko escalado formularemos un nuevo problema resoluble computacionalmente, discretizando las cantidades continuas presentes en nuestro problema. Para ello, procedemos por etapas: la semidiscretización espacial, siguiendo la línea de [1], y posteriormente, la introducción del método de Newmark para la discretización de la variable temporal.

6.1. Semidiscretización espacial

Consideramos la familia de particiones \mathcal{T}_h del intervalo I :

$$\mathcal{T}_h : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_M = L \quad (6.1)$$

con $M > 1$, $I_j := (x_{j-1}, x_j)$ para $j = 1, \dots, M$ y tamaño de malla

$$h := \max_{j=1, \dots, M} (x_{j-1} - x_j). \quad (6.2)$$

A su vez, introducimos el siguiente espacio:

$$V_h := \left\{ v \in \mathcal{C}(\bar{I}) : v|_{I_j} \in P_k(\bar{I}_j), j = 1, \dots, n, I_j \in \mathcal{T}_h \right\} \cap H_0^1(I), \quad (6.3)$$

donde $P_k(\bar{I}_j)$ es el espacio de polinomios de grado a lo más k , con $k \geq 1$.

Notamos que $\mathbf{V}_h := V \times V_h \subset \mathbf{V} := V_h \times V$, pues $V_h \subset V := H_0^1(I)$.

6.1.1. Discretización estándar

Dados $B_h^0, B_h^1, W_h^0, W_h^1 \in V_h$, consideremos el siguiente problema:

Problema semidiscreto

Hallar $\beta_h, w_h : [0, T] \rightarrow V = H_0^1(I)$ tales que

$$\begin{aligned} \hat{\rho}\zeta^2 \left(\ddot{\beta}_h(t), \eta_h \right) + \hat{\rho} \left(\ddot{w}_h(t), v_h \right) \\ + \mathcal{A}_h((\beta_h(t), w_h(t)), (\eta_h, v_h)) = (g(t), v_h), \quad \forall \eta_h, v_h \in V_h, \\ \beta_h(0) = B_h^0, \quad w_h(0) = W_h^0, \\ \dot{\beta}_h(0) = B_h^1, \quad \dot{w}_h(0) = W_h^1, \end{aligned} \quad (6.4)$$

donde

$$\mathcal{A}_h((\beta_h(t), w_h(t)), (\eta_h, v_h)) := E(\beta_h'(t), \eta_h') + \lambda\zeta^{-2}(w_h'(t) - \beta_h(t), v_h' - \eta_h). \quad (6.5)$$

Introducimos una base $\{\psi_i, i = 1, 2, \dots, d = \dim V_h\}$ del espacio V_h y escribimos

$$\beta_h(t) = \sum_{j=1}^d \beta^j(t) \psi_j, \quad w_h(t) = \sum_{j=1}^d w^j(t) \psi_j. \quad (6.6)$$

Si además escribimos

$$\begin{aligned} B_h^0 &= \sum_{j=1}^d B_h^{0j} \psi_j, & B_h^1 &= \sum_{j=1}^d B_h^{1j} \psi_j, \\ W_h^0 &= \sum_{j=1}^d W_h^{0j} \psi_j, & W_h^1 &= \sum_{j=1}^d W_h^{1j} \psi_j, \end{aligned} \quad (6.7)$$

con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}(t) &= \left(\beta^1(t), \dots, \beta^d(t) \right)^t, \\ \boldsymbol{w}(t) &= \left(w^1(t), \dots, w^d(t) \right)^t, \\ \boldsymbol{\chi}(t) &= \left(\chi^1(t), \dots, \chi^d(t) \right)^t, \quad \chi^i(t) = (g(t), \psi_i), \end{aligned} \quad (6.8)$$

el problema anterior toma la forma

$$\begin{aligned} \hat{\rho}\zeta^2 \mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\beta}}(t) + \hat{\rho} \mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{w}}(t) \\ - E \mathbf{K} \boldsymbol{\beta}(t) + \lambda\zeta^{-2} (\mathbf{K} \boldsymbol{w}(t) - \mathbf{P}^t \boldsymbol{w}(t) - \mathbf{P} \boldsymbol{\beta}(t) + \mathbf{M} \boldsymbol{\beta}(t)) = \boldsymbol{\chi}(t), \\ \boldsymbol{\beta}(0) = \mathbf{B}_h^0, \dot{\boldsymbol{\beta}}(0) = \mathbf{B}_h^1, \boldsymbol{w}(0) = \mathbf{W}_h^0, \dot{\boldsymbol{w}}(0) = \mathbf{W}_h^1. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Podemos formular lo anterior a través del siguiente problema:

Problema matricial

Hallar $\beta_h, w_h : [0, T] \rightarrow V = H_0^1(I)$ tales que:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \hat{\rho}\zeta^2\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\rho}\mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{\beta}}(t) \\ \ddot{\mathbf{w}}(t) \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} E\mathbf{K} + \lambda\zeta^{-2}\mathbf{M} & -\lambda\zeta^{-2}\mathbf{P}^t \\ -\lambda\zeta^{-2}\mathbf{P} & \lambda\zeta^{-2}\mathbf{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\chi}(t) \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}(0) \\ \mathbf{w}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}^0 \\ \mathbf{w}^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\beta}}(0) \\ \dot{\mathbf{w}}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^0 \\ \boldsymbol{\tau}^0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

con $\mathbf{M} = ((\psi_j, \psi_i))_{1 \leq i, j \leq \dim V_h}$, $\mathbf{K} = ((\psi'_j, \psi'_i))_{1 \leq i, j \leq d}$, $\mathbf{P} = ((\psi_j, \psi'_i))_{1 \leq i, j \leq d}$ y $\boldsymbol{\beta}^n, \mathbf{w}^n, \boldsymbol{\sigma}^n$ y $\boldsymbol{\tau}^n$ denotando las aproximaciones de $\boldsymbol{\beta}(t_n)$, $\mathbf{w}(t_n)$, $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t_n)$ y $\dot{\mathbf{w}}(t_n)$ respectivamente.

6.1.2. Integración reducida

Si implementásemos el método presentado en la subsección anterior, como se comentaba en el capítulo 3, sólo podríamos resolver problemas asociados a vigas de un espesor no muy pequeño, pues en dicho caso no se presentaría bloqueo numérico (como se mostrará en el apéndice). En situaciones en que el espesor es exageradamente pequeño, la cantidad de elementos necesarios en la discretización espacial para obtener una solución que no sufra de bloqueo numérico puede llegar a ser prohibitivamente pequeña, en el sentido de los recursos computacionales.

