Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Métodos de Elementos Finitos Mixtos para Problemas No-Coercivos.
Aplicaciones en Acústica y Elastodinámica.

Memoria para optar al título de Ingeniero Matemático

Manuel Solano Palma

2006

Métodos de Elementos Finitos Mixtos para Problemas No-Coercivos
Aplicaciones en Acústica y Elastodinámica

Manuel Esteban Solano Palma

Profesor Guía: Gabriel N. Gatica

COMISION EVALUADORA

Firma: ____

Rommel Bustinza.

Universidad de Concepción, Chile.

Firma: ____

Gabriel N. Gatica.

Universidad de Concepción, Chile.

Firma: ____

Salim Meddahi.

Universidad de Oviedo, España.

Fecha defensa de título: __________________________

Calificación: __________________________________

Concepción–Enero 2007

Índice

Resumen

En el presente trabajo se utiliza el método de elementos finitos mixtos para resolver dos tipos de problemas en régimen armónico: el problema de Helmholtz proveniente de la ecuación de ondas acústicas y la ecuación elastodinámica. Ambos problemas tienen en común que, al realizar la formulación mixta-dual respectiva, una de las formas bilineales no cumple con las hipótesis de la teoría de Babuška-Brezzi, específicamente uno de los términos posee un signo "incorrecto" que causa la pérdida de coercitividad. Este inconveniente se soluciona reescribiendo de manera adecuada las formas bilineales y utilizando un resultado sobre inclusión compacta de espacios de Sobolev, lo cual permite emplear la alternativa de Fredholm para analizar la existencia y unicidad tanto de los esquemas continuos como de los esquemas discretos asociados.

En el primer capítulo se presentan las herramientas teóricas que permiten asegurar la convergencia y estabilidad de los esquemas de Galerkin asociados a perturbaciones compactas de operadores invertibles. En el segundo capítulo se aborda la ecuación de Helmholtz con condiciones de contorno de Dirichlet, utilizando como aproximación los espacios de Raviart-Thomas de orden cero. Luego, se realiza el análisis de error a-posteriori respectivo mediante un estimador basado en la condición inf–sup global y una función auxiliar conveniente. Finalmente, en el tercer Capítulo se estudia un problema proveniente de la elastodinámica con condiciones de contorno de Dirichlet, usando parte de los elementos $PEERS$ como espacios de aproximación.

Capítulo 1

Introducción.

Aquí se sigue el análisis presentado en el Capítulo 13 de [10] y se desarrollan los fundamentos teóricos que permiten asegurar la convergencia y estabilidad de los esquemas de Galerkin asociados a perturbaciones compactas de operadores invertibles. Para este efecto, sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, y sea $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$ el operador inducido por una forma bilineal y acotada $A : X \times Y \to \mathbb{R}$, esto es:

$$\langle \mathbb{A}(x), y\rangle_Y := A(x,y) \qquad \forall x \in X \quad \forall y \in Y. \tag{1.1}$$

Supongamos ahora que $\mathbb{A}$ es biyectivo. Esto significa que para cada $F \in Y'$ existe un único $x \in X$ tal que

$$\mathbb{A}(x) = \mathcal{R}_Y(F), \tag{1.2}$$

donde $\mathcal{R}_Y : Y' \to Y$ es la aplicación de Riesz. Equivalentemente, para cada $F \in Y'$ existe un único $x \in X$ tal que

$$A(x,y) = F(y) \qquad \forall y \in Y. \tag{1.3}$$

Ahora, sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de X e Y, respectivamente, y consideremos el esquema de Galerkin: *Hallar* $x_n \in X_n$ *tal que*

$$A(x_n, y_n) = F(y_n) \qquad \forall y_n \in Y_n. \tag{1.4}$$

Puesto que $F(y_n) = A(x, y_n)$, (1.4) es equivalente a

$$\langle \mathbb{A}(x_n), y_n\rangle_Y = \langle \mathbb{A}(x), y_n\rangle_Y \qquad \forall y_n \in Y_n \tag{1.5}$$

o bien: *Hallar* $x_n \in X_n$ *tal que*

$$\mathbf{P}_n \mathbb{A}(x_n) = \mathbf{P}_n \mathbb{A}(x), \tag{1.6}$$

donde $\mathbf{P}_n : Y \to Y_n$ es el proyector ortogonal. Definiendo $\mathbb{A}_n := \mathbf{P}_n \mathbb{A}|_{X_n}$ podemos escribir lo anterior como: *Hallar* $x_n \in X_n$ *tal que*

$$\mathbb{A}_n(x_n) = \mathbf{P}_n \mathbb{A}(x). \tag{1.7}$$

Definición 1.1 *Se dice que* (1.7) *es convergente para* $\mathbb{A}$ *si existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para cada* $f \in \mathbb{A}(X)$*, la ecuación* $\mathbb{A}_n(x_n) = \mathbf{P}_n f$ *tiene una única solución* $x_n \in X_n \; \forall n \geq N$*, y además* $x_n \to x$ *cuando* $n \to \infty$*, donde* $x \in X$ *es el único elemento tal que* $\mathbb{A}(x) = f$.

En otras palabras, se dice que (1.7) es convergente para $\mathbb{A}$ si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ el operador $\mathbb{A}_n : X_n \to Y_n$ es biyectivo y

$$\mathbb{A}_n^{-1} \mathbf{P}_n \mathbb{A}(x) \to x, \text{ cuando } n \to \infty \quad \forall x \in X.$$

En general, se puede esperar convergencia de (1.7) si

$$dist(x, X_n) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty \quad \forall x \in X,$$

lo cual se asume de ahora en adelante.

El siguiente lema da un resultado equivalente para la convergencia de (1.7).

Lema 1.2 *El esquema* (1.7) *es convergente sí y sólo sí existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq N$*, el operador* $\mathbb{A}_n : X_n \to Y_n$ *es biyectivo y el operador* $\mathbb{A}_n^{-1} \mathbf{P}_n \mathbb{A} : X \to X$ *es uniformemente acotado, es decir, existe* $M > 0$ *tal que*

$$\|\mathbb{A}_n^{-1} \mathbf{P}_n \mathbb{A}\| \leq M \qquad \forall n \geq N.$$

Demostración. Supongamos que (1.7) es convergente. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ el operador $\mathbb{A}_n$ es biyectivo y $\mathbb{A}_n^{-1} \mathbf{P}_n \mathbb{A}(x) \to x \quad \forall x \in X$, cuando $n \to \infty$. Luego, la sucesión $\{\mathbb{A}_n^{-1} \mathbf{P}_n \mathbb{A}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada para cada $x \in X$, y por lo tanto, aplicando el Teorema de Banach-Steinhaus, se deduce que existe $M > 0$ tal que

$$\|\mathbb{A}_n^{-1} \mathbf{P}_n \mathbb{A}\| \leq M \qquad \forall n \geq N.$$

Recíprocamente, supongamos que existen $N \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que $\forall n \geq \mathbb{N}$ el operador $\mathbb{A}_n : X_n \to Y_n$ es biyectivo y $\|\mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{A}\| \leq M$. Puesto que $\mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{A}(u_n) = u_n \, \forall u_n \in X_n$ se sigue que $\forall x \in X$:

$$\begin{aligned} \|x - \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{A}(x)\| &= \|(I - \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{A})(x)\| \\ &= \|(I - \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{A})(x - u_n)\| \quad \forall u_n \in X_n \\ &\leq \|I - \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{A}\|\|x - u_n\| \quad \forall u_n \in X_n, \end{aligned}$$

de donde

$$\|x - \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{A}(x)\| \leq (1 + M) \inf_{u_n \in X_n} \|x - u_n\|, \tag{1.8}$$

es decir

$$\|x - \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{A}(x)\| \leq (1 + M) \;\; dist(x, X_n) \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \quad \blacksquare$$

El resultado principal de este capítulo (ver Teorema 1.4) requiere del siguiente lema previo. En lo que sigue, $\mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathcal{K}(X, Y)$ denotan los espacios de operadores lineales acotados y compactos, respectivamente, desde el Banach X en el Banach Y.

Lema 1.3 *Sea X un espacio de Banach y sean $\{\mathbb{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{B} \in \mathcal{L}(X, X)$ tales que $\mathbb{B}_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{B}(x)$ $\forall x \in X$. Entonces para todo operador compacto $\mathbb{K}$ se tiene que*

$$\|\mathbb{B}_n\mathbb{K} - \mathbb{B}\mathbb{K}\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n > N$ tal que

$$\|\mathbb{B}_n\mathbb{K} - \mathbb{B}\mathbb{K}\| > \epsilon.$$

Así, para $N = 1$, existe $n_1 > 1$ tal que $\|\mathbb{B}_{n_1}\mathbb{K} - \mathbb{B}\mathbb{K}\| > \epsilon$. Para $N = n_1$, existe $n_2 > n_1$ tal que $\|\mathbb{B}_{n_2}\mathbb{K} - \mathbb{B}\mathbb{K}\| > \epsilon$, y así sucesivamente. Entonces, podemos construir una subsucesión $\{\mathbb{B}_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{\mathbb{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|\mathbb{B}_n^{(1)}\mathbb{K} - \mathbb{B}\mathbb{K}\| > \epsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

y luego, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n^{(1)} \in X$ con $\|x_n^{(1)}\| = 1$ tal que

$$\|\mathbb{B}_n^{(1)}\mathbb{K}(x_n^{(1)}) - \mathbb{B}\mathbb{K}(x_n^{(1)})\| > \epsilon. \tag{1.9}$$

Dado que $\mathbb{K}$ es compacto, existen una subsucesión $\{x_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\tilde{x} \in X$ tales que

$$\mathbb{K}(x_n^{(2)}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{x}.$$

Además, notemos que para todo $x \in X$, $\{\mathbb{B}_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, por lo que, de acuerdo al Teorema de Banach-Steinhaus, $\|\mathbb{B}_n\|_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que

$$\|\mathbb{B}_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se sigue que

$$\|\mathbb{B}_n^{(1)}\mathbb{K}(x_n^{(2)}) - \mathbb{B}\mathbb{K}(x_n^{(2)})\| \leq \|\mathbb{B}_n^{(1)}\mathbb{K}(x_n^{(2)}) - \mathbb{B}_n^{(1)}(\tilde{x})\| + \|\mathbb{B}_n^{(1)}(\tilde{x}) - \mathbb{B}(\tilde{x})\| + \|\mathbb{B}(\tilde{x}) - \mathbb{B}\mathbb{K}(x_n^{(2)})\|$$

$$\leq M\|\mathbb{K}(x_n^{(2)}) - \tilde{x}\| + \|\mathbb{B}_n^{(1)}(\tilde{x}) - \mathbb{B}(\tilde{x})\| + \|\mathbb{B}\|\|\tilde{x} - \mathbb{K}(x_n^{(2)})\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

lo que contradice (1.9). ∎

Teorema 1.4 *Sean X y Y dos espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y sean $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbb{K} \in \mathcal{K}(X, Y)$ tales que*

i) $\mathbb{A}$ *es biyectivo*

ii) $\mathbb{A} + \mathbb{K}$ *es inyectivo.*

Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de X e Y, respectivamente, tales que

iii) $X_n \subseteq X_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$

iv) $\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *es densa en X.*

Suponga que el esquema de Galerkin (1.7) es convergente para $\mathbb{A}$. Entonces el esquema de Galerkin (1.7) también es convergente para $\mathbb{T} := \mathbb{A} + \mathbb{K}$.

Demostración. Notemos primero, de acuerdo al teorema de la inversa acotada, que $\mathbb{A}^{-1}$ es lineal y acotado, y luego $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{K}$ también lo es. También es fácil ver de **iii)** y **iv)**

que para cada $x \in X$, $dist(x, X_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, y luego, la convergencia de (1.7) para $\mathbb{A}$ asegura, de acuerdo al Lema 1.2, que existe $M > 0$ tal que

$$\|\mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{A}\| \le M \qquad \forall n \ge N$$

y

$$\mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{A}(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x \qquad x \in X.$$

Se sigue por el Lema 1.3 que

$$\mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K} \text{ en } \mathcal{L}(X, X).$$

Notemos que $(\mathbf{I}+\mathbb{A}^{-1}\mathbb{K}) = \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}+\mathbb{K})$ es biyectivo gracias a la alternativa de Fredholm y al hecho que es inyectivo, pues $\mathbb{A}^{-1}$ y $\mathbb{A} + \mathbb{K}$ lo son.

Ahora, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K} &= \mathbf{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K} - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K} \\ &= (\mathbf{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})\{\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})^{-1}(\mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K} - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})\}, \end{aligned}$$

y dado que $\mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K}$, podemos elegir $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que

$$\|(\mathbf{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})^{-1}\|\|\mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K} - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K}\| < \frac{1}{2} \quad \forall n \ge N.$$

Se sigue, de acuerdo al Teorema 2.8 de [10], que $\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})^{-1}(\mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K} - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})$ es invertible y

$$\|[\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})^{-1}(\mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K} - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})]^{-1}\| \le \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

De este modo, $\mathbf{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K}$ también es invertible y

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K})^{-1}\| &= \|\{\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})^{-1}(\mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K} - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})\}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})^{-1}\| \\ &\le 2\|(\mathbf{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})^{-1}\| \qquad \forall n \ge N. \end{aligned}$$

Resta ver que las condiciones del Lema 1.2 se satisfacen para $\mathbb{T} := \mathbb{A} + \mathbb{K}$. En efecto, para $n \ge N$ definimos $\mathbb{T}_n = \mathbf{P}_n\mathbb{T}$ y observemos que

$$\mathbb{T}_n = \mathbf{P}_n\mathbb{A} + \mathbf{P}_n\mathbb{K} = \mathbb{A}_n + \mathbf{P}_n\mathbb{K} = \mathbb{A}_n(\mathbf{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K})$$

es invertible, pues $\mathbb{A}_n$ lo es y $(\mathbf{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K})$ también para $n \geq N$. A su vez,

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{T}_n &= (\mathbf{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K})^{-1}\mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n(\mathbb{A} + \mathbb{K}) \\
&= (\mathbf{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K})^{-1}\mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{A}(\mathbf{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K}),
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{T}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{T}_n\| &\leq \|(\mathbf{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{K})^{-1}\|\|\mathbb{A}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{A}\|\|(\mathbf{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})\| \\
&\leq 2M\|(\mathbf{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})^{-1}\|\|(\mathbf{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})\| \quad \forall n \geq N,
\end{aligned}$$

lo cual prueba el acotamiento uniforme de $\{\mathbb{T}_n^{-1}\mathbf{P}_n\mathbb{T}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y completa la demostración. $\blacksquare$

Capítulo 2

Ecuación de Helmholtz.

2.1 Introducción.

La ecuación de onda acústica describe la propagación del sonido en un medio no viscoso, compresible e irrotacional (aire, por ejemplo), el cual se conoce como fluido acústico.

En lo que sigue se considera un fluido acústico que ocupa una región del plano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, cuya frontera Γ es Lipschitz-continua. En el caso de pequeños desplazamientos, se sabe que las ecuaciones de Navier-Stokes que gobiernan su comportamiento son:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla p &= f, & (2.1) \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho \, div \, \boldsymbol{u} &= 0, & (2.2) \end{aligned}$$

donde c es la velocidad del sonido en el medio, $\boldsymbol{u} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ representa la velocidad de los desplazamientos en el medio, ρ es la densidad media del fluido, $p : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ corresponde a la presión y f es la fuerza externa que actúa sobre el fluido. Eliminando la velocidad $\boldsymbol{u}$ en las ecuaciones anteriores se obtiene la ecuación de ondas escalar para la presión p:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = -f. \tag{2.3}$$

Además, se considera un valor prescrito de la presión p en la frontera Γ:

$$p = g \quad \text{en} \quad \Gamma. \tag{2.4}$$

Interesa buscar soluciones armónicas de la ecuación (2.3), esto es en la forma

$$p(x,t) = \mathrm{Re}(p(x)e^{-i\omega t}), \tag{2.5}$$

donde ω es la frecuencia de la onda. De este modo, asumiendo que f también tiene un comportamiento armónico y que las oscilaciones son pequeñas, la ecuación resultante es:

$$\begin{aligned} \Delta p + \kappa^2 p &= f \quad \text{en}\,\Omega, \\ p &= g \quad \text{en}\,\Gamma, \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde $\kappa = \frac{\omega}{c}$ se llama número de onda. Se observa que este problema no tiene solución única si κ^2 es valor propio de $-\nabla$.

En la siguiente sección se introduce una formulación mixta-dual de la ecuación (2.6), y se escribe de forma adecuada para poder garantizar la existencia y unicidad de la solución. Luego, se realiza la formulación discreta asociada y se prueba su estabilidad y convergencia.

2.2 Formulación variacional continua.

Definamos la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} = \nabla p$. Entonces (2.6) se reescribe:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \kappa^2 p &= f \quad \text{en}\,\Omega, \\ p &= g \quad \text{en}\,\Gamma. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Testeando la ecuación $\boldsymbol{\sigma} = \nabla p$ con $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ y considerando de (2.7) que la incógnita auxiliar original $p = \frac{1}{\kappa^2}(f - \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma})$, se tiene que una formulación variacional mixta de (2.6) se reduce a: *Hallar* $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} = \langle \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}, g\rangle_\Gamma - \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega f\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega), \tag{2.8}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ denota la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$ con respecto al producto interior de $L^2(\Gamma)$.

Ahora, consideremos el operador

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : H(\mathrm{div};\Omega) &\longrightarrow H(\mathrm{div};\Omega) \\ \boldsymbol{\tau} &\rightarrow \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) := \nabla z, \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde $z \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución, garantizada por el Teorema de Lax-Milgram, del problema:

$$\Delta z = \mathrm{div}\ \boldsymbol{\tau} \quad \text{en}\ \Omega, \quad z = 0 \quad \text{en}\ \Gamma. \tag{2.10}$$

El resultado de dependencia continua para (2.10) indica que $\|z\|_{1,\Omega} \leq C\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega}$.

Por otro lado, notemos que $\mathbf{P}$ es lineal, $\mathrm{div}\,\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}$ en Ω y

$$\|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{H(\mathrm{div};\Omega)} = |z|^2_{1,\Omega} + \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{\tau}\|^2_{0,\Omega} \leq C\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{\tau}\|^2_{0,\Omega} \leq C\|\ \boldsymbol{\tau}\|^2_{H(\mathrm{div};\Omega)},$$

es decir

$$\|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leq C\|\ \boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega). \tag{2.11}$$

Además, $\mathbf{P}$ es un proyector. En efecto, dado $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$, se tiene que $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})) = \nabla\tilde{z}$, donde $\tilde{z}$ es la única solución de

$$\Delta\tilde{z} = \mathrm{div}\,\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) \quad \text{en}\ \Omega, \quad \tilde{z} = 0 \ \text{ en}\ \Gamma.$$

Puesto que $\mathrm{div}\,\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}$ se sigue que $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})) = \nabla z$, es decir $\mathbf{P}^2(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})$.

De este modo, un resultado clásico de Análisis Funcional implica que

$$H(\mathrm{div};\Omega) = \mathbf{P}(H(\mathrm{div};\Omega)) \oplus (\mathbf{I} - \mathbf{P})(H(\mathrm{div};\Omega)), \tag{2.12}$$

y además existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} C\Big\{\|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} + \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}\Big\} &\leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \\ \leq \|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} + \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} &\qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Así, el lado izquierdo de (2.8) se puede escribir como

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} = \int_\Omega \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{P})(\boldsymbol{\tau})$$

$$+\int_\Omega (\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega (\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma})\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}) - \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})\operatorname{div}\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}),$$

con lo cual (2.8) es equivalente a: *Hallar* $\boldsymbol{\sigma}\in H(\operatorname{div};\Omega)$ *tal que*:

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) + K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) = F(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall\boldsymbol{\tau}\in H(\operatorname{div};\Omega), \tag{2.14}$$

donde las formas bilineales $A, K : H(\operatorname{div};\Omega)\times H(\operatorname{div};\Omega)\to\mathbb{R}$ y el funcional lineal $F : H(\operatorname{div};\Omega)\to\mathbb{R}$ están dados por

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) = -\int_\Omega \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) \quad &- \quad \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})\operatorname{div}\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) \\ &+ \quad \int_\Omega (\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma})\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}), \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) = 2\int_\Omega \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega (\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}), \tag{2.16}$$

y

$$F(\boldsymbol{\tau}) \;=\; \langle\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}, g\rangle_\Gamma - \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega f\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}. \tag{2.17}$$

Lema 2.1 *El operador $\mathbb{K}$ asociado a la forma bilineal K es un operador compacto.*

Demostración. De acuerdo a resultados de regularidad clásicos (ver [7], [8]), se tiene que existe $\epsilon > 0$ tal que la solución z de (2.10) pertenece a $H^{3/2+\epsilon}(\Omega)$ y $\|z\|_{H^{3/2+\epsilon}(\Omega)} \leq C\|\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega}$. De esta manera,

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) \in [H^{1/2+\epsilon}(\Omega)]^2 \;\text{ y }\; \|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\|_{[H^{1/2+\epsilon}(\Omega)]^2} \leq C\|\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.18}$$

Así, usando la inclusión compacta $[H^{1/2+\epsilon}(\Omega)]^2 \stackrel{c}{\hookrightarrow} [L^2(\Omega)]^2$ se sigue que $\mathbf{P} : H(\operatorname{div};\Omega)\to [L^2(\Omega)]^2$ es un operador compacto, y por lo tanto su adjunto $\mathbf{P}^* : [L^2(\Omega)]^2 \to H(\operatorname{div};\Omega)$ también lo es.

