



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ANÁLISIS DE ERROR A POSTERIORI PARA LAS FORMULACIONES
COMPLETAMENTE MIXTAS DE LOS PROBLEMAS DE STOKES Y DE
STOKES-DARCY EVOLUTIVOS

Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Matemático

Autor: Jorge Alexis Castillo Sepúlveda
Profesor Guía: Gabriel Nivaldo Gatica Pérez

21 de octubre de 2015
CONCEPCIÓN, CHILE

En memoria de Gustavo Adolfo Castillo Sepúlveda (Q.E.P.D.)

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer al Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI²MA) por haber sostenido el presente trabajo mediante la prestación de sus instalaciones y con financiamiento bajo el proyecto Anillo Conicyt ACT-1118. En especial a mi profesor guía Gabriel Gatica por su paciencia, confianza y ayuda para poder llevar a cabo con éxito esta tesis.

También quisiera agradecer al Departamento de Ingeniería Matemática por su apoyo a mi desarrollo personal y académico durante toda mi carrera, ya sea en la prestación de sus instalaciones como así también el soporte monetario para asistir a diversos congresos. En esta sección por su puesto que debo destacar y mencionar a su cuerpo docente en general pues gracias a ellos pude desarrollarme intelectualmente para así enfrentar los diversos desafíos de la vida académica y profesional.

Por último, dedico estos saludos de agradecimientos a amigos y familiares que siempre estuvieron a mi lado apoyándome a lo largo de mi gloriosa experiencia en la Universidad de Concepción.

RESUMEN

En esta tesis se realiza un análisis de error a posteriori de las formulaciones completamente mixtas de los problemas de Stokes y Stokes-Darcy evolutivos. Para ello, primero se analiza el *esquema semi-discreto*, el cual consiste en fijar un tiempo y discretizar el espacio mediante el método de elementos finitos mixtos, y luego se discretiza el intervalo temporal usando el método de Euler regresivo. Esto último se conoce como el *esquema completamente discreto*. Con el propósito de obtener las estimaciones deseadas, para los dos enfoques descritos en el párrafo anterior, se usa la técnica de las *reconstrucciones elípticas*, de tal manera que el error se divide en dos contribuciones, lo cual permite recurrir a los residuos del problema mixto asociado. Una de estas contribuciones es un problema evolutivo en forma mixta, de tal manera que las estimaciones se deducen usando un argumento estándar para problemas parabólicos en términos de la norma de la energía y la integración en el tiempo. Esta estimación quedará en términos de las condiciones iniciales y la derivada temporal de la segunda componente de la incógnita. Además, en el esquema completamente discreto aparecen términos que dependen de la aproximación temporal y de los cambios de malla en cada tiempo. Por otra parte, la segunda contribución del error es un problema estacionario, y por lo tanto las estimaciones se deducen a partir de lo hecho en el análisis a posteriori de los problemas elípticos asociados.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Propósito de este trabajo	1
1.2. Notación	2
2. Los problemas modelo	4
2.1. El problema de Stokes evolutivo	4
2.1.1. Formulación completamente mixta	5
2.2. El problema de Stokes-Darcy evolutivo	6
2.2.1. Formulación completamente mixta	8
2.2.2. El esquema de Galerkin	10
3. Análisis de error a posteriori de los esquemas semi-discretos	13
3.1. El problema de Stokes evolutivo	13
3.1.1. Primera contribución: $(\hat{\sigma} - \sigma, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})$	14
3.1.2. Segunda contribución: $(\hat{\sigma} - \sigma_h, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)$	19
3.1.3. Estimaciones para $\ \frac{d(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t)}{dt}\ _{0,\Omega}$	23
3.1.4. Estimación de error a posteriori para $(\sigma_h - \sigma, \mathbf{u}_h - \mathbf{u})$	24
3.2. El problema de Stokes-Darcy evolutivo	27
3.2.1. Primera contribución	28
3.2.2. Segunda contribución	30
3.2.3. Estimación de error para la derivada temporal de la segunda compo- nente del error	35
3.2.4. Estimación de error a posteriori para $(\underline{\sigma}_h - \underline{\sigma}, \underline{\mathbf{u}}_h - \underline{\mathbf{u}})$	37
4. Análisis de error a posteriori de los esquemas completamente discretos	39
4.1. El problema de Stokes evolutivo	39
4.1.1. Primera contribución: $(\hat{\Sigma} - \sigma, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})$	44
4.1.2. Segunda contribución: $(\hat{\Sigma} - \Sigma, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})$	54

4.1.3.	Estimación de error a posteriori para $(\underline{\Sigma} - \underline{\sigma}, \underline{U} - \underline{u})$	58
4.2.	El problema de Stokes-Darcy evolutivo	59
4.2.1.	Primera contribución	66
4.2.2.	Segunda contribución	71
4.2.3.	Estimación de error a posteriori para $(\underline{\Sigma} - \underline{\sigma}, \underline{U} - \underline{u})$	74
5.	Conclusiones y posibles extensiones	76

Capítulo 1

Introducción

1.1. Propósito de este trabajo

El estudio de las aproximaciones numéricas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales en mecánica de fluidos es bastante amplio y versátil. En particular, nuestro interés radica en los problemas de Stokes y de Stokes-Darcy, ambos en su forma completamente mixta y en su versión evolutiva. El problema de Stokes modela un fluido viscoso incompresible que se mueve en cierto medio acotado, y el problema de Stokes-Darcy modela un fluido viscoso incompresible actuando sobre un medio poroso a través de cierta frontera común entre el fluido y el medio poroso. Existen varios trabajos que establecen que estos problemas en su versión estacionaria están bien definidos con sus respectivos análisis de error a posteriori (cf. [11], [12], [13]).

En lo que respecta a problemas parabólicos, esto es, el estudio de ecuaciones diferenciales parciales evolutivas en forma de divergencia, existen varios enfoques de estudio. Dentro de las formulaciones mixtas, en [2] podemos hallar un análisis de error a priori bajo formulaciones generales, con las típicas hipótesis que se deben pedir a los problemas mixtos para que estén bien definidos. En el desarrollo de los análisis de error a posteriori para formulaciones mixtas de problemas evolutivos, podemos mencionar el aporte que se hace en [19], que introducen la *técnica de las reconstrucciones elípticas*, que consiste en separar el error en dos contribuciones. Una de ellas puede ser deducida usando los típicos argumentos de la norma de la energía, usual en problemas parabólicos, y la otra se puede deducir gracias al trabajo en los problemas elípticos asociados, usando los estimadores de error a posteriori de los problemas estacionarios ya estudiados en esta contribución del error. Hay varios trabajos basados en esta idea (cf. [1],[16], [17]). En [18] además se aplicó la idea del post-procesamiento de la solución para obtener las estimaciones, usando elementos de Raviart-Thomas en el

espacio y Euler regresivo para el tiempo. No obstante, sólo se consideró una malla estática respecto al tiempo.

En este proyecto de tesis se extiende la idea de las reconstrucciones elípticas para deducir estimadores de error a posteriori para las formulaciones completamente mixtas de los problemas de Stokes y de Stokes-Darcy evolutivos, siguiendo la idea desarrollada en [20]. Ésta consiste en analizar primero el esquema semi-discreto, el cual fija un tiempo y discretiza el espacio, y posteriormente se trabaja con el esquema completamente discreto, esto es, se discretiza el intervalo temporal. La ventaja de esto es que para el esquema completamente discreto se obtiene de manera muy simple la contribución estacionaria del error gracias a lo hecho en el esquema semi-discreto. Finalmente, usando la desigualdad triangular se obtiene el error final, y los estimadores pueden ser expresados en términos de las condiciones iniciales, del error producido por los cambios de malla y aproximaciones temporales, de los estimadores de los problemas elípticos asociados y la versión temporal de estos estimadores elípticos.

La tesis se organiza como sigue: En el Capítulo 2 se establecen y definen ambos problemas modelos y las definiciones con las que se trabajarán en los capítulos posteriores. En el Capítulo 3 se realiza el análisis de error a posteriori para ambos problemas en el caso semi-discreto y en el Capítulo 4 se realiza el análisis de error a posteriori respectivo para sus esquemas completamente discretos.

1.2. Notación

Se termina este capítulo introduciendo las notaciones esenciales que se usarán a lo largo de esta tesis. En lo que sigue, $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ se entenderá como el espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con entradas reales, $\mathbf{I} := (\delta_{ij})$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, y dados $\boldsymbol{\tau} := (\tau_{ij})$, $\boldsymbol{\eta} := (\eta_{ij})$ de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, escribimos

$$\boldsymbol{\tau}^t := (\tau_{ji}), \quad \text{tr } \boldsymbol{\tau} := \sum_{i=1}^2 \tau_{ii}, \quad \boldsymbol{\tau}^d := \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{2} \text{tr } \boldsymbol{\tau} \mathbf{I}, \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta} := \sum_{i,j=1}^2 \tau_{ij} \eta_{ij},$$

que corresponden, respectivamente, a la transpuesta, la traza y el desviador de un tensor $\boldsymbol{\tau}$, y al producto tensorial entre $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\eta}$. A su vez, en lo que sigue utilizaremos la terminología simplificada estándar para los espacios de Sobolev y las normas. En particular, si \mathcal{O} es un dominio, \mathcal{S} una curva Lipschitz y $r \in \mathbb{R}$ definimos:

$$\mathbf{H}^r(\mathcal{O}) := [H^r(\mathcal{O})]^2, \quad \mathbb{H}^r(\mathcal{O}) := [H^r(\mathcal{O})]^{2 \times 2}, \quad \mathbf{H}^r(\mathcal{S}) := [H^r(\mathcal{S})]^2.$$

Sin embargo, cuando $r = 0$, se escribe usualmente $\mathbf{L}^2(\mathcal{O})$, $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$ y $\mathbf{L}^2(\mathcal{S})$ en vez de $\mathbf{H}^0(\mathcal{O})$, $\mathbb{H}^0(\mathcal{O})$ y $\mathbf{H}^0(\mathcal{S})$ respectivamente. Las normas correspondientes de estos espacios se denotan por $\|\cdot\|_{r,\mathcal{O}}$ (para $H^r(\mathcal{O})$, $\mathbf{H}^r(\mathcal{O})$ y $\mathbb{H}^r(\mathcal{O})$) y $\|\cdot\|_{r,\mathcal{S}}$ (para $H^r(\mathcal{S})$, $\mathbf{H}^r(\mathcal{S})$ y $\mathbb{H}^r(\mathcal{S})$). En general, dado un espacio de Hilbert H , se usa \mathbf{H} y \mathbb{H} para denotar a $[H]^2$ y $[H]^{2 \times 2}$ respectivamente. Además, se usa $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}}$ para denotar la paridad dual entre $H^{-1/2}(\mathcal{S})$ y $H^{1/2}(\mathcal{S})$, y entre $\mathbf{H}^{-1/2}(\mathcal{S})$ y $\mathbf{H}^{1/2}(\mathcal{S})$. Además, denotando por div al operador de divergencia usual, se tiene el espacio de Hilbert

$$\mathbf{H}(\text{div}; \mathcal{O}) := \{\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O}) : \text{div } \mathbf{w} \in L^2(\mathcal{O})\},$$

el cual aparece en el contexto de los problemas mixtos (cf. [5], [15]). El espacio de las funciones matricialmente valuadas cuyas filas pertenecen a $\mathbf{H}(\text{div}; \mathcal{O})$ se denota por $\mathbb{H}(\mathbf{div}; \mathcal{O})$, donde \mathbf{div} se entiende como la acción del operador divergencia en cada fila del tensor. Las normas en estos espacios se denotará indistintamente por $\|\cdot\|_{\text{div},\mathcal{O}}$. Notar que si $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \mathcal{O})$, entonces $\mathbf{div } \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O})$. Finalmente, usaremos $\mathbf{0}$ para denotar cualquier vector genérico nulo, incluyendo los funcionales y operadores nulos.

Finalmente, a lo largo de esta tesis, dado un intervalo temporal $[0, T]$ con $T > 0$, al tomar un valor fijo pero arbitrario $t \in [0, T]$, se asume que se está tomando en todo el intervalo salvo un subconjunto de medida nula, es decir, se omite por razones prácticas el enunciado “para casi todo” $t \in [0, T]$, asumiendo que siempre se está tomando de esta manera.