Para evitar esto, consideramos un caso especial de discretización espacial:

Sean $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k$ y $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ los nodos y pesos asociados a la regla de cuadratura de Gauss de k puntos sobre $[0, 1]$. Ahora, definimos el producto interior aproximado en $L^2(I)$

$$(\eta, v)_h := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^r \mu_j (\eta v) [x_{i-1} + (x_i - x_{i-1}) \xi_j], \quad (6.11)$$

para $\eta, v \in V_h$. (Recordemos que $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ denotan los nodos de la partición \mathcal{T}_h .) Un método de elementos finitos con integración reducida, en el término de corte, es el dado por:

Problema semidiscreto con integración reducida

Hallar $\beta_h, w_h : [0, T] \rightarrow V = H_0^1(I)$ tales que

$$\begin{aligned} \hat{\rho}\zeta^2 \left(\ddot{\beta}_h(t), \eta_h \right) + \hat{\rho} \left(\ddot{w}_h(t), v_h \right) \\ + \mathcal{A}_r((\beta_h(t), w_h(t)), (\eta_h, v_h)) = (g(t), v_h), \quad \forall \eta_h, v_h \in V_h, \\ \beta_h(0) = B_h^0, \quad w_h(0) = W_h^0, \\ \dot{\beta}_h(0) = B_h^1, \quad \dot{w}_h(0) = W_h^1, \end{aligned} \quad (6.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r((\beta_h(t), w_h(t)), (\eta_h, v_h)) := E(\beta_h'(t), \eta_h') \\ + \lambda\zeta^{-2} (w_h'(t) - \beta_h(t), v_h' - \eta_h)_h. \end{aligned} \quad (6.13)$$

De manera análoga al método (6.10), obtenemos el siguiente problema:

Problema matricial con integración reducida

Hallar $\beta, w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tales que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\rho}\zeta^2 M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\rho}M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\beta}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} EK + \lambda\zeta^{-2}M_r & -\lambda\zeta^{-2}P_r^t \\ -\lambda\zeta^{-2}P_r & \lambda\zeta^{-2}K_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \chi(t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \beta(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^0 \\ w^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\beta}(0) \\ \dot{w}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^0 \\ \tau^0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

con $M, K, \beta^n, w^n, \sigma^n$ y τ^n como antes y $M_r = ((\psi_j, \psi_i)_h)_{1 \leq i, j \leq \dim V_h}$,

$K_r = ((\psi_j', \psi_i')_h)_{1 \leq i, j \leq d}$ y $P_r = ((\psi_j, \psi_i')_h)_{1 \leq i, j \leq d}$ las matrices asociadas presentes en el término de corte.

Notamos que, dado que la regla de cuadratura de Gauss de k puntos calcula de manera exacta integrales de polinomios de grado $2k - 1$, si usamos polinomios de grado k en la discretización espacial, el producto interior aproximado coincidirá con el de $L^2(I)$ en los casos de las matrices K_r y P_r , es decir, $K_r = K$ y $P_r = P$.

6.2. Discretización temporal

Ahora introducimos, para la discretización temporal, una partición uniforme del intervalo $[0, T]$:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T \quad (6.15)$$

con $t_k := k\Delta t$, $k = 0, \dots, N$, y $\Delta t := \frac{T}{N}$, para $N > 1$.

6.2.1. Método de Newmark

Aplicamos ahora el método de Newmark, ver por ejemplo [14], a la resolución numérica del problema matricial con integración reducida.

Supongamos que $g \in \mathcal{C}^0(0, T; L^2(I))$, de manera que la función $t \mapsto \boldsymbol{\chi}(t)$ sea continua sobre $[0, T]$. Denotando

$$\mathbf{U}^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}^n \\ \mathbf{w}^n \end{pmatrix}, \mathbf{V}^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^n \\ \boldsymbol{\tau}^n \end{pmatrix}, \mathbf{F}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\chi}(t_n) \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

obtenemos:

$$\mathbf{S}\vartheta^{n+2}(\mathbf{U}) + \mathbf{R}\varrho^{n+2}(\mathbf{U}) = \varrho^{n+2}(\mathbf{F}), \quad 0 \leq n \leq N,$$

y

$$\mathbf{S}\vartheta^1(\mathbf{U}) + \mathbf{R}\varrho^1(\mathbf{U}) = \varrho^1(\mathbf{F}) \quad (6.17)$$

donde

$$\begin{aligned} \vartheta^{n+2}(\mathbf{U}) &:= \frac{\mathbf{U}^{n+2} - 2\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{\Delta t^2}, \quad n = 0, \dots, N, \\ \vartheta^1(\mathbf{U}) &:= \frac{\mathbf{U}^1 - \mathbf{U}^0 - \Delta t \mathbf{V}^0}{\Delta t^2}, \\ \varrho^{n+2}(\mathbf{U}) &:= \theta \mathbf{U}^{n+2} + \left(\frac{1}{2} - 2\theta + \gamma\right) \mathbf{U}^{n+1} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + \theta - \gamma\right) \mathbf{U}^n, \quad n = 0, \dots, N, \\ \varrho^1(\mathbf{U}) &:= \theta \mathbf{U}^1 + \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \mathbf{U}^0, \end{aligned} \quad (6.18)$$

con θ y γ parámetros que definen el método particular que usaremos, y

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}\zeta^{-2}\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\rho}\mathbf{M} \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} E\mathbf{K} + \lambda\zeta^{-2}\mathbf{M}_r & -\lambda\zeta^{-2}\mathbf{P}^t \\ -\lambda\zeta^{-2}\mathbf{P} & \lambda\zeta^{-2}\mathbf{K} \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

son las matrices de masa y rigidez globales respectivamente.

Para su implementación, reescribimos el sistema matricial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\mathbf{S} + \theta \Delta t^2 \mathbf{R}) \mathbf{U}^{n+2} = & \left(2\mathbf{S} - \left(\frac{1}{2} - 2\theta + \gamma \right) \Delta t^2 \mathbf{R} \right) \mathbf{U}^{n+1} \\ & - \left(\mathbf{S} + \left(\frac{1}{2} + \theta - \gamma \right) \Delta t^2 \mathbf{R} \right) \mathbf{U}^n \\ & + \varrho^{n+2}(\mathbf{F}), \end{aligned}$$

para $n = 0, \dots, N - 2$, y

$$\begin{aligned} (\mathbf{S} + \theta \Delta t^2 \mathbf{R}) \mathbf{U}^1 = & \left(\mathbf{S} - \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \Delta t^2 \mathbf{R} \right) \mathbf{U}^0 \\ & + \Delta t \mathbf{S} \mathbf{V}^0 + \Delta t^2 \varrho^1(\mathbf{F}). \end{aligned} \quad (6.20)$$

El método recién descrito se presenta en el siguiente algoritmo:

Algoritmo Método de Newmark

Dados $\mathbf{U}^0, \mathbf{V}^0$, hacer

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^1 \leftarrow & \left(\mathbf{S} + \theta (\Delta t)^2 \mathbf{R} \right)^{-1} \left\{ \left(\mathbf{S} - \left(\frac{1}{2} - \theta \right) (\Delta t)^2 \mathbf{R} \right) \mathbf{U}^0 \right. \\ & \left. + \Delta t \mathbf{S} \mathbf{V}^0 + (\Delta t)^2 \varrho^1(\mathbf{F}) \right\} \end{aligned}$$

Luego, para $n = 0, 1, \dots, N - 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{n+2} \leftarrow & \left(\mathbf{S} + \theta (\Delta t)^2 \mathbf{R} \right)^{-1} \left\{ \left(2\mathbf{S} - \left(\frac{1}{2} - 2\theta + \gamma \right) (\Delta t)^2 \mathbf{R} \right) \mathbf{U}^{n+1} \right. \\ & - \left(\mathbf{S} + \left(\frac{1}{2} - 2\theta + \gamma \right) (\Delta t)^2 \mathbf{R} \right) \mathbf{U}^n \\ & \left. + (\Delta t)^2 \varrho^{n+2}(\mathbf{F}) \right\} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Capítulo 7

Estimación de error a priori para el esquema semidiscreto

Primero, se verificará que nuestro problema cae en el marco de la Sección 8.2 de [14], para así poder disponer de los resultados que allí se presentan. Para nuestro caso, los espacios a considerar son

$$\mathbf{V} = H_0^1(I) \times H_0^1(I) \text{ y } \mathbf{H} = L^2(I) \times L^2(I),$$

ambos sobre \mathbb{R} , y provistos, respectivamente, de los productos interiores (y sus normas inducidas)

$$((\beta, w), (\eta, v))_{\mathbf{H}} := \hat{\rho}\zeta^2(\beta, \eta) + \hat{\rho}(w, v) \text{ y} \quad (7.1)$$

$$((\beta, w), (\eta, v))_{\mathbf{V}} := ((\beta', w'), (\eta', v'))_{\mathbf{H}}. \quad (7.2)$$

Notamos que ambas normas son claramente equivalentes a las normas usuales en cada espacio, si bien con constantes que dependen del espesor.