Finalmente, dado $\boldsymbol{\sigma}\in H(\operatorname{div};\Omega)$, el operador $\mathbb{K} : H(\operatorname{div};\Omega)\to H(\operatorname{div};\Omega)$ inducido por la forma bilineal K está dado por la relación

$$\langle\mathbb{K}(\boldsymbol{\sigma}),\boldsymbol{\tau}\rangle_{H(\operatorname{div};\Omega)} := K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) \quad \forall\boldsymbol{\tau}\in H(\operatorname{div};\Omega),$$

de donde $\mathbb{K} := 2\mathbf{P}^*\mathbf{P} + (\mathbf{I}-\mathbf{P})^*\mathbf{P} + \mathbf{P}^*(\mathbf{I}-\mathbf{P})$. Luego, la compacidad de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}^*$ y el acotamiento de $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$ e $(\mathbf{I}-\mathbf{P})^*$ implican que $\mathbb{K}$ es compacto. ∎

Lema 2.2 *Existe* $C_1 > 0$ *tal que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\zeta}\in H(\mathrm{div};\Omega)\\ \boldsymbol{\zeta}\neq \mathbf{0}}} \frac{A(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{\zeta}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}} \geq C_1 \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega), \tag{2.19}$$

y además

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}\in H(\mathrm{div};\Omega)} A(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\zeta}) > 0 \quad \forall \boldsymbol{\zeta} \in H(\mathrm{div};\Omega), \boldsymbol{\zeta} \neq \mathbf{0}. \tag{2.20}$$

Demostración. Consideremos el operador

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : H(\mathrm{div};\Omega) &\rightarrow H(\mathrm{div};\Omega) \\ \boldsymbol{\tau} &\rightarrow \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) := (\mathbf{I} - 2\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Usando que $\mathbf{P}$ es proyector se tiene que

$$\mathbf{PS}(\boldsymbol{\tau}) = -\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) \quad \text{y} \quad (\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega),$$

y por lo tanto, notando que $\mathrm{div}\,(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}) = 0$ y aplicando la desigualdad (2.13), resulta

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\tau},\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})) &= \int_\Omega \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) + \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\,\mathrm{div}\,\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega (\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau})\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}) \\ &\geq \min\Big\{1,\frac{1}{\kappa^2}\Big\}\Big(\|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{H(\mathrm{div};\Omega)} + \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau})\|^2_{H(\mathrm{div};\Omega)}\Big) \\ &\geq \min\Big\{1,\frac{1}{\kappa^2}\Big\}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\tau}\|^2_{H(\mathrm{div};\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Puesto que $\mathbf{S}$ es acotado, se sigue que

$$A(\boldsymbol{\tau},\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})) \geq C_1 \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \|\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega),$$

y luego

$$\sup_{\boldsymbol{\zeta}\in H(\mathrm{div};\Omega)\boldsymbol{\zeta}\neq\mathbf{0}} \frac{A(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{\zeta}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}} \geq \frac{A(\boldsymbol{\tau},\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}))}{\|\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}} \geq C_1 \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega).$$

Por último, de la simetría de A y de (2.19) se tiene (2.20). ∎

Teorema 2.3 *Supongamos que el problema homogéneo asociado a* (2.8) *posee sólo la solución trivial. Entonces, dados* $f \in L^2(\Omega)$ *y* $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, (2.8) *tiene una única solución* $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$. *Además existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leq C\Big\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\Big\}.$$

Demostración. Denotando por $\mathbb{A} : H(\text{div};\Omega) \to H(\text{div};\Omega)$ al operador asociado a la forma bilineal A, (2.14) es equivalente a: *Hallar* $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div};\Omega)$ *tal que*

$$(\mathbb{A} + \mathbb{K})\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{F},$$

donde $\mathbb{F} \in H(\text{div};\Omega)$ es el representante por Riesz de F.

Del Lema 2.2 se tiene que $\mathbb{A}$ es un isomorfismo y como $\mathbb{K}$ es compacto, de acuerdo a la alternativa de Fredholm, se concluye que $\mathbb{A} + \mathbb{K}$ es invertible. Además, del Teorema de la Inversa Acotada, resulta

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{H(\text{div};\Omega)} \;\leq\; \|(\mathbb{A} + \mathbb{K})^{-1}\| \|\mathbb{F}\| \leq C\Big\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\Big\},$$

lo cual completa la demostración. ∎

2.3 Esquema de Galerkin.

Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones del dominio Ω, compuesta por triángulos T de diámetro h_T, y denotemos $h := \max\{h_T : T \in \mathcal{T}_h\}$. Entonces, se define el siguiente subespacio de $H(\text{div};\Omega)$:

$$H_h := \{\boldsymbol{\tau}_h \in H(\text{div};\Omega) : \boldsymbol{\tau}_h|_T \in \mathbb{RT}_0(T)\ \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

donde $\mathbb{RT}_0(T)$ es el espacio de Raviart-Thomas local de orden cero, esto es:

$$\mathbb{RT}_0(T) := \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq [\mathbb{P}_1(T)]^2. \tag{2.23}$$

Dado $\delta \in (0,1]$, consideremos el operador de interpolación

$$\mathcal{E}_h : [H^\delta(\Omega)]^2 \cap H(\text{div};\Omega) \to H_h,$$

caracterizado, para cada $\boldsymbol{\tau} \in [H^\delta(\Omega)]^2 \cap H(\text{div};\Omega)$, por

$$\text{div } \mathcal{E}_h(\boldsymbol{\tau}) = \mathcal{P}_h(\text{div }(\boldsymbol{\tau})), \tag{2.24}$$

$$\int_e \mathcal{E}_h(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\nu} = \int_e \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu} \qquad \forall \text{ lado } e \text{ de } \mathcal{T}_h, \tag{2.25}$$

donde $\mathcal{P}_h$ es el proyector ortogonal de $L^2(\Omega)$ sobre las constantes a trozos. Además, se tiene que $\mathcal{E}_h$ verifica las propiedades de aproximación (ver Teorema 3.6 de [9]):

$$\|\boldsymbol{\tau} - \mathcal{E}_h(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq Ch^\delta \Big\{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^\delta(\Omega)]^2} + \|\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}\|_{L^2(\Omega)} \Big\} \tag{2.26}$$

$\forall \boldsymbol{\tau} \in [H^\delta(\Omega)]^2 \cap H(\mathrm{div};\Omega)$, y si, además, div $(\boldsymbol{\tau}) \in H^\delta(\Omega)$, entonces

$$\|\boldsymbol{\tau} - \mathcal{E}_h(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leq Ch^\delta \Big\{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^\delta(\Omega)]^2} + \|\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}\|_{H^\delta(\Omega)} \Big\}. \tag{2.27}$$

Entonces, el problema discreto asociado a (2.8) es: *Hallar* $\boldsymbol{\sigma}_h \in H_h$ *tal que*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_h - \frac{1}{\kappa^2} \int_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}_h \,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}_h = \langle \boldsymbol{\tau}_h \cdot \boldsymbol{\nu}, g \rangle_\Gamma - \frac{1}{\kappa^2} \int_\Omega f \,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}_h \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in H_h. \tag{2.28}$$

Equivalentemente, de acuerdo a (2.14): *Hallar* $\boldsymbol{\sigma}_h \in H_h$ *tal que*:

$$A(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + K(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = F(\boldsymbol{\tau}_h) \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in H_h. \tag{2.29}$$

Lema 2.4 *Existen* $h_0 > 0$ *y* $C_1 > 0$ *independientes de* h*, tales que para cada* $h \leq h_0$

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\zeta}_h \in H_h \\ \boldsymbol{\zeta}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{A(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\zeta}_h)}{\|\boldsymbol{\zeta}_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}} \geq C_1 \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in H_h, \tag{2.30}$$

y además

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h} A(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\zeta}_h) > 0 \quad \forall \boldsymbol{\zeta}_h \in H_h, \boldsymbol{\zeta} \neq \mathbf{0}. \tag{2.31}$$

Demostración. Dado que $\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) \in [H^{1/2+\epsilon}(\Omega)]^2 \cap H(\mathrm{div};\Omega)$, podemos definir, de forma similar al caso continuo, el operador discreto

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{S}_h: & H_h & \rightarrow & H_h \\ & \boldsymbol{\tau}_h & \rightarrow & \mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h) := \boldsymbol{\tau}_h - 2\mathcal{E}_h(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}_h)). \end{array} \tag{2.32}$$

Se sigue de (2.24) y de la definición de $\mathbf{P}$ (cf. 2.9), que para cada $\boldsymbol{\tau}_h \in H_h$:

$$\mathrm{div}\,\mathcal{E}_h(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}_h)) = \mathcal{P}_h(\mathrm{div}\,\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}_h)) = \mathcal{P}_h(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}_h) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}_h, \tag{2.33}$$

porque div $\boldsymbol{\tau}_h$ es constante a trozos en $\mathcal{T}_h$, con lo cual:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h) = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}_h \qquad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in H_h. \tag{2.34}$$

A su vez, usando (2.33), la propiedad de aproximación (2.26) y la estimación de regularidad (2.18), se obtiene

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}_h) - \mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h)\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} = 2\|\mathcal{E}_h(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}_h)) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}_h)\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} &= 2\|\mathcal{E}_h(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}_h)) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}_h)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&\leq Ch^{1/2+\epsilon}\Big\{\|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}_h)\|_{[H^{1/2+\epsilon}]^2} + \|\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}_h\|_{L^2(\Omega)}\Big\} \\
&\leq Ch^{1/2+\epsilon}\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{1/2+\epsilon}\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}. \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

En particular, es claro de (2.35) y del acotamiento uniforme de $\mathbf{S}$, que $\mathbf{S}_h$ es uniformemente acotado, es decir, existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$
\|\mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h)\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leq C\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}. \qquad (2.36)
$$

Además, notemos que $\mathbf{S}_h$ es inyectivo. En efecto, si $\mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h) = 0$ entonces de (2.34) se obtiene que $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}_h = 0$, de donde $\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}_h) = 0$ y por lo tanto $\boldsymbol{\tau}_h = 2\mathcal{E}_h(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}_h)) = 0$.

Así, usando (2.22), el acotamiento de $\mathbb{A}$ y (2.35), se deduce que para cada $\boldsymbol{\tau}_h \in H_h$:

$$
\begin{aligned}
A(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h)) &= A(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}_h)) - A(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}_h) - \mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h)) \\
&\geq C\|\boldsymbol{\tau}_h\|^2_{H(\mathrm{div};\Omega)} - \hat{C}h^{1/2+\epsilon}\|\boldsymbol{\tau}_h\|^2_{H(\mathrm{div};\Omega)},
\end{aligned}
$$

de donde, eligiendo $h_0 > 0$ suficientemente pequeño, se sigue que:

$$
A(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h)) \geq C\|\boldsymbol{\tau}_h\|^2_{H(\mathrm{div};\Omega)} \qquad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in H_h, \quad \forall h \leq h_0. \qquad (2.37)
$$

Finalmente, (2.36) y (2.37) implican (2.30), mientras que (2.31) es consecuencia de (2.30) y la simetría de $\mathbb{A}$. ∎

Para el siguiente teorema necesitamos el operador de proyección ortogonal $\mathbf{P}_h$: $H(\mathrm{div};\Omega) \to H_h$, donde, dado $\varphi_h \in H(\mathrm{div};\Omega)$, $\varphi_h := \mathbf{P}_h(\varphi)$ es la mejor aproximación de φ por elementos de H_h.

Teorema 2.5 *Supongamos que $\mathbb{A} + \mathbb{K}$ es inyectivo. Entonces existe $h_0 > 0$ tal que para cada $h \leq h_0$, (2.29) tiene solución única $\boldsymbol{\sigma}_h \in H_h$, la cual converge a $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$. Además, dado $\delta \in (0,1]$ tal que $\boldsymbol{\sigma} \in [H^\delta(\Omega)]^2$ y $\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma} \in H^\delta(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que*

$$
\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leq Ch^\delta\big\{\|\boldsymbol{\sigma}\|_{[H^\delta(\Omega)]^2} + \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma}\|_{H^\delta(\Omega)}\big\}.
$$

Demostración. La ecuación de operadores asociada a (2.29) es: *Hallar* $\boldsymbol{\sigma}_h \in H_h$ *tal que*

$$(\mathbb{A}_h + \mathbb{K}_h)\boldsymbol{\sigma}_h = \mathbb{F}_h \tag{2.38}$$

donde $\mathbb{A}_h := \mathbf{P}_h\mathbb{A}$, $\mathbb{K}_h := \mathbf{P}_h\mathbb{K}$ y $\mathbb{F}_h := \mathbf{P}_h\mathbb{F}$. Del Lema 2.4 se tiene que para $h \leq h_0$, $\mathbb{A}_h$ es un isomorfismo. Además, $\mathbb{K}_h$ es compacto y acotado por lo que, aplicando el Teorema 1.4 se obtiene la existencia, unicidad y convergencia de la solución discreta. Además, aplicando (1.8) y (2.27), para $\delta \in (0,1]$, $\boldsymbol{\sigma} \in [H^\delta(\Omega)]^2$ y $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} \in H^\delta(\Omega)$, entonces existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} &\leq C \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} \leq C\|\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{E}_h(\boldsymbol{\sigma})\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} \\
&\leq Ch^\delta\big\{\|\boldsymbol{\sigma}\|_{[H^\delta(\Omega)]^2} + \|\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\|_{H^\delta(\Omega)}\big\}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.4 Resultados Numéricos.

En esta sección se presentan algunos ejemplos que ilustran el comportamiento de la solución del esquema discreto (2.28) (equivalentemente (2.29)) utilizando un refinamiento uniforme. Si $\boldsymbol{\sigma}_h \in H_h$ es la aproximación de $\boldsymbol{\sigma} \in H(\operatorname{div};\Omega)$, entonces se define el error de aproximación como

$$e(\boldsymbol{\sigma}) := \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}.$$

Además, la tasa de convergencia experimental se define como

$$r(\boldsymbol{\sigma}) := -2\frac{\log(e(\boldsymbol{\sigma})/e'(\boldsymbol{\sigma}))}{\log(N/N')},$$

donde e y e' son los errores asociados a dos malla consecutivas con N y N' grados de libertad, respectivamente.

Los ejemplos que se muestran en esta sección se resumen en la siguiente tabla:

Ejemplo	Ω	κ	p
1	$[0,1]^2$	1	$p(x_1,x_2)=(x_1^2-x_1)(x_2^2-x_2)$
2	$[0,1]^2$	20	$p(x_1,x_2)=(x_1^2-x_1)(x_2^2-x_2)$
3	$[0,1]^2$	1	$p(x_1,x_2)=\text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2)$
4	$[-1,1]^2-[0.5,1]^2$	1	$p(x_1,x_2)=(x_1^2-x_1)(x_2^2-x_2)$
5	$[0,1]^2$	1	$p(x_1,x_2)=\dfrac{x_1x_2}{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+0.1}$
6	$[-1,1]^2-[0,1]^2$	1	$p(r,\theta)=r^{2/3}\sin(\frac{2\theta-\pi}{3})$

Tabla 2.1: Ejemplo, dominio Ω, κ y solución exacta p

En los Ejemplos 1–5 se puede ver que $\boldsymbol{\sigma} := \nabla p \in [H^1(\Omega)]^2$ y div $\boldsymbol{\sigma} \in H^1(\Omega)$, por lo que se recupera el orden de convergencia teórico dado por el Teorema 2.5 (ver Tablas 3.2-2.6). Por otro lado, en el Ejemplo 6 se prueba, debido a que las derivadas parciales presentan una singularidad en el origen, que $\boldsymbol{\sigma} := \nabla p \in [H^{2/3}(\Omega)]^2$ y además div $\boldsymbol{\sigma} = 0$, con lo cual, de acuerdo al Teorema 2.5 la tasa de convergencia debe ser $\mathcal{O}(h^{2/3})$, lo que se ve reflejado experimentalmente en la Tabla 2.7, en la cual $r(\boldsymbol{\sigma})$ oscila en torno a 2/3.

Las Figuras 2.1 a 2.15 muestran las componentes aproximadas y exactas de la solución para cada uno de los ejemplos. Allí se observa que en general $\boldsymbol{\sigma}_h$ constituye una muy buena aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$.

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	$r(\boldsymbol{\sigma})$
4617	0.0152	-
9396	0.0107	1.0032
23274	0.0068	0.9978
46704	0.0048	1.0095
93225	0.0034	0.9898

Tabla 2.2: Grados de libertad N, errores $e(\boldsymbol{\sigma})$ y tasas de convergencia $r(\boldsymbol{\sigma})$ (Ejemplo 1)

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	$r(\boldsymbol{\sigma})$
4617	0.1189	-
9396	0.0476	2.5754
23274	0.0075	4.0658
46704	0.0050	1.1773
93225	0.0034	1.0767
155964	0.0027	1.0187

Tabla 2.3: Grados de libertad N, errores $e(\boldsymbol{\sigma})$ y tasas de convergencia $r(\boldsymbol{\sigma})$. (Ejemplo 2)

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	$r(\boldsymbol{\sigma})$
4617	0.0169	-
9396	0.0117	1.0236
23274	0.0074	1.0062
46704	0.0053	0.9946
93225	0.0037	1.0029

Tabla 2.4: Grados de libertad N, errores $e(\boldsymbol{\sigma})$ y tasas de convergencia $r(\boldsymbol{\sigma})$. (Ejemplo 3)

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	$r(\boldsymbol{\sigma})$
3513	0.0131	-
6951	0.0093	1.0200
13959	0.0065	0.9997
35022	0.0041	0.9963
70164	0.0029	0.9856

Tabla 2.5: Grados de libertad N, errores $e(\boldsymbol{\sigma})$ y tasas de convergencia $r(\boldsymbol{\sigma})$. (Ejemplo 4)

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	$r(\boldsymbol{\sigma})$
4617	3.2204	-
9396	2.0843	1.2247
23274	1.3632	0.9363
46704	0.9768	0.9571
93225	0.6841	1.0304

Tabla 2.6: Grados de libertad N, errores $e(\boldsymbol{\sigma})$ y tasas de convergencia $r(\boldsymbol{\sigma})$. (Ejemplo 5)

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	$r(\boldsymbol{\sigma})$
2841	0.0907	-
4713	0.0826	0.3685
14088	0.0557	0.7189
28161	0.0420	0.8195
46836	0.0361	0.5971
69660	0.0315	0.6881
93573	0.0276	0.8814
140100	0.0250	0.4895

Tabla 2.7: Grados de libertad N, errores $e(\boldsymbol{\sigma})$ y tasas de convergencia $r(\boldsymbol{\sigma})$. (Ejemplo 6)

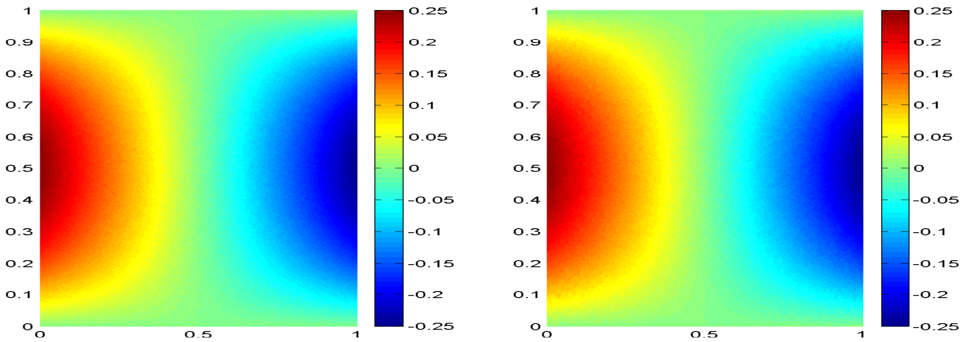


Figura 2.1: $\boldsymbol{\sigma}_x$ para $N = 93225$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 1)

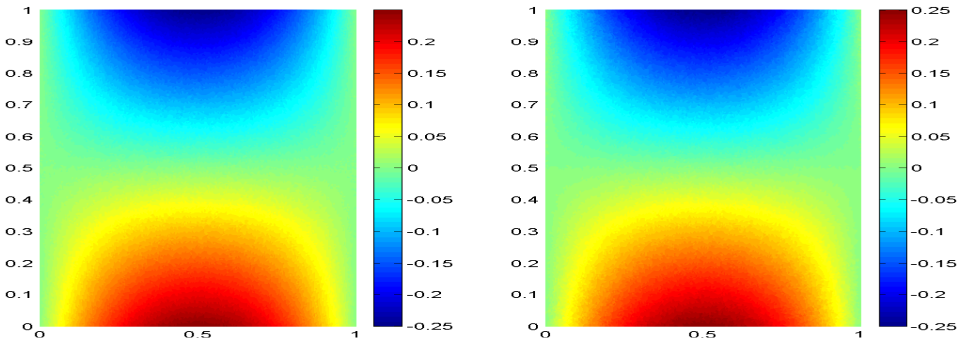


Figura 2.2: $\boldsymbol{\sigma}_y$ para $N = 93225$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 1)