Capítulo 2

Los problemas modelo

2.1. El problema de Stokes evolutivo

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, acotado y simplemente conexo con frontera de Lipschitz continua Γ , con vector normal exterior $\boldsymbol{\nu}$ y sea $T > 0$. El problema de Stokes evolutivo consiste en hallar un campo de velocidades $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ y un campo de presiones $p : [0, T] \rightarrow L_0^2(\Omega)$ tal que para cada $t \in [0, T]$, se cumpla:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} - \mu\Delta\mathbf{u}(t) + \nabla p(t) &= \mathbf{f}(t) && \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}(t) &= 0 && \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u}(t) &= 0 && \text{sobre } \Gamma, \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 && \text{en } \Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $\mu > 0$ es la viscosidad cinemática del fluido, $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ denotan la fuerza externa y la velocidad inicial, respectivamente. Para cada $t \in [0, T]$, se introduce el tensor de deformación

$$\boldsymbol{\sigma}(t) := \mu\nabla\mathbf{u}(t) - p(t)\mathbf{I}.$$

Así, se tiene que (2.1) puede re-escribirse como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \mu\nabla\mathbf{u}(t) - p(t)\mathbf{I} && \text{en } \Omega, \\ \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathbf{f}(t) && \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}(t) &= 0 && \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u}(t) &= 0 && \text{sobre } \Gamma, \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) &= \mathbf{u}_0 && \text{en } \Omega. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1.1. Formulación completamente mixta

Notando que la primera y la tercera ecuación de (2.2) son equivalentes a

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mu \nabla \mathbf{u}(t) - p(t) \mathbf{I} \quad \text{y} \quad p(t) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}(t) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

y usando este hecho para eliminar la presión, se obtiene que (2.2) se reduce a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^d(t) &= \mu \nabla \mathbf{u}(t) && \text{en } \Omega, \\ \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} - \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathbf{f}(t) && \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u}(t) &= 0 && \text{sobre } \Gamma, \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) &= \mathbf{u}_0 && \text{en } \Omega. \end{aligned} \tag{2.3}$$

En lo que sigue, se asume que (2.3) admite una única solución débil

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in L^2(0, T; \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega)) \times L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)),$$

donde

$$\mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega) := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega) : \int_{\Omega} \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau} = 0 \right\}.$$

De aquí en adelante se define $H_0 := \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega)$ y $Q := \mathbf{L}^2(\Omega)$. La formulación variacional de (2.3) se lee como sigue: Para $t \in [0, T]$, hallar $(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{u}(t)) \in H_0 \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}(t)) &= F(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0, \\ - \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} \cdot \mathbf{v} + b(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{v}) &= G(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in Q, \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde, para cada $t \in [0, T]$, $a : H_0 \times H_0 \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : H_0 \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ son formas bilineales continuas definidas por

$$a(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^d(t) : \boldsymbol{\tau}^d$$

y

$$b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}(t)) := \int_{\Omega} \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau}.$$

A su vez, los funcionales $F : H_0 \rightarrow \mathbb{R}$ y $G : Q \rightarrow \mathbb{R}$ se definen como

$$F(\boldsymbol{\tau}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0$$

y

$$G(\mathbf{v}) := - \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in Q.$$

Por otro lado, en este contexto, se tiene el siguiente resultado, útil para obtener algunas estimaciones deseadas:

Lema 2.1 *Existe $C_1 > 0$, que depende sólo de Ω , tal que*

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega}^2 \leq C_1 \left\{ \|\boldsymbol{\tau}^d\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{div} \boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega}^2 \right\} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0 \quad (2.5)$$

Demostración: cf. [21]. ■

Sean $\{H_{0,h}\}_{h>0} \subseteq H_0$ y $\{Q_h\}_{h>0} \subseteq Q$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H_0 y Q , respectivamente. El esquema de Galerkin de (2.4) se formula como: para cada $t \in [0, T]$, hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h(t), \mathbf{u}_h(t)) \in H_{0,h} \times Q_h$ tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}_h(t), \boldsymbol{\tau}_h) + b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}_h(t)) &= F(\boldsymbol{\tau}_h) \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in H_{0,h}, \\ - \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}_h(t)}{dt} \cdot \mathbf{v}_h + b(\boldsymbol{\sigma}_h(t), \mathbf{v}_h) &= G(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in Q_h, \\ \mathbf{u}_h(0) &= \mathcal{P}_h \mathbf{u}_0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde $\mathcal{P}_h : Q \rightarrow Q_h$ es el proyector ortogonal, esto es, dado $\mathbf{w} \in Q$, \mathcal{P}_h está caracterizado por la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\int_{\Omega} \mathcal{P}_h(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}_h = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in Q_h.$$

Finalmente, sea $|\cdot|_{a,1}$ la seminorma inducida por la forma bilineal a , esto es,

$$|\boldsymbol{\tau}|_{a,1} := a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})^{1/2} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0.$$

2.2. El problema de Stokes-Darcy evolutivo

El problema de Stokes-Darcy evolutivo consiste en un fluido viscoso incompresible ocupando una región $\Omega_S \subset \mathbb{R}^2$ que fluye desde un medio poroso que vive en otra región Ω_D a través de una interfaz común $\Sigma = \partial\Omega_D$, la cual se asume como Lipschitz continua. La parte restante de la frontera de Ω_S , Γ_S , también se asume que es Lipschitz continua. Para efectos prácticos asumimos que Γ_S y Σ son curvas poligonales. El vector normal unitario \mathbf{n} sobre las

fronteras es escogido de modo que apunta hacia afuera de Ω_S (y por lo tanto apunta hacia adentro de Ω_D cuando se mira sobre Σ). Sobre Σ además se considera un vector unitario tangente \mathbf{t} en cualquier orientación fija de esta curva cerrada (mirar Figura 2.1 abajo)

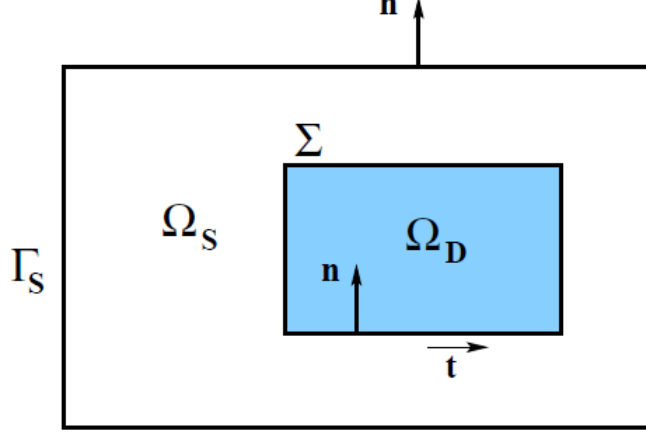


Figura 2.1: Geometría del problema de Stokes-Darcy

Sea $t \in [0, T]$. Las ecuaciones en Ω_S son las del problema de Stokes, las que son escritas en la formulación velocidad-presión-pseudoesfuerzo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_S(t) &= \nu \nabla \mathbf{u}_S(t) - p_S(t) \mathbf{I} \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{u}_S(t)}{dt} - \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_S(t)) = \mathbf{f}_S(t) \quad \text{en } \Omega_S, \\ \mathbf{div}(\mathbf{u}_S(t)) &= 0 \quad \text{en } \Omega_S, \quad \mathbf{u}_S(t) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_S, \\ \mathbf{u}_S(0) &= \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega_S, \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde $\nu > 0$ es la viscosidad del fluido, $T > 0$ y para cada $t \in [0, T]$, $\mathbf{u}_S(t)$ es la velocidad del fluido, $p_S(t)$ es la presión y $\boldsymbol{\sigma}_S(t)$ es el tensor pseudoesfuerzo. Los datos $\mathbf{f}_S(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega_S)$ y $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega_S)$ son la fuerza externa y la velocidad inicial en el dominio de Stokes respectivamente.

Por otra parte, las ecuaciones de flujo en Ω_D son las del modelo linealizado de Darcy:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_D(t) &= -\mathbf{K} \nabla p_D(t) \quad , \quad \frac{dp_D(t)}{dt} - \mathbf{div}(\mathbf{u}_D(t)) = f_D(t) \quad \text{en } \Omega_D, \\ p_D(0) &= p_0 \quad \text{en } \Omega_D, \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde para cada $t \in [0, T]$, las incógnitas son la presión $p_D(t)$ y el flujo $\mathbf{u}_D(t)$. Además, el término fuente $f_D(t) \in L^2(\Omega_D)$ satisface $\int_{\Omega_D} f_D(t) = 0$ y $p_0 \in L^2_0(\Omega_D)$ es la condición inicial para la presión en Ω_D . La función matricial \mathbf{K} , la cual describe la permeabilidad de

Ω_D dividida por la viscosidad ν , es simétrica, sus entradas son $L^\infty(\Omega_D)$ y es uniformemente elíptica. Además asumiremos que \mathbf{K} es suficientemente suave y que existen $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tal que

$$(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v})_D \geq \alpha_1 \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega_D}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega_D) \quad (2.9)$$

y

$$\|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{v}\|_{0, \Omega_D} \leq \alpha_2 \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega_D} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega_D). \quad (2.10)$$

Finalmente, las condiciones de transmisión en Σ están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_S(t) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{u}_D(t) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Sigma \\ \boldsymbol{\sigma}_S(t)\mathbf{n} + \nu\kappa^{-1}(\mathbf{u}_S(t) \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} &= -p_D(t)\mathbf{n} \quad \text{sobre } \Sigma, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $\kappa = \frac{\sqrt{(\nu\mathbf{K}\mathbf{t})\mathbf{t}}}{\alpha}$ es el coeficiente de fricción, y α es un parámetro positivo determinado experimentalmente. La primera ecuación en (2.11) corresponde a la conservación de la masa en Σ , mientras que las componentes normal y tangencial constituyen el balance de fuerzas normales y la ley de Beavers-Joseph-Saffman, respectivamente. A lo largo de esta tesis asumiremos, sin pérdida de generalidad, que κ es una constante positiva.

2.2.1. Formulación completamente mixta

Para $t \in [0, T]$ fijo pero arbitrario, se definen las incógnitas globales

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}(t) := (\boldsymbol{\sigma}_S(t), \mathbf{u}_D(t), \phi(t), \lambda(t))$$

y

$$\underline{\mathbf{u}}(t) := (\mathbf{u}_S(t), p_D(t)),$$

donde $\phi(t)$ y $\lambda(t)$ son las trazas $\phi(t) = -\mathbf{u}_S(t)|_\Sigma$ y $\lambda(t) = p_D(t)|_\Sigma$. Además, siguiendo lo hecho en [12] y [13], donde se analizó el correspondiente problema estacionario, se consideran los siguientes espacios producto:

$$\mathbb{X} = \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega_S) \times \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega_D) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Sigma) \times H^{1/2}(\Sigma)$$

y

$$\mathbb{M} = \mathbf{L}^2(\Omega_S) \times L_0^2(\Omega_D)$$

dotados de las normas producto respectivas, esto es

$$\|\underline{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbb{X}} = \|\boldsymbol{\tau}_S\|_{\text{div}, \Omega_S} + \|\mathbf{v}_D\|_{\text{div}, \Omega_D} + \|\boldsymbol{\psi}\|_{1/2, \Sigma} + \|\boldsymbol{\xi}\|_{1/2, \Sigma} \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} = (\boldsymbol{\tau}_S, \mathbf{v}_D, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{X}$$

y

$$\|\underline{\mathbf{v}}\|_{\mathbb{M}} = \|\mathbf{v}_S\|_{0, \Omega_S} + \|q_D\|_{0, \Omega_D} \quad \forall \underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_S, q_D) \in \mathbb{M}.$$

La formulación completamente mixta del problema de Stokes-Darcy se lee como sigue:

Para $t \in [0, T]$, hallar $(\underline{\boldsymbol{\sigma}}(t), \underline{\mathbf{u}}(t)) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}(t), \underline{\boldsymbol{\tau}}) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{u}}(t)) &= \mathcal{F}(\underline{\boldsymbol{\tau}}) \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X}, \\ -\mathcal{D}(\underline{\mathbf{u}}(t), \underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}(t), \underline{\mathbf{v}}) &= \mathcal{G}(\underline{\mathbf{v}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{M}, \\ \underline{\mathbf{u}}(0) &= \underline{\mathbf{u}}_0 := (\mathbf{u}_0, p_0) \in \mathbb{M}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde

$$\mathcal{F}(\underline{\boldsymbol{\tau}}) = 0, \quad \mathcal{G}(\underline{\mathbf{v}}) = -(\mathbf{f}_S(t), \mathbf{v}_S)_S - (f_D(t), q_D)_D,$$

y \mathcal{A} y \mathcal{B} son las formas bilineales acotadas definidas por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}(t), \underline{\boldsymbol{\tau}}) &:= a((\boldsymbol{\sigma}_S(t), \mathbf{u}_D(t)), (\boldsymbol{\tau}_S, \mathbf{v}_D)) + b((\boldsymbol{\tau}_S, \mathbf{v}_D), (\boldsymbol{\phi}(t), \lambda(t))) \\ &\quad + b((\boldsymbol{\sigma}_S(t), \mathbf{u}_S(t)), (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\xi})) - c((\boldsymbol{\phi}(t), \lambda(t)), (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\xi})), \end{aligned} \tag{2.13}$$

con

$$a((\boldsymbol{\sigma}_S(t), \mathbf{u}_D(t)), (\boldsymbol{\tau}_S, \mathbf{v}_D)) := \nu^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_S^d(t), \boldsymbol{\tau}_S^d)_S + (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_D(t), \mathbf{v}_D)_D,$$

$$b((\boldsymbol{\tau}_S, \mathbf{v}_D), (\boldsymbol{\phi}(t), \lambda(t))) := \langle \boldsymbol{\tau}_S \mathbf{n}, \boldsymbol{\phi}(t) \rangle_{\Sigma} - \langle \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n}, \lambda(t) \rangle_{\Sigma},$$

$$c((\boldsymbol{\phi}(t), \lambda(t)), (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\xi})) := \nu \kappa^{-1} \langle \boldsymbol{\phi}(t) \cdot \mathbf{t}, \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{t} \rangle_{\Sigma} + \langle \boldsymbol{\phi}(t) \cdot \mathbf{n}, \boldsymbol{\xi} \rangle_{\Sigma} - \langle \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n}, \lambda(t) \rangle_{\Sigma},$$

$$\mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}(t), \underline{\mathbf{v}}) := (\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_S(t), \mathbf{v}_S)_S - (\mathbf{div} \mathbf{u}_D(t), q_D)_D \tag{2.14}$$

y

$$\mathcal{D}(\underline{\mathbf{u}}(t), \underline{\mathbf{v}}) := \left(\frac{d\underline{\mathbf{u}}_S(t)}{dt}, \underline{\mathbf{v}}_S \right)_S + \left(\frac{dp_D(t)}{dt}, q_D \right)_D. \quad (2.15)$$

De ahora en adelante se usa para cada $\star \in \{S, D\}$ las siguientes notaciones:

$$(u, v)_\star := \int_{\Omega_\star} uv, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\star := \int_{\Omega_\star} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_\star := \int_{\Omega_\star} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}$$

para cada $u, v \in L^2(\Omega_\star)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega_\star)$, y $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{L}^2(\Omega_\star)$, donde $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} = \text{tr}(\boldsymbol{\tau}^t \boldsymbol{\sigma})$.