Observamos que:

- $H_0^1(I) \hookrightarrow L^2(I)$ y $H_0^1(I)$ es denso en $L^2(I)$, de donde $\mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{H}$ y \mathbf{V} es denso en \mathbf{H} .
- $(\beta, w), (\eta, v) \mapsto \mathcal{A}((\beta, w), (\eta, v)) := E(\beta', \eta') + \lambda\zeta^{-2}(w' - \beta, v' - \eta)$ es continua sobre $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, ver [1].

Consideremos el siguiente problema:

Dados $B^0, W^0 \in H_0^1(I)$, $B^1, W^1 \in L^2(I)$ y $g \in L^2(L^2(I))$, encontrar funciones β, w que verifiquen

$$\beta, w \in \mathcal{C}^0(H_0^1(I)) \cap \mathcal{C}^1(L^2(I)), \quad (7.3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} ((\beta(t), w(t)), (\eta, v))_{\mathbf{H}} + \mathcal{A}((\beta(t), w(t)), (\eta, v)) = ((0, g(t)), (\eta, v))_{\mathbf{H}},$$

en el sentido de las distribuciones sobre $[0, T]$,

$$\forall (\eta, v) \in \mathbf{V}, \quad (7.4)$$

$$\beta(0) = B^0, \quad \frac{d\beta}{dt}(0) = B^1, \quad w(0) = W^0, \quad \frac{dw}{dt}(0) = W^1. \quad (7.5)$$

Notamos además que:

$$\mathcal{A}(\cdot, \cdot) \text{ es simétrica,} \quad (7.6)$$

$$\mathcal{A}(\cdot, \cdot) \text{ es } \mathbf{V}\text{-elíptica, ver [1],} \quad (7.7)$$

La inyección canónica de \mathbf{V} en \mathbf{H} es compacta, pues

$$H_0^1(I) \xrightarrow{comp} L^2(I) \text{ (Teorema de Rellich).} \quad (7.8)$$

Por sencillez, nos restringimos al caso $k = 1$. En este caso, consideramos el problema discreto con la siguiente reescritura en el término de corte

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r((\beta_h(t), w_h(t)), (\eta_h, v_h)) &= E(\beta'_h, \eta'_h) \\ &\quad + \lambda \zeta^{-2} (w'_h - \Pi_r \beta_h, v'_h - \Pi_r \eta_h), \end{aligned}$$

donde $\Pi_r : H_0^1(I) \rightarrow L^2(I)$ es la proyección ortogonal sobre las constantes a trozos en \mathcal{T}_h :

$$(\Pi_r v)|_{I_j} := \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} v, \quad \forall j = 1, \dots, M, \forall v \in H_0^1(I). \quad (7.9)$$

Es bien sabido [12] que Π_r satisface la siguiente propiedad de aproximación:

$$\|(I - \Pi_r) \xi\|_{L^2(I)} \leq Ch \|\xi'\|_{L^2(I)} \quad (7.10)$$

para cada $\xi \in H_0^1(I)$. Notamos también que

$$\mathcal{A}_r \text{ es simétrica,} \quad (7.11)$$

y además, se tiene el siguiente resultado:

Lema 7.0.1.

$\mathcal{A}_r(\cdot, \cdot)$ es continua y \mathbf{V}_h -elíptica.

Demostración. Sea $K \in \mathcal{T}_h$ un elemento de la discretización.

Primero, probaremos la continuidad. Denotemos por $\|\cdot\|_{\mathbf{V},K}$ a la norma definida por

$$\|(\eta_h, v_h)\|_{\mathbf{V},K}^2 = \widehat{\rho}\zeta^2 \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + \widehat{\rho} \|v'_h\|_{L^2(K)}^2. \quad (7.12)$$

De las propiedades del proyector Π_r y la desigualdad de Poincaré, tenemos

$$\begin{aligned} & E \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + \lambda\zeta^{-2} \|v'_h - \Pi_r\eta_h\|_{L^2(K)}^2 \\ & \leq E \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + \lambda\zeta^{-2} \left(\|v'_h\|_{L^2(K)} + \|\Pi_r\eta_h\|_{L^2(K)} \right)^2 \\ & \leq E \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + 2\lambda\zeta^{-2} \left(\|v'_h\|_{L^2(K)}^2 + \|\Pi_r\eta_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \\ & = \frac{E}{\widehat{\rho}\zeta^2} \widehat{\rho}\zeta^2 \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + \frac{2\lambda\zeta^{-2}}{\widehat{\rho}} \widehat{\rho} \|v'_h\|_{L^2(K)}^2 + \frac{2\lambda}{\zeta^4} \widehat{\rho}\zeta^2 \|\Pi_r\eta_h\|_{L^2(K)}^2 \\ & \leq \frac{E}{\widehat{\rho}\zeta^2} \widehat{\rho}\zeta^2 \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + \frac{2\lambda\zeta^{-2}}{\widehat{\rho}} \widehat{\rho} \|v'_h\|_{L^2(K)}^2 + \frac{\lambda}{\zeta^4} \widehat{\rho}\zeta^2 \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 \\ & \leq \max \left\{ \left(\frac{E}{\widehat{\rho}\zeta^2} + \frac{\lambda}{\zeta^4} \right), \frac{2\lambda}{\widehat{\rho}\zeta^2} \right\} \left(\widehat{\rho}\zeta^2 \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + \widehat{\rho} \|v'_h\|_{L^2(K)}^2 \right). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Sumando sobre $K \in \mathcal{T}_h$ llegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r((\eta_h, v_h), (\eta_h, v_h)) & = E \|\eta'_h\|_{L^2(I)}^2 + \lambda\zeta^{-2} \|v'_h - \Pi_r\eta_h\|_{L^2(I)}^2 \\ & \leq \max \left\{ \left(\frac{E}{\widehat{\rho}\zeta^2} + \frac{\lambda}{\zeta^4} \right), \frac{2\lambda}{\widehat{\rho}\zeta^2} \right\} \left(\widehat{\rho}\zeta^2 \|\eta'_h\|_{L^2(I)}^2 + \widehat{\rho} \|v'_h\|_{L^2(I)}^2 \right) \\ & = \max \left\{ \left(\frac{E}{\widehat{\rho}\zeta^2} + \frac{\lambda}{\zeta^4} \right), \frac{2\lambda}{\widehat{\rho}\zeta^2} \right\} \|(\eta_h, v_h)\|_{\mathbf{V}}^2. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Para la elipticidad, nuevamente gracias a las propiedades de proyector y a la desigualdad de Poincaré, se tiene