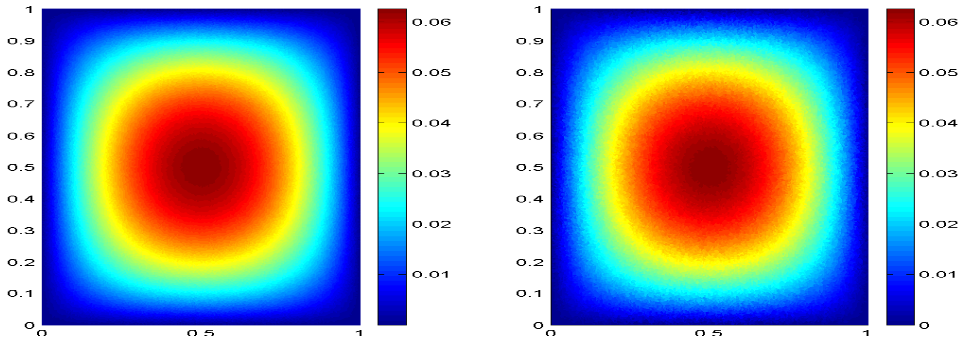


Figura 2.3: Presión $p(x, y)$ para $N = 93225$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 1)

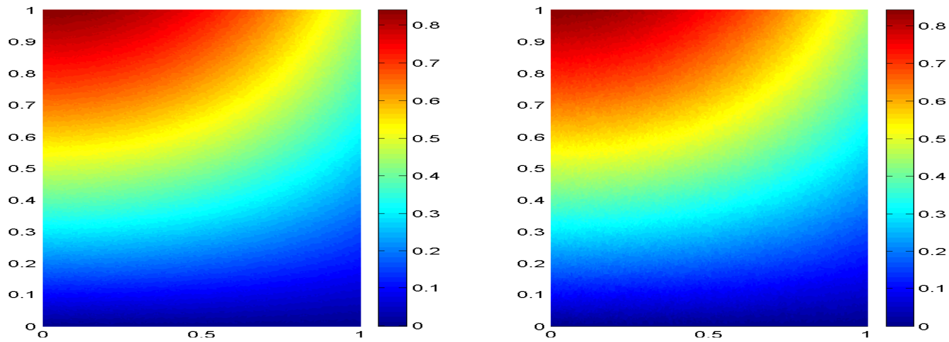


Figura 2.4: $\boldsymbol{\sigma}_x$ para $N = 93225$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 3)

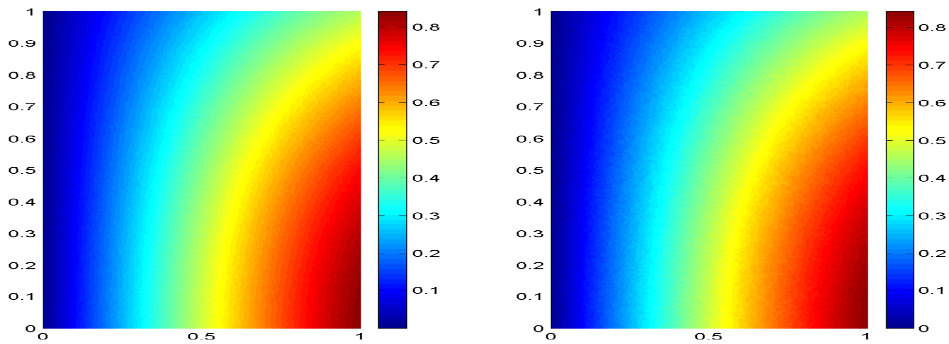


Figura 2.5: $\boldsymbol{\sigma}_y$ para $N = 93225$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 3)

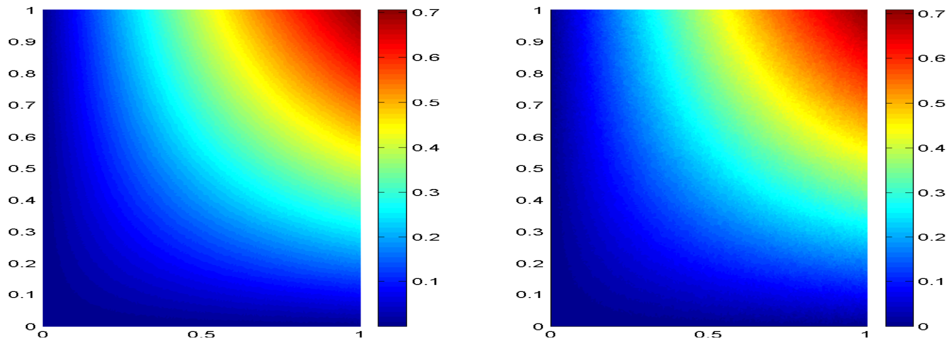


Figura 2.6: Presión $p(x,y)$ para $N = 93225$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 3)

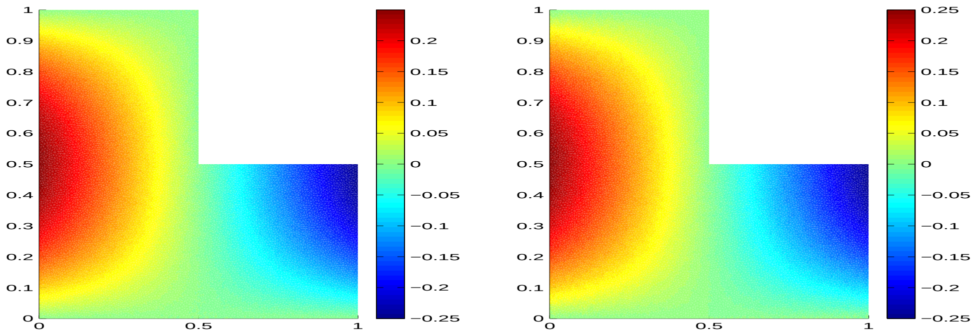


Figura 2.7: $\boldsymbol{\sigma}_x$ para $N = 70164$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 4)

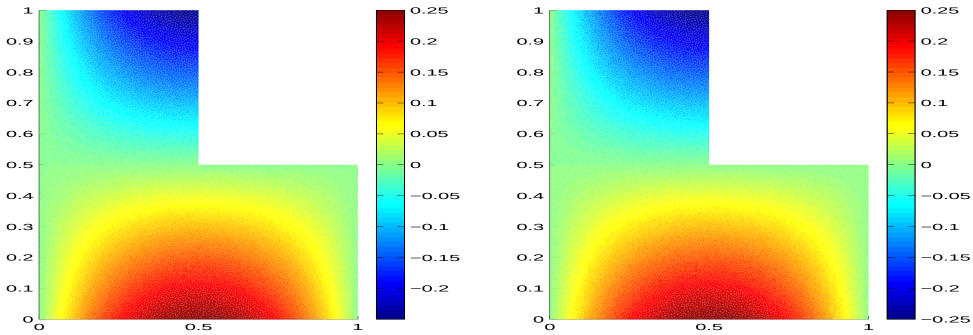


Figura 2.8: $\boldsymbol{\sigma}_y$ para $N = 70164$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 4)

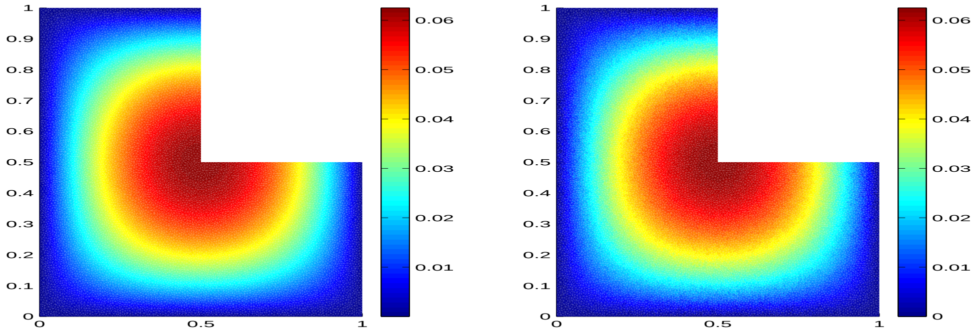


Figura 2.9: Presión $p(x, y)$ para $N = 70164$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 4)

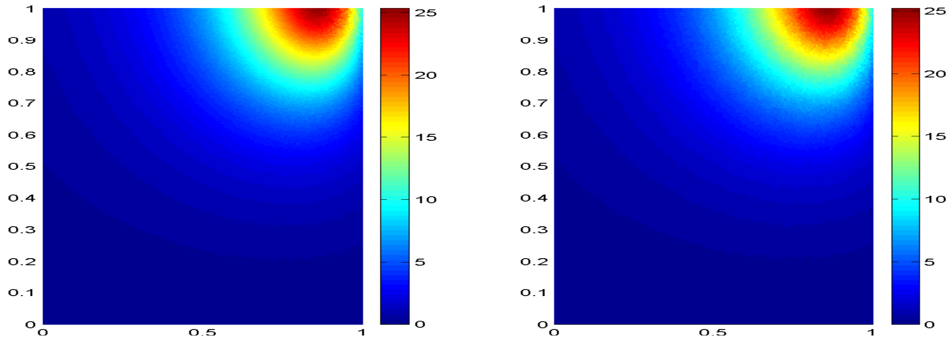


Figura 2.10: $\boldsymbol{\sigma}_x$ para $N = 93573$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 5)

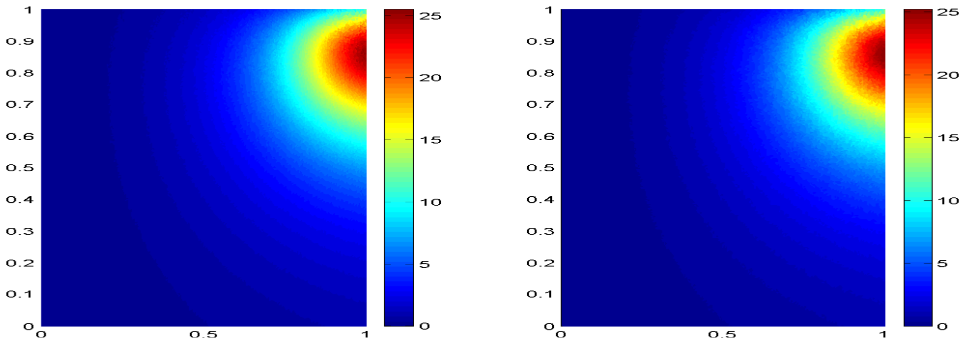


Figura 2.11: $\boldsymbol{\sigma}_y$ para $N = 93573$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 5)

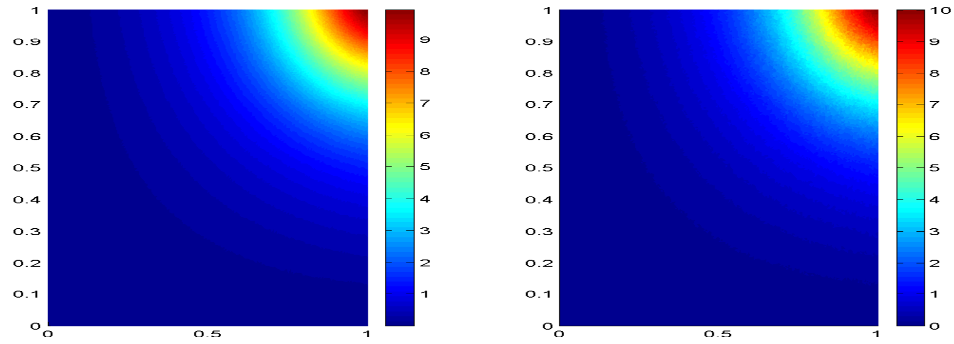


Figura 2.12: Presión $p(x, y)$ para $N = 70164$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 5)

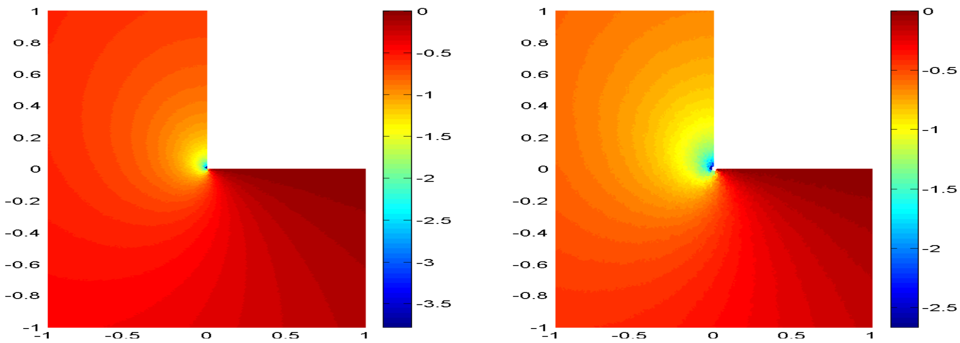


Figura 2.13: $\boldsymbol{\sigma}_x$ para $N = 93573$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 6)

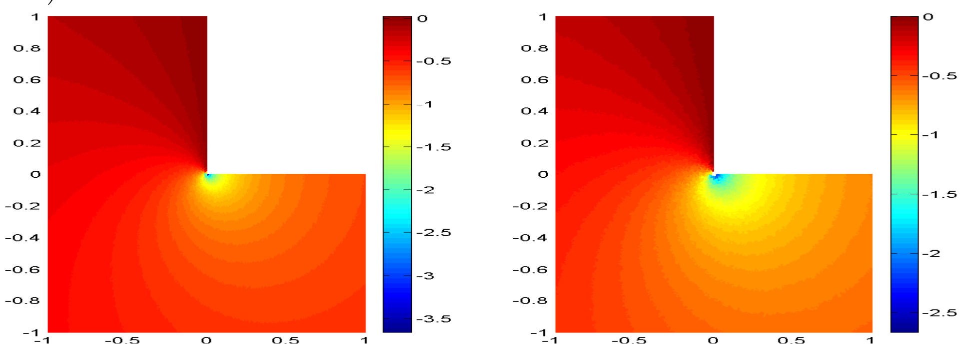


Figura 2.14: $\boldsymbol{\sigma}_y$ para $N = 93573$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 6)

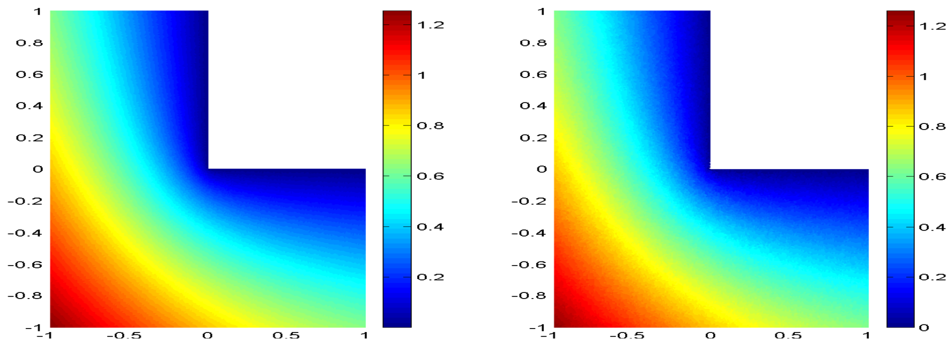


Figura 2.15: Presión $p(x, y)$ para $N = 70164$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 6)

Capítulo 3

Análisis de error A-posteriori.

En este capítulo se realiza el análisis de error a-posteriori para la formulación variacional mixta de la ecuación de Helmholtz estudiada en el capítulo anterior. Además, se proporcionan ejemplos numéricos que avalan la eficiencia del estimador.

3.1 Construcción del estimador

Dado $T \in \mathcal{T}_h$, denotamos por $E(T)$ al conjunto de los nodos de T y por E_h al conjunto de todos los nodos de la triangulación $\mathcal{T}_h$, es decir, $E_h = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} E(T)$. Además, definimos $E_h(\Gamma) := \{e \in E_h : e \subseteq \Gamma\}$.

Lema 3.1 *Supongamos que* $\mathbb{A} + \mathbb{K}$ *es inyectivo. Entonces, existe* $C > 0$*, independiente de* h*, tal que*

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leq C \sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega) \\ \boldsymbol{\tau} \neq \mathbf{0}}} \frac{A(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + K(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega),$$

donde A *y* K *son las formas bilineales definidas en* (2.15) *y* (2.16).

Demostración. Del Teorema 2.5, $\mathbb{A} + \mathbb{K}$ es invertible por lo que, de acuerdo al Teorema de la inversa acotada, existe $C > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leq C \|(\mathbb{A} + \mathbb{K})(\boldsymbol{\sigma})\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega),$$

de donde

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\sigma}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} &\leq C \sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}\in H(\mathrm{div};\Omega)\\ \boldsymbol{\tau}\neq\mathbf{0}}} \frac{\langle(\mathbb{A}+\mathbb{K})(\boldsymbol{\sigma}),\boldsymbol{\tau}\rangle_{H(\mathrm{div};\Omega)}}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}} \\
&= C \sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}\in H(\mathrm{div};\Omega)\\ \boldsymbol{\tau}\neq\mathbf{0}}} \frac{A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})+K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}} \quad \forall\boldsymbol{\sigma}\in H(\mathrm{div};\Omega). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Teorema 3.2 *Sean $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\sigma}_h$ las soluciones de los esquemas continuos y de Galerkin (2.14) y (2.29), respectivamente. Además, sea $p_h = \frac{1}{\kappa^2}\mathcal{P}_h(f - \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}_h)$, donde $\mathcal{P}_h$ es la proyección de $L^2(\Omega)$ sobre las funciones constantes a trozos en cada triángulo. Supongamos que existe $s > 2$ tal que $g \in H^{1/2}(\Gamma) \cap W^{1-1/s,s}(\Gamma)$ y sea $\varphi_h \in H^1(\Omega) \cap W^{1,s}(\Omega)$ tal que $\varphi_h(x) = g(x)$ para todo nodo $x \in \mathcal{T}_h$ de la frontera Γ. Entonces, existe $C > 0$, independiente de h, tal que*

$$
\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leq C\boldsymbol{\theta} := C\left\{\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\theta_T^2\right\}^{1/2},
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\theta_T^2 : &= \|\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla\varphi_h\|^2_{[L^2(T)]^2} + \|p_h-\varphi_h\|^2_{L^2(T)} \\
&+ \left\|\frac{1}{\kappa^2}(f-\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}_h) - p_h\right\|^2_{L^2(T)} + \sum_{e\in E(\Gamma)\cap E(T)} \|g-\varphi_h\|^2_{H^{1/2}_{00}(e)}.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Demostración. Aplicando el Lema 3.1 a $(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h)\in H(\mathrm{div};\Omega)$ resulta

$$
\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leq C \sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}\in H(\mathrm{div};\Omega)\\ \boldsymbol{\tau}\neq\mathbf{0}}} \frac{A(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau})+K(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}}. \tag{3.2}
$$

Pero, de acuerdo a (2.14), (2.15), (2.16) y (2.17), se tiene

$$
A(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau})+K(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau}) = \langle\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu},g\rangle_\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_h\cdot\boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega (f-\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}_h)\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}.
$$

Además, dado que $\varphi_h \in H^1(\Omega)$, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
A(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau})+K(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau}) &= \langle\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu},g-\varphi_h\rangle_\Gamma - \int_\Omega\boldsymbol{\sigma}_h\cdot\boldsymbol{\tau} - \int_\Omega p_h\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} \\
&- \int_\Omega\left\{\frac{1}{\kappa^2}(f-\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}_h)-p_h\right\}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} + \langle\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu},\varphi_h\rangle_\Gamma,
\end{aligned}
$$

y aplicando integración por partes a $\langle \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}, \varphi_h\rangle_\Gamma$ se obtiene que

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau}) &+ K(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau}) = \langle \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}, g-\varphi_h\rangle_\Gamma - \int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla\varphi_h)\cdot\boldsymbol{\tau} \\ &- \int_\Omega (p_h-\varphi_h)\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} - \int_\Omega \left\{\frac{1}{\kappa^2}(f-\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}_h) - p_h\right\}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} |A(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau}) &+ K(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau})| \le C\Big\{ \|g-\varphi_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla\varphi_h\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &+ \|p_h-\varphi_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{1}{\kappa^2}(f-\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}_h) - p_h\right\|^2_{L^2(\Omega)}\Big\}^{1/2} \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}. \end{aligned}$$

Así, reemplazando la estimación anterior en (3.2), resulta

$$C\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h\|^2_{H(\mathrm{div};\Omega)} \le \|g-\varphi_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\boldsymbol{\sigma}_h-\nabla\varphi_h\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} + \|p_h-\varphi_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{1}{\kappa^2}(f-\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}_h)-p_h\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left\{ \|\boldsymbol{\sigma}_h-\nabla\varphi_h\|^2_{[L^2(T)]^2} + \|p_h-\varphi_h\|^2_{L^2(T)} + \left\|\frac{1}{\kappa^2}(f-\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}_h)-p_h\right\|^2_{L^2(T)}\right\} + \sum_{e\in E(\Gamma)} \|g-\varphi_h\|^2_{H^{1/2}(e)}$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|\boldsymbol{\sigma}_h-\nabla\varphi_h\|^2_{[L^2(T)]^2} + \|p_h-\varphi_h\|^2_{L^2(T)} + \left\|\frac{1}{\kappa^2}(f-\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}_h)-p_h\right\|^2_{L^2(T)} + \sum_{e\in E(\Gamma)\cap E(T)} \|g-\varphi_h\|^2_{H^{1/2}(e)},$$

es decir,

$$\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \le C\left\{\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\theta_T^2\right\}^{1/2},$$

con θ_T^2 dado por (3.1). ∎

A continuación se detalla la construcción que proponemos para la función φ_h, con el objeto de implementar el estimador $\boldsymbol{\theta}$. Para cada $T\in\mathcal{T}_h$, consideremos la única función $\varphi_{h,T} := \alpha_T + \beta_T x_1 + \gamma_T x_2 + \delta_T(x_1^2+x_2^2)$ con $\alpha_T, \beta_T, \gamma_T$ y $\delta_T \in \mathbb{R}$ tal que:

i) $\nabla\varphi_{h,T} = \boldsymbol{\sigma}_h|_T$.

ii) $\varphi_{h,T}(\bar{\boldsymbol{x}}) = p_h|_T$, donde $\bar{\boldsymbol{x}}$ es el baricentro del triángulo T.