2.2.2. El esquema de Galerkin

Sean \mathcal{T}_h^S y \mathcal{T}_h^D triangulaciones de los dominios Ω_S y Ω_D respectivamente, formadas por triángulos K de diámetro h_K , y asumamos que \mathcal{T}_h^S y \mathcal{T}_h^D coinciden en Σ , de tal manera que la unión de ellas es una triangulación de $\Omega_S \cup \Sigma \cup \Omega_D$. Para cada $K \in \mathcal{T}_h^S \cup \mathcal{T}_h^D$, consideremos el espacio de Raviart-Thomas local de orden 0, definido como

$$RT_0(K) = \mathbf{P}_0(K) \oplus P(K)\mathbf{x},$$

donde $\mathbf{P}_0(K)$ indica el espacio de polinomios constantes y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Para cada $\star \in \{S, D\}$ se definen los espacios globales

$$\mathbf{H}_h(\Omega_\star) := \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega_\star) : \mathbf{v}_h|_K \in RT_0(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^\star \right\},$$

y

$$L_h(\Omega_\star) := \left\{ q_h : \Omega_\star \rightarrow \mathbb{R} : q_h|_K \in \mathbb{P}_0(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^\star \right\}.$$

Desde ahora, dado un entero no negativo k y un subconjunto S de \mathbb{R}^2 , $P_k(S)$ se entenderá como el espacio de polinomios sobre S de grado menor o igual a k . En lo que sigue, sea Σ_h la partición de Σ que proviene desde \mathcal{T}_h^S (o \mathcal{T}_h^D), y asumamos sin perder generalidad que el número de arcos en Σ_h es par. El caso de un número impar de arcos se puede reducir fácilmente a un número par de arcos (cf. [12]). Así, sea Σ_{2h} una partición de Σ que se forma juntando pares de arcos adyacentes de Σ_h . Notar que como Σ_h proviene de una de las triangulaciones interiores, se tiene que automáticamente es de variación acotada (esto es, el cociente entre las longitudes de los arcos adyacentes es acotada) y por lo tanto, también lo es Σ_{2h} . Usando las notaciones de arriba se definen:

$$\mathbb{H}(\Omega_S) := \{ \boldsymbol{\tau} : \Omega_S \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} : \mathbf{c}^t \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_h(\Omega_S) \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2 \},$$

$$\mathbf{L}_h(\Omega_S) := L_h(\Omega_S) \times L_h(\Omega_S),$$

$$L_{h,0}(\Omega_D) := L_h(\Omega_D) \cap L_0^2(\Omega_D),$$

$$\Xi_h(\Sigma) := \{\xi_h \in C(\Sigma) : \xi_h|_e \in \mathbb{P}_1(e) \ \forall \text{arco } e \in \Sigma_{2h}\},$$

$$\Xi(\Sigma) = \Xi_h(\Sigma) \times \Xi_h(\Sigma),$$

y los espacios producto:

$$\mathbb{X}_h := \mathbb{H}(\Omega_S) \times \mathbf{H}_h(\Omega_D) \times \Xi(\Sigma) \times \Xi_h(\Sigma), \quad \mathbb{M}_h := \mathbf{L}_h(\Omega_S) \times L_{h,0}(\Omega_D).$$

De esta manera, el esquema de Galerkin asociado (2.12) se lee como sigue: Hallar $(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h(t), \underline{\mathbf{u}}_h(t)) \in \mathbb{X}_h \times \mathbb{M}_h$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h(t), \underline{\boldsymbol{\tau}}_h) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}_h, \underline{\mathbf{u}}_h(t)) &= \mathcal{F}(\underline{\boldsymbol{\tau}}_h) \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}}_h \in \mathbb{X}_h, \\ -\mathcal{D}(\underline{\mathbf{u}}_h(t), \underline{\mathbf{v}}_h) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h(t), \underline{\mathbf{v}}_h) &= \mathcal{G}(\underline{\mathbf{v}}_h) \quad \forall \underline{\mathbf{v}}_h \in \mathbb{M}_h, \\ \underline{\mathbf{u}}_h(0) &= \mathbf{P}_h \underline{\mathbf{u}}_0 \in \mathbb{M}_h, \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h(t) := (\boldsymbol{\sigma}_{S,h}(t), \mathbf{u}_{D,h}(t), \phi_h(t), \lambda_h(t)) \in \mathbb{X}_h$, $\underline{\mathbf{u}}_h(t) := (\mathbf{u}_{S,h}(t), p_{D,h}(t)) \in \mathbb{M}_h$ y $\mathbf{P}_h : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}_h$ es el operador definido por

$$\forall (\mathbf{w}, z) \in \mathbb{M} : \quad \mathbf{P}_h(\mathbf{w}, z) := (\mathcal{P}_h^S \mathbf{w}, \mathcal{P}_h^D z),$$

donde $\mathcal{P}_h^S : \mathbf{L}^2(\Omega_S) \rightarrow \mathbf{L}_h(\Omega_S)$ y $\mathcal{P}_h^D : L_0^2(\Omega_D) \rightarrow L_{h,0}(\Omega_D)$ son los proyectores ortogonales, esto es,

$$\int_{\Omega_S} \mathcal{P}_h^S \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{S,h} = \int_{\Omega_S} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{S,h} \quad \forall \mathbf{v}_{S,h} \in \mathbf{L}_h(\Omega_S),$$

$$\int_{\Omega_D} \mathcal{P}_h^D(z) q_{D,h} = \int_{\Omega_D} z q_{D,h} \quad \forall q_{D,h} \in L_{h,0}(\Omega_D).$$

Además, definimos la derivada temporal de los elementos de los espacios producto \mathbb{X} y \mathbb{M} , aplicando la derivada temporal a cada componente, esto es,

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\tau}_S, \mathbf{v}_D, \boldsymbol{\psi}, \xi) := \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{\tau}_S, \frac{d}{dt} \mathbf{v}_D, \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}, \frac{d}{dt} \xi \right) \quad \forall (\boldsymbol{\tau}_S, \mathbf{v}_D, \boldsymbol{\psi}, \xi) \in \mathbb{X},$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_S, q_D) := \left(\frac{d}{dt} \mathbf{v}_S, \frac{d}{dt} q_D \right) \quad \forall (\mathbf{v}_S, q_D) \in \mathbb{M}.$$

Finalmente definimos la seminorma inducida por la forma bilineal \mathcal{A} como sigue:

$$|\underline{\boldsymbol{\tau}}|_{a,2} := \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\boldsymbol{\tau}})^{1/2} \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X}.$$

Capítulo 3

Análisis de error a posteriori de los esquemas semi-discretos

3.1. El problema de Stokes evolutivo

Sean, para cada $t \in [0, T]$, los errores $\mathbf{e}_u(t) = \mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{e}_\sigma(t) = \boldsymbol{\sigma}_h(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)$. Comenzamos esta Sección definiendo dos importantes funcionales llamados *residuos*, los cuales son útiles para obtener las estimaciones de error a posteriori usando la técnica de las reconstrucciones elípticas anunciada en la introducción.

Definición 3.1 *Se definen los residuos \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 como*

$$\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}) := -a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) - b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}_h) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0 \quad (3.1)$$

y

$$\mathcal{R}_2(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}_h(t)}{dt} \cdot \mathbf{v} - b(\boldsymbol{\sigma}_h(t), \mathbf{v}) - G(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in Q. \quad (3.2)$$

Notar que, usando (2.6), se tiene que $\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in H_{0,h}$ y $\mathcal{R}_2(\mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in Q_h$. A su vez, de (2.4) y (2.6) se obtiene

$$\begin{aligned} a(\mathbf{e}_\sigma(t), \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_u(t)) &= -\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0 \\ - \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{e}_u(t)}{dt} \cdot \mathbf{v} + b(\mathbf{e}_\sigma(t), \mathbf{v}) &= -\mathcal{R}_2(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in Q \end{aligned} \quad (3.3)$$

A continuación, se definen las *reconstrucciones elípticas mixtas* $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, las cuales serán de utilidad para obtener las estimaciones de error a posteriori, separando el error como

$$\mathbf{e}_u(t) = (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t) - (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t) \quad (3.4)$$

y

$$\mathbf{e}_\sigma(t) = (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t) - (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(t), \quad (3.5)$$

para cada $t \in [0, T]$.

Definición 3.2 Dado $(\boldsymbol{\sigma}_h(t), \mathbf{u}_h(t)) \in H_{0,h} \times Q_h$ solución de (2.6), para cada $t \in [0, T]$, se definen las reconstrucciones elípticas mixtas $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t))$ como la solución de la siguiente formulación variacional mixta: : Hallar $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega) \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t), \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \hat{\mathbf{u}}(t)) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega) \\ b(\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t), \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \left(\frac{d\mathbf{u}_h(t)}{dt} - \mathbf{f}(t) \right) \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in Q \end{aligned} \quad (3.6)$$

La formulación variacional mixta (3.6) está bien definida en $H_0 \times Q$ (cf. [14, Teorema I.4.1],[5, 8, Chapter 2]) y además, aplicando una simple modificación a los argumentos presentados en [3, Página 147] se obtiene además que $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. El punto clave en el análisis subsiguiente es el hecho que $(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})$ y $(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)$ satisfacen respectivamente, para cada $t \in [0, T]$:

$$(\mathbf{S1}) \begin{cases} a((\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t), \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t)) = 0 & \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0, \\ - \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t) \cdot \mathbf{v} + b((\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t), \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t) \cdot \mathbf{v} & \forall \mathbf{v} \in Q, \end{cases} \quad (3.7)$$

y

$$(\mathbf{S2}) \begin{cases} a((\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(t), \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t)) = \mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}) & \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0, \\ b((\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(t), \mathbf{v}) = \mathcal{R}_2(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in Q, \end{cases} \quad (3.8)$$

Notar que (S1) es un problema evolutivo mixto y (S2) es un problema estacionario mixto los cuales definen las dos componentes que contribuyen al error $(\mathbf{e}_\sigma(t), \mathbf{e}_u(t))$.

3.1.1. Primera contribución: $(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})$

El propósito de esta Subsección es establecer estimaciones a posteriori deseables para $\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$ y $\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}$. Comenzamos con el siguiente resultado, el cual establece estimaciones para $\|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t)\|_{0,\Omega}$ y $\int_0^t \|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)\|_{a,1}^2 ds$.

Lema 3.1 Sea $\mathcal{H}_1 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$\mathcal{H}_1(t) := \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t)\|_{0,\Omega}^2 + 2 \int_0^t |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)|_{a,1}^2 ds.$$

Entonces, existe $C_2 > 0$ tal que la siguiente desigualdad se cumple para $t \in [0, T]$:

$$\mathcal{H}_1(t) \leq C_2 \left\{ \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right\}. \quad (3.9)$$

Demostración: Se adoptará una técnica similar a la usada en [20, Lema 2.3]. Tomando para cada $s \in [0, T]$, $\boldsymbol{\tau} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(s) - \boldsymbol{\sigma}(s)$ y $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{u}}(s) - \mathbf{u}(s)$ en **(S1)** (cf. (3.7)) y restando ambas ecuaciones se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s)\|_{0,\Omega}^2 + |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)|_{a,1}^2 = \int_{\Omega} \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s), \quad (3.10)$$

de donde, integrando con respecto a s en $[0, t]$, $0 < t \leq T$, y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se llega a

$$\begin{aligned} & \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t)\|_{0,\Omega}^2 + 2 \int_0^t |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)|_{a,1}^2 ds \\ & \leq \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega}^2 + 2 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega} \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s)\|_{0,\Omega} ds. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por otra parte, sea $t^* \in [0, t]$, con $0 < t \leq T$, tal que

$$\mathcal{H}_1(t^*) := \max_{s \in [0, t]} \mathcal{H}_1(s),$$

y observando que

$$\|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s)\|_{0,\Omega} \leq \mathcal{H}_1^{1/2}(t^*) \quad \forall s \in [0, t]. \quad (3.12)$$

Ahora, para $t = t^*$, usando (3.12), se tiene que (3.11) implica

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(t) & \leq \left(\|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega} + 2 \int_0^{t^*} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega} ds \right) \mathcal{H}_1^{1/2}(t^*) \\ & \leq \left(\|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega} + 2 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega} ds \right) \mathcal{H}_1^{1/2}(t^*), \end{aligned}$$

Y luego, como $t^* \in [0, t]$, se llega a

$$\mathcal{H}_1^{1/2}(t) \leq \mathcal{H}_1^{1/2}(t^*) \leq \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega} + 2 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega} ds.$$

Así, elevando al cuadrado y escogiendo $C_2 := \max\{2, 4t\} > 0$, se obtiene (3.9). ■

El siguiente resultado nos dará una cota para $|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t)|_{a,1}$:

Lema 3.2 *Para cada $t \in [0, T]$ se tiene:*

$$\begin{aligned} |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t)|_{a,1}^2 + \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \\ \leq |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(0)|_{a,1}^2 + \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Demostración: Derivando la primera ecuación de **(S1)** (ec. (3.7)) con respecto a t , obtenemos

$$a \left(\frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t), \boldsymbol{\tau} \right) + b \left(\boldsymbol{\tau}, \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t) \right) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0. \quad (3.14)$$

Tomando $\boldsymbol{\tau} = (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t)$ en (3.14), $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t)$ en la segunda ecuación de **(S1)** (cf. (3.7)) y restando ambas expresiones se obtiene para cada $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t)|_{a,1}^2 + \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t) \right\|_{0,\Omega}^2 \\ = \int_{\Omega} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t) \right\|_{0,\Omega} \cdot \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t) \right\|_{0,\Omega} dx \end{aligned} \quad (3.15)$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en (3.15) e integrando de 0 a t se llega a

$$\begin{aligned} |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t)|_{a,1}^2 + 2 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \\ \leq |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(0)|_{a,1}^2 + 2 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s) \right\|_{0,\Omega} ds. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ahora, usando la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$ para $a, b \geq 0$ en el último sumando del lado derecho de (3.16) y simplificando términos semejantes se llega a (3.13). ■

Se observa que del lado derecho de (3.9) y (3.13) que aún falta por estimar la expresión:

$$\int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds,$$

la cual será estimada en la siguiente Sección (segunda contribución del error).