$$\begin{aligned}
\|(\eta_h, v_h)\|_{\mathbf{V}, K}^2 &= \hat{\rho}\zeta^2 \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + \hat{\rho} \|v'_h\|_{L^2(K)}^2 \\
&= \hat{\rho}\zeta^2 \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + \hat{\rho} \|v'_h - \Pi_r \eta_h + \Pi_r \eta_h\|_{L^2(K)}^2 \\
&\leq \hat{\rho}\zeta^2 \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + \hat{\rho} (\|v'_h - \Pi_r \eta_h\| + \|\Pi_r \eta_h\|)_{L^2(K)}^2 \\
&\leq \hat{\rho}\zeta^2 \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + 2\hat{\rho} \left(\|v'_h - \Pi_r \eta_h\|_{L^2(K)}^2 + \|\Pi_r \eta_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \\
&\leq \hat{\rho}\zeta^2 \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + 2\hat{\rho} \|v'_h - \Pi_r \eta_h\|_{L^2(K)}^2 + 2\hat{\rho} \|\eta_h\|_{L^2(K)}^2 \\
&\leq \hat{\rho}\zeta^2 \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + \frac{2\hat{\rho}}{\zeta^2} \|v'_h - \Pi_r \eta_h\|_{L^2(K)}^2 + 2\hat{\rho} \frac{1}{2} \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 \\
&\leq \frac{2\hat{\rho}}{E} E \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + \frac{2\hat{\rho}}{\lambda} \lambda \zeta^{-2} \|v'_h - \Pi_r \eta_h\|_{L^2(K)}^2 \\
&\leq 2\hat{\rho} \max\{E^{-1}, \lambda^{-1}\} \left(E \|\eta'_h\|_{L^2(K)}^2 + \lambda \zeta^{-2} \|v'_h - \Pi_r \eta_h\|_{L^2(K)}^2 \right). \tag{7.15}
\end{aligned}$$

Sumando sobre $K \in \mathcal{T}_h$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(\eta_h, v_h)\|_{\mathbf{V}}^2 &= \hat{\rho}\zeta^2 \|\eta'_h\|_{L^2(I)}^2 + \hat{\rho} \|v'_h\|_{L^2(I)}^2 \\
&\leq 2\hat{\rho} \max\{E^{-1}, \lambda^{-1}\} \left(E \|\eta'_h\|_{L^2(I)}^2 + \lambda \zeta^{-2} \|v'_h - \Pi_r \eta_h\|_{L^2(I)}^2 \right) \\
&= 2\hat{\rho} \max\{E^{-1}, \lambda^{-1}\} \mathcal{A}_r((\eta_h, v_h), (\eta_h, v_h)). \tag{7.16}
\end{aligned}$$

□

Observación 7.0.2.

Notar que la constante de elipticidad de \mathcal{A}_r es independiente de ζ , no así su constante de continuidad.

Por último, para estudiar los errores $\beta - \beta_h$ y $w - w_h$, supondremos que β y w son soluciones suficientemente regulares ($\beta, w \in \mathcal{C}^2(H_0^1(I))$) del problema escalado, e introducimos el operador de proyección elíptica $\Pi_h \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V}_h)$ definido por

$$\forall \eta_h, v_h \in V_h, \quad \mathcal{A}_r(\Pi_h(\beta, w) - (\beta, w), (\eta_h, v_h)) = 0, \tag{7.17}$$

y así, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 7.0.3 (Convergencia del esquema semidiscreto).

Consideremos las condiciones iniciales

$$(B_h^0, W_h^0) = \Pi_h (B^0, W^0), \quad (B_h^1, W_h^1) = \Pi_h (B^1, W^1). \quad (7.18)$$

Entonces, si $\beta, w \in \mathcal{C}^2 (H_0^1(I))$, existe $C > 0$ independiente de h y de ζ tal que

$$\begin{aligned} & \|(\beta(t) - \beta_h(t), w(t) - w_h(t))\|_{\mathbf{V}} \\ & + \left\| \frac{d}{dt} (\beta(t) - \beta_h(t)), \frac{d}{dt} (w(t) - w_h(t)) \right\|_{\mathbf{H}} \\ & \leq C \left\{ \|(I - \Pi_h)(\beta(t), w(t))\|_{\mathbf{V}} + \left\| (I - \Pi_h) \frac{d}{dt} (\beta(t), w(t)) \right\|_{\mathbf{H}} \right. \\ & \quad + \int_0^t \left\| (I - \Pi_h) \frac{d^2}{dt^2} (\beta(s), w(s)) \right\|_{\mathbf{H}} ds \\ & \quad \left. + h \int_0^t \left(\|g\|_{L^2(I)} + \hat{\rho} \left\| \frac{d^2}{dt^2} w \right\|_{L^2(I)} \right) ds \right\} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Demostración. De la definición de la proyección elíptica y de los problemas continuo y discreto, tenemos que para todo $\eta_h, v_h \in V_h$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} ((\beta_h(t), w_h(t)) - \Pi_h(\beta(t), w(t)), (\eta_h, v_h))_{\mathbf{H}} \\ & + \mathcal{A}_r((\beta_h(t), w_h(t)) - \Pi_h(\beta(t), w(t)), (\eta_h, v_h)) \\ & = \frac{d^2}{dt^2} ((I - \Pi_h)(\beta(t), w(t)), (\eta_h, v_h))_{\mathbf{H}} \\ & \quad + \mathcal{A}_r((I - \Pi_h)(\beta(t), w(t)), (\eta_h, v_h)) \\ & \quad + \mathcal{A}((\beta(t), w(t)), (\eta_h, v_h)) - \mathcal{A}_r((\beta(t), w(t)), (\eta_h, v_h)) \\ & = \frac{d^2}{dt^2} ((I - \Pi_h)(\beta(t), w(t)), (\eta_h, v_h))_{\mathbf{H}} \\ & \quad + \mathcal{A}((\beta(t), w(t)), (\eta_h, v_h)) - \mathcal{A}_r((\beta(t), w(t)), (\eta_h, v_h)) \end{aligned} \quad (7.20)$$

Notamos que, al introducir $\gamma(t) = \lambda\zeta^{-2}(w'(t) - \beta(t))$, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}((\beta(t), w(t)), (\eta_h, v)) - \mathcal{A}_r((\beta(t), w(t)), (\eta_h, v)) \\ & = \lambda\zeta^{-2}(w'(t) - \beta(t), \eta_h - \Pi_r \eta_h) \\ & = (\gamma(t), (I - \Pi_r) \eta_h). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Como $\beta, w \in \mathcal{C}^2(H_0^1(I))$, tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} (I - \Pi_h) ((\beta(t), w(t)), (\eta_h, v_h))_{\mathbf{H}} \\ &= (I - \Pi_h) \frac{d^2}{dt^2} ((\beta(t), w(t)), (\eta_h, v_h))_{\mathbf{H}}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Utilizando el análogo del Teorema 8.2-3 de [14] para dicho problema, y que

$$(\gamma(t), (I - \Pi_r) \eta_h) = ((I - \Pi_r) \gamma(t), (I - \Pi_r) \eta_h) = ((I - \Pi_r) \gamma(t), \eta_h), \quad (7.23)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} & \{ \mathcal{A}_r ((\beta_h(t), w_h(t)) - \Pi_h(\beta(t), w(t)), (\beta_h(t), w_h(t)) - \Pi_h(\beta(t), w(t))) \\ & + \left\| \frac{d}{dt} ((\beta_h(t), w_h(t)) - \Pi_h(\beta(t), w(t)), (\beta_h(t), w_h(t)) - \Pi_h(\beta(t), w(t))) \right\|_{\mathbf{H}}^2 \}^{1/2} \\ & \leq \int_0^t \left(\left\| (I - \Pi_h) \frac{d^2}{dt^2} (\beta(s), w(s)) \right\|_{\mathbf{H}} \right. \\ & \quad \left. + \|(I - \Pi_r) \gamma(s)\|_{L^2(I)} \right) ds. \end{aligned} \quad (7.24)$$