Luego, se define $\varphi_h \in C(\bar\Omega)$ como la única función que satisface las siguientes condiciones:

a) $\varphi_h|_T \in \mathbb{P}_2(T)$ para todo $T \in \mathcal{T}_h$.

b) $\varphi_h(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ para cada vértice $\boldsymbol{x}$ de $\mathcal{T}_h$ en Γ.

c) $\varphi_h(\boldsymbol{x})$ es el promedio de los valores de $\varphi_{h,T}(\boldsymbol{x})$ en cada triángulo T que comparte el nodo $\boldsymbol{x}$ de $\mathcal{T}_h$. Este promedio es relativo al área de cada triángulo.

d) $\varphi_h(\boldsymbol{x})$ es el promedio de los valores de $\varphi_{h,T}(\boldsymbol{x})$ en cada triángulo T que comparte el lado e del cual $\boldsymbol{x}$ es punto medio. Este promedio es relativo al área de cada triángulo.

3.2 Resultados Numéricos.

A continuación se presentan ejemplos que muestran el comportamiento de la solución del esquema discreto (2.28) (equivalentemente (2.29)) utilizando un refinamiento adaptativo basado en el estimador (3.1). Si $\boldsymbol{\sigma}_h \in H_h$ es la aproximación de $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$, entonces se define el error de aproximación como

$$e(\boldsymbol{\sigma}) := \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}.$$

Además, la tasa de convergencia experimental se define como

$$r(\boldsymbol{\sigma}) := -2\frac{\log(e(\boldsymbol{\sigma})/e'(\boldsymbol{\sigma}))}{\log(N/N')},$$

donde e y e' son los errores asociados a dos mallas consecutivas con N y N' grados de libertad, respectivamente.

El algoritmo adaptativo utilizado en el refinamiento de la malla es el siguiente:

1. Comenzar con una malla gruesa.
2. Resolver el problema discreto (2.28) (equivalentemente (2.29)) para la actual malla.
3. Calcular la función auxiliar φ_h de acuerdo a lo indicado en la sección anterior.

4. Evaluar el criterio de detención y decidir si parar o continuar con el siguiente paso.

5. Usar el procedimiento *blue-green* para refinar cada triángulo $T' \in \mathcal{T}_h$ cuyo indicador $\theta_{T'}$ satisfaga:
$$\theta_{T'} \geq \frac{1}{2} \max \left\{ \theta_T : T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

6. Definir la malla resultante como la malla actual y volver al paso 2.

Los ejemplos que se muestran son los siguientes:

Ejemplo	Ω	κ	p
1	$[-1,1]^2 - [0,1]^2$	1	$p(r,\theta) = r^{2/3}\sin(\frac{2\theta-\pi}{3})$
2	$[0,1]^2$	1	$p(x_1,x_2) = \dfrac{1}{x_1+x_2+0.1}$
3	$[0,1]^2$	1	$p(x_1,x_2) = (x_1^2 - x_1)(x_2^2 - x_2)$
4	$[0,1]^2$	1	$p(x_1,x_2) = ((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)^{3/4}$

Tabla 3.1: Ejemplo, dominio Ω, κ y solución exacta p

Los Ejemplos 1 y 4 presentan singularidades en el origen y en el punto $(0.5, 0.5)$, respectivamente. A su vez, el Ejemplo 3 es suave y el Ejemplo 2 muestra gradientes ligeramente grandes en una vecindad del $(0,0)$.

El Ejemplo 1 fue considerado en la Sección 2.4 donde se observó que su orden de convergencia es $\mathcal{O}(h^{2/3})$. Ahora se puede ver en la Tabla 3.2 que utilizando un refinamiento adaptativo se recupera el orden de convergencia $\mathcal{O}(h)$. Para los Ejemplos 2 y 4 se aprecia en las Figuras 3.6 y 3.8, respectivamente, que el refinamiento se realiza precisamente en los elementos cercanos a la singularidad. En la Figura 3.7, la cual corresponde al Ejemplo 3, se ve como el refinamiento se propaga desde la frontera al interior del dominio, debido a que los gradientes de presión son mayores en la frontera. Por último, se puede observar que en todos los ejemplos el índice de eficiencia permanece constante.

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	θ	$e(\boldsymbol{\sigma})/\theta$	$r(\boldsymbol{\sigma})$
2841	0.0907	0.1457	0.6225	-
2979	0.0675	0.1270	0.5317	12.4638
3105	0.0548	0.1003	0.5469	10.0399
3231	0.0488	0.0866	0.5637	5.8648
3474	0.0446	0.0768	0.5808	2.4756
4056	0.0376	0.0671	0.5611	2.1920
5214	0.0319	0.0593	0.5379	1.3144
8211	0.0257	0.0493	0.5204	0.9593
14799	0.0194	0.0373	0.5210	0.9443
22086	0.0159	0.0309	0.5140	1.0149
35835	0.0126	0.0250	0.5043	0.9470
60489	0.0097	0.0192	0.5051	0.9963

Tabla 3.2: Grados de libertad N, errores $e(\boldsymbol{\sigma})$, estimador θ, índice de eficiencia $e(\boldsymbol{\sigma})/\theta$ y tasa de convergencia $r(\boldsymbol{\sigma})$ (Ejemplo 1)

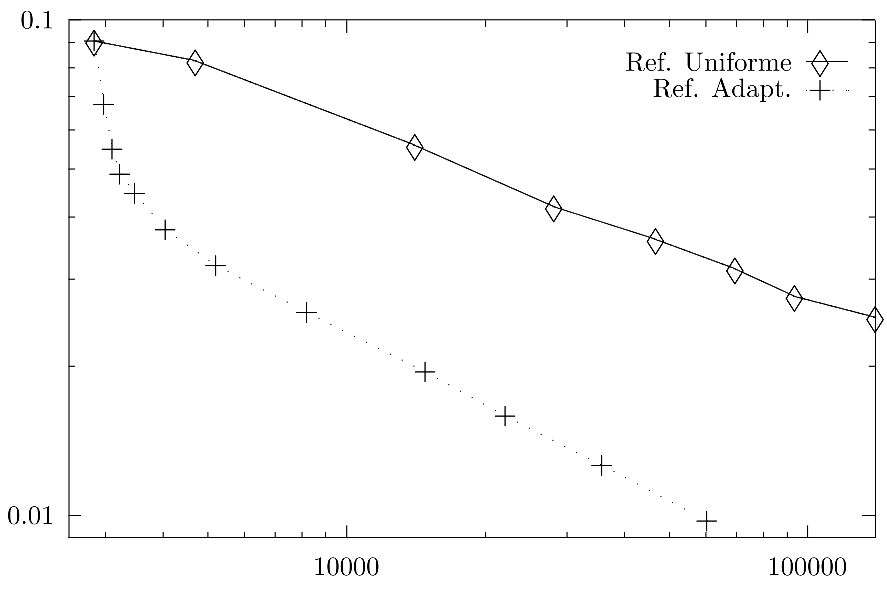


Figura 3.1: Errores refinamiento uniforme y adaptativo v/s grados de libertad N (Ejemplo 1)

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	θ	$e(\boldsymbol{\sigma})/\theta$	$r(\boldsymbol{\sigma})$
4617	26.2785	26.3372	0.9978	-
4653	14.7019	14.7470	0.9969	149.5479
4689	10.9801	11.0258	0.9959	75.7464
4959	6.6671	6.7027	0.9947	17.8224
5655	4.4863	4.5138	0.9939	6.0327
6501	3.4852	3.5097	0.9930	3.6224
9342	2.3551	2.3731	0.9924	2.1620
13428	1.7966	1.8124	0.9913	1.4922
25416	1.2081	1.2194	0.9907	1.2439
42651	0.9192	0.9289	0.9896	1.0558
91377	0.6170	0.6238	0.9892	1.0464
161478	0.4663	0.4718	0.9884	0.9839

Tabla 3.3: Grados de libertad N, errores $e(\boldsymbol{\sigma})$, estimador θ, índice de eficiencia $e(\boldsymbol{\sigma})/\theta$ y tasa de convergencia $r(\boldsymbol{\sigma})$ (Ejemplo 2)

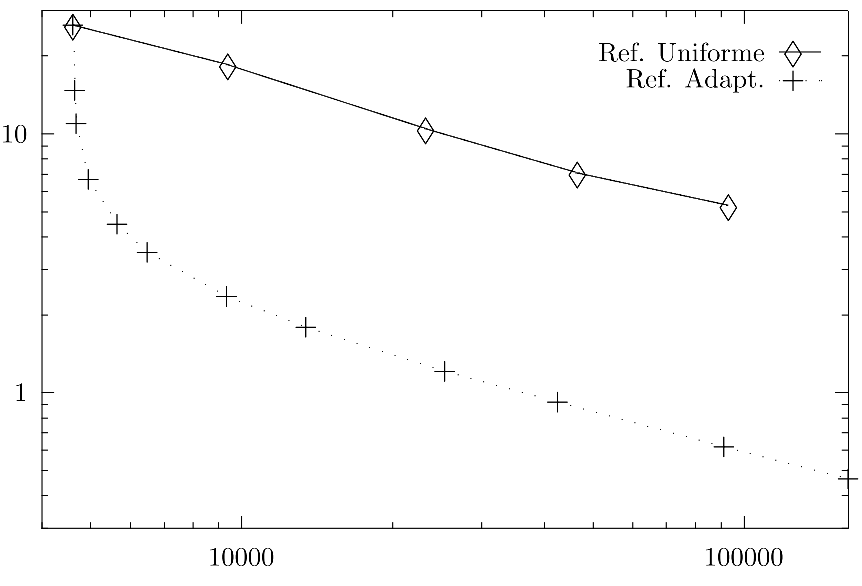


Figura 3.2: Errores refinamiento uniforme y adaptativo v/s grados de libertad N (Ejemplo 2)

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	θ	$e(\boldsymbol{\sigma})/\theta$	$r(\boldsymbol{\sigma})$
4617	0.0152	0.0156	0.9788	-
7200	0.0122	0.0125	0.9813	0.9933
12105	0.0094	0.0097	0.9662	1.0236
26931	0.0064	0.0066	0.9662	0.9456
36690	0.0055	0.0057	0.9601	0.9910
86202	0.0037	0.0039	0.9577	0.9368
94710	0.0035	0.0036	0.9553	1.3167

Tabla 3.4: Grados de libertad N, errores $e(\boldsymbol{\sigma})$, estimador θ, índice de eficiencia $e(\boldsymbol{\sigma})/\theta$ y tasa de convergencia $r(\boldsymbol{\sigma})$ (Ejemplo 3)

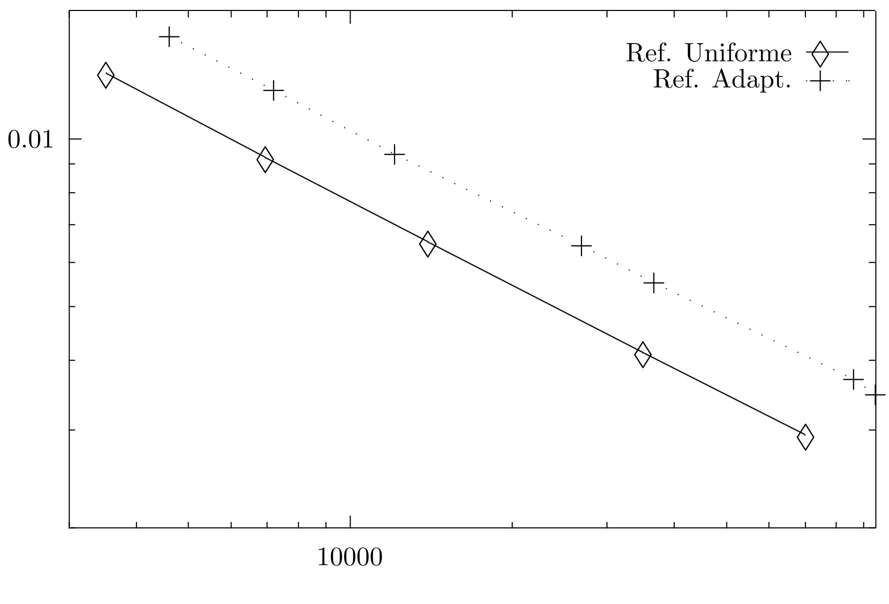


Figura 3.3: Errores refinamiento uniforme y adaptativo v/s grados de libertad N (Ejemplo 3)

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	θ	$e(\boldsymbol{\sigma})/\theta$	$r(\boldsymbol{\sigma})$
4617	0.3260	0.3250	1.0032	
4719	0.2486	0.2475	1.0043	24.8275
4827	0.1969	0.1956	1.0065	20.5891
4935	0.1651	0.1636	1.0093	15.9043
5043	0.1467	0.1450	1.0118	10.9406
5223	0.1304	0.1285	1.0144	6.7159
5571	0.1121	0.1101	1.0185	4.6802
6015	0.1002	0.0981	1.0222	2.9228
6813	0.0882	0.0859	1.0262	2.0624
7935	0.0782	0.0759	1.0306	1.5694
9669	0.0685	0.0661	1.0359	1.3443
12447	0.0597	0.0574	1.0400	1.0850
16305	0.0525	0.0503	1.0436	0.9535
23991	0.0439	0.0420	1.0461	0.9227
34521	0.0367	0.0353	1.0422	0.9825
48270	0.0311	0.0299	1.0390	0.9933
67110	0.0265	0.0255	1.0392	0.9704
97044	0.0222	0.0214	1.0396	0.9584

Tabla 3.5: Grados de libertad N, errores $e(\boldsymbol{\sigma})$, estimador θ, índice de eficiencia $e(\boldsymbol{\sigma})/\theta$ y tasa de convergencia $r(\boldsymbol{\sigma})$ (Ejemplo 4)

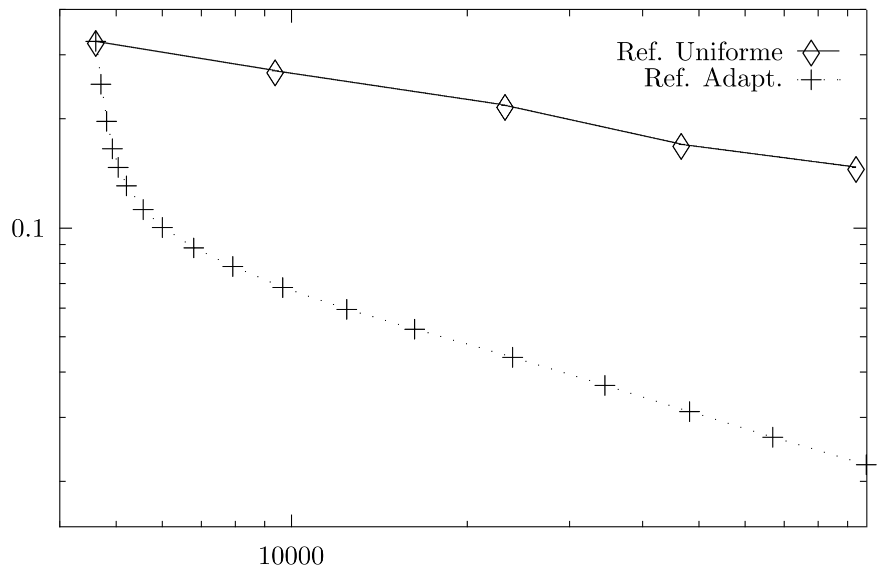
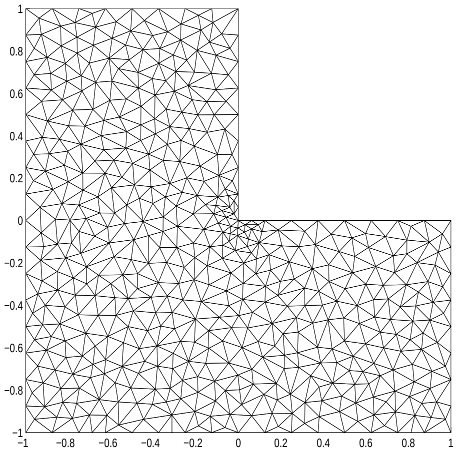
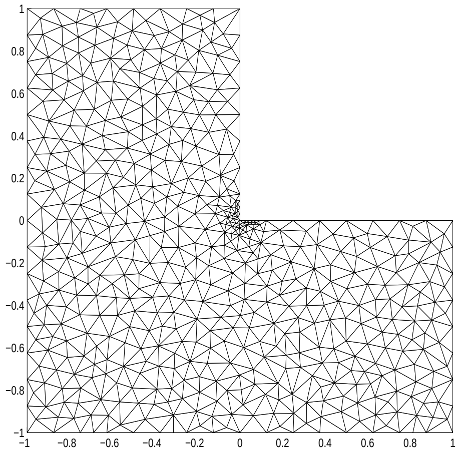


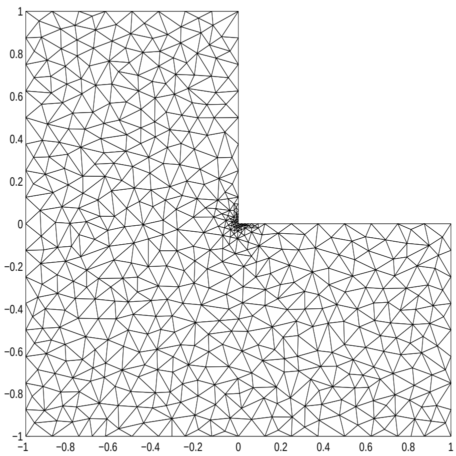
Figura 3.4: Errores refinamiento uniforme y adaptativo v/s grados de libertad N (Ejemplo 4)



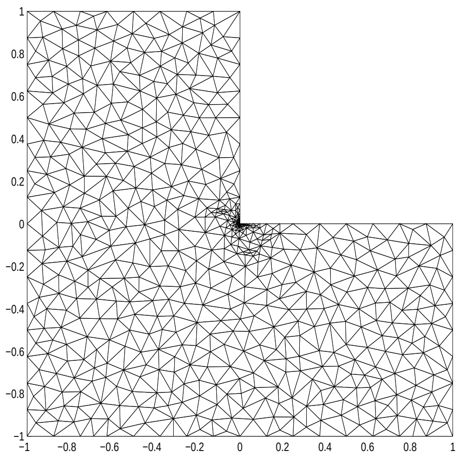
(a)



(b)

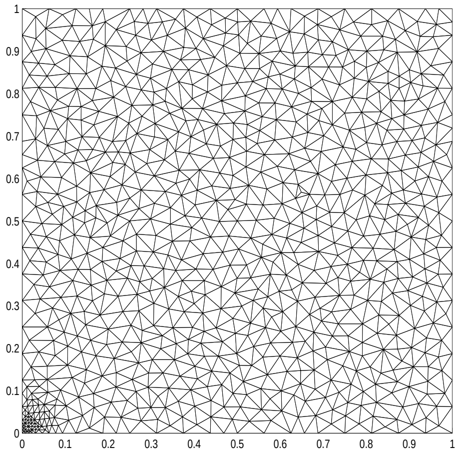


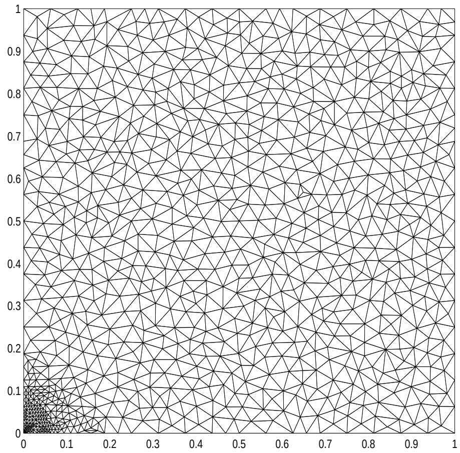
(c)



(d)

Figura 3.5: Mallas adaptadas intermedias con $2979, 3105, 3231$ y 3474 grados de libertad (Ejemplo 1)





(a) (b)