Por otro lado, para acotar $\int_0^t \|\mathbf{div}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)\|_{\text{div},\Omega}^2 ds$, primero se debe estimar $\int_0^t \|\mathbf{div}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)\|_{0,\Omega}^2 ds$. Al respecto, tenemos el siguiente Lema:

Lema 3.3 *Para cada $t \in [0, T]$ se tiene:*

$$\int_0^t \|\mathbf{div}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)\|_{0,\Omega}^2 ds \leq 2|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(0)|_{a,1}^2 + 4 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \quad (3.17)$$

Demostración: De la segunda ecuación de **(S1)** (cf. (3.7)) se tiene que

$$\mathbf{div}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t) = \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t) - \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t),$$

y por lo tanto

$$\|\mathbf{div}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t)\|_{0,\Omega} \leq \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t) \right\|_{0,\Omega} + \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t) \right\|_{0,\Omega}, \quad (3.18)$$

lo cual implica, usando la monotonía de la integral y (3.13), que:

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\mathbf{div}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)\|_{0,\Omega}^2 ds &\leq 2 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + 2 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \\ &\leq 2 \left\{ |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(0)|_{a,1}^2 + \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right\} + 2 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \\ &= 2|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(0)|_{a,1}^2 + 4 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds, \end{aligned} \quad (3.19)$$

concluyendo así la prueba. ■

Ahora estamos listos para establecer una estimación para $\int_0^t \|\mathbf{div}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)\|_{\text{div},\Omega}^2 ds$.

Teorema 3.1 *Existe $C_3 > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)\|_{\text{div};\Omega}^2 ds \\
& \leq C_3 \left\{ \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega}^2 + |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(0)|_{a,1}^2 + \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right\}. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Demostración: Aplicando los lemas 2.1 (cf. (2.5)), 3.1 (cf. (3.9)) y 3.3 (cf. (3.17)) y notando que $\|\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega}^2 = \mu|\boldsymbol{\tau}|_{a,1}^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0$, se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)\|_{\text{div};\Omega}^2 ds \\
& \leq C_1\mu \int_0^t |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)|_{a,1}^2 ds + (C_1 + 1) \int_0^t \|\mathbf{div}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)\|_{0,\Omega}^2 ds \\
& \leq C_1\mu C_2 \left\{ \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right\} \\
& \quad + (C_1 + 1) \left\{ 2|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(0)|_{a,1}^2 + 4 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, agrupando términos semejantes y escogiendo $C_3 := \max\{C_1C_2\mu, C_1C_2\mu + 4(C_1 + 1), 2(C_1 + 1)\} > 0$, concluimos la demostración. ■

Nuevamente notamos que nos queda por estimar la expresión

$$\int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds,$$

la cual será estimada en la siguiente Sección.

Finalmente, tenemos una cota para $\int_0^t \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s)\|_{0,\Omega}^2 ds$.

Lema 3.4 *Se tiene para cada $t \in [0, T]$ que*

$$\int_0^t \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s)\|_{0,\Omega}^2 ds \leq 2 \left\{ t\|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s)\|_{0,\Omega}^2 ds \right\}. \tag{3.21}$$

Demostración: Se sigue directamente de [20, Remark 2.1]. ■

La expresión $\int_0^t \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s)\|_{0,\Omega}^2 ds$, será estimada también en la próxima Sección.

3.1.2. Segunda contribución: $(\hat{\sigma} - \sigma_h, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)$

Comenzamos esta Subsección introduciendo varias notaciones. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de triangulaciones regulares de $\bar{\Omega}$, compuesta por triángulos K de diámetro h_K tal que $\bar{\Omega} = \cup\{K : K \in \mathcal{T}_h\}$ y sea $h := \max\{h_K : K \in \mathcal{T}_h\}$. Dado un entero $k \geq 0$ y un subconjunto S de \mathbb{R}^2 , sea $P_k(S)$ y $\hat{P}_k(S)$ los espacios de polinomios de grado a lo más k en S y exactamente k en S , respectivamente. Se define el espacio de Raviart-Thomas local de orden k como

$$\mathbb{RT}_k(K) := \mathbf{P}_k(K) \oplus \hat{P}_k(K)\mathbf{x} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ es un vector genérico. Se define el espacio global $\mathbb{RT}_k(\mathcal{T}_h)$ como

$$\mathbb{RT}_k(\mathcal{T}_h) = \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}, \Omega) : (\tau_{i1}, \tau_{i2})^t \in \mathbb{RT}_k(K), \forall i \in \{1, 2\}, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

De esta manera, podemos definir el correspondiente subespacio de elementos finitos de H_0 como:

$$H_{0,h} := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{RT}_k(\mathcal{T}_h) : \int_{\Omega} \text{tr } \boldsymbol{\tau} = 0 \right\},$$

y sea $Q_h \subseteq Q$ definido como

$$Q_h := \left\{ v_h \in Q : v_h|_K \in [\mathbb{P}_k(K)]^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Sea $\Pi_h^k : \mathbb{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{RT}_k(\mathcal{T}_h)$ el operador de equilibrio usual (cf. [21]), el cual, dado $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, se caracteriza a través de las siguientes identidades:

$$\int_e \Pi_h^k \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r} ds = \int_e \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r} ds \quad \forall \text{lado } e \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \mathbf{r} \in [\mathbb{P}_k(e)]^2. \quad \text{cuando } k \geq 0, \quad (3.22)$$

y

$$\int_K \Pi_h^k \boldsymbol{\tau} : \mathbf{r} ds = \int_K \boldsymbol{\tau} : \mathbf{r} ds \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \mathbf{r} \in [\mathbb{P}_{k-1}(K)]^{2 \times 2}. \quad \text{cuando } k \geq 1. \quad (3.23)$$

Es fácil ver, usando (3.22) y (3.23), que

$$\mathbf{div} \Pi_h^k \boldsymbol{\tau} = \mathcal{P}_h^k \mathbf{div} \boldsymbol{\tau},$$

donde $\mathcal{P}_h^k : Q \rightarrow Q_h$ es el proyector ortogonal sobre el espacio de funciones polinomiales a trozos de grado menor o igual a k . Es bien conocido (cf. [7]) el hecho que para $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^m(\Omega)$, con $1 \leq m \leq k + 1$, se cumple

$$\|\mathbf{v} - \mathcal{P}_h^k \mathbf{v}\|_{0,K} \leq C h_K^m |\mathbf{v}|_{m,K} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (3.24)$$

A su vez, se puede extender este resultado a todo Ω , con $m = 1$ como

$$\|\mathbf{v} - \mathcal{P}_h^k \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq C h |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \quad \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (3.25)$$

Además, se tienen las siguientes propiedades de aproximación (cf. [21]):

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K^k \boldsymbol{\tau}\|_{0,K} \leq C h_K^m |\boldsymbol{\tau}|_{m,K} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (3.26)$$

para cada $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}^m(\Omega)$, con $1 \leq m \leq k + 1$, y

$$\|\boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu} - \Pi_h^k \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}\|_{0,e} \leq C h_e^{1/2} \|\boldsymbol{\tau}\|_{1,K_e} \quad \forall \text{arco } e \in \mathcal{T}_h, \quad (3.27)$$

para cada $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, donde $K_e \in \mathcal{T}_h$ contiene e en su frontera. Por otra parte, se tiene además que (cf. [10, Teorema 3.16]) Π_h^k puede definirse como un operador lineal y acotado desde el espacio $\mathbb{H}^\delta(\Omega) \cap \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega)$ hacia $H_{0,h}$ para todo $\delta \in (0, 1]$, y tal que en este caso se satisface la siguiente estimación

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^k \boldsymbol{\tau}\|_{0,K} \leq C h_K^\delta \{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{\delta,K} + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,K} \} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (3.28)$$

Por otra parte, consideraremos \mathcal{E}_h como el conjunto de todos los arcos de la triangulación \mathcal{T}_h , y dado $K \in \mathcal{T}_h$, definimos $\mathcal{E}(K)$ como el conjunto de todos sus lados. Así, podemos escribir $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h(\Omega) \cup \mathcal{E}_h(\Gamma)$, donde $\mathcal{E}_h(\Omega) := \{e \in \mathcal{E}_h : e \subseteq \Omega\}$ y $\mathcal{E}_h(\Gamma) := \{e \in \mathcal{E}_h : e \subseteq \Gamma\}$. En lo que sigue, h_e se entenderá como el largo de e . A su vez, para cada arco $e \in \mathcal{E}_h$, fijamos un vector normal unitario $\boldsymbol{\nu}_e = (\nu_1, \nu_2)^t$, y mientras no exista confusión, simplemente lo denotaremos por $\boldsymbol{\nu}$ en vez $\boldsymbol{\nu}_e$. Dado $e \in \mathcal{E}_h$, definimos $\mathbf{t}_e := -(\nu_2, \nu_1)^t$ el correspondiente vector unitario tangente a e . Así, dado $e \in \mathcal{E}_h(\Omega)$ y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, tal que $\boldsymbol{\tau}|_K \in [C(K)]^{2 \times 2}$ en cada $K \in \mathcal{T}_h$, sea $[\boldsymbol{\tau} \mathbf{s}_e]$ el correspondiente salto sobre e , esto es, $[\boldsymbol{\tau} \mathbf{s}_e] := (\boldsymbol{\tau}|_K - \boldsymbol{\tau}|_{K'})|_e \mathbf{s}_e$, donde K y K' son triángulos de \mathcal{T}_h que tienen a e como lado común. Haciendo abuso de notación, cuando $e \in \mathcal{E}_h(\Gamma)$, también escribiremos $[\boldsymbol{\tau} \mathbf{s}_e] := \boldsymbol{\tau}|_e \mathbf{s}_e$. Usaremos definiciones similares para los saltos tangenciales de campos escalares $v \in L^2(\Omega)$ tal que $v_K \in C(K)$ en cada $K \in \mathcal{T}_h$. Mientras no haya confusión, simplemente escribiremos \mathbf{s} en vez de \mathbf{s}_e . Dados un campo escalar, vectorial y tensorial v , $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2)$ y $\boldsymbol{\tau} := (\tau_{ij})$ respectivamente,

definimos

$$\operatorname{curl}(v) := \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial v}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \quad \underline{\operatorname{curl}}\phi = \begin{pmatrix} \operatorname{curl}(\phi_1)^t \\ \operatorname{curl}(\phi_2)^t \end{pmatrix}, \quad \text{and } \mathbf{rot}(\boldsymbol{\tau}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Usamos la siguiente notación para el estimador de error para la contribución estacionaria:

$$\Theta_1(t) := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \theta_K^2(t) \right)^{1/2}, \quad (3.30)$$

donde, para cada $K \in \mathcal{T}_h$ y para cada $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \theta_K^2(t) &:= \left\| \frac{d\mathbf{u}_h(t)}{dt} - \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h(t)) - \mathbf{f}(t) \right\|_{0,K}^2 + h_K^2 \left\| \mathbf{rot} \left\{ \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\sigma}_h^d(t) \right\} \right\|_{0,K}^2 \\ &+ h_K^2 \left\| \nabla \mathbf{u}_h(t) - \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\sigma}_h^d(t) \right\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Omega)} h_e \left\| \left[\frac{1}{\mu} \boldsymbol{\sigma}_h^d(t) \mathbf{s} \right] \right\|_{0,e}^2 \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Gamma)} h_e \left\| \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\sigma}_h^d(t) \mathbf{s} \right\|_{0,e}^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

A su vez definimos el siguiente estimador de error, el cual se usará para estimar la derivada temporal de la velocidad:

$$\tilde{\Theta}_1(t) := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \partial_t \theta_K^2(t) \right)^{1/2}, \quad (3.32)$$

donde, para cada $K \in \mathcal{T}_h$ y para cada $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \partial_t \theta_K^2(t) &:= \left\| \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}_h(t) - \mathbf{div} \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_h(t) \right) - \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} \right\|_{0,K}^2 + h_K^2 \left\| \mathbf{rot} \left\{ \frac{1}{\mu} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_h^d(t) \right\} \right\|_{0,K}^2 \\ &+ h_K^2 \left\| \nabla \left\{ \frac{d}{dt} \mathbf{u}_h(t) \right\} - \frac{1}{\mu} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_h^d(t) \right\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Omega)} h_e \left\| \left[\frac{1}{\mu} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_h^d(t) \mathbf{s} \right] \right\|_{0,e}^2 \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Gamma)} h_e \left\| \frac{1}{\mu} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_h^d(t) \mathbf{s} \right\|_{0,e}^2. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Con el fin de obtener las estimaciones de error para la segunda contribución, debemos establecer un resultado que se sigue del análisis de error a posteriori del problema estacionario de Stokes. La formulación variacional mixta del problema estacionario de Stokes es: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in H_0 \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0 \\ b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) &= - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in Q. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Es sabido que este problema está bien definido y además que la solución depende continuamente de los datos. En (cf. [11, Teorema 2.1]) se encuentran mayores detalles. Se tienen los dos siguientes resultados técnicos, uno ya anunciado, donde debemos usar la dependencia continua de la solución del problema estacionario, y el otro permitirá establecer la estimación deseada para la segunda contribución.