De (7.10) y (3.7) tenemos que

$$\begin{aligned} \|(I - \Pi_r) \gamma\|_{L^2(I)} &\leq Ch \|\gamma'\|_{L^2(I)} \\ &\leq Ch \left(\|g\|_{L^2(I)} + \hat{\rho} \left\| \frac{d^2}{dt^2} w \right\|_{L^2(I)} \right) \end{aligned} \quad (7.25)$$

que junto a la elipticidad de \mathcal{A}_r nos llevan a

$$\begin{aligned} & \|(\beta_h(t), w_h(t)) - \Pi_h(\beta(t), w(t))\|_{\mathbf{V}} \\ & + \left\| \frac{d}{dt} (\beta_h(t), w_h(t)) - \Pi_h(\beta(t), w(t)) \right\|_{\mathbf{H}} \\ & \leq C \left\{ \int_0^t \left(\left\| (I - \Pi_h) \frac{d^2}{dt^2} (\beta(s), w(s)) \right\|_{\mathbf{H}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + h \left(\|g\|_{L^2(I)} + \hat{\rho} \left\| \frac{d^2}{dt^2} w \right\|_{L^2(I)} \right) \right) ds \right\}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

De la desigualdad triangular, aplicada a los 2 primeros términos de (7.19), se deduce dicha estimación. \square

Observación 7.0.4.

Si en el teorema anterior se consideran condiciones iniciales arbitrarias, de manera análoga, podemos obtener la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
& \|(\beta(t) - \beta_h(t), w(t) - w_h(t))\|_{\mathbf{V}} \\
& + \left\| \left(\frac{d}{dt}(\beta(t) - \beta_h(t)), \frac{d}{dt}(w(t) - w_h(t)) \right) \right\|_{\mathbf{H}} \\
& \leq C \left\{ \| (B_h^0, W_h^0) - \Pi_h(B^0, W^0) \|_{\mathbf{V}} \right. \\
& \quad + \| (B_h^1, W_h^1) - \Pi_h(B^1, W^1) \|_{\mathbf{H}} \\
& \quad + \| (I - \Pi_h)(\beta(t), w(t)) \|_{\mathbf{V}} \\
& \quad + \left\| (I - \Pi_h) \frac{d}{dt}(\beta(t), w(t)) \right\|_{\mathbf{H}} \\
& \quad + \int_0^t \left(\left\| (I - \Pi_h) \frac{d^2}{dt^2}(\beta(s), w(s)) \right\|_{\mathbf{H}} \right. \\
& \quad \left. \left. + h \left(\|g\|_{L^2(I)} + \hat{\rho} \left\| \frac{d^2}{dt^2} w \right\|_{L^2(I)} \right) \right) ds \right\} \quad (7.27)
\end{aligned}$$

En este caso, la constante C sigue siendo independiente de h , no así de ζ .

Si además consideramos la hipótesis de aproximación

$$\forall (\eta, v) \in \mathbf{V}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{(\eta_h, v_h) \in V_h} \|(\eta - \eta_h, v - v_h)\|_{\mathbf{V}} = 0, \quad (7.28)$$

tenemos el siguiente corolario:

Corolario 7.0.5.

Bajo las condiciones de aplicación del Teorema 7.0.3 y las hipótesis suplementarias (7.28) y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \| (B_h^0 - B^0, W_h^0 - W^0) \|_{\mathbf{V}} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \| (B_h^1 - B^1, W_h^1 - W^1) \|_{\mathbf{H}} = 0, \quad (7.29)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0, T], \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \|(\beta_h(t) - \beta(t), w_h(t) - w(t))\|_{\mathbf{V}} \right. \\
& \left. + \left\| \left(\frac{d}{dt}\beta_h(t) - \frac{d}{dt}\beta(t), \frac{d}{dt}w_h(t) - \frac{d}{dt}w(t) \right) \right\|_{\mathbf{H}} \right\} = 0. \quad (7.30)
\end{aligned}$$

Demostración. Si $\eta, v : [0, T] \rightarrow H_0^1(I)$ son funciones continuas, la familia de funciones

$$(I - \Pi_h)(\eta, v) : [0, T] \rightarrow H_0^1(I) \times H_0^1(I) \quad (7.31)$$

es equicontinua. De (7.28) y el Lema de Cea tenemos que

$$\forall t \in [0, T], \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|(I - \Pi_h)(\eta(t), v(t))\|_{\mathbf{V}} = 0. \quad (7.32)$$

Gracias al Teorema de Arzelà-Ascoli podemos deducir que

$$\forall (\eta, v) \in \mathcal{C}^0(\mathbf{V}), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} \|(I - \Pi_h)(\eta(t), v(t))\|_{\mathbf{V}} = 0, \quad (7.33)$$

de donde el término integral de (7.19) converge a 0.

Bajo estas condiciones, (7.30) es una consecuencia inmediata de (7.19), (7.29) y (7.33). \square

Por último, presentamos el siguiente resultado

Corolario 7.0.6.

Si $\beta, w \in \mathcal{C}^2(H^2(I))$ y si a las hipótesis del Teorema 7.0.3 le agregamos la siguiente: para toda $(\eta, v) \in H^2(I) \times H^2(I)$

$$\begin{aligned} \inf_{(\eta_h, v_h) \in \mathbf{V}_h} \{ & \|(\eta - \eta_h, v - v_h)\|_{\mathbf{H}} + h \|(\eta - \eta_h, v - v_h)\|_{\mathbf{V}} \} \\ & \leq Ch^2 \|(\eta, v)\|_{H^2(I) \times H^2(I)}, \end{aligned} \quad (7.34)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} & \|(\beta(t) - \beta_h(t), w(t) - w_h(t))\|_{\mathbf{V}} \\ & + \left\| \frac{d}{dt} (\beta(t) - \beta_h(t), w(t) - w_h(t)) \right\|_{\mathbf{H}} \\ & \leq Ch \left\{ \|(\beta(t), w(t))\|_{H^2(I) \times H^2(I)} \right. \\ & \quad + \left\| \frac{d}{dt} (\beta(t), w(t)) \right\|_{H^2(I) \times H^2(I)} \\ & \quad + \int_0^t \left(\left\| \frac{d^2}{dt^2} (\beta(s), w(s)) \right\|_{H^2(I) \times H^2(I)} \right. \\ & \quad \left. \left. + \|g\|_{L^2(I)} + \hat{\rho} \left\| \frac{d^2}{dt^2} w \right\|_{L^2(I)} \right) ds \right\}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Demostración. Si $\beta, w \in \mathcal{C}^2(H^2(I))$, de manera análoga a lo que se hace para el problema fuente en el Teorema 5.2 de [1], para la proyección elíptica podemos establecer, con constantes independientes de ζ , que

$$\begin{aligned} \|(I - \Pi_h)(\beta(t), w(t))\|_H &\leq Ch \|(\beta(t), w(t))\|_{H^2(I) \times H^2(I)}, \\ \left\| (I - \Pi_h) \frac{d}{dt}(\beta(t), w(t)) \right\|_H &\leq Ch \left\| \frac{d}{dt}(\beta(t), w(t)) \right\|_{H^2(I) \times H^2(I)}, \\ \left\| (I - \Pi_h) \frac{d^2}{dt^2}(\beta(t), w(t)) \right\|_H &\leq Ch \left\| \frac{d^2}{dt^2}(\beta(s), w(s)) \right\|_{H^2(I) \times H^2(I)}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Así, basta aplicar la mayoración (7.19) para obtener (7.35). \square

Observación 7.0.7.