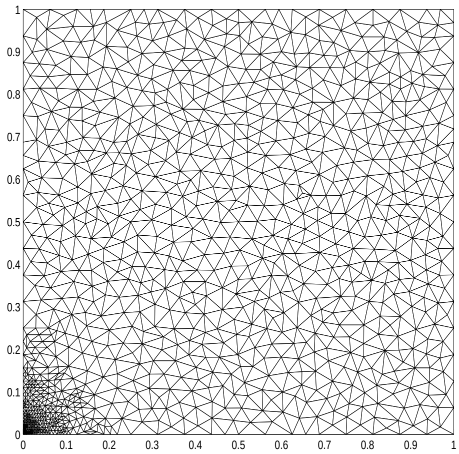


Figura 3.6: Mallas adaptadas intermedias con $4949, 5655$ y 6501 grados de libertad (Ejemplo 2)

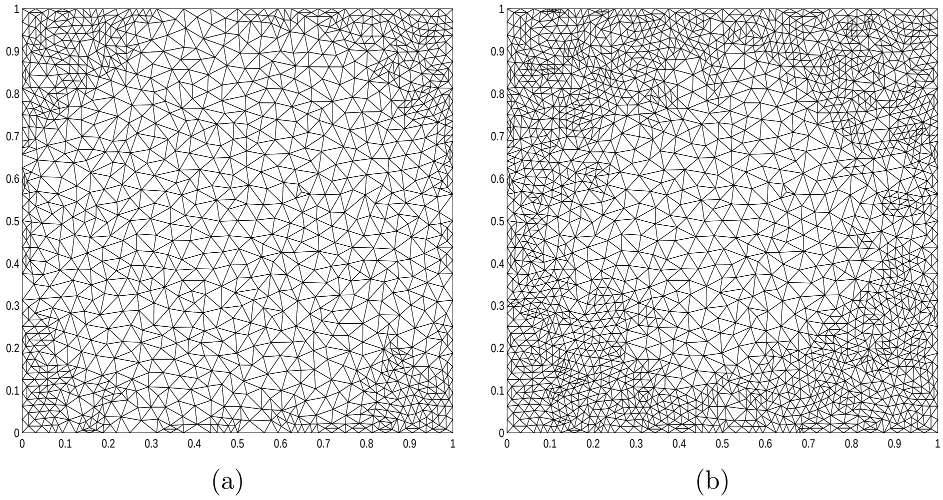


Figura 3.7: Mallas adaptadas intermedias con 7200 y 12105 grados de libertad (Ejemplo 3)

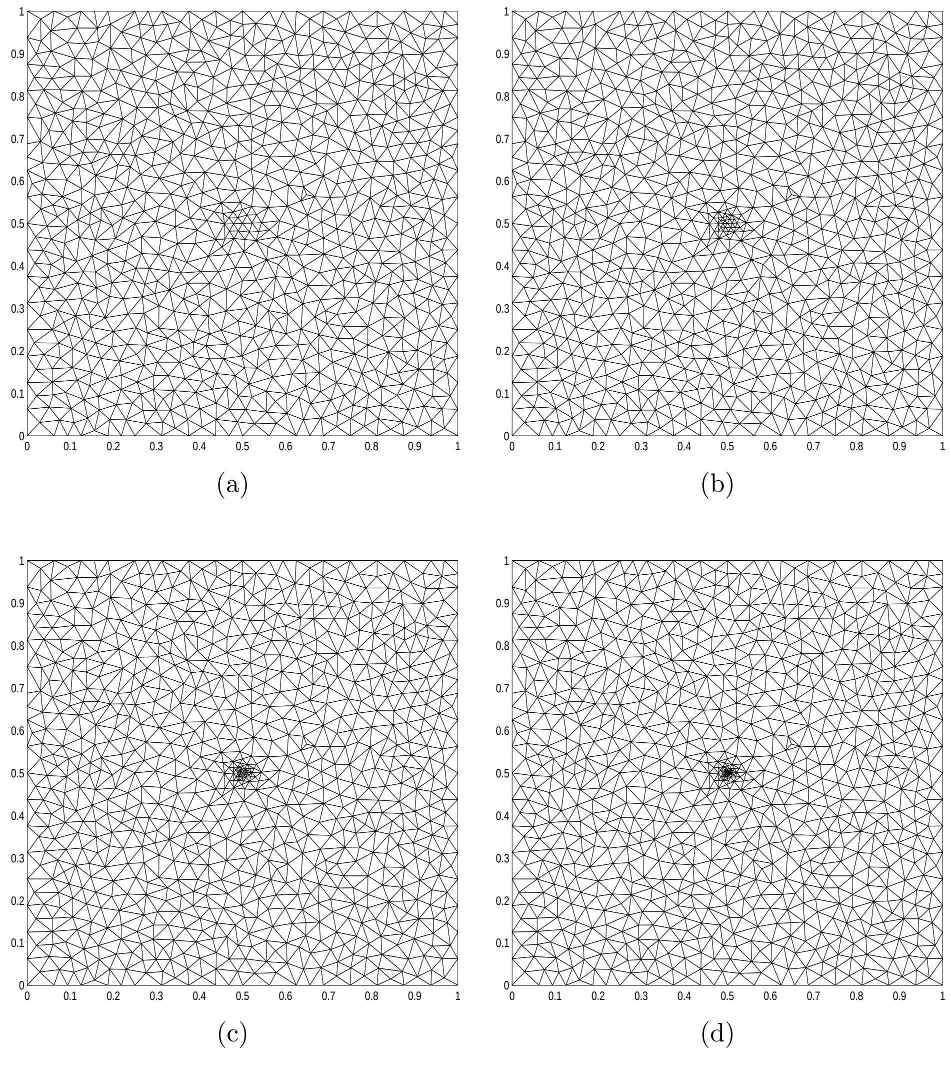


Figura 3.8: Mallas adaptadas intermedias con $4719, 4827, 4935$ y 5043 grados de libertad (Ejemplo 4)

Capítulo 4

Ecuación de Elastodinámica.

En este capítulo extendemos el análisis realizado para el problema de Helmholtz al caso de una formulación mixta-dual de una ecuación proveniente de la elastodinámica.

4.1 Introducción.

Se considera un sólido elástico lineal e isotrópico de densidad ρ que ocupa una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ de frontera Γ Liptschitz-contínua. Se sabe que la ecuación que modela su comportamiento a través del tiempo, considerando que sobre él actúa una fuerza externa $\boldsymbol{f}$, es:

$$-\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \boldsymbol{f}, \tag{4.1}$$

donde $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ es el vector de desplazamientos, $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ es el tensor de esfuerzos y $\mathbf{div}$ es el operador divergencia que actúa sobre las filas del tensor $\boldsymbol{\sigma}$. Además, la relación entre el esfuerzo y los desplazamientos está dada por la ley constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}), \tag{4.2}$$

donde

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) := \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^t)$$

es el tensor de tensiones para pequeñas deformaciones (o parte simétrica de ∇u), ∇ es el tensor gradiente y el operador $\mathcal{C}$ está dado por la ley de Hooke:

$$\mathcal{C}\zeta := \lambda \mathrm{tr}(\zeta)\mathbf{I} + 2\mu\zeta \qquad \forall \zeta \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}, \tag{4.3}$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé.

De este modo, considerando que existen desplazamientos prescritos $\boldsymbol{g}$ en la frontera Γ, las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del sólido son:

$$\begin{array}{rcll} -\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} & = & \boldsymbol{f} & \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} & = & \mathcal{C}\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) & \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{u} & = & \boldsymbol{g} & \text{en } \Gamma. \end{array} \tag{4.4}$$

Por otro lado, sea ω la frecuencia de vibración del sólido. Entonces, considerando que $\boldsymbol{f}$ actúa sobre el sólido con un comportamiento armónico de frecuencia ω y que las oscilaciones que presenta son pequeñas, las soluciones armónicas del problema están dadas por la siguiente ecuación:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \kappa^2 \boldsymbol{u} & = & -\boldsymbol{f} & \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} & = & \mathcal{C}\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) & \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{u} & = & \boldsymbol{g} & \text{en } \Gamma, \end{array} \tag{4.5}$$

donde $\kappa := \omega\sqrt{\rho}$ es el número de onda del sólido. Se observa que (4.5) tendrá solución única si κ^2 no es valor propio del operador $-\mathbf{div}$.

Por último, se introducen las siguientes notaciones: $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y, dado un tensor $\boldsymbol{\tau} := (\tau_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, se define el tensor transpuesto $\boldsymbol{\tau}^t := (\tau_{ji})$ y el tensor desviador $\boldsymbol{\tau}^d := \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{I}$, donde $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) := \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{\tau}_{ii}$. Además se define el producto tensorial $\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\zeta} := \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{\tau}_{ij}\, \boldsymbol{\zeta} ij$.

4.2 Formulación variacional continua.

Consideremos la rotación $\boldsymbol{\gamma} := \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} - (\nabla \boldsymbol{u})^t) \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}$ como una incógnita auxiliar, donde $[L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym} := \{\boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^t = 0\}$ es el espacio de los tensores antisimétricos. De la segunda ecuación de (4.5) se tiene que $\mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \nabla \boldsymbol{u} - \gamma$. Así, testeando con $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \Omega)$ e integrando por partes esta expresión se obtiene

$$\int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) = \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{g} \rangle_\Gamma.$$

Luego, considerando de la primera ecuación de (4.5) que $\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\kappa^2}(\boldsymbol{f} + \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}))$, lo anterior se transforma en:

$$\int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega \gamma : \boldsymbol{\tau} = \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{g} \rangle_\Gamma + \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}).$$

Por otro lado, la simetría del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ se impone débilmente a través de la ecuación:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\eta} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\eta} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}.$$

De este modo, la formulación variacional mixta de (4.5) es: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}) \in H(\mathbf{div}, \Omega) \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}$ *tal que*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega \gamma : \boldsymbol{\tau} &= \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{g} \rangle_\Gamma + \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}), \\ \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\eta} &= 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

$\forall (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) \in H(\mathbf{div}, \Omega) \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}$.

Ahora bien, dado que

$$\mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{\zeta} - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\zeta})\mathbf{I} \qquad \forall \boldsymbol{\zeta} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}, \tag{4.7}$$

se sigue, luego de cálculos algebraicos simples, que:

$$\int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{2\mu}\int_\Omega \boldsymbol{\xi}^d : \boldsymbol{\zeta}^d + \frac{1}{4(\lambda+\mu)}\int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{tr}(\boldsymbol{\zeta}) \qquad \forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}, \tag{4.8}$$

y por lo tanto

$$\int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} \geq \frac{1}{2\mu}\|\boldsymbol{\xi}\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \qquad \forall \boldsymbol{\xi} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}. \tag{4.9}$$

Esta desigualdad se utilizará más adelante.

Observemos ahora que $H(\mathbf{div}, \Omega) = H_0(\mathbf{div}, \Omega) \oplus \mathbb{R}\mathbf{I}$, donde

$$H_0(\mathbf{div}, \Omega) := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \Omega) : \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau} = 0) \right\}.$$

Específicamente, para cada $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \Omega)$ existen únicos $\boldsymbol{\tau}_0 \in H_0(\mathbf{div}, \Omega)$ y $d = \frac{1}{2\Omega} \int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{R}$ tales que $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + d\mathbf{I}$ y además

$$\|\boldsymbol{\tau}\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} = \|\boldsymbol{\tau}_0\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} + 2d^2|\Omega|. \tag{4.10}$$

Lema 4.1 *Existe $C_1 > 0$ tal que para cada $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \Omega)$*

$$C_1\|\boldsymbol{\tau}_0\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \leq \|\boldsymbol{\tau}^d\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{[L^2(\Omega)]^2}. \tag{4.11}$$

Demostración. Ver Lema 3.1 en [2] o Proposición 3.1 del Capítulo IV en [5]. ∎

Lema 4.2 *Existe $C_2 > 0$ tal que para cada $\boldsymbol{\tau} \in H_0(\mathbf{div}, \Omega)$*

$$C_2\|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \leq \|\boldsymbol{\tau}^d\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{[L^2(\Omega)]^2}. \tag{4.12}$$

Demostración. Es consecuencia del Lema anterior. ∎

Con el objeto de reescribir (4.6) como una perturbación compacta de un operador invertible, de manera similar a lo desarrollado en la Sección 2.2, necesitamos introducir el análogo al operador definido por (2.9). Para este efecto, dado $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \Omega)$, consideramos el problema auxiliar: *Hallar $\tilde{\boldsymbol{u}}$ tal que*

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) & = & \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) & \text{en } \Omega, \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} & = & \mathcal{C}\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\boldsymbol{u}}) & \text{en } \Omega, \\ \tilde{\boldsymbol{u}} & = & 0 & \text{en } \Gamma, \end{array} \tag{4.13}$$

cuya formulación variacional mixta es: *Hallar $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \in H_0(\mathbf{div}, \Omega) \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}$ tal que*

$$\begin{array}{rcrcl} a(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}) & + & b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, (\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}})) & = & 0, \\ & & b(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, (\tilde{\boldsymbol{v}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})) & = & \displaystyle\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}), \end{array} \tag{4.14}$$

$\forall (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\boldsymbol{v}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \in H_0(\mathbf{div}, \Omega) \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}$, donde

$$H_0(\mathbf{div}, \Omega) := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \Omega) : \int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 0 \right\},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}} := \frac{1}{2}(\nabla \tilde{\boldsymbol{u}} - (\nabla \tilde{\boldsymbol{u}})^t),$$

$$a(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}) = \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\tau}}$$

y

$$b(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, (\tilde{\boldsymbol{v}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})) = \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\eta}}.$$

Notemos que el hecho que $\tilde{\boldsymbol{u}}$ se anule en la frontera permite buscar $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in H_0(\mathbf{div}, \Omega)$, ya que

$$\int_\Omega \operatorname{tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = 2(\lambda + \mu) \int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\boldsymbol{u}})) = 2(\lambda + \mu) \int_\Omega \mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{u}}) = 2(\lambda + \mu) \int_\Gamma \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0. \quad (4.15)$$

Se sabe que (4.14) tiene solución única (ver [1]) y de acuerdo a resultados clásicos de regularidad (ver [7], [8]) existe $\epsilon > 0$ tal que $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \in [H^\epsilon(\Omega)]^{2\times 2} \times [H^{1+\epsilon}(\Omega)]^2 \times [H^\epsilon(\Omega)]^{2\times 2}$. Además, existe $C > 0$ tal que

$$\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\|_{[H^\epsilon(\Omega)]^{2\times 2}} + \|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{[H^{1+\epsilon}(\Omega)]^2} + \|\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\|_{[H^\epsilon(\Omega)]^{2\times 2}} \leq C\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2}. \quad (4.16)$$

De este modo, como $H_0(\mathbf{div}, \Omega) \subseteq H(\mathbf{div}, \Omega)$, se puede definir el operador

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : H(\mathbf{div}, \Omega) &\longrightarrow H(\mathbf{div}, \Omega) \\ \boldsymbol{\tau} &\rightarrow \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) := \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ es parte de la solución de (4.14).

Notemos que $\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) \in [H^\epsilon(\Omega)]^{2\times 2}$ y $\|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\|_{[H^\epsilon(\Omega)]^{2\times 2}} = \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\|_{[H^\epsilon(\Omega)]^{2\times 2}} \leq C\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2}$. Además $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$, por lo que

$$H(\mathbf{div}, \Omega) = \mathbf{P}(H(\mathbf{div}, \Omega)) \oplus (\mathbf{I} - \mathbf{P})(H(\mathbf{div}, \Omega)),$$

y para cada $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \Omega)$ se tiene

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leq \|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} + \|(\mathbf{I} - \mathbf{P})(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}. \quad (4.18)$$

Entonces, notando que $\mathbf{div}((\mathbf{I} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}))) = \mathbf{div}((\mathbf{I} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}))) = 0$, podemos escribir

$$\int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) = \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})$$
$$+ \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}) : (\mathbf{I} - \mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma}) : (\mathbf{I} - \mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}) - \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega \mathbf{div}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})) \cdot \mathbf{div}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})).$$

De este modo, (4.6) es equivalente a: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}) \in H(\mathbf{div}, \Omega) \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}$ *tal que*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) + K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) + B(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau}) &= F(\boldsymbol{\tau}), \\ B(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\sigma}) &= 0, \end{aligned} \tag{4.19}$$

$\forall (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) \in H(\mathbf{div}, \Omega) \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}$, donde

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) &:= -\int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) - \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega \mathbf{div}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}))\cdot \mathbf{div}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})) \\ &+ \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma}) : (\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}) + \left\{\int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\right\}\left\{\int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\right\}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) &:= 2\int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) \\ &+ \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}) : (\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}) - \left\{\int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\right\}\left\{\int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\right\} \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$B(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau}) := \int_\Omega \boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\tau}, \tag{4.22}$$

y

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \langle \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{g}\rangle_\Gamma + \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}). \tag{4.23}$$

Lema 4.3 *El operador* $\mathbb{K}$ *asociado a la forma bilineal* K *es un operador compacto.*

Demostración. Recordemos primero que existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) \in [H^\epsilon(\Omega)]^{2\times 2}$ para todo $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$. De la inclusión compacta $[H^\epsilon(\Omega)]^{2\times 2} \hookrightarrow^c [L^2(\Omega)]^{2\times 2}$ se tiene que el operador $\mathbf{P} : H(\mathrm{div};\Omega) \to [L^2(\Omega)]^{2\times 2}$ es compacto al igual que su adjunto $\mathbf{P}^* : [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \to H(\mathrm{div};\Omega)$. Además, utilizando el hecho que $\mathcal{C}^{-1}$ es continuo, se sigue que los operadores $\mathbf{P}^*\mathcal{C}^{-1}\mathbf{P}, (\mathbf{I}-\mathbf{P})^*\mathcal{C}^{-1}\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}^*\mathcal{C}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{P})$ también son compactos. Finalmente, dado $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$, el operador $\mathbb{K}$ inducido por la forma bilineal K está dado por

$$\langle \mathbb{K}(\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\tau}\rangle := K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div},\Omega),$$

de donde

$$\mathbb{K} := 2\mathbf{P}^*\mathcal{C}^{-1}\mathbf{P} + (\mathbf{I}-\mathbf{P})^*\mathcal{C}^{-1}\mathbf{P} + \mathbf{P}^*\mathcal{C}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{P}) - \left\{\int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\right\}\mathbf{I}.$$

Así, es claro que $\mathbb{K}$ es un operador compacto. $\blacksquare$

Lema 4.4 *Sea* $\boldsymbol{V} := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \Omega) : B(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym} \right\}$. *Entonces, existe* $\tilde{C} > 0$ *tal que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\zeta}\in \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{\zeta}\neq \mathbf{0}}} \frac{A(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{\zeta}\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}} \geq \tilde{C} \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathbf{div},\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{V} \tag{4.24}$$

y además

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}\in \boldsymbol{V}} A(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\zeta}) > 0 \quad \forall \boldsymbol{\zeta} \in \boldsymbol{V}, \boldsymbol{\zeta} \neq \mathbf{0}. \tag{4.25}$$

Demostración. Notemos que $\boldsymbol{V} = \left\{ \boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \Omega) : \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^t \right\}$ y consideremos el operador

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{S} : \boldsymbol{V} & \rightarrow & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{\tau} & \rightarrow & \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) := (\mathbf{I} - 2\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}). \end{array} \tag{4.26}$$

Entonces, es claro que efectivamente para cada $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{V}$, $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) \in \boldsymbol{V}$, ya que $\boldsymbol{\tau}^t = \boldsymbol{\tau}$ y $\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})^t = \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})$. Además,

$$\mathbf{P}(\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})) = -\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{I} - \mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}).$$

Ahora bien, dado $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{V}$ se tiene

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})) &= \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) : \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) + \frac{1}{\kappa^2} \int_\Omega \mathbf{div}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})) \cdot \mathbf{div}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})) \\ &+ \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}) : (\mathbf{I} - \mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}) + \left\{ \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) \right\} \left\{ \int_\Omega \mathrm{tr}(\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})) \right\} \end{aligned}$$

y además

$$\int_\Omega \mathrm{tr}(\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})) = \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) - 2\int_\Omega \mathrm{tr}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})) = \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) - 2\int_\Omega \mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}).$$

Con esto, utilizando (4.9) y notando que $\mathbf{div}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})) = \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})$, se tiene que

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})) &= \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) : \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) + \frac{1}{\kappa^2} \int_\Omega \mathbf{div}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})) \cdot \mathbf{div}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})) \\ &+ \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}) : (\mathbf{I} - \mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}) + \left\{ \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) \right\}^2 \\ &\geq \min\left\{ \frac{1}{2\mu}, \frac{1}{2\kappa^2} \right\} \left\{ \|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})^d\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} + \|\mathbf{div}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}))\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \right\} \\ &+ \frac{1}{2\mu} \left\{ \|(\mathbf{I} - \mathbf{P})^d(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} + \|\mathbf{div}(\mathbf{I} - \mathbf{P})(\boldsymbol{\tau})\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \right\} \\ &+ \frac{1}{2\kappa^2} \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} + \left\{ \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) \right\}^2. \end{aligned}$$

Dado que $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{tr}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})) = 0$ (ver (4.15)), podemos aplicar los Lemas 4.1 y 4.2 a $(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau})\in H(\mathbf{div},\Omega)$ y $\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) \in H_0(\mathbf{div},\Omega)$, respectivamente, con lo cual se deduce que

$$
\begin{aligned}
A(\boldsymbol{\tau},\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})) &\geq \min\left\{\frac{C_1}{2\mu},\frac{1}{2\kappa^2}\right\}\|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} + \frac{C_2}{2\mu}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau})_0\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \\
&+ \frac{1}{2\kappa^2}\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} + \left\{\int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\right\}^2 \\
&\geq \min\left\{\frac{C_1}{2\mu},\frac{1}{2\kappa^2}\right\}\|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} + \frac{C_2}{2\mu}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau})_0\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} \\
&+ \left\{\int_\Omega \mathrm{tr}((\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}))\right\}^2.
\end{aligned}
$$