Lema 3.5 Sean $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) \in H_0 \times Q$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h(t), \mathbf{u}_h(t)) \in H_{0,h} \times Q_h$ las soluciones únicas de (3.6) y (2.6) respectivamente y sea \mathcal{R}_1 el residuo definido en (3.1). Entonces, existe $C > 0$, independiente de h , tal que para todo $t \in [0, T]$ se cumple

$$\begin{aligned} C \|((\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(t), (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t))\|_{H_0 \times Q} \\ \leq \sup_{\boldsymbol{\tau} \in H_0 \setminus \{\theta\}} \frac{\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\text{div}, \Omega}} + \left\| \frac{d\mathbf{u}_h(t)}{dt} - \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_h(t) - \mathbf{f}(t) \right\|_{0, \Omega} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Demostración: Notamos que, pasando la derivada temporal al lado derecho en la segunda ecuación de (2.6), este sistema se puede ver como el esquema de Galerkin asociado a (3.6), por lo tanto el resultado se tiene de manera trivial siguiendo lo desarrollado en [11, Lema 4.1]. ■

Lema 3.6 Existe $C > 0$, independiente de h , tal que

$$|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau})| \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \theta_{1,K}^2(t) + \theta_{2,K}^2(t) \right)^{1/2} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\text{div}, \Omega} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0,$$

donde, para todo $K \in \mathcal{T}_h$ y para cada $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
\theta_{1,K}^2(t) &= h_K^2 \left\| \mathbf{rot} \left\{ \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\sigma}_h^d(t) \right\} \right\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Omega)} h_e \left\| \left[\frac{1}{\mu} \boldsymbol{\sigma}_h^d(t) \mathbf{s} \right] \right\|_{0,e}^2 \\
&+ \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Gamma)} h_e \left\| \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\sigma}_h^d(t) \mathbf{s} \right\|_{0,e}^2
\end{aligned} \tag{3.36}$$

y

$$\theta_{2,K}^2(t) = h_K^2 \left\| \nabla \mathbf{u}_h(t) - \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\sigma}_h^d(t) \right\|_{0,K}^2 \tag{3.37}$$

Demostración: Se sigue directamente de [11, Lemas 4.3, 4.4]. ■

Finalmente tenemos la estimación de error para la segunda contribución, que se sigue trivialmente de los lemas 3.5 y 3.6:

Teorema 3.2 Sean $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) \in H_0 \times Q$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h(t), \mathbf{u}_h(t)) \in H_{0,h} \times Q_h$ las soluciones únicas de (3.6) y (2.6) respectivamente. Entonces, existe $C_4 > 0$, independiente de h , tal que

$$\|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(t), (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t)\|_{H_0 \times Q} \leq C_4 \Theta_1(t) \tag{3.38}$$

3.1.3. Estimaciones para $\left\| \frac{d(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t)}{dt} \right\|_{0,\Omega}$

Del análisis de la primera contribución, en la Subsección 3.1.1, específicamente en las expresiones (3.9), (3.13) y (3.20), es claro que aún nos falta estimar $\int_0^t \left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds$. Notar que en las formulaciones variacionales mixtas, se testea a través de las funciones $\boldsymbol{\tau} \in H_0$ y $\mathbf{v} \in Q$ y por lo tanto estas funciones no deberían ser afectadas por las derivadas temporales si es que derivamos ambas ecuaciones de la formulación variacional mixta. De esta manera, derivando ambas ecuaciones de **(S2)**(cf. (3.8)) respecto a t , obtenemos

$$\begin{aligned}
a \left(\frac{d}{dt} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(t), \boldsymbol{\tau} \right) + b \left(\boldsymbol{\tau}, \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t) \right) &= \mathcal{R}_{1,t}(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0 \\
b \left(\frac{d}{dt} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(t), \mathbf{v} \right) &= \mathcal{R}_{2,t}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in Q,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

donde

$$\mathcal{R}_{1,t}(\boldsymbol{\tau}) := \frac{d}{dt} \mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}) = -\frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \frac{d\boldsymbol{\sigma}_h^d(t)}{dt} : \boldsymbol{\tau}^d - \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}_h(t)}{dt} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0$$

y

$$\mathcal{R}_{2,t}(\mathbf{v}) := \frac{d}{dt} \mathcal{R}_2(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left(\frac{d^2 \mathbf{u}_h(t)}{dt^2} - \mathbf{div} \left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_h(t)}{dt} \right) - \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} \right) \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in Q.$$

Por lo tanto, para estimar $\left\| \frac{d(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t)}{dt} \right\|_{0,\Omega}$, debemos hacer el mismo análisis hecho en la Subsección anterior, reemplazando los respectivos términos. Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.3 *Existe $C_5 > 0$ tal que*

$$\left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t) \right\|_{0,\Omega} \leq \left\| \left(\frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(t), \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t) \right) \right\|_{H_0 \times Q} \leq C_5 \tilde{\Theta}_1(t), \quad (3.40)$$

Demostración: Basta ver que se sigue directamente de la cota a priori de (3.39). ■

3.1.4. Estimación de error a posteriori para $(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}_h - \mathbf{u})$

Se define $|||(\cdot, \cdot)|||_1 : H_0 \times Q \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ como

$$|||(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})|||_1 := |\boldsymbol{\tau}|_{a,1} + \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in H_0 \times Q.$$

Usando las estimaciones obtenidas en las secciones anteriores, podemos obtener una estimación de error a posteriori del error total. Además, notar que las expresiones

$$\|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(0)\|_{0,\Omega} \quad \text{y} \quad |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(0)|_{a,1}$$

son calculables, pues de (3.38) obtenemos

$$\max \left\{ \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(0)\|_{0,\Omega}, |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(0)|_{a,1} \right\} \leq C_4 \Theta_1(0). \quad (3.41)$$

Las estimaciones de error a posteriori para $(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}_h - \mathbf{u})$ están establecidas en los siguientes dos Teoremas:

Teorema 3.4 *Sean $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in H_0 \times Q$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h(t), \mathbf{u}_h(t)) \in H_{0,h} \times Q_h$ la solución de (2.4) y (2.6) respectivamente. Entonces, existe $C_6 > 0$ independiente de h , tal que para $t \in [0, T]$:*

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \|(\boldsymbol{\sigma}(s), \mathbf{u}(s)) - (\boldsymbol{\sigma}_h(s), \mathbf{u}_h(s))\|_{H_0 \times Q}^2 ds \\
& \leq C_6 \left\{ \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(0)\|_{0,\Omega}^2 + |(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)(0)|_{a,1}^2 + \Theta_1^2(0) + \int_0^t \tilde{\Theta}_1^2(s) ds + \int_0^t \Theta_1^2(s) ds \right\},
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Demostración: Aplicando desigualdad triangular sobre las descomposiciones (3.4) y (3.5), y usando la monotonía de la integral llegamos a

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \|(\boldsymbol{\sigma}(s), \mathbf{u}(s)) - (\boldsymbol{\sigma}_h(s), \mathbf{u}_h(s))\|_{H_0 \times Q}^2 ds \\
& \leq 2 \int_0^t \|((\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s), (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s))\|_{H_0 \times Q}^2 ds \\
& \quad + 2 \int_0^t \|((\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(s), (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s))\|_{H_0 \times Q}^2 ds
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Ahora, nos fijamos sobre el primer sumando del lado derecho de (3.43). Notar que, aplicando las estimaciones (3.20) y (3.21) obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \|((\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s), (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s))\|_{H_0 \times Q}^2 ds \\
& \leq 2 \int_0^t \|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)\|_{div,\Omega}^2 ds + 2 \int_0^t \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s)\|_{0,\Omega}^2 ds \\
& \leq 2C_3 \left\{ \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega}^2 + |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(0)|_{a,1}^2 + \int_0^t \left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right\} \\
& \quad + 4 \left\{ t \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(s)\|_{0,\Omega}^2 ds \right\}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Por otra parte, usando (3.38), el segundo término del lado derecho de (3.43) se puede estimar usando que

$$2 \int_0^t \|((\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(s), (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s))\|_{H_0 \times Q}^2 ds \leq 2 \int_0^t \Theta_1^2(s) ds. \tag{3.45}$$

Así, reemplazando (3.44) y (3.45) en (3.43), y usando la estimación (3.40), las desigualdades

$$\|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega} \leq \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(0)\|_{0,\Omega} + \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(0)\|_{0,\Omega}$$

y

$$|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(0)|_{a,1} \leq |(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)(0)|_{a,1} + |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(0)|_{a,1},$$

con lo cual, junto con (3.41) llegamos a (3.42). ■

Teorema 3.5 Sean $(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{u}(t)) \in H_0 \times Q$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h(t), \mathbf{u}_h(t)) \in H_{0,h} \times Q_h$ las soluciones de (2.4) y (2.6) respectivamente. Entonces, existe $C_7 > 0$ independiente de h tal que para $t \in [0, T]$ se tiene

$$\begin{aligned} & \|\|(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{u}(t)) - (\boldsymbol{\sigma}_h(t), \mathbf{u}_h(t))\|\|_1^2 \\ & \leq C_7 \left\{ \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(0)\|_{0,\Omega}^2 + |(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)(0)|_{a,1}^2 + \Theta_1^2(0) + \int_0^t \tilde{\Theta}_1^2(s) ds + \Theta_1^2(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Demostración: Aplicando desigualdades conocidas, tenemos que

$$\begin{aligned} & \|\|(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{u}(t)) - (\boldsymbol{\sigma}_h(t), \mathbf{u}_h(t))\|\|_1^2 \\ & \leq 2\|\|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t), (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t)\|\|_1^2 + 2\|\|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(t), (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t)\|\|_1^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Usando la definición de $\|\| \cdot \|\|_1$ y las estimaciones (3.13) y (3.9), el primer sumando puede ser acotado como

$$\begin{aligned} & \|\|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t), (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t)\|\|_1^2 \leq 2|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t)|_{a,1}^2 + 2\|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t)\|_{0,\Omega}^2 \\ & \leq 2 \left\{ |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(0)|_{a,1}^2 + \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right\} \\ & + 2C_2 \left\{ \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right\}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Por otra parte, usando (3.38), el segundo término del lado derecho de (3.47) puede ser estimado como sigue

$$\begin{aligned} & \|\|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(t), (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t)\|\|_1^2 \leq 2|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(t)|_{a,1}^2 + \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t)\|_{0,\Omega}^2 \\ & \leq 2\|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(t)\|_{\text{div},\Omega}^2 + 2\|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t)\|_{0,\Omega}^2 \\ & \leq 2\|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h)(t), (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(t)\|_{H_0 \times Q}^2 \\ & \leq 2C_4^2 \Theta_1^2(t). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Insertando (3.48) y (3.49) dentro de (3.47), usando la desigualdad triangular en las condi-

ciones iniciales (3.41), juntando términos semejantes y las notaciones establecidas a lo largo de esta Sección, llegamos a (3.46), concluyendo la demostración. ■

3.2. El problema de Stokes-Darcy evolutivo

En esta Sección omitiremos por conveniencia el argumento temporal “(t)”, siempre y cuando no de lugar a confusión. Todos los resultados de esta Sección son la extensión natural de los resultados de la Sección 3.1. Sean los errores $\underline{\mathbf{e}}_u = \underline{\mathbf{u}}_h - \underline{\mathbf{u}}$ y $\underline{\mathbf{e}}_\sigma = \underline{\boldsymbol{\sigma}}_h - \underline{\boldsymbol{\sigma}}$. Comenzamos definiendo los *residuos* como sigue:

Definición 3.3 *Definimos los residuos \mathcal{R}_3 y \mathcal{R}_4 para el problema de Stokes Darcy, como*

$$\mathcal{R}_3(\underline{\boldsymbol{\tau}}) := -\mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \underline{\boldsymbol{\tau}}) - \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{u}}_h) \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X} \quad (3.50)$$

y

$$\mathcal{R}_4(\underline{\mathbf{v}}) := \mathcal{D}(\underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{v}}) - \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{G}(\underline{\mathbf{v}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{M}. \quad (3.51)$$