Notamos que C sigue sin depender de ζ .

Capítulo 8

Experimentos numéricos

En este capítulo, presentaremos ensayos numéricos, efectuados con rutinas de elaboración propia en MATLAB, que consisten en la implementación de elementos finitos de Lagrange de orden 1 para la discretización espacial y el método de Newmark para la discretización temporal (con parámetros $\theta = \frac{1}{4}$ y $\gamma = \frac{1}{2}$, que corresponden a un método incondicionalmente estable de orden 2 en tiempo).

Con el fin de validar dichas rutinas, observar el fenómeno de bloqueo numérico en la estructura cuyo comportamiento queremos modelar y la determinación experimental de los órdenes de convergencia del método implementado, introduciremos un par de ejemplos con solución analítica conocida.

8.1. Herramientas para validar la implementación

La estructura que tendremos en cuenta a lo largo de este capítulo será una viga de acero de largo $L = 1\text{m}$ y sección transversal cuadrada de lado $0,1\text{m}$, es decir, con área $A = 10^{-2}\text{m}^2$, $J = \frac{1}{12}10^{-4}\text{m}^4$ y factor de corrección de corte $\kappa = 5/6$, sujeta en ambos extremos, y con parámetros físicos:

$$\begin{aligned} E &= 1,44 \times 10^{11} \text{N/m}^2, \\ \nu &= 0,35, \\ \rho &= 7,7 \times 10^5 \text{kg/m}^3. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Consideremos el problema de cálculo de los modos de vibración libre de una viga elástica sujeta en ambos extremos, cuya formulación variacional es la que sigue:

$$\begin{aligned} &\text{Hallar } (0, 0) \neq (\beta, w) \in \mathbf{V} \text{ y } \omega > 0 \text{ tales que:} \\ &\int_0^L EJ\beta'\eta' + \int_0^L \kappa GA(\beta - w')(\eta - v') = \omega^2 \left(\int_0^L \rho J\beta\eta + \int_0^L \rho A w v \right), \quad \forall (\eta, v) \in \mathbf{V}, \end{aligned} \tag{8.2}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} & \text{Hallar } (0, 0) \neq (\beta, w) \in \mathbf{V} \text{ y } \omega > 0 \text{ tales que:} \\ & \mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall (\eta, v) \in \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

donde:

- ω es la frecuencia de vibración y (β, w) las amplitudes de la rotación y el desplazamiento respectivamente.
- $\mathbf{u} := (\beta, w) \in \mathbf{V}$ y $\mathbf{v} := (\eta, v) \in \mathbf{V}$.
- La forma bilineal \mathcal{A} es la definida por el lado izquierdo de (8.2).
- La forma bilineal $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por:

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_0^L \rho J \beta \eta + \int_0^L \rho A w v. \quad (8.4)$$

Sea ω_0 la menor frecuencia de vibración asociada al problema (8.2) y $\mathbf{U}^0(x)$ un modo de vibración asociado a ésta. Definimos ahora el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \text{Hallar } \mathbf{u} : [0, T] \rightarrow \mathbf{H} \text{ tal que:} \\ & b(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \\ & \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{U}^0(x) \quad \text{en } I, \\ & \dot{\mathbf{u}}(0, x) = 0 \quad \text{en } I. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Notamos que $\mathbf{u}(x, t) = \cos(\omega_0 t) \mathbf{U}^0(x)$ es solución del problema (8.2). En efecto, $\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{U}^0(x)$ y $\dot{\mathbf{u}}(0, x) = 0$ y $\ddot{\mathbf{u}}(x, t) = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \mathbf{U}^0(x)$, de donde

$$\begin{aligned} b(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &= -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &= \cos(\omega_0 t) (-\omega_0^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \\ &= \cos(\omega_0 t) \mathcal{A}(\mathbf{U}^0, \mathbf{v}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Por tanto, un buen candidato para el estudio del bloqueo numérico en el problema evolutivo de la viga de Timoshenko es el problema (8.5), pues conocidos una frecuencia de vibración y su modo asociado podremos visualizar la evolución temporal de nuestra solución.

Esto nos lleva a [9], que nos presenta valores analíticos para las frecuencias y modos de vibración que buscamos. A saber, dada una frecuencia de vibración ω , sus modos propios normales, las componentes de $\mathbf{U} = (B, W)$, son:

$$\begin{aligned} B &= \frac{b}{L} \left\{ \left(\frac{\alpha^2 + s^2}{\alpha} \right) (\lambda \zeta \delta \cosh b\alpha\xi + \sinh b\alpha\xi) - \left(\frac{\beta^2 + s^2}{\beta} \right) (\delta \cos b\beta\xi - \sin b\beta\xi) \right\}, \\ W &= \cosh b\alpha\xi + \lambda \zeta \delta \sinh b\alpha\xi - \cos b\beta\xi - \delta \sin b\beta\xi, \end{aligned} \quad (8.6)$$

donde $\xi = x/L$ es una longitud adimensionalizada, b una raíz real positiva de la ecuación trascendente

$$2 - 2 \cosh b\alpha \cos b\beta + \frac{b}{(1 - b^2 r^2 s^2)^{1/2}} \left[b^2 s^2 (r^2 - s^2)^2 + (3s^2 - r^2) \right] \sinh b\alpha \sin b\beta = 0, \quad (8.7)$$

α y β están dados, respectivamente, por

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \mp (r^2 + s^2) + \left[(r^2 - s^2)^2 + 4/b^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (8.8)$$

(asumiendo que $\left[(r^2 - s^2)^2 + 4/b^2 \right]^{1/2} > (r^2 + s^2)$), r y s son constantes que dependen de los parámetros físicos de la siguiente forma

$$r^2 = \frac{J}{AL^2} \text{ y } s^2 = \frac{EJ}{\kappa AGL^2}, \quad (8.9)$$

y λ, ζ y δ están dadas por

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\alpha}{\beta}, \\ \zeta &= \frac{\beta^2 - s^2}{\alpha^2 + s^2}, \\ \delta &= \frac{-\cosh b\alpha + \cos b\beta}{\lambda \zeta \sinh b\alpha - \sin b\beta}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

A su vez, resolviendo (8.7) usando la rutina *fzero* de MATLAB, obtuvimos el valor

$$\omega_0 = 9,674491926437338 \times 10^3. \quad (8.11)$$

8.2. Determinación experimental de los órdenes de convergencia

En esta sección, presentaremos los resultados numéricos obtenidos para la rotación β y el desplazamiento w utilizando integración reducida en el término de corte. Los cálculos fueron realizados para un tiempo final

$T = \pi/\omega_0$. Los errores fueron calculados en norma $L^2(0, T; L^2(I))$, definida por

$$\|v\|_{L^2(0, T; L^2(I))} := \left(\int_0^T \|v(t)\|_{L^2(I)}^2 dt \right)^{1/2}. \quad (8.12)$$

Una de las principales razones del análisis de estos resultados es la determinación experimental de los órdenes de convergencia del método. En las Tablas 7.1 y 7.2 se presentan los

errores en norma $L^2(0, T; L^2(I))$ para los desplazamientos y las rotaciones, respectivamente. En ambos casos se usó integración reducida en el término de corte para evitar el bloqueo numérico.