Además, se tiene que $d = \dfrac{1}{2|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \mathrm{tr}((\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau}))$ y utilizando (4.10) se obtiene que

$$
\begin{aligned}
A(\boldsymbol{\tau},\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})) &\geq \min\left\{\frac{C_1}{2\mu},\frac{1}{2\kappa^2}\right\}\|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} + \frac{C_2}{2\mu}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau})_0\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} \\
&+ 4|\Omega|^2 d^2 \\
&\geq \min\left\{\frac{C_1}{2\mu},\frac{1}{2\kappa^2}\right\}\|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} \\
&+ \min\left\{\frac{C_2}{2\mu},2|\Omega|\right\}\{\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau})_0\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} + 2|\Omega|d^2\} \\
&= \min\left\{\frac{C_1}{2\mu},\frac{1}{2\kappa^2}\right\}\|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} + \min\left\{\frac{C_2}{2\mu},2|\Omega|\right\}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau})\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} \\
&\geq \min\left\{\frac{C_1}{2\mu},\frac{1}{2\kappa^2},\frac{C_2}{2\mu},2|\Omega|\right\}\{\|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} + \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})(\boldsymbol{\tau})\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)}\}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, usando (4.18) y dado que $\|\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\mathbf{div},\Omega)} \leq C\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}$, se tiene que

$$
A(\boldsymbol{\tau},\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})) \geq \tilde{C}\|\boldsymbol{\tau}\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} \geq \tilde{C}\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}\|\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}, \tag{4.27}
$$

de donde

$$
\sup_{\substack{\boldsymbol{\zeta}\in H(\mathrm{div};\Omega)\\ \boldsymbol{\zeta}\neq\mathbf{0}}} \frac{A(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{\zeta}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}} \geq \frac{A(\boldsymbol{\tau},\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}))}{\|\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}} \geq \tilde{C}\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \quad \forall\boldsymbol{\tau}\in H(\mathrm{div};\Omega).
$$

De este modo se obtiene (4.24) y de la simetría de A se concluye (4.25). ∎

Lema 4.5 *Existe $\beta > 0$ al que*

$$
\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}\in H(\mathbf{div},\Omega)\\ \boldsymbol{\tau}\neq\mathbf{0}}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}} \geq \beta\|\boldsymbol{\eta}\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \qquad \forall\boldsymbol{\eta}\in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}. \tag{4.28}
$$

Demostración. De acuerdo al Lema 4.2 de [6] existe un operador lineal y acotado $\mathbf{T} : [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym} \to H(\mathbf{div}, \Omega)$ tal que

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}(\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta})^t) = \boldsymbol{\eta} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}.$$

Entonces, dado $\boldsymbol{\eta} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} &= \int_\Omega \frac{1}{2}(\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta})^t) : \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta})^t : \boldsymbol{\eta} \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta})^t : \boldsymbol{\eta}^t = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} \\
&= \int_\Omega \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta}.
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div},\Omega) \\ \boldsymbol{\tau} \neq \mathbf{0}}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}} \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta}}{\|\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta})\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}} \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}}{\|\mathbf{T}\| \|\boldsymbol{\eta}\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}} = \beta \|\boldsymbol{\eta}\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}}$$

con $\beta = \frac{1}{\|\mathbf{T}\|}$. ∎

Teorema 4.6 *Supongamos que el problema homogéneo asociado a* (4.19) *posee sólo la solución trivial. Entonces, dados* $\boldsymbol{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ *y* $\boldsymbol{g} \in H^{1/2}(\Gamma)$, (4.19) *tiene una única solución* $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}) \in H(\mathbf{div}, \Omega) \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}$. *Además, existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma})\|_{H(\mathbf{div},\Omega)\times[L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}} \leq C\Big\{\|\boldsymbol{g}\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} + \|\boldsymbol{f}\|_{[L^2(\Omega)]^2}\Big\}.$$

Demostración. El problema (4.19) es equivalente a: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}) \in H(\mathbf{div}, \Omega) \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}$ *tal que*

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B}^* \\ \mathbb{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

donde

$$\langle \mathbb{A}(\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\tau} \rangle = A(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}), \qquad \langle \mathbb{K}(\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\tau} \rangle = K(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \Omega),$$

$$\langle \mathbb{B}(\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\eta} \rangle = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\eta} \qquad \forall \boldsymbol{\eta} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym} \qquad \text{y} \qquad \langle \mathbb{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle = F(\boldsymbol{\tau}) \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \Omega).$$

De acuerdo a los Lemas 4.4, 4.5 y a la Teoría de Babuška-Brezzi, el operador

$$\tilde{\mathbb{A}} := \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B}^* \\ \mathbb{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

es invertible. Además el operador

$$\tilde{\mathbb{K}} := \begin{bmatrix} \mathbb{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

es compacto, ya que gracias al Lema 4.3, $\mathbb{K}$ lo es. De este modo, como el problema homogéneo asociado a (4.19) posee sólo la solución trivial, el operador $\tilde{\mathbb{A}}+\tilde{\mathbb{K}}$ es inyectivo, por lo que se concluye que $\tilde{\mathbb{A}}+\tilde{\mathbb{K}}$ es biyectivo.

Por otro lado, del Teorema de la Inversa Acotada se tiene que

$$\begin{aligned} \|(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\gamma})\|_{H(\mathbf{div},\Omega)\times[L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}} &\leq \|(\tilde{\mathbb{A}}+\tilde{\mathbb{K}})^{-1}\|\|(\mathbb{F},\theta)\|_{[H(\mathbf{div},\Omega)]'\times[[L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}]'} \\ &\leq C\|\mathbb{F}\|_{[H(\mathbf{div},\Omega)]'} = C \sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}\in H(\mathbf{div},\Omega)\\ \boldsymbol{\tau}\neq\mathbf{0}}} \frac{|F(\boldsymbol{\tau})|}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}} \\ &\leq C\{\|\boldsymbol{g}\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} + \|\boldsymbol{f}\|_{[L^2(\Omega)]^2}\}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

4.3 Esquema de Galerkin.

Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones del dominio Ω, compuesta por triángulos T de diámetro h_T, y denotamos por h al tamaño de la malla definido por $h := \max\{h_T : T \in \mathcal{T}_h\}$. Entonces, se definen los siguientes subespacios de $H(\mathbf{div},\Omega)$ y $[L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}$, respectivamente:

$$H_h^{\boldsymbol{\sigma}} := \{\boldsymbol{\tau}_h \in H(\mathbf{div},\Omega) : \boldsymbol{\tau}_{h,i}|_T \in \mathbb{RT}_0(T) \oplus \mathbf{curl}^t b_t \quad \forall i \in \{1,2\}\ \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

$$Q_h^{\boldsymbol{\gamma}} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \eta_h \\ -\eta_h & 0 \end{pmatrix} : \eta_h \in \mathbf{C}(\Omega), \quad \eta_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\},$$

donde $\boldsymbol{\tau}_{h,i}$ es la i-ésima fila de $\boldsymbol{\tau}_h$, $\mathbb{RT}_0$ es el espacio Raviart-Thomas local de orden 0 (ver (2.23)), b_T es la función burbuja usual del elemento $T \in \mathcal{T}_h$ y $\mathbf{curl}^t b_t := (\frac{\partial b_t}{\partial y}, -\frac{\partial b_t}{\partial x})$. De este modo, el esquema de Galerkin asociado a (4.6) es: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\gamma}_h) \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times Q_h^{\boldsymbol{\gamma}}$ *tal que*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_h : \boldsymbol{\tau}_h - \frac{1}{\kappa^2}\int_\Omega \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h)\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_h) + \int_\Omega \boldsymbol{\gamma}_h : \boldsymbol{\tau}_h &= F(\boldsymbol{\tau}_h), \\ \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_h : \boldsymbol{\eta}_h &= 0, \end{aligned} \tag{4.30}$$

$\forall(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times Q_h^{\boldsymbol{\gamma}}$, donde F está definido en (4.23).

Por otro lado, consideremos los siguientes espacios:

$$E_h^{\boldsymbol{\sigma}} := \{\boldsymbol{\tau}_h \in H(\mathbf{div}, \Omega) : \boldsymbol{\tau}_{h,i}|_T \in \mathbb{RT}_0(T) \quad \forall i \in \{1,2\} \, \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

$$Q_h^{\boldsymbol{u}} := \{\boldsymbol{v}_h \in [L^2(\Omega)]^2 : \boldsymbol{v}_h|_T \in [\mathbb{P}_0(T)]^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

$$\text{y} \qquad H_{0,h}^{\boldsymbol{\sigma}} := \left\{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}} : \int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}_h) = 0\right\}.$$

Notar que $H_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times Q_h^{\boldsymbol{\gamma}} \times Q_h^{\boldsymbol{u}}$ constituye el espacio de elementos finitos PEERS introducido en [1]. Ahora, dado $\delta \in (0,1]$ consideremos el operador de interpolación vectorial $\mathcal{E}_h : [H^\delta(\Omega)]^{2\times 2} \cap H(\mathbf{div}, \Omega) \to E_h^{\boldsymbol{\sigma}}$ (ver (2.24)), caracterizado por

$$\mathbf{div}\, \mathcal{E}_h(\boldsymbol{\tau}) = \mathcal{P}_h(\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})), \tag{4.31}$$

$$\int_e \mathcal{E}_h(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\nu} = \int_e \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu} \quad \forall \text{ lado } e \text{ de } \mathcal{T}_h, \tag{4.32}$$

donde $\mathcal{P}_h : [L^2(\Omega)]^2 \to Q_h^{\boldsymbol{u}}$ es el proyector ortogonal de $[L^2(\Omega)]^2$ sobre las constantes a trozos. Como $E_h^{\boldsymbol{\sigma}} \subseteq H_h^{\boldsymbol{\sigma}}$, podemos considerar que $\mathcal{E}_h(\boldsymbol{\tau})$ también actúa de $[H^\delta(\Omega)]^{2\times 2} \cap H(\mathbf{div}, \Omega)$ en $H_h^{\boldsymbol{\sigma}}$. Además, del Teorema 3.16 de [9] y de (2.27) se tiene que para todo $\delta \in (0,1]$ y para todo $\boldsymbol{\tau} \in [H^\delta(\Omega)]^{2\times 2} \cap H(\mathbf{div}, \Omega)$, $\mathcal{E}_h$ satisface

$$\|\boldsymbol{\tau} - \mathcal{E}_h(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \leq C h^\delta \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^\delta(\Omega)]^{2\times 2}} + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2} \right\} \tag{4.33}$$

y si además $\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) \in [H^\delta(\Omega)]^2$, entonces

$$\|\boldsymbol{\tau} - \mathcal{E}_h(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\mathbf{div}, \Omega)} \leq C h^\delta \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^\delta(\Omega)]^{2\times 2}} + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{[H^\delta(\Omega)]^2} \right\}. \tag{4.34}$$

También, se definen los operadores de proyección ortogonal $\mathcal{R}_h : [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \to Q_h^{\boldsymbol{\gamma}}$ y $\mathcal{P}_h : [L^2(\Omega)]^2 \to Q_h^{\boldsymbol{u}}$. Entonces se tienen las siguientes propiedades de aproximación (ver[3], [5], [12]):

Para cada $s \in (0,1]$ y para cada $\boldsymbol{\eta} \in [H^s(\Omega)]^{2\times 2} \cap [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}$:

$$\|\boldsymbol{\eta} - \mathcal{R}_h(\boldsymbol{\eta})\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \leq C h^s \|\boldsymbol{\eta}\|_{[H^s(\Omega)]^{2\times 2}}. \tag{4.35}$$

Para cada $t \in (0,1]$ y para cada $\boldsymbol{v} \in [H^t(\Omega)]^2$:

$$\|\boldsymbol{v} - \mathcal{P}_h(\boldsymbol{v})\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq C h^t \|\boldsymbol{v}\|_{[H^s(\Omega)]^2}. \tag{4.36}$$

Por otro lado, dado $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \Omega)$, consideremos el problema discreto asociado a (4.14): *Hallar* $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h, \tilde{\boldsymbol{u}}_h, \tilde{\gamma}_h) \in H_{0,h}^{\boldsymbol{\sigma}} \times Q_h^{\boldsymbol{u}} \times Q_h^{\gamma}$ *tal que*

$$
\begin{array}{rcrcl}
a(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) & + & b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h, (\tilde{\boldsymbol{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_h)) & = & 0, \\
 & & b(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h, (\tilde{\boldsymbol{v}}_h, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h)) & = & \displaystyle\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}),
\end{array}
\tag{4.37}
$$

$\forall (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h, \tilde{\boldsymbol{v}}_h, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h) \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times Q_h^{\boldsymbol{u}} \times Q_h^{\gamma}$.

A continuación mostraremos que (4.37) tiene solución única.

Lema 4.7 *Existe $\tilde{C}_1 > 0$, independiente de h, tal que para cada $(\tilde{\boldsymbol{v}}_h, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h) \in Q_h^{\boldsymbol{u}} \times Q_h^{\gamma}$ se tiene*

$$
\sup_{\substack{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in H_{0,h}^{\boldsymbol{\sigma}} \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h, (\tilde{\boldsymbol{v}}_h, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h))}{\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}} \geq \tilde{C}_1 \|(\tilde{\boldsymbol{v}}_h, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h)\|_{[L^2(\Omega)]^2 \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}}. \tag{4.38}
$$

Demostración. Sea $(\tilde{\boldsymbol{v}}_h, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h) \in Q_h^{\boldsymbol{u}} \times Q_h^{\gamma}$. Del Teorema 4.5 de [11] se sabe que existen $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}}$ y $C > 0$ tales que

$$
b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h, (\tilde{\boldsymbol{v}}_h, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h)) \geq \|(\tilde{\boldsymbol{v}}_h, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h)\|_{[L^2(\Omega)]^2 \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}} \tag{4.39}
$$

y

$$
\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)} \leq C \|(\tilde{\boldsymbol{v}}_h, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h)\|^2_{[L^2(\Omega)]^2 \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}}. \tag{4.40}
$$

Como $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}}$, entonces $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{0,h} + d\mathbf{I}$ con $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{0,h} \in H_{0,h}^{\boldsymbol{\sigma}}$ y $d = \dfrac{1}{2|\Omega|} \displaystyle\int_\Omega \mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h)$. Luego,

$$
\begin{aligned}
b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{0,h}, (\tilde{\boldsymbol{v}}_h, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h)) &= \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot \mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{0,h}) + \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{0,h} : \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h \\
&= \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot \mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) + \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h : \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h - d \int_\Omega \mathbf{I} : \tilde{\boldsymbol{\eta}} \\
&= \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot \mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) + \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h : \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h \\
&= b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h, (\tilde{\boldsymbol{v}}_h, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h)) \\
&\geq \|(\tilde{\boldsymbol{v}}_h, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h)\|^2_{[L^2(\Omega)]^2 \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}}.
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{0,h}\|^2_{H(\mathrm{div};\Omega)} &= \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h - d\mathbf{I}\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} + \|\mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h - d\mathbf{I})\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} - 2d^2|\Omega| + \|\mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h)\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&\leq \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} + \|\mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h)\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Así se tiene que

$$\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{0,h}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leq \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)} \leq C\|(\tilde{\boldsymbol{v}}_h, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h)\|_{\in Q_h^{\boldsymbol{u}}\times Q_h^{\gamma}}. \tag{4.41}$$

Finalmente,

$$\sup_{\substack{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\in H_{0,h}^{\boldsymbol{\sigma}}\\ \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\neq \mathbf{0}}} \frac{b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h,(\tilde{\boldsymbol{v}}_h,\tilde{\boldsymbol{\eta}}_h))}{\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}} \quad \geq \quad \frac{b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{0,h},(\tilde{\boldsymbol{v}}_h,\tilde{\boldsymbol{\eta}}_h))}{\|\tilde{\boldsymbol{\tau}_{0,h}}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}} \geq \frac{1}{C}\|(\tilde{\boldsymbol{v}}_h,\tilde{\boldsymbol{\eta}}_h)\|_{[L^2(\Omega)]^2\times[L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}},$$

lo cual completa la demostración. ∎

Lema 4.8 *Sea* $\tilde{V}_h := \{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in H_{0,h}^{\boldsymbol{\sigma}} : b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h,(\tilde{\boldsymbol{v}}_h,\tilde{\boldsymbol{\eta}}_h)) = 0 \quad \forall(\tilde{\boldsymbol{v}}_h,\tilde{\boldsymbol{\eta}}_h) \in Q_h^{\boldsymbol{u}} \times Q_h^{\gamma}\}$. *Entonces, existe* $\alpha > 0$, *independiente de* h, *tal que para cada* $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \tilde{V}_h$, *se tiene*

$$a(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h,\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) \geq \alpha\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)}. \tag{4.42}$$

Demostración. Notemos primero que $\mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) \in Q_h^{\boldsymbol{u}} \quad \forall\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in H_{0,h}^{\boldsymbol{\sigma}}$. Luego:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_h : \quad &= \left\{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in H_{0,h}^{\boldsymbol{\sigma}} : \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{v}}_h\cdot\mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) + \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h : \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h = 0 \quad \forall(\tilde{\boldsymbol{v}}_h,\tilde{\boldsymbol{\eta}}_h) \in Q_h^{\boldsymbol{u}}\times Q_h^{\gamma}\right\}\\ &= \left\{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in H_{0,h}^{\boldsymbol{\sigma}} : \quad \mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) = 0, \quad \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h : \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h = 0 \quad \forall\tilde{\boldsymbol{\eta}}_h Q_h^{\gamma}\right\}.\end{aligned}$$

Así, dado $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \tilde{V}_h$, utilizamos (4.9) y el hecho que $\int_\Omega \mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) = 0$, para obtener

$$a(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h,\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h) \geq \frac{1}{2\mu}\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h^d\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} = \frac{1}{2\mu}\left\{\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h^d\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} + \|\mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h)\|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\right\}.$$

Finalmente, aplicando el Lema (4.2) resulta la desigualdad (4.42). ∎

Teorema 4.9 *Dado* $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div},\Omega)$, *existe una única solución* $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h,\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\tilde{\gamma}_h) \in H_{0,h}^{\boldsymbol{\sigma}} \times Q_h^{\boldsymbol{u}} \times Q_h^{\gamma}$ *de* (4.37). *Además, existen* $C, \tilde{C} > 0$, *independientes de* h, *tales que*

$$\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)} + \|\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|\tilde{\gamma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \leq C\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2} \tag{4.43}$$

y

$$\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)} + \|\tilde{\boldsymbol{u}} - \tilde{\boldsymbol{u}}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}}$$

$$\leq \tilde{C}\big\{\|(\mathbf{I} - \mathcal{E}_h)(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})\|_{H(\mathbf{div},\Omega)} + \|(\mathbf{I} - \mathcal{P}_h)(\tilde{\boldsymbol{u}})\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|(\mathbf{I} - \mathcal{R}_h)(\tilde{\gamma})\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}}\big\}, \tag{4.44}$$

donde $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{\gamma}) \in H_0(\mathbf{div},\Omega) \times [L^2(\Omega)]^2 \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}$ *es la única solución de* (4.14).

Demostración. Utilizando los Lemas 4.7 y 4.8, la existencia y unicidad de (4.37) es consecuencia de la Teoría de Babuška-Brezzi, al igual que la condición de estabilidad (4.43). Por otro lado, de la estimación de Cea se tiene que

$$\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)} + \|\tilde{\boldsymbol{u}} - \tilde{\boldsymbol{u}}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|\tilde{\boldsymbol{\gamma}} - \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_h\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}}$$

$$\leq \tilde{C}\left\{ \inf_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in H^{\boldsymbol{\sigma}}_{0,h}} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)} + \inf_{\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in Q^{\boldsymbol{u}}_h} \|\tilde{\boldsymbol{u}} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \inf_{\tilde{\boldsymbol{\eta}}_h \in Q^{\boldsymbol{\gamma}}_h} \|\tilde{\boldsymbol{\gamma}} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \right\} \quad (4.45)$$

Ahora, dado que $\mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \in H^{\boldsymbol{\sigma}}_h$, podemos escribir $\mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})_0 + \tilde{d}\mathbf{I}$, donde $\mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})_0 \in H^{\boldsymbol{\sigma}}_{0,h}$ y $\tilde{d} = \dfrac{1}{2|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \operatorname{tr}(\mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}))$. Luego

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})_0\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} &= \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \tilde{d}\mathbf{I}\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} \\
&= \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \tilde{d}\mathbf{I}\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} + \|\mathbf{div}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}))\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})\|^2_{H(\mathrm{div};\Omega)} - 2\tilde{d}\int_\Omega \operatorname{tr}(\mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})) + 2\tilde{d}^2|\Omega| \\
&= \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})\|^2_{H(\mathrm{div};\Omega)} - 2\tilde{d}^2|\Omega| \leq \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})\|^2_{H(\mathrm{div};\Omega)}.
\end{aligned}$$

Se sigue que,

$$\inf_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in H^{\boldsymbol{\sigma}}_{0,h}} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)} \leq \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})_0\|_{H(\mathbf{div},\Omega)} \leq \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathcal{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}. \quad (4.46)$$

Además, es claro que

$$\inf_{\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in Q^{\boldsymbol{u}}_h} \|\tilde{\boldsymbol{u}} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq \|\tilde{\boldsymbol{u}} - \mathcal{P}_h(\tilde{\boldsymbol{u}})\|_{[L^2(\Omega)]^2} \quad (4.47)$$

y

$$\inf_{\tilde{\boldsymbol{\eta}}_h \in Q^{\boldsymbol{\gamma}}_h} \|\tilde{\boldsymbol{\gamma}} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \leq \|\tilde{\boldsymbol{\gamma}} - \mathcal{R}_h(\tilde{\boldsymbol{\gamma}})\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}}. \quad (4.48)$$

Así, sustituyendo (4.46), (4.47) y (4.48) en (4.45) se obtiene el resultado. ∎

Con todo el análisis previo podemos definir, en forma análoga al caso continuo, el operador

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_h : H(\mathbf{div},\Omega) &\longrightarrow H^{\boldsymbol{\sigma}}_h \\
\boldsymbol{\tau} &\rightarrow \mathbf{P}_h(\boldsymbol{\tau}) := \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h,
\end{aligned} \quad (4.49)$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h$ es la única solución de (4.37). Se sigue del Teorema (4.9) que $\mathbf{P}_h$ es lineal y acotado.