Notar que $\mathcal{R}_3(\underline{\boldsymbol{\tau}}_h) = 0 \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}}_h \in \mathbb{X}_h$ y $\mathcal{R}_4(\underline{\mathbf{u}}_h) = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{M}_h$ y que usando (2.12) y (2.16) podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\underline{\mathbf{e}}_\sigma, \underline{\boldsymbol{\tau}}) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{e}}_u) &= -\mathcal{R}_3(\underline{\boldsymbol{\tau}}) \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X}, \\ -\mathcal{D}(\underline{\mathbf{e}}_u, \underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{B}(\underline{\mathbf{e}}_\sigma, \underline{\mathbf{v}}) &= -\mathcal{R}_4(\underline{\mathbf{v}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{M}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Descomponemos los errores como

$$\underline{\mathbf{e}}_u = (\hat{\underline{\mathbf{u}}} - \underline{\mathbf{u}}) - (\hat{\underline{\mathbf{u}}} - \underline{\mathbf{u}}_h)$$

y

$$\underline{\mathbf{e}}_\sigma = (\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}) - (\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}_h),$$

donde $\hat{\underline{\mathbf{u}}} = (\hat{\underline{\mathbf{u}}}_S, \hat{p}_D)$ y $\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_S, \hat{\underline{\mathbf{u}}}_D, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\lambda})$ con $\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\underline{\mathbf{u}}}_S|_\Sigma$ y $\hat{\lambda} = \hat{p}_D|_\Sigma$ son las *reconstrucciones elípticas mixtas* que se definen en este contexto como sigue:

Definición 3.4 *Sea $(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \underline{\mathbf{u}}_h) \in \mathbb{X}_h \times \mathbb{M}_h$ la solución de (2.16). Se definen las reconstrucciones elípticas mixtas $(\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \hat{\underline{\mathbf{u}}}) = ((\hat{\boldsymbol{\sigma}}_S, \hat{\underline{\mathbf{u}}}_D, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\lambda}), (\hat{\underline{\mathbf{u}}}_S, \hat{p}_D)) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M}$ como la solución única de la siguiente formulación variacional mixta*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \underline{\boldsymbol{\tau}}) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\underline{\mathbf{u}}}) &= 0 \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X}, \\ \mathcal{B}(\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \underline{\mathbf{v}}) &= \mathcal{D}(\underline{\mathbf{u}}_h, \underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{G}(\underline{\mathbf{v}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{M}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Aplicando una modificación simple a los argumentos usados en [3, Página 147], podemos obtener que $\hat{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathbb{M}} := \mathbf{H}^1(\Omega_S) \times H^1(\Omega_D)$. Notamos además que las reconstrucciones elípticas mixtas satisfacen los siguientes problemas:

$$(\mathbf{S3}) \begin{cases} \mathcal{A}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{\tau}, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) = 0 & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{X}, \\ -\mathcal{D}((\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}), \mathbf{v}) + \mathcal{B}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = -\mathcal{D}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbb{M}, \end{cases} \quad (3.54)$$

y

$$(\mathbf{S4}) \begin{cases} \mathcal{A}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{\tau}, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h) = \mathcal{R}_3(\boldsymbol{\tau}) & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{X}, \\ \mathcal{B}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{v}) = \mathcal{R}_4(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbb{M}. \end{cases} \quad (3.55)$$

Notar que **(S3)** es un problema evolutivo mixto y **(S4)** es un problema estacionario mixto, las cuales definen las dos componentes que contribuyen al error $(\mathbf{e}_\sigma, \mathbf{e}_u)$.

3.2.1. Primera contribución

Con el fin de obtener estimaciones de error para la primera contribución, primero se debe demostrar el siguiente resultado técnico

Lema 3.7 *La siguiente desigualdad se satisface:*

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \leq \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h) \right\|_{\mathbb{M}} \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{\mathbb{M}} \quad (3.56)$$

Demostración: Usando la definición de \mathcal{D} , la desigualdad de Cauchy-Schwarz sobre los productos internos $(\cdot, \cdot)_S$ y $(\cdot, \cdot)_D$, y después de ello, desigualdad de Cauchy-Schwarz sobre \mathbb{R}^2 obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) &= \left(\frac{d(\hat{\mathbf{u}}_S - \mathbf{u}_{S,h})}{dt}, \hat{\mathbf{u}}_S - \mathbf{u}_S \right)_S + \left(\frac{d(\hat{p}_D - p_{D,h})}{dt}, \hat{p}_D - p_D \right)_D \\ &\leq \left\| \frac{d(\hat{\mathbf{u}}_S - \mathbf{u}_{S,h})}{dt} \right\|_{0, \Omega_S} \|\hat{\mathbf{u}}_S - \mathbf{u}_S\|_{0, \Omega_S} + \left\| \frac{d(\hat{p}_D - p_{D,h})}{dt} \right\|_{0, \Omega_D} \|\hat{p}_D - p_D\|_{0, \Omega_D} \\ &\leq \sqrt{\left\| \frac{d(\hat{\mathbf{u}}_S - \mathbf{u}_{S,h})}{dt} \right\|_{0, \Omega_S}^2 + \left\| \frac{d(\hat{p}_D - p_{D,h})}{dt} \right\|_{0, \Omega_D}^2} \sqrt{\|\hat{\mathbf{u}}_S - \mathbf{u}_S\|_{0, \Omega_S}^2 + \|\hat{p}_D - p_D\|_{0, \Omega_D}^2}, \end{aligned}$$

de donde se sigue la demostración. ■

Los dos siguientes lemas establecen estimaciones a posteriori deseadas para la primera contribución, esto es, estimaremos $\|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t)\|_{\mathbb{M}}$ en el Lema 3.8 y $\int_0^t |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)|_{a,2}^2 ds$ en el Lema 3.9. Ambas se siguen de los resultados de la Sección anterior.

Lema 3.8 Sea $\mathcal{H}_2 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$\mathcal{H}_2(t) = \frac{1}{2} \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t)\|_{\mathbb{M}}^2 + 2 \int_0^t |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)|_{a,2}^2 ds.$$

Luego, existe $C_9 > 0$ tal que la siguiente estimación de error se cumple para cada $t \in [0, T]$

$$\mathcal{H}_2(t) \leq C_9 \left\{ \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0)\|_{\mathbb{M}}^2 + \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h) \right\|_{\mathbb{M}}^2 ds \right\}. \quad (3.57)$$

Demostración: Tomando $\boldsymbol{\tau} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$ en **(S1)** (cf. (3.54)) y sustrayendo ambas ecuaciones obtenemos

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) + |\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}|_{a,2}^2 = \mathcal{D}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}). \quad (3.58)$$

Notar, por un lado, que se satisface

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|\hat{\mathbf{u}}_S - \mathbf{u}_S\|_{0,\Omega_S}^2 + \|\hat{p}_D - p_D\|_{0,\Omega_D}^2 \right\}.$$

Ahora, integrando (3.58) sobre $]0, t[$, con $0 < t \leq T$, usando el lema previo y la observación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} & (\|(\hat{\mathbf{u}}_S - \mathbf{u}_S)(t)\|_{0,\Omega_S}^2 + \|(\hat{p}_D - p_D)(t)\|_{0,\Omega_D}^2) + 2 \int_0^t |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)|_{a,2}^2 ds \\ & \leq \|(\hat{\mathbf{u}}_S - \mathbf{u}_S)(0)\|_{0,\Omega_S}^2 + \|(\hat{p}_D - p_D)(0)\|_{0,\Omega_D}^2 + 2 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h) \right\|_{\mathbb{M}} \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{\mathbb{M}}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

de lo cual se sigue que

$$\frac{1}{2} \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t)\|_{\mathbb{M}}^2 \leq (\|(\hat{\mathbf{u}}_S - \mathbf{u}_S)(t)\|_{0,\Omega_S}^2 + \|(\hat{p}_D - p_D)(t)\|_{0,\Omega_D}^2) \quad (3.60)$$

y

$$\|(\hat{\mathbf{u}}_S - \mathbf{u}_S)(0)\|_{0,\Omega_S}^2 + \|(\hat{p}_D - p_D)(0)\|_{0,\Omega_D}^2 \leq \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0)\|_{\mathbb{M}}^2. \quad (3.61)$$

Así, reemplazando (3.60) y (3.61) en (3.59) obtenemos

$$\mathcal{H}_2(t) \leq \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0)\|_{\mathbb{M}}^2 + 2 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{\mathbb{M}} \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s)\|_{\mathbb{M}} ds. \quad (3.62)$$

Finalmente, seguimos la misma idea desarrollada en el Lema 3.1 para concluir la estimación directamente. ■

El siguiente resultado nos da una cota para $|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t)|_{a,2}$:

Lema 3.9 *La siguiente estimación de error se satisface para c.t.p. $t \in [0, T]$*

$$|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t)|_{a,2}^2 \leq |(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(0)|_{a,2}^2 + \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)(s) \right\|_{\mathbb{M}}^2 ds \quad (3.63)$$

Demostración: Se sigue directamente de la idea desarrollada en el Lema 3.2. ■

Análogamente al caso del esquema semi-discreto para el problema de Stokes, de los Lemas 3.8 y 3.9 podemos ver que nos queda estimar aún la expresión

$$\int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h) \right\|_{\mathbb{M}}^2 ds,$$

la cual se efectuará en la siguiente Subsección. Finalmente tenemos una estimación para $\int_0^t \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s)\|_{\mathbb{M}}^2 ds$ que se sigue directamente de [20, Remark 1].

Lema 3.10 *Para cada $t \in [0, T]$ se tiene:*

$$\int_0^t \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(s)\|_{\mathbb{M}}^2 ds \leq 2 \left\{ t \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(0)\|_{\mathbb{M}}^2 + \int_0^t \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)\|_{\mathbb{M}}^2 ds \right\}. \quad (3.64)$$

3.2.2. Segunda contribución

En esta Subsección introducimos notaciones similares a la Subsección 3.1.2, pero contextualizadas al problema de Stokes-Darcy, es decir, se abusará de notación a menos que haya confusión. Para cada $K \in \mathcal{T}_h^S \cup \mathcal{T}_h^D$, sea $\mathcal{E}(K)$ el conjunto de lados de K , y denotaremos por \mathcal{E}_h el conjunto de lados de $\mathcal{T}_h^S \cup \mathcal{T}_h^D$, esto es,

$$\mathcal{E}_h := \mathcal{E}_h(\Gamma_S) \cup \mathcal{E}_h(\Omega_S) \cup \mathcal{E}_h(\Omega_D) \cup \mathcal{E}_h(\Sigma),$$

donde $\mathcal{E}_h(\Gamma_S) := \{e \in \mathcal{E}_h : e \subseteq \Gamma_S\}$, $\mathcal{E}_h(\Omega_\star) := \{e \in \mathcal{E}_h : e \subseteq \Omega_\star\}$ para cada $\star \in \{S, D\}$, y $\mathcal{E}_h(\Sigma) := \{e \in \mathcal{E}_h : e \subseteq \Sigma\}$. Notar que $\mathcal{E}_h(\Sigma)$ es el conjunto de lados que definen la partición Σ_h . Análogamente, sea Σ_{2h} el conjunto de los arcos *dobles* que definen la partición Σ_{2h} . En lo que sigue, h_e se entiende como el largo del lado $e \in \mathcal{E}_h \cup \mathcal{E}_{2h}$. Ahora, sea $\star \in \{S, D\}$ y sea $q \in [L^2(\Omega_\star)]^m$, con $m \in \{1, 2\}$, tal que $q|_K \in [C(K)]^m$ para cada $K \in \mathcal{T}_h^\star$. Entonces, dado $e \in \mathcal{E}_h(\Omega_\star)$, denotamos por $[q]$ el salto de q a través de e , esto es $[q] := (q|_{K'})|_e - (q|_{K''})|_e$, donde K' y K'' son triángulos de \mathcal{T}_h^\star que tienen como lado común a e . A su vez, fijaremos un vector normal unitario $\mathbf{n}_e := (n_1, n_2)^t$ en el lado e , con puntos fuera de K' o dentro de K'' , y sea $\mathbf{t}_e := -(n_2, n_1)^t$ el vector unitario tangente sobre e . De esta manera, dados

$\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega_\star)$ y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{L}^2(\Omega_\star)$ tal que $\mathbf{v}|_K \in [C(K)]^2$ y $\boldsymbol{\tau}|_K \in [C(K)]^{2 \times 2}$, respectivamente, para cada $K \in \mathcal{T}_h^\star$, definimos $[\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_e]$ y $[\boldsymbol{\tau} \mathbf{t}_e]$ los saltos tangenciales de \mathbf{v} y $\boldsymbol{\tau}$ que cruzan e , esto es, $[\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_e] := \{(\mathbf{v}|_{K'})|_e - (\mathbf{v}|_{K''})|_e\} \cdot \mathbf{t}_e$ y $[\boldsymbol{\tau} \mathbf{t}_e] := \{(\boldsymbol{\tau}|_{K'})|_e - (\boldsymbol{\tau}|_{K''})|_e\} \mathbf{t}_e$, respectivamente. En lo que sigue, mientras no haya confusión, simplemente escribiremos \mathbf{t} y \mathbf{n} en vez de \mathbf{t}_e y \mathbf{n}_e , respectivamente. Finalmente, dados un campo escalar, vectorial y tensorial $q, \mathbf{v} := (v_1, v_2)^t, \boldsymbol{\tau} := (\tau_{ij})_{2 \times 2}$, respectivamente, definimos:

$$\mathbf{curl} \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{curl} q := \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial q}{\partial x_1} \end{pmatrix}^t,$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \quad \mathbf{rot} \boldsymbol{\tau} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_2} & \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} \end{pmatrix}^t$$