En la última columna de cada tabla se muestran los cuocientes entre los errores asociados a un paso espacial y a su refinamiento (para un paso temporal fijo suficientemente pequeño en relación a los pasos espaciales que se consideraron para los cuocientes), mientras que en la última fila de cada tabla se muestran los cuocientes entre los errores asociados a un paso temporal y a su refinamiento (análogamente, para una paso espacial fijo suficientemente pequeño).

Δt	10^{-1}	$10^{-1}/2$	$10^{-1}/2^2$	$10^{-1}/2^3$	$10^{-1}/2^4$	$10^{-1}/2^5$	$10^{-1}/2^6$	$10^{-1}/2^7$	cuocientes
h	10^{-1}	$10^{-1}/2$	$10^{-1}/2^2$	$10^{-1}/2^3$	$10^{-1}/2^4$	$10^{-1}/2^5$	$10^{-1}/2^6$	$10^{-1}/2^7$	cuocientes
$0,1$	0.248927	0.513601	0.580222	0.596887	0.601052	0.602091	0.602350	0.602414	-
$10^{-1}/2^1$	0.198451	0.063976	0.129938	0.146471	0.150606	0.151640	0.151898	0.151963	3.964218
$10^{-1}/2^2$	0.311320	0.049874	0.016098	0.032580	0.036707	0.037738	0.037996	0.038061	3.992637
$10^{-1}/2^3$	0.339627	0.078348	0.012487	0.004031	0.008151	0.009182	0.009440	0.009504	4.004510
$10^{-1}/2^4$	0.346709	0.085475	0.019619	0.003122	0.001008	0.002038	0.002296	0.002360	4.026731
$10^{-1}/2^5$	0.348480	0.087257	0.021404	0.004907	0.000781	0.000252	0.000510	0.000574	
$10^{-1}/2^6$	0.348923	0.087703	0.021850	0.005353	0.001227	0.000195	0.000063	0.000127	
$10^{-1}/2^7$	0.349033	0.087814	0.021961	0.005465	0.001338	0.000307	0.000049	0.000016	
cuocientes	-	3.974823	3.999170	4.021324	4.093252				

Tabla 8.1: Error $L^2(0, T; L^2)$ ($\times 10^{-3}$) para los desplazamientos con integración reducida en el término de corte.

Δt	10^{-1}	$10^{-1}/2$	$10^{-1}/2^2$	$10^{-1}/2^3$	$10^{-1}/2^4$	$10^{-1}/2^5$	$10^{-1}/2^6$	$10^{-1}/2^7$	cuocientes
h	10^{-1}	$10^{-1}/2$	$10^{-1}/2^2$	$10^{-1}/2^3$	$10^{-1}/2^4$	$10^{-1}/2^5$	$10^{-1}/2^6$	$10^{-1}/2^7$	cuocientes
10^{-1}	0.624897	0.893522	0.977551	0.998124	1.002958	1.004026	1.004221	1.004233	-
$10^{-1}/2^1$	0.263218	0.156683	0.230116	0.250109	0.255107	0.256329	0.256618	0.256682	3.912364
$10^{-1}/2^2$	0.418002	0.067876	0.039699	0.057922	0.062911	0.064167	0.064479	0.064554	3.976212
$10^{-1}/2^3$	0.461971	0.105701	0.016974	0.009931	0.014501	0.015750	0.016066	0.016145	3.998508
$10^{-1}/2^4$	0.473151	0.116395	0.026463	0.004234	0.002481	0.003626	0.003939	0.004018	4.018186
$10^{-1}/2^5$	0.475957	0.119112	0.029145	0.006617	0.001058	0.000620	0.000906	0.000985	
$10^{-1}/2^6$	0.476659	0.119793	0.029826	0.007289	0.001654	0.000264	0.000155	0.000227	
$10^{-1}/2^7$	0.476834	0.119964	0.029997	0.007460	0.001822	0.000414	0.000066	0.000039	
cuocientes	-	3.974688	3.998547	4.018786	4.082953				

Tabla 8.2: Error $L^2(0, T; L^2)$ ($\times 10^{-3}$) para los rotaciones con integración reducida en el término de corte.

Para la determinación del orden de convergencia espacial, α , consideramos dos pasos espaciales arbitrarios, h y \tilde{h} , tales que \tilde{h} es el refinamiento de h y un paso temporal Δt suficientemente pequeño en comparación a h y \tilde{h} (en particular, consideraremos los valores sombreados en el borde derecho de cada tabla).

Sean además u_h y \tilde{u}_h las soluciones del problemas discreto obtenidas con h y \tilde{h} , respectivamente, y u la solución exacta del problema continuo. Sabemos que

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,T;L^2(I))} = Ch^\alpha, \quad (8.13)$$

y

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^2(0,T;L^2(I))} = C\tilde{h}^\alpha. \quad (8.14)$$

Como la razón entre h y \tilde{h} es 2, tenemos que

$$\frac{\|u - u_h\|_{L^2(0,T;L^2(I))}}{\|u - \tilde{u}_h\|_{L^2(0,T;L^2(I))}} = \frac{h^\alpha}{\tilde{h}^\alpha} = 2^\alpha. \quad (8.15)$$

Así,

$$\alpha = \log \frac{\|u - u_h\|_{L^2(0,T;L^2(I))}}{\|u - \tilde{u}_h\|_{L^2(0,T;L^2(I))}}, \quad (8.16)$$

que nos entrega los valores experimentales de α :

1.987036	1.997342	2.001626	2.009609
----------	----------	----------	----------

Tabla 8.3: Orden de convergencia experimental para el desplazamiento (discretización espacial).

1.968040	1.991395	1.999462	2.006544
----------	----------	----------	----------

Tabla 8.4: Orden de convergencia experimental para la rotación (discretización espacial).

De manera análoga (considerando los valores sombreados en el borde inferior de cada tabla), para el orden de convergencia temporal, α_t , obtenemos:

1.990842	1.999476	2.006760	2.02961
----------	----------	----------	---------

Tabla 8.5: Orden de convergencia experimental para el desplazamiento (discretización temporal).

1.990891	1.999701	2.007671	2.033248
----------	----------	----------	----------

Tabla 8.6: Orden de convergencia experimental para la rotación (discretización temporal).

De esta manera, determinamos que tanto en espacio como en tiempo tenemos convergencia cuadrática, tal como lo predice la teoría (ver, por ejemplo, [14]), validando así el método.

De lo anterior, obtenemos las siguientes curvas de error para el desplazamiento y rotación:

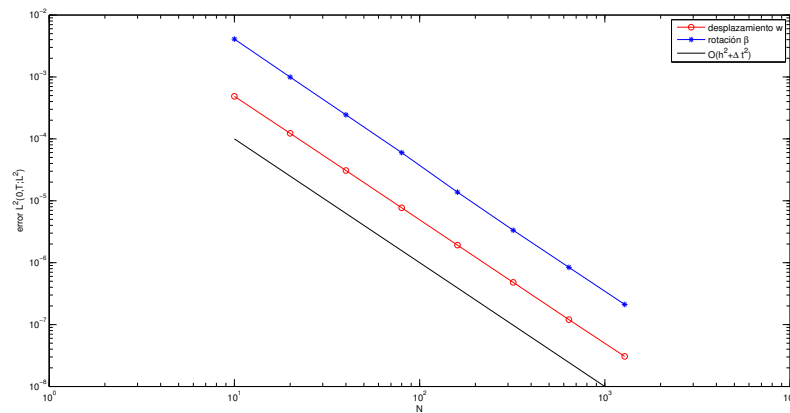


Figura 8.1: Curvas de error para los desplazamientos y rotaciones usando integración reducida en el término de corte.