Lema 4.10 *Sea $\epsilon > 0$ el parámetro que define la regularidad de la solución de (4.16). Entonces, existe $C > 0$, independiente de h, tal que*

$$\|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}_h) - \mathbf{P}_h(\boldsymbol{\tau}_h)\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leq Ch^{\epsilon}\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_h)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \qquad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{4.50}$$

Demostración. Análogo a la demostración del Lema 5.3 de [6]. ∎

Lema 4.11 *Existe $\tilde{\beta} > 0$, independiente de h, tal que para cada $\boldsymbol{\eta}_h \in Q_h^{\boldsymbol{\gamma}}$ se tiene*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}} \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq \mathbf{0}}} B(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \geq \tilde{\beta}\|\boldsymbol{\eta}_h\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}}. \tag{4.51}$$

Demostración. De la demostración del Teorema 4.5 de [11], se tiene que existe $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}}$ tal que

$$\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)} \leq C\|\boldsymbol{\eta}_h\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}}$$

y

$$B(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h, \boldsymbol{\eta}_h) = B(\boldsymbol{\eta}_h, \boldsymbol{\eta}_h).$$

Así,

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}} \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{B(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\eta}_h)}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}} \quad \geq \quad \frac{B(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h, \boldsymbol{\eta}_h)}{\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}} \geq \frac{1}{C}\|\boldsymbol{\eta}_h\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}}. \qquad ∎$$

Lema 4.12 *Sea $\boldsymbol{V}_h := \left\{ \boldsymbol{\tau}_h \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}} : \int_\Omega \boldsymbol{\tau}_h : \boldsymbol{\eta}_h = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in Q_h^{\boldsymbol{\gamma}} \right\}$. Entonces, existen $\tilde{C}, h_0 > 0$, independientes de h, tales que para todo $h \leq h_0$ se tiene*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\zeta}_H \in \boldsymbol{V}_h \\ \boldsymbol{\zeta}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{A(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\zeta}_h)}{\|\boldsymbol{\zeta}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}} \geq \tilde{C}\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{V}_h. \tag{4.52}$$

y además

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{V}_h} A(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\zeta}_h) > 0 \quad \forall \boldsymbol{\zeta}_h \in \boldsymbol{V}_h, \boldsymbol{\zeta}_h \neq \mathbf{0}. \tag{4.53}$$

Demostración. Consideremos el operador lineal $\mathbf{S}_h := (\mathbf{I} - 2\mathbf{P}_h) : H_h^{\boldsymbol{\sigma}} \to H_h^{\boldsymbol{\sigma}}$. Del Lema 4.10 se tiene, para cada $\boldsymbol{\tau}_h \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}}$, que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}_h) - \mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h)\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} &= 2\|\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}_h) - \mathbf{P}_h(\boldsymbol{\tau}_h)\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \\ &\leq Ch^{\epsilon}\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_h)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq Ch^{\epsilon}\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Notar que (4.54) y el acotamiento de $\mathbf{S}$ implican que los operadores $\{\mathbf{S}_h\}_{h>0}$ son uniformemente acotados.

A su vez, de la estimación (4.54) y de (4.27) se tiene que

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h)) &= A(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}_h)) - A(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}_h) - \mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h)) \\ &\geq \tilde{C}\|\boldsymbol{\tau}_h\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} - Ch^{\epsilon}\|\boldsymbol{\tau}_h\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} \\ &\geq (\hat{C} - Ch^{\epsilon})\|\boldsymbol{\tau}_h\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} \\ &\geq \tilde{C}\|\boldsymbol{\tau}_h\|^2_{H(\mathbf{div},\Omega)} \qquad \forall h \leq h_0, \end{aligned}$$

con $h_0 > 0$ suficientemente pequeño.

Ahora bien, dado $\boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{V}_h$, es claro que $\mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h) \in \boldsymbol{V}_h$. En efecto, para cada $\boldsymbol{\eta}_h \in Q_h^{\boldsymbol{\gamma}}$

$$\int_\Omega \mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h) : \boldsymbol{\eta}_h \;=\; -2\int_\Omega \mathbf{P}_h(\boldsymbol{\tau}_h) : \boldsymbol{\eta}_h,$$

y tomando $\tilde{\boldsymbol{v}}_h = 0$ en la segunda ecuación de (4.37) resulta $\int_\Omega \mathbf{P}_h(\boldsymbol{\tau}_h) : \boldsymbol{\eta}_h = 0$, con lo cual

$$\int_\Omega \mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h) : \boldsymbol{\eta}_h = 0.$$

De este modo, usando el acotamiento uniforme de $\mathbf{S}_h$, resulta

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\zeta}_H \in \boldsymbol{V}_h \\ \boldsymbol{\zeta}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{A(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\zeta}_h)}{\|\boldsymbol{\zeta}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}} \geq \frac{A(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h))}{\|\mathbf{S}_h(\boldsymbol{\tau}_h)\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}} \geq \tilde{C}\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)},$$

y en virtud de la simetría de A se obtiene (4.53). ∎

Teorema 4.13 *Supongamos que el problema homogéneo asociado a* (4.19) *posee sólo la solución trivial. Entonces, existen* $C, h_0 > 0$*, independientes de* h*, tales que para todo* $h \leq h_0$ *el esquema de Galerkin* (4.30) *tiene una única solución* $(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\gamma}_h) \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times Q_h^{\boldsymbol{\gamma}}$*, y*

$$\|(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}) - (\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\gamma}_h)\|_{H(\mathbf{div},\Omega)\times[L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}}$$

$$\leq C \inf_{(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times Q_h^{\boldsymbol{\gamma}}} \|(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}) - (\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\eta}_h)\|_{H(\mathbf{div},\Omega)\times[L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}}. \tag{4.55}$$

Además, si $\boldsymbol{\sigma} \in [H^\delta(\Omega)]^{2\times 2}$*,* $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) \in [H^\delta(\Omega)]^2$ *y* $\boldsymbol{\gamma} \in [H^\delta(\Omega)]^{2\times 2}$*, para algún* $\delta \in (0, 1]$*, entonces existe* $\tilde{C} > 0$*, independiente de* h*, tal que*

$$\|(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}) - (\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\gamma}_h)\|_{H(\mathbf{div},\Omega)\times[L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}}$$

$$\leq \tilde{C}h^{\delta}\big\{\|\boldsymbol{\sigma}\|_{[H^{\delta}(\Omega)]^{2\times 2}} + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})\|_{[H^{\delta}(\Omega)]^{2}} + \|\boldsymbol{\gamma}\|_{[H^{\delta}(\Omega)]^{2\times 2}}\big\}. \tag{4.56}$$

Demostración. De los Lemas 4.11 y 4.12 se tiene que el esquema de Galerkin (4.30) es convergente para $\tilde{\mathbb{A}}$, por lo que, aplicando el Teorema 1.4 se concluye que el esquema de Galerkin también es convergente para $\tilde{\mathbb{A}}+\tilde{\mathbb{K}}$. Además de (1.8) se tiene la estimación (4.55). Por último (4.56) es consecuencia de la estimación de Cea (4.55) y de las propiedades de los operadores de interpolación $\mathcal{E}$ y $\mathcal{R}$ dadas en (4.34) y (4.35). ∎

4.4 Resultados Numéricos.

En esta sección se presentan algunos ejemplos que ilustran el comportamiento de la solución del esquema de Galerkin (4.30) utilizando un refinamiento uniforme.

Si $(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\gamma}_h) \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times Q_h^{\boldsymbol{\gamma}}$ es la aproximación de $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}) \in H(\mathbf{div}, \Omega) \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{asym}$, entonces se definen, respectivamente, los errores de aproximación para $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\gamma}$ como

$$\begin{aligned} e(\boldsymbol{\sigma}) &:= \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{H(\mathbf{div},\Omega)}, \\ e(\boldsymbol{\gamma}) &:= \|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \end{aligned}$$

y el error global

$$\boldsymbol{e} = \sqrt{e(\boldsymbol{\sigma})^2 + e(\boldsymbol{\gamma})^2}.$$

Además se definen las tasas de convergencia experimental respectivas:

$$\begin{aligned} r(\boldsymbol{\sigma}) &:= -2\frac{\log(e(\boldsymbol{\sigma})/e'(\boldsymbol{\sigma}))}{\log(N/N')}, \\ r(\boldsymbol{\gamma}) &:= -2\frac{\log(e(\boldsymbol{\gamma})/e'(\boldsymbol{\gamma}))}{\log(N/N')}, \\ \boldsymbol{r} &:= -2\frac{\log(\boldsymbol{e}/\boldsymbol{e}')}{\log(N/N')}, \end{aligned}$$

donde e y e' son los errores asociados a dos malla consecutivas con grados de libertad N y N' dados por los subespacios $H_h^{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\times Q_h^{\boldsymbol{\gamma}}$.

Los ejemplos que se muestran son los siguientes:

Ejemplo	Ω	κ	λ	ν	$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$
1	$[0,1]^2$	1	1	1	$u_1 = u_2 = \text{sen}(\pi x_1)\text{sen}(\pi x_2)$
2	$[-1,1]^2 - [0,1]^2$	1	1	1	$u_1 = u_2 = r^{5/3}\sin(\frac{2\theta-\pi}{3})$
3	$[-1,1]^2 - [0,1]^2$	1	1	1	$u_1 = u_2 = \text{sen}(\pi x_1)\text{sen}(\pi x_2)$
4	$[0,1]^2$	1	1	1	$u_1 = u_2 = (x_1 + x_2 + 0.1)^{-1}$
5	$[0,1]^2 - [0.5,1]^2$	1	1	1	$u_1 = u_2 = \text{sen}(\pi x_1)\text{sen}(\pi x_2)$

Tabla 4.1: Ejemplo, dominio Ω, κ, λ, ν y solución exacta $\boldsymbol{u}$

Se puede demostrar, para el Ejemplo 2, que $\boldsymbol{\sigma} \in [H^{2/3}(\Omega)]^{2\times 2}$ debido a que las segundas derivadas parciales tienen una singularidad en el origen. Además, **div** es del orden $\mathcal{O}(r^{-1/3})$ y por lo tanto, de acuerdo al Teorema 4.13, el orden de convergencia teórico es $O(h^{2/3})$. Esto se reafirma experimentalmente en la Tabla 4.3 donde se observa que la tasa de convergencia $\boldsymbol{r}$ oscila en torno a $2/3$. En los otros ejemplos se puede ver que la regularidad de las funciones permite, en virtud del Teorema 4.13, que las tasas de convergencia sean $\mathcal{O}(h)$.

Las Figuras 4.6 a 4.20 muestran las componentes aproximadas y exactas de la solución para cada uno de los ejemplos. Allí se observa que en general $(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\gamma}_h)$ constituye una muy buena aproximación de $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma})$.

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	$r(\boldsymbol{\sigma})$	$e(\boldsymbol{\gamma})$	$r(\boldsymbol{\gamma})$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{r}$
8578	1.2029	–	0.0959	–	1.2067	–
17401	0.8326	1.0404	0.1217	–	0.8414	1.0195
42967	0.5316	0.9926	0.0721	1.1602	0.5365	0.9959
86006	0.3745	1.0097	0.0506	1.0182	0.3779	1.0099

Tabla 4.2: Grados de libertad N, errores y tasas de convergencia (Ejemplo 1)

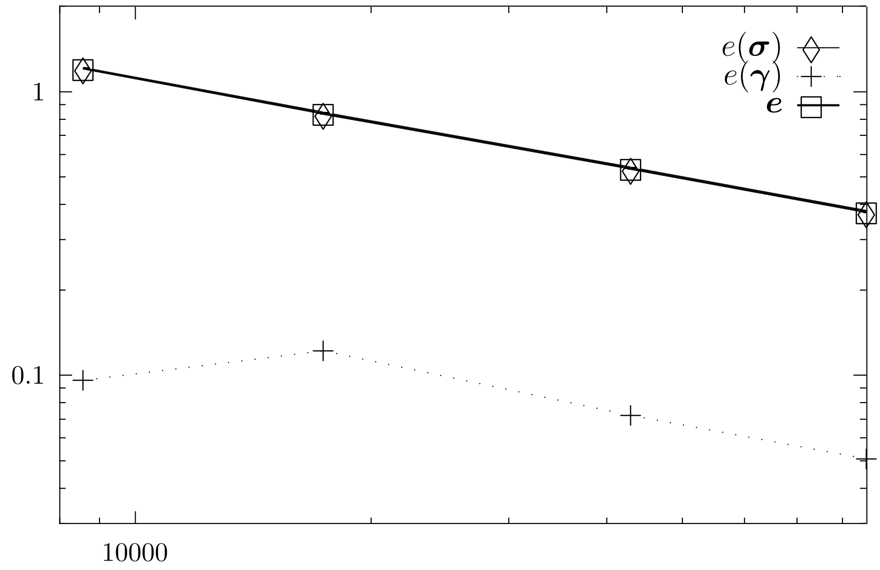


Figura 4.1: Grados de libertad N vs. errores (Ejemplo1)

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	$r(\boldsymbol{\sigma})$	$e(\boldsymbol{\gamma})$	$r(\boldsymbol{\gamma})$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{r}$
5310	0.7100	–	0.0690	–	0.7133	–
8793	0.6220	0.5247	0.0638	0.3117	0.6253	0.5226
26078	0.4571	0.5673	0.0532	0.3348	0.4600	0.5645
51988	0.4179	0.2592	0.0510	0.1207	0.4210	0.2570
86290	0.3355	0.8664	0.0500	0.0744	0.3392	0.8521

Tabla 4.3: Grados de libertad N, errores y tasas de convergencia (Ejemplo 2)

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	$r(\boldsymbol{\sigma})$	$e(\boldsymbol{\gamma})$	$r(\boldsymbol{\gamma})$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{r}$
5310	4.6611	–	0.4049	–	4.6786	–
8793	3.6577	0.9612	0.3140	1.0073	3.6712	0.9616
26078	2.0989	1.0218	0.1604	1.2356	2.1050	1.0232
51988	1.4965	0.9806	0.1110	0.8421	1.5013	0.9798
86290	1.1573	1.0147	0.0859	1.3191	1.1604	1.0165

Tabla 4.4: Grados de libertad N, errores y tasas de convergencia (Ejemplo 3)

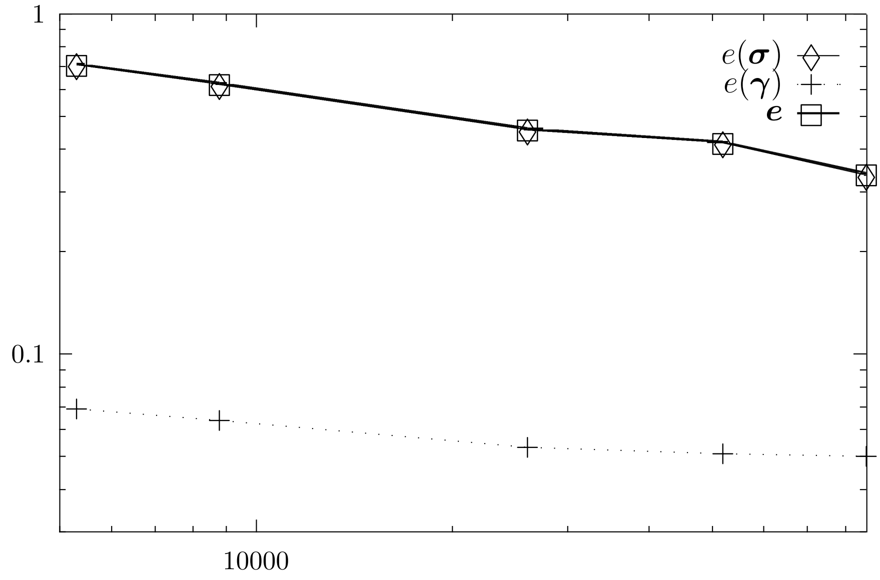


Figura 4.2: Grados de libertad N vs. errores (Ejemplo2)

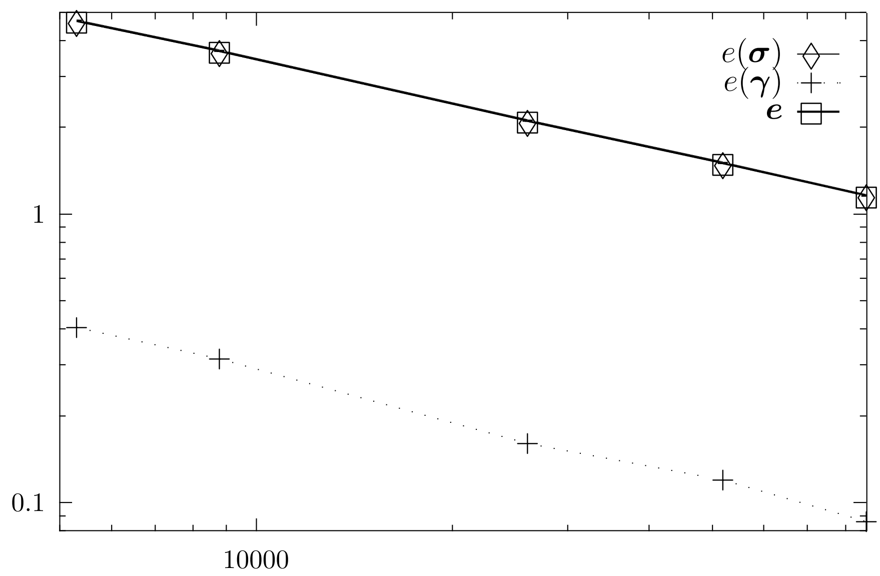


Figura 4.3: Grados de libertad N vs. errores (Ejemplo 3)

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	$r(\boldsymbol{\sigma})$	$e(\boldsymbol{\gamma})$	$r(\boldsymbol{\gamma})$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{r}$
8578	110.5600	–	2.6346	–	110.5900	–
17401	78.7300	0.9600	1.7372	1.1776	78.7490	0.9601
42967	46.3800	1.1708	0.8749	1.5176	46.3880	1.1710
95711	29.4750	1.1320	0.4408	1.7120	29.4780	1.1322

Tabla 4.5: Grados de libertad N, errores y tasas de convergencia (Ejemplo4)

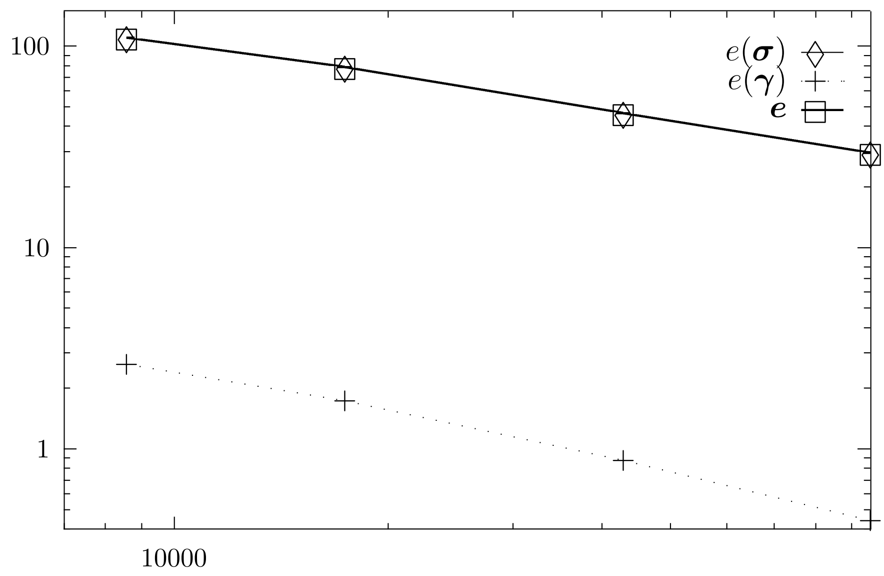


Figura 4.4: Grados de libertad N vs. errores (Ejemplo 4)