Se tienen los siguientes resultados útiles que provienen del respectivo análisis de error del problema estacionario. La formulación completamente mixta del problema de Stokes-Darcy se lee como sigue: Hallar $(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\mathbf{u}}) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\boldsymbol{\tau}}) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{u}}) &= \mathcal{F}(\underline{\boldsymbol{\tau}}) \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X}, \\ \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\mathbf{v}}) &= \mathcal{G}(\underline{\mathbf{v}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{M}. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Es sabido que este problema está bien propuesto y que la solución depende continuamente de los datos. Ver [12, Teorema 3.1] para más detalles. La dependencia continua de (3.65) es equivalente a la condición inf-sup global, la cual establece la existencia de $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{w}})\|_{\mathbb{X} \times \mathbb{M}} \leq C \sup_{(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{v}}) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M} \setminus \{\theta\}} \frac{\mathcal{A}(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\boldsymbol{\tau}}) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{w}}) + \mathcal{B}(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{v}})}{\|(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{v}})\|_{\mathbb{X} \times \mathbb{M}}} \tag{3.66}$$

Aplicando esta estimación a $(\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{w}}) = (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \hat{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}_h) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M}$ y usando **(S4)** (cf. (3.55)), obtenemos:

$$\|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \hat{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}_h)\|_{\mathbb{X} \times \mathbb{M}} \leq C \sup_{(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{v}}) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M} \setminus \{\theta\}} \frac{|\mathcal{R}_3(\underline{\boldsymbol{\tau}})| + |\mathcal{R}_4(\underline{\mathbf{v}})|}{\|(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{v}})\|_{\mathbb{X} \times \mathbb{M}}} \tag{3.67}$$

Por otra parte, de acuerdo a las definiciones de los residuos (3.50) and (3.51) y las definiciones de \mathcal{A} and \mathcal{B} ((2.13),(2.14)), se tiene que para cualquier $(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{v}}) = ((\boldsymbol{\tau}_S, \mathbf{v}_D, \boldsymbol{\psi}, \xi), (\mathbf{v}_S, q_D)) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M}$, podemos escribir

$$\mathcal{R}_3(\underline{\boldsymbol{\tau}}) = \mathcal{R}_3^1(\boldsymbol{\tau}_S) + \mathcal{R}_3^2(\mathbf{v}_S) + \mathcal{R}_3^3(\boldsymbol{\psi}) + \mathcal{R}_3^4(\xi)$$

y

$$\mathcal{R}_4(\underline{\mathbf{v}}) = \mathcal{R}_4^1(\mathbf{v}_S) + \mathcal{R}_4^2(q_D),$$

donde (ver también [13, Sección 3.1])

$$\mathcal{R}_3^1(\boldsymbol{\tau}_S) = -\nu^{-1} \int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d : \boldsymbol{\tau}_S^d - \int_{\Omega_S} \mathbf{u}_{S,h} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau}_S - \langle \boldsymbol{\tau}_S \mathbf{n}, \boldsymbol{\phi}_h \rangle_\Sigma, \quad (3.68)$$

$$\mathcal{R}_3^2(\mathbf{v}_S) = - \int_{\Omega_D} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{D,h} \cdot \mathbf{v}_D + \int_{\Omega_D} p_{D,h} \operatorname{div} \mathbf{v}_D + \langle \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n}, \lambda_h \rangle_\Sigma, \quad (3.69)$$

$$\mathcal{R}_3^3(\boldsymbol{\psi}) = -\langle \boldsymbol{\sigma}_{S,h} \mathbf{n}, \boldsymbol{\psi} \rangle_\Sigma - \langle \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n}, \lambda_h \rangle_\Sigma + \frac{\nu}{\kappa} \langle \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{t}, \boldsymbol{\phi}_h \cdot \mathbf{t} \rangle_\Sigma, \quad (3.70)$$

$$\mathcal{R}_3^4(\boldsymbol{\xi}) = \langle \mathbf{u}_{D,h} \cdot \mathbf{n}, \boldsymbol{\xi} \rangle_\Sigma + \langle \boldsymbol{\phi}_h \cdot \mathbf{n}, \boldsymbol{\xi} \rangle_\Sigma, \quad (3.71)$$

$$\mathcal{R}_4^1(\mathbf{v}_S) = - \int_{\Omega_S} \mathbf{v}_S \cdot \left(\frac{d\mathbf{u}_{S,h}}{dt} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_{S,h} + \mathbf{f}_S \right) \quad (3.72)$$

y

$$\mathcal{R}_4^2(q_D) = - \int_{\Omega_D} q_D \left(\frac{dp_{D,h}}{dt} - \operatorname{div} \mathbf{u}_{D,h} + f_D \right). \quad (3.73)$$

De esta manera, el supremo en (3.67) puede ser acotado en términos de R_3^i , $i \in \{1, \dots, 4\}$ y R_4^j , $j \in \{1, \dots, 2\}$, esto es:

$$\begin{aligned} & \|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \hat{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}_h)\|_{\mathbb{X} \times \mathbb{M}} \\ & \leq \left\{ \sup_{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega_S) \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{|\mathcal{R}_3^1(\boldsymbol{\tau}_S)|}{\|\boldsymbol{\tau}_S\|_{\operatorname{div}, \Omega_S}} + \sup_{\mathbf{v}_D \in \mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega_D) \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{|\mathcal{R}_3^2(\mathbf{v}_D)|}{\|\mathbf{v}_D\|_{\operatorname{div}, \Omega_D}} \right. \\ & + \sup_{\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Sigma) \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{|\mathcal{R}_3^3(\boldsymbol{\psi})|}{\|\boldsymbol{\psi}\|_{1/2, \Sigma}} + \sup_{\boldsymbol{\xi} \in H^{1/2}(\Sigma) \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{|\mathcal{R}_3^4(\boldsymbol{\xi})|}{\|\boldsymbol{\xi}\|_{1/2, \Sigma}} + \sup_{\mathbf{v}_S \in \mathbf{L}^2(\Omega_S) \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{|\mathcal{R}_4^1(\mathbf{v}_S)|}{\|\mathbf{v}_S\|_{0, \Omega_S}} \\ & \left. + \sup_{q_D \in L_0^2(\Omega_D) \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{|\mathcal{R}_4^2(q_D)|}{\|q_D\|_{0, \Omega_D}} \right\}. \quad (3.74) \end{aligned}$$

Los siguientes lemas establecen cotas deseables para cada supremo del lado derecho de (3.74).

Lema 3.11 *Existe $C_9 > 0$, independiente de h , tal que*

$$\sup_{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega_S) \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{|\mathcal{R}_3^1(\boldsymbol{\tau}_S)|}{\|\boldsymbol{\tau}_S\|_{div, \Omega_S}} \leq C_9 \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} \hat{\Theta}_{S,K}^2 \right\}^{1/2}, \quad (3.75)$$

donde, para cada $K \in \mathcal{T}_h^S$:

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_{S,K}^2 := & h_K^2 \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d\|_{0,K}^2 + h_K^2 \|\boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Omega_S)} h_e \|\boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d \mathbf{t}\|_{0,e}^2 \\ & + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Gamma_S)} h_e \|\boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d \mathbf{t}\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} \left\{ h_e \|\nu^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d \mathbf{t} + \nabla \phi_h \mathbf{t}\|_{0,e}^2 + h_e \|\mathbf{u}_{S,h} + \phi_h\|_{0,e}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Demostración: Ver [13, Lema 3.8]. ■

Lema 3.12 Existe $C_{10} > 0$, independiente de h , tal que

$$\sup_{\mathbf{v}_D \in \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega_D) \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{|\mathcal{R}_3^2(\mathbf{v}_D)|}{\|\mathbf{v}_D\|_{div, \Omega_D}} \leq C_{10} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} \hat{\Theta}_{D,K}^2 \right\}^{1/2}, \quad (3.76)$$

donde, para cada $K \in \mathcal{T}_h^D$,

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_{D,K}^2 := & h_K^2 \|\mathbf{rot}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{D,h})\|_{0,K}^2 + h_K^2 \|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{D,h}\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Omega_D)} h_e \|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{D,h} \cdot \mathbf{t}\|_{0,e}^2 \\ & + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} \left\{ h_e \left\| \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{D,h} \cdot \mathbf{t} + \frac{d\lambda_h}{dt} \right\|_{0,e}^2 + h_e \|p_{D,h} - \lambda_h\|_{0,e}^2 \right\} \end{aligned}$$

Demostración: Ver [13, Lema 3.9]. ■

Lema 3.13 Existe $C_{12}, C_{13} > 0$, independiente de h , tal que

$$\sup_{\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Sigma) \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{|\mathcal{R}_3^3(\boldsymbol{\psi})|}{\|\boldsymbol{\psi}\|_{1/2, \Sigma}} \leq C_{12} \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_h(\Sigma)} h_e \left\| \boldsymbol{\sigma}_{S,h} \mathbf{n} + \lambda_h \mathbf{n} - \frac{\nu}{\kappa} (\boldsymbol{\phi}_h \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} \right\|_{0,e}^2 \right\}^{1/2}, \quad (3.77)$$

y

$$\sup_{\xi \in H^{1/2}(\Sigma) \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{|\mathcal{R}_3^4(\xi)|}{\|\xi\|_{1/2, \Sigma}} \leq C_{13} \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_h(\Sigma)} h_e \|\mathbf{u}_{D,h} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\phi}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,e}^2 \right\} \quad (3.78)$$

Demostración: Ver [13, Lema 3.2]. ■

Finalmente, una aplicación directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos entrega la siguientes estimaciones:

Lema 3.14 *Se tiene que:*

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v}_S \in \mathbf{L}^2(\Omega_S) \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{|\mathcal{R}_4^1(\mathbf{v}_S)|}{\|\mathbf{v}_S\|_{0,\Omega_S}} &\leq \left\| \frac{d\mathbf{u}_{S,h}}{dt} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_{S,h} + \mathbf{f}_S \right\|_{0,\Omega_S} \\ &= \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} \left\| \frac{d\mathbf{u}_{S,h}}{dt} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_{S,h} + \mathbf{f}_S \right\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.79)$$

y

$$\begin{aligned} \sup_{q_D \in L_0^2(\Omega_D) \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{R}_4^2(q_D)|}{\|q_D\|_{0,\Omega_D}} &\leq \left\| \frac{dp_{D,h}}{dt} - \mathbf{div} \mathbf{u}_{D,h} + f_D \right\|_{0,\Omega_D} \\ &= \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h^D} \left\| \frac{dp_{D,h}}{dt} - \mathbf{div} \mathbf{u}_{D,h} + f_D \right\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Antes de establecer las estimaciones a posteriori de la contribución estacionaria, definimos el estimador de error para esta contribución, $\Theta_2 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, como sigue:

$$\Theta_2 := \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} \Theta_{S,K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^D} \Theta_{D,K}^2 \right\}^{1/2}, \quad (3.81)$$

donde, para cada $K \in \mathcal{T}_h^S$,

$$\begin{aligned} \Theta_{S,K}^2 &:= \left\| \frac{d\mathbf{u}_{S,h}}{dt} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_{S,h} + \mathbf{f}_S \right\|_{0,\Omega_S}^2 + h_K^2 \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d\|_{0,K}^2 + h_K^2 \|\boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d\|_{0,K}^2 \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Omega_S)} h_e \|\boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d \mathbf{t}\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Gamma_S)} h_e \|\boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d \mathbf{t}\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} h_e \|\mathbf{u}_{S,h} + \boldsymbol{\phi}_h\|_{0,e}^2 \\ &\sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} \left\{ h_e \left\| \boldsymbol{\sigma}_{S,h} \mathbf{n} + \lambda_h \mathbf{n} - \frac{\nu}{\kappa} (\boldsymbol{\phi}_h \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} \right\|_{0,e}^2 + h_e \|\nu^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d \mathbf{t} + \nabla \boldsymbol{\phi}_h \mathbf{t}\|_{0,e}^2 \right\} \end{aligned}$$

y para cada $K \in \mathcal{T}_h^D$,

$$\begin{aligned}
\Theta_{D,K}^2 &:= \left\| \frac{dp_{D,h}}{dt} - \operatorname{div} \mathbf{u}_{D,h} + f_D \right\|_{0,K}^2 + h_K^2 \|\operatorname{rot}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{D,h})\|_{0,K}^2 + h_K^2 \|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{D,h}\|_{0,K}^2 \\
&+ \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \widehat{\mathcal{E}}_h(\Omega_D)} h_e \|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{D,h} \cdot \mathbf{t}\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} h_e \left\| \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{D,h} \cdot \mathbf{t} + \frac{d\lambda_h}{dt} \right\|_{0,e}^2 \\
&+ \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} \{ h_e \|\mathbf{u}_{D,h} \cdot \mathbf{n} + \phi_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,e}^2 + h_e \|p_{D,h} - \lambda_h\|_{0,e}^2 \}.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando (3.67) y los lemas 3.11, 3.12, 3.13 y 3.14, se obtiene directamente una estimación de error a posteriori para la contribución estacionaria del error

Teorema 3.6 *Existe $C_{14} > 0$, independiente de h , tal que*

$$\|(\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \hat{\underline{\mathbf{u}}} - \underline{\mathbf{u}}_h)\|_{\mathbb{X} \times \mathbb{M}} \leq C_{14} \Theta_2 \quad (3.82)$$