Capítulo 9

Conclusiones y trabajo futuro

De lo realizado en la presente memoria, podemos concluir que:

1. Se demostró existencia y unicidad de solución para el problema elastodinámico de la viga de Timoshenko, además de regularidad de mayor orden bajo hipótesis de suavidad en los datos y ciertas condiciones de compatibilidad.
2. Tras la introducción de un escalamiento de masa, cuando el espesor de la viga se aproxima a cero, la solución de la viga empotrada de Timoshenko se aproxima a las solución de la viga de Euler-Bernoulli.
3. Para la semidiscretización espacial, se tienen estimaciones a priori del error independientes del espesor al considerar como datos iniciales las proyecciones elípticas de los datos iniciales del problema continuo.
4. Experimentalmente se observa que el método totalmente discreto es libre de bloqueo.

En eventuales trabajos futuros se podrían abordar las siguientes tareas:

1. Uso de nuevas técnicas para obtener estimaciones genuinamente libres de bloqueo para el esfuerzo de corte presente en el problema mixto evolutivo asociado.
2. Estimaciones de error a priori y a posteriori, libres de bloqueo, para el esquema totalmente discreto.

Apéndice A

Justificación experimental del método libre de bloqueo

En este apéndice presentamos un ejemplo que justifica el uso de integración reducida en el término de corte, para así evitar el bloqueo numérico (como mencionamos en el capítulo anterior). Para ello, consideramos una leve variación del ejemplo presentado al comienzo del capítulo, con $A = 10^{-8}\text{m}^2$, $J = \frac{1}{12}10^{-16}\text{m}^4$. Dichos parámetros describen una viga con un espesor mil veces más pequeño que la viga que consideramos al comienzo.

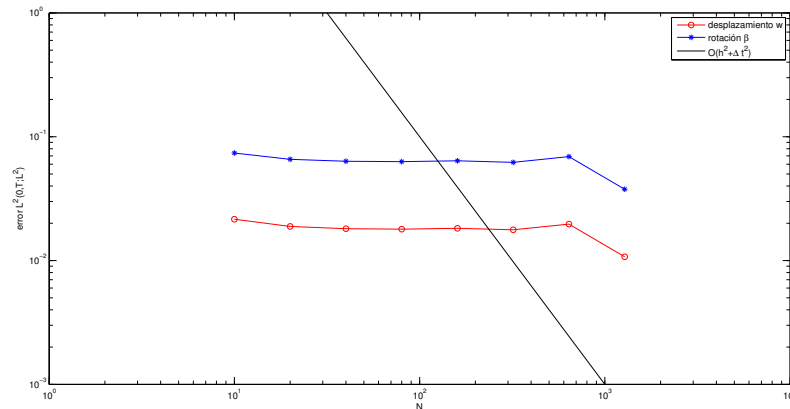


Figura A.1: Curvas de error para los desplazamientos y rotaciones sin uso de integración reducida en el término de corte.

En la figura anterior, mostramos como se comporta el error en función de la cantidad de elementos empleados en las discretizaciones espacial y temporal cuando no usamos integración reducida.

Observamos que el error se estanca aunque refinemos la discretización espacial, siendo necesaria una gran cantidad de elementos para que se observe un comportamiento favorable en los errores.

Apéndice B

Algunos resultados

A continuación, se presentan resultados usados en la memoria para facilitar la comprensión de ésta. No se incluyen las demostraciones.

Lema B.0.1 (Desigualdad de Gronwall).

Sea $\eta(\cdot)$ una función no negativa y absolutamente continua sobre $[0, T]$ que satisface para casi todo punto t la desigualdad diferencial

$$\eta'(t) \leq \phi(t) \eta(t) + \psi(t), \quad (\text{B.1})$$

donde $\phi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones no negativas y sumables sobre $[0, T]$. Entonces

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right],$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

En particular, si

$$\eta' \leq \phi \eta \text{ sobre } [0, T] \text{ y } \eta(0) = 0,$$

entonces

$$\eta \equiv 0 \text{ sobre } [0, T].$$

Desigualdad de Cauchy con ε

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} \quad (a, b > 0, \varepsilon > 0). \quad (\text{B.2})$$

Teorema B.0.2 (Proposición 3.13 (iii) de [15]).

Sean E un espacio de Banach y (f_n) una sucesión en E^* , donde E^* denota el dual de E . Luego

$$\text{Si } f_n \rightarrow f \text{ débil-}^*, \text{ entonces } (\|f_n\|) \text{ es acotada y } \|f\| \leq \liminf \|f_n\|. \quad (\text{B.3})$$

Bibliografía

- [1] D. N. ARNOLD, *Discretization by finite elements of a model parameter dependent problem*, Numer. Math., **37** (1981) 405-421.
- [2] I. BABUŠKA AND M. SURI, *On locking and robustness in the finite element method*, SIAM J. Numer. Anal., **29** (1992) 1261-1293.
- [3] R. DURÁN, L. HERVELLA-NIETO, E. LIBERMAN, R. RODRÍGUEZ AND J. SOLOMIN, *Approximation of the vibration modes of a plate by Reissner-Mindlin equations*, Math. Comp., **68** (1999) 1447-1463.
- [4] R. DURÁN AND E. LIBERMAN, *On mixed finite element methods for the Reissner-Mindlin plate model*, Math. Comp., **58** (1992) 561-573.
- [5] R. S. FALK, *Finite Elements for the Reissner-Mindlin Plate*, in *Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions, and Applications*, D. Boffi and L. Gastaldi, eds., Springer-Verlag, Berlin, 2008, 195-230.
- [6] C. LOVADINA, D. MORA AND R. RODRÍGUEZ, *A locking-free finite element method for the buckling problem of a non-homogeneous Timoshenko beam*, M²AN, **45** (2011) 603-626.
- [7] S. R. WU, *A priori error estimation of a four-node Reissner-Mindlin plate element for elastodynamics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **194** (2005) 2257-2281.
- [8] S. R. WU, *Reissner-Mindlin plate theory for elastodynamics*, J. Appl. Math., (2004) 179-189.
- [9] T. C. HUANG, *The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform with simple end conditions*, J. Appl. Mech., **28** (1961) 579-584.
- [10] E. HERNÁNDEZ, E. OTÁROLA, R. RODRÍGUEZ AND F. SANHUEZA, *Approximation of the vibration modes of a Timoshenko curved rod of arbitrary geometry*, IMA J. Numer. Anal., **29** (2009) 180-207.
- [11] J. ALBERTY, C. CARSTENSEN AND S. A. FUNKEN, *Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation*, Numerical Algorithms, **20** (1999) 117-137.

-
- [12] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [13] L. C. EVANS, *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics vol. 19, AMS, 1998.
- [14] P. A. RAVIART AND J. M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1988.
- [15] H. BREZIS, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, 2011.
- [16] C. M. WANG, J. N. REDDY AND K. H. LEE, *Shear deformable beams and plates: relationships with classical solutions*, Elsevier, Oxford, 2000.

*-¿Qué te parece desto, Sancho? - Dijo Don Quijote -
Bien podrán los encantadores quitarme la ventura,
pero el esfuerzo y el ánimo, será imposible.*

*Segunda parte del Ingenioso Caballero
Don Quijote de la Mancha
Miguel de Cervantes*

*-Buena está - dijo Sancho -; fírmela vuestra merced.
-No es menester firmarla - dijo Don Quijote-,
sino solamente poner mi rúbrica.*

*Primera parte del Ingenioso Caballero
Don Quijote de la Mancha
Miguel de Cervantes*