N	$e(\boldsymbol{\sigma})$	$r(\boldsymbol{\sigma})$	$e(\boldsymbol{\gamma})$	$r(\boldsymbol{\gamma})$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{r}$
6569	1.0190	–	0.0815	–	1.0222	–
12923	0.7141	1.0510	0.0747	0.2579	0.7179	1.0443
25843	0.5008	1.0239	0.0402	1.7897	0.5024	1.0303
64586	0.3166	1.0009	0.0259	0.9555	0.3177	1.0006

Tabla 4.6: Grados de libertad N, errores y tasas de convergencia (Ejemplo 5)

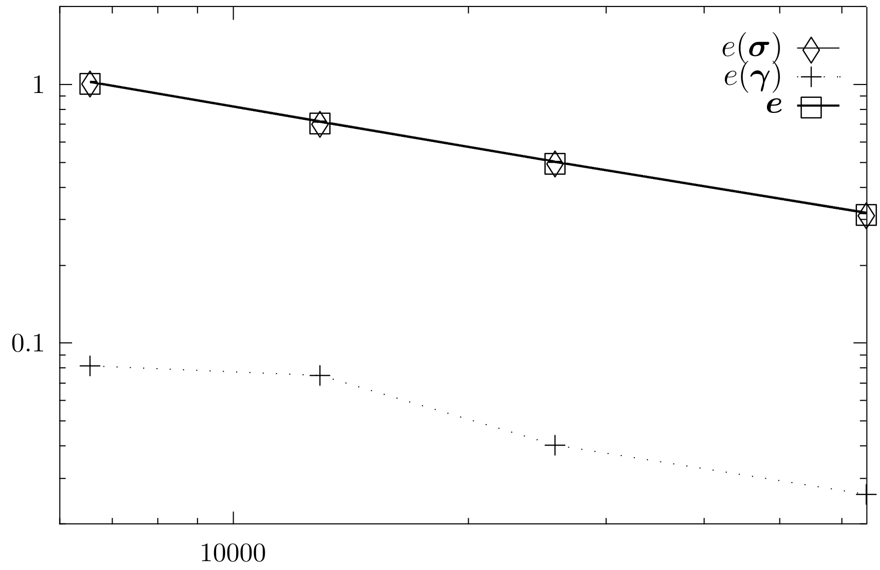


Figura 4.5: Grados de libertad N vs. errores (Ejemplo 6)

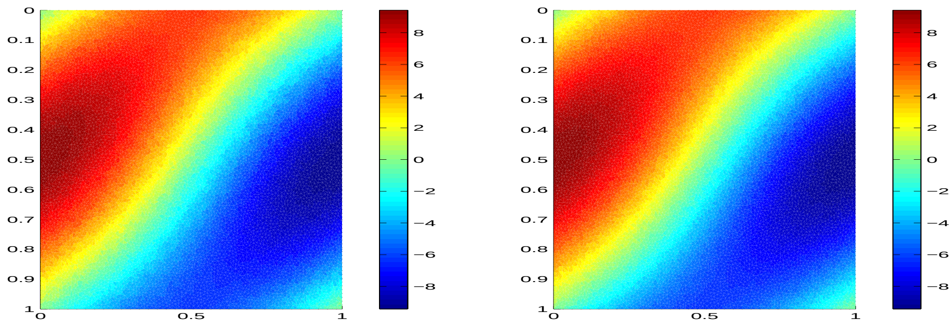


Figura 4.6: $\boldsymbol{\sigma}_{11}$ para $N = 86006$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 1)

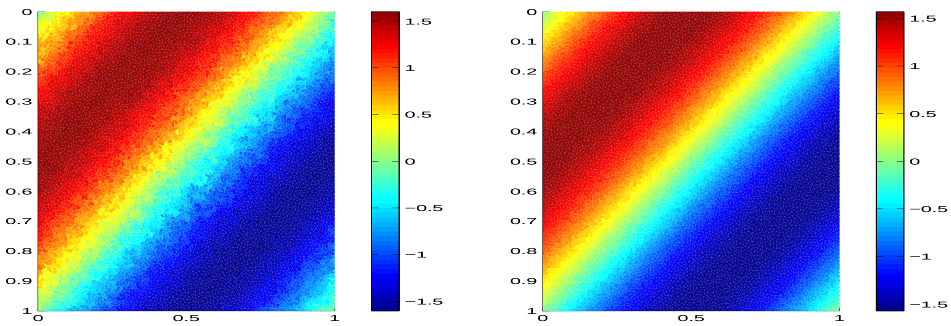


Figura 4.7: $\boldsymbol{\sigma}_{12}$ para $N = 86006$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 1)

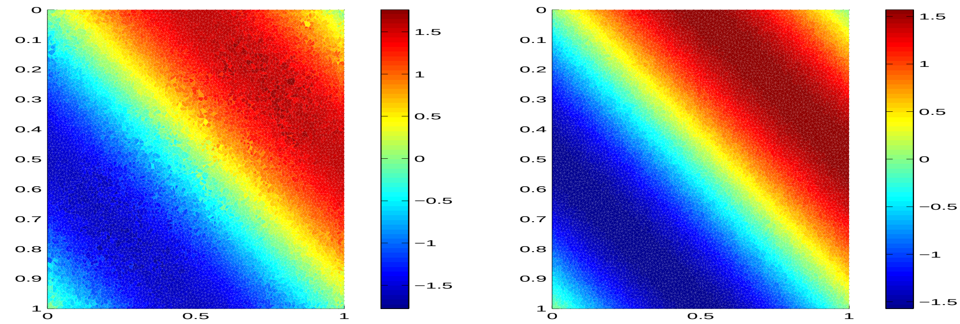


Figura 4.8: $\boldsymbol{\gamma}_{12}$ para $N = 86006$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 1)

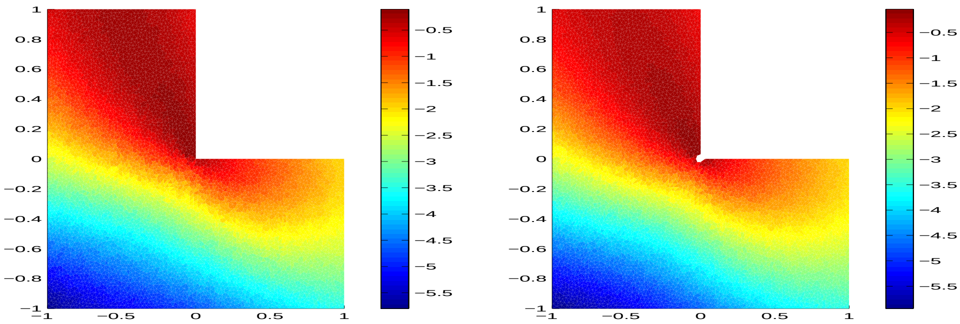


Figura 4.9: $\boldsymbol{\sigma}_{22}$ para $N = 51988$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 2)

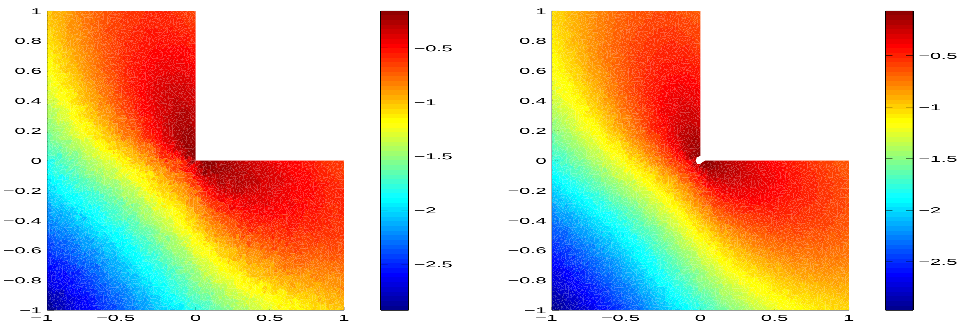


Figura 4.10: $\boldsymbol{\sigma}_{21}$ para $N = 51988$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 2)

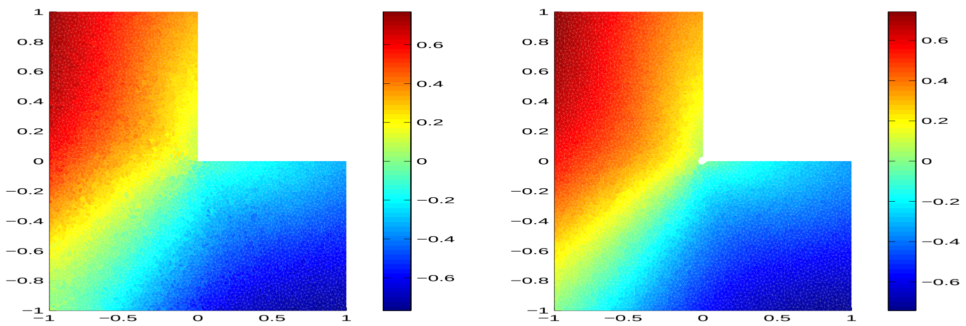


Figura 4.11: $\boldsymbol{\gamma}_{12}$ para $N = 51988$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 2)

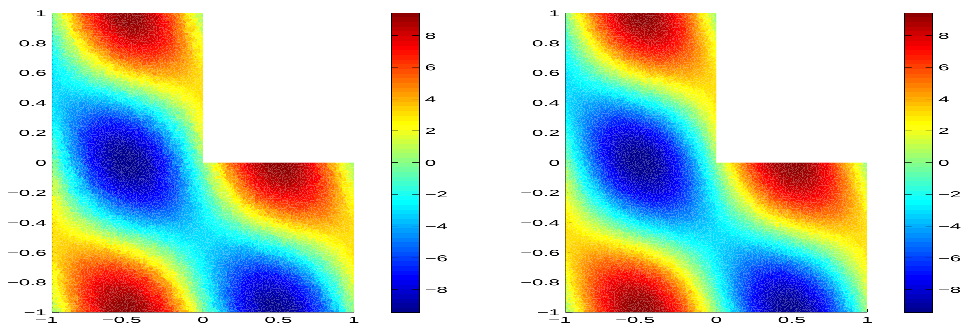


Figura 4.12: $\boldsymbol{\sigma}_{22}$ para $N = 86290$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 3)

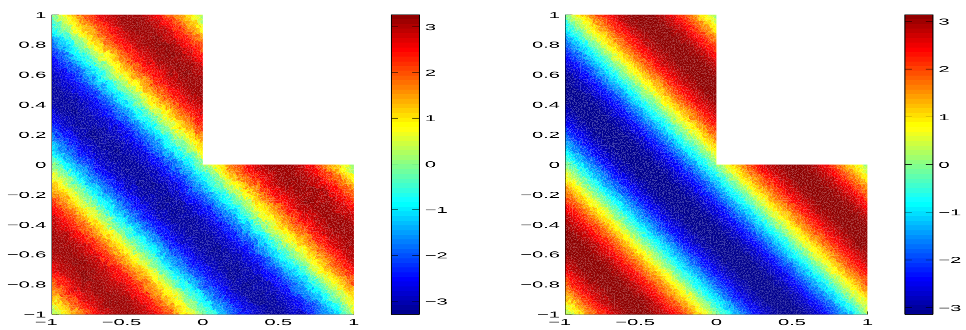


Figura 4.13: $\boldsymbol{\sigma}_{21}$ para $N = 86290$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 3)

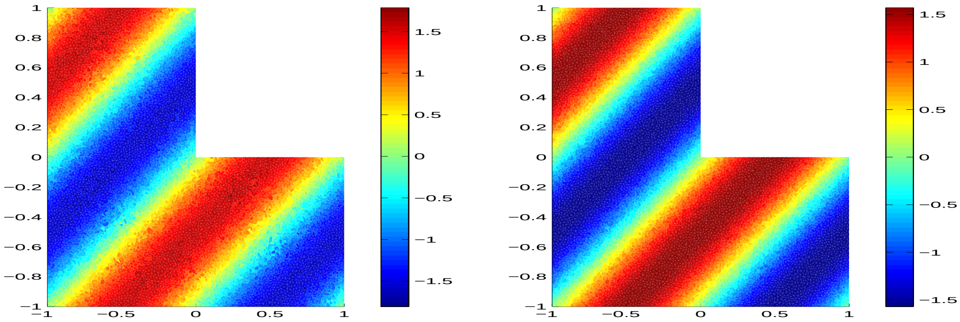


Figura 4.14: $\boldsymbol{\gamma}_{12}$ para $N = 86290$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 3)

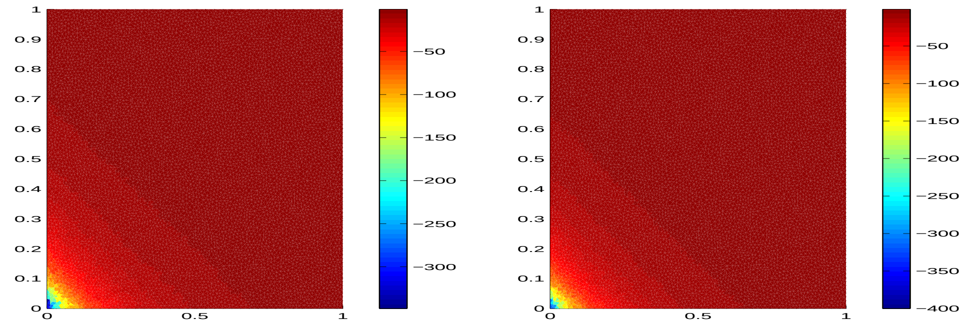


Figura 4.15: $\boldsymbol{\sigma}_{11}$ para $N = 64586$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 4)

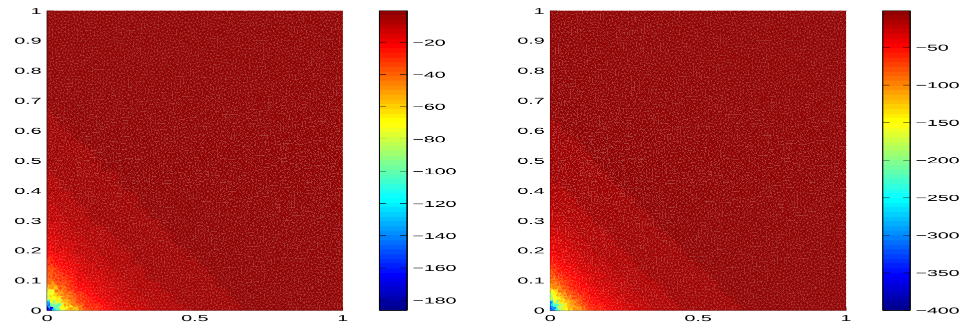


Figura 4.16: $\boldsymbol{\sigma}_{12}$ para $N = 64586$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 4)

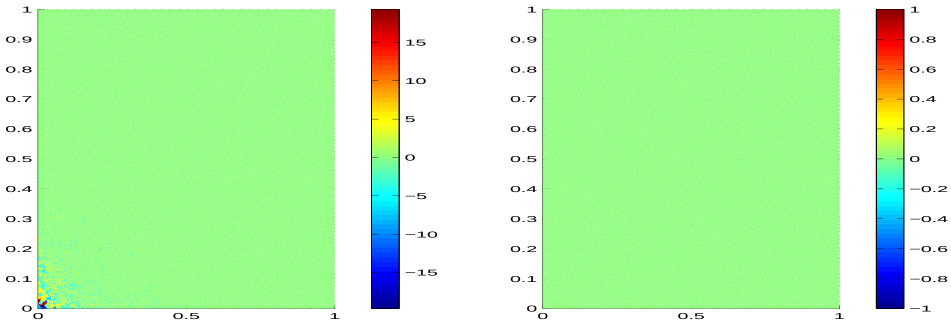


Figura 4.17: $\boldsymbol{\gamma}_{12}$ para $N = 64586$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 4)

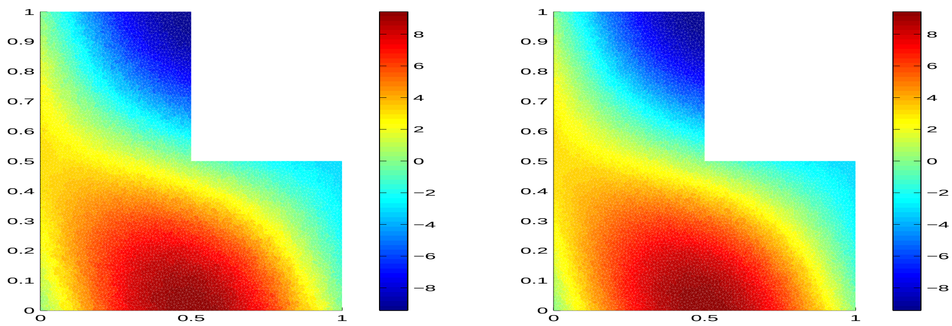


Figura 4.18: $\boldsymbol{\sigma}_{22}$ para $N = 64586$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 5)

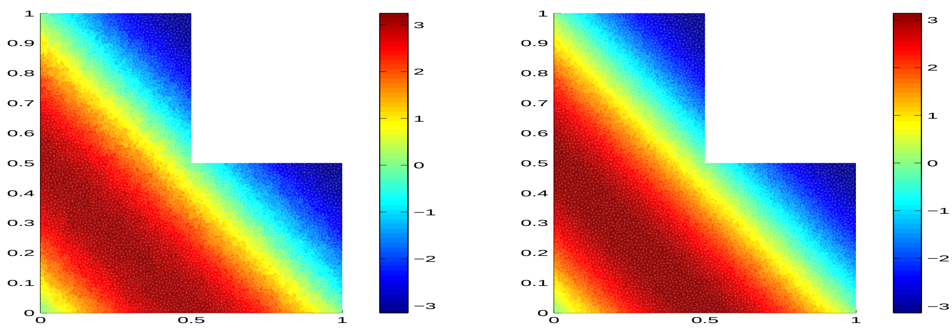


Figura 4.19: $\boldsymbol{\sigma}_{21}$ para $N = 64586$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 5)

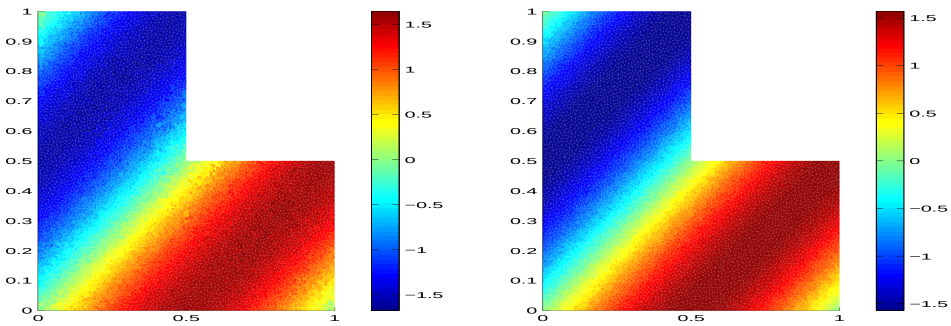


Figura 4.20: $\boldsymbol{\gamma}_{12}$ para $N = 64586$. Izquierda: Aproximación. Derecha: Solución exacta (Ejemplo 5)

Bibliografía.

[1] Arnold, D.N., Brezzi, F. and , Douglas, J.. *PEERS: A new mixed finite element method for plane elasticity*. Japan Journal of Applied Mathematics. vol. 1, pp. 347-367, (1984).

[2] Arnold, D.N., Douglas, J. and Gupta, Ch.P.. *A family of higher order mixed finite element methods for plane elasticity*. Numerische Mathematik, vol. 45, pp. 1-22, (1984).

[3] Babuška, I. and Aziz. A.K., *Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method*. In: The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, A.K. Aziz (editor), Academic Press, New York, (1972).

[4] Bahriawati, C., Carstensen, C. *Three matlab implementations of the lowest–order Raviart-Thomas MFEM with a posteriori error control*. Computational Methods in Applied Mathematics, vol. 5 (4), pp. 333-361, (2005).

[5] Brezzi, F. and Fortin, M.. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer Verlag, (1991).

[6] Gatica, G.N., Marquez, A. and Meddahi, S.. *Analysis of the coupling of primal and dual-mixed finite element methods for a two-dimensional fluid-solid interaction problem*. SIAM Journal on Numerical Analysis, to appear.

[7] Grisvard, P. *Elliptics Problems in Non-Smooth Domains*. Monographs and Studies in Mathematics, 24, Pitman. (1985).

[8] GRISVARD, P. *Problémes aux limites dans les polygones.* Mode démploi. EDF. Bulletin de la Direction des Estudes et Recherches (Serie C) 1, pp. 21-59, (1986).

[9] HIPTMAIR, R. *Finite elements in computational electromagnetism.* Acta Numerica, vol. 11, pp. 237-339, (2002).

[10] KRESS, R. *Linear Integral Equations.* Springer-Verlag, Berlin, (1989).

[11] LONSING, M. AND VERFÜRTH. *On the stability of BDMS and PEERS elements.* Numerische Methematik, vol. 99, pp. 131-140, (2004).

[12] ROBERTS, J.E. AND THOMAS, J.M.. *Mixed and Hybrid Methods.* In: Handbook of Numerical Analysis, edited by P.G. Ciarlet and J.L. Lions, vol II, Finite Element Methods (Part 1), North-Holland, Amsterdam, (1991).