3.2.3. Estimación de error para la derivada temporal de la segunda componente del error

Del análisis hecho para la primera contribución, es claro que nos queda establecer cotas deseables para $\left\| \frac{d}{dt} (\hat{\underline{\mathbf{u}}} - \underline{\mathbf{u}}_h) \right\|_{\mathbb{M}}$. Procederemos de manera similar a la Sección 3.1.3. Aplicamos derivada temporal a ambas ecuaciones de **(S4)** (cf. 3.55), obteniendo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \left(\frac{d}{dt} (\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}_h), \underline{\boldsymbol{\tau}} \right) + \mathcal{B} \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \frac{d}{dt} (\hat{\underline{\mathbf{u}}} - \underline{\mathbf{u}}_h) \right) &= \mathcal{R}_{3,t}(\underline{\boldsymbol{\tau}}) \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X} \\
\mathcal{B} \left(\frac{d}{dt} (\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}_h), \underline{\mathbf{v}} \right) &= \mathcal{R}_{4,t}(\underline{\mathbf{v}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{M}
\end{aligned} \quad (3.83)$$

donde

$$\mathcal{R}_{3,t}(\underline{\boldsymbol{\tau}}) = -\mathcal{A} \left(\frac{d\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h}{dt}, \underline{\boldsymbol{\tau}} \right) - \mathcal{B} \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \frac{d\underline{\mathbf{u}}_h}{dt} \right) \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X}$$

y

$$\mathcal{R}_{4,t}(\underline{\mathbf{v}}) = \mathcal{G}_t(\underline{\mathbf{v}}) - \mathcal{D} \left(\frac{d\underline{\mathbf{u}}_h}{dt}, \underline{\mathbf{v}} \right) - \mathcal{B} \left(\frac{d\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h}{dt}, \underline{\mathbf{v}} \right) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{M},$$

con

$$\mathcal{G}_t(\underline{\mathbf{v}}) := - \left(\frac{d\underline{\mathbf{f}}_S}{dt}, \underline{\mathbf{v}}_S \right)_S - \left(\frac{d\underline{\mathbf{f}}_D}{dt}, \underline{\mathbf{v}}_D \right)_D \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{M}.$$

Así, para obtener la estimación deseada se aplica el mismo análisis anterior reemplazando los correspondientes términos con derivada temporal. Antes de anunciar el resultado, sea el

siguiente estimador de error:

$$\tilde{\Theta}_2 := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h^S} \partial_t \Theta_{S,K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^D} \partial_t \Theta_{D,K}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.84)$$

donde, para cada $K \in \mathcal{T}_h^S$,

$$\begin{aligned} \partial_t \Theta_{S,K}^2 := & \left\| \frac{d^2 \mathbf{u}_{S,h}}{dt^2} + \mathbf{div} \left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_{S,h}}{dt} \right) + \frac{d\mathbf{f}_S}{dt} \right\|_{0,\Omega_S}^2 + h_K^2 \left\| \mathbf{rot} \left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d}{dt} \right) \right\|_{0,K}^2 \\ & + h_K^2 \left\| \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d}{dt} \right\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Omega_S)} h_e \left\| \left[\frac{d\boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d}{dt} \mathbf{t} \right] \right\|_{0,e}^2 \\ & + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Gamma_S)} h_e \left\| \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d}{dt} \mathbf{t} \right\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} h_e \left\| \frac{d\mathbf{u}_{S,h}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\phi}_h}{dt} \right\|_{0,e}^2 \\ & + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} \left\{ h_e \left\| \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{S,h}}{dt} \mathbf{n} + \frac{d\lambda_h}{dt} \mathbf{n} - \frac{\nu}{\kappa} \left(\frac{d\boldsymbol{\phi}_h}{dt} \cdot \mathbf{t} \right) \mathbf{t} \right\|_{0,e}^2 + h_e \left\| \nu^{-1} \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{S,h}^d}{dt} \mathbf{t} + \nabla \left\{ \frac{d\boldsymbol{\phi}_h}{dt} \right\} \mathbf{t} \right\|_{0,e}^2 \right\}, \end{aligned}$$

y para cada $K \in \mathcal{T}_h^D$,

$$\begin{aligned} \partial_t \Theta_{D,K}^2 := & \left\| \frac{d^2 p_{D,h}}{dt^2} - \mathbf{div} \left(\frac{d\mathbf{u}_{D,h}}{dt} \right) + \frac{df_D}{dt} \right\|_{0,K}^2 + h_K^2 \left\| \mathbf{rot} \left(\mathbf{K}^{-1} \frac{d\mathbf{u}_{D,h}}{dt} \right) \right\|_{0,K}^2 + h_K^2 \left\| \mathbf{K}^{-1} \frac{d\mathbf{u}_{D,h}}{dt} \right\|_{0,K}^2 \\ & + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Omega_D)} h_e \left\| \left[\mathbf{K}^{-1} \frac{d\mathbf{u}_{D,h}}{dt} \cdot \mathbf{t} \right] \right\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} h_e \left\| \mathbf{K}^{-1} \frac{d\mathbf{u}_{D,h}}{dt} \cdot \mathbf{t} + \frac{d}{dt} \frac{d\lambda_h}{dt} \right\|_{0,e}^2 \\ & + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} \left\{ h_e \left\| \frac{d\mathbf{u}_{D,h}}{dt} \cdot \mathbf{n} + \frac{\boldsymbol{\phi}_h}{dt} \cdot \mathbf{n} \right\|_{0,e}^2 + h_e \left\| \frac{dp_{D,h}}{dt} - \frac{d\lambda_h}{dt} \right\|_{0,e}^2 \right\}. \end{aligned}$$

A continuación se presenta el resultado anunciado:

Teorema 3.7 *Existe $C_{15} > 0$ independiente de h tal que*

$$\left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h) \right\|_{\mathbb{M}} \leq \left\| \left(\frac{d}{dt} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h), \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h) \right) \right\|_{\mathbb{X} \times \mathbb{M}} \leq C_{15} \tilde{\Theta}_2, \quad (3.85)$$

Demostración: Se procede de manera similar a la demostración del Teorema 3.3 ■

3.2.4. Estimación de error a posteriori para $(\underline{\sigma}_h - \underline{\sigma}, \underline{\mathbf{u}}_h - \underline{\mathbf{u}})$

Definimos $|||(\cdot, \cdot)|||_2 : \mathbb{X} \times \mathbb{M}$ como

$$|||(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{v}})|||_2 := |\underline{\boldsymbol{\tau}}|_{a,2}^2 + |||\underline{\mathbf{v}}|||_{\mathbb{M}} \quad \forall (\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{v}}) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M}.$$

A su vez, notamos que las expresiones

$$|||(\hat{\underline{\mathbf{u}}} - \underline{\mathbf{u}}_h)(0)|||_{\mathbb{M}} \quad \text{and} \quad |(\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}_h)(0)|_{a,2}$$

son ambas calculables, ya que de (3.82) podemos obtener

$$\max \left\{ |||(\hat{\underline{\mathbf{u}}} - \underline{\mathbf{u}}_h)(0)|||_{\mathbb{M}}, |(\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}_h)(0)|_{a,2} \right\} \leq C_6 \Theta_2(0). \quad (3.86)$$

Los siguientes dos teoremas establecen las estimaciones de error a posteriori para el problema de Stokes-Darcy en su versión semi-discreta.

Teorema 3.8 Sean $(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\mathbf{u}}) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M}$ y $(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \underline{\mathbf{u}}_h) \in \mathbb{X}_h \times \mathbb{M}_h$ las soluciones de (2.12) y (2.16) respectivamente. Luego, existe $C_{16} > 0$ independiente de h y para cada $t \in [0, T]$:

$$\int_0^t |||(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\mathbf{u}}) - (\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \underline{\mathbf{u}}_h)|||_2^2 ds \leq C_{16} \left\{ |||(\underline{\mathbf{u}}_h - \underline{\mathbf{u}})(0)|||_{\mathbb{M}}^2 + \Theta_2^2(0) + \int_0^t \tilde{\Theta}_2^2(s) ds + \int_0^t \Theta_2^2(s) ds \right\}.$$

Demostración: Aplicando definiciones y desigualdades conocidas obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^t |||(\underline{\boldsymbol{\sigma}} - \underline{\mathbf{u}}) - (\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h - \underline{\mathbf{u}}_h)|||^2 ds \\ & \leq 2 \int_0^t |||(\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \hat{\underline{\mathbf{u}}}) - (\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\mathbf{u}})|||^2 ds + 2 \int_0^t |||(\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \hat{\underline{\mathbf{u}}}) - (\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \underline{\mathbf{u}}_h)|||^2 ds \end{aligned} \quad (3.87)$$

Nos fijamos ahora en el primer sumando del lado derecho de (3.87). Aplicando las estimaciones (3.57) y (3.64) obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^t |||(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{u}}) - (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})|||^2 ds \\
& \leq 2 \int_0^t |\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}|_{a,2}^2 ds + 2 \int_0^t \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{\mathbb{M}}^2 ds \\
& \leq 2C_1 \left\{ \|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0)\|_{\mathbb{M}}^2 + \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h) \right\|_{\mathbb{M}}^2 ds \right\} + 4 \left\{ t \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})(0)\|_{\mathbb{M}}^2 + \int_0^t \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbb{M}}^2 ds \right\}
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Por otro lado, usando (3.82), el segundo término puede ser estimado como

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^t |||(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{u}}) - (\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)|||^2 ds \\
& \leq 2 \int_0^t (2|\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h|_{a,2}^2 + 2\|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbb{M}}^2) ds \\
& \leq 4C \int_0^t (2\|\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbb{X}}^2 + 2\|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbb{M}}^2) ds \\
& \leq 4C \int_0^t \|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)\|_{\mathbb{X} \times \mathbb{M}}^2 ds \\
& \leq 4CC_5^2 \int_0^t \Theta_2^2(s) ds,
\end{aligned} \tag{3.89}$$

donde en esta demostración $C > 0$ indica una constante convenientemente escogida tal que $|\boldsymbol{\tau}|_{a,2}^2 \leq C\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{X}}^2$, $\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{X}$. Insertando (3.88) y (3.89) dentro de (3.87), notando que $\|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbb{M}}^2$ puede ser estimada usando (3.82), y luego usando (3.86) y juntando términos semejantes, concluimos directamente la demostración ■

Teorema 3.9 Sean $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M}$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{X}_h \times \mathbb{M}_h$ las soluciones de (2.12) y (2.16) respectivamente. Entonces, existe $C_{17} > 0$ independiente de h tal que para cada $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
& |||(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{u}(t)) - (\boldsymbol{\sigma}_h(t), \mathbf{u}_h(t))|||^2 \\
& \leq C_{17} \left\{ \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(0)\|_{\mathbb{M}}^2 + |(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)(0)|_{a,2}^2 + \Theta_2^2(0) + \int_0^t \tilde{\Theta}_2^2(s) ds + \Theta_2^2(t) \right\}.
\end{aligned}$$

Demostración: Se sigue de manera directa, aplicando la misma idea desarrollada en la demostración del Teorema 3.5 ■

Capítulo 4

Análisis de error a posteriori de los esquemas completamente discretos

4.1. El problema de Stokes evolutivo

Ahora se realiza un análisis de error a posteriori para el esquema completamente discreto, basado en el método de Euler regresivo. Se particiona el intervalo temporal como $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ y para cada $n \in \{0, \dots, N\}$, sean el paso de tiempo $\tau_n := t_n - t_{n-1}$ y \mathcal{T}_n un refinamiento de una macrotriangulación, la cual es una triangulación del dominio espacial Ω , de manera tal que satisfaga los supuestos de regularidad usuales en cada uno de sus refinamientos (cf. [4]). Para cada $x \in \Omega$, sea

$$h_n(x) := \text{diam}(K) \quad \text{donde } K \in \mathcal{T}_n \text{ y } x \in K.$$

Se define la derivada discreta como

$$\Delta_t \phi_n := \frac{1}{\tau_n} (\phi_n - \phi_{n-1}),$$

donde la notación ϕ_n , para cualquier función ϕ , indica $\phi(t_n)$, $n \in \{0, \dots, N\}$. Dado $k \geq 0$, consideraremos $H_{0,h}^n$ y Q_h^n definidos sobre las triangulaciones \mathcal{T}_n como los subespacios de elementos finitos de $H_0 := \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega)$ y $Q := \mathbf{L}^2(\Omega)$, definidos como

$$H_{0,h}^n := \mathbb{RT}_k(\mathcal{T}_n) \cap H_0$$

y

$$Q_h^n := \{\mathbf{v}_h \in Q : \mathbf{v}_h|_K \in [\mathbb{P}_k(K)]^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_n\}$$

respectivamente. Dadas dos triangulaciones compatibles \mathcal{T}_{n-1} y \mathcal{T}_n , esto es, que son ambas refinamientos de la misma macrotriangulación, definimos $\hat{\mathcal{T}}_n$ como *el más fino engrosamiento común* de \mathcal{T}_{n-1} y \mathcal{T}_n , cuyo tamaño de la malla está determinado por $\hat{h}_n := \max\{h_n, h_{n-1}\}$, y sea $\hat{\mathcal{P}}_h^n : Q \rightarrow Q_h^n \cap Q_h^{n-1}$ la proyección- L^2 relativa a este *más fino engrosamiento común* $\hat{\mathcal{T}}_n$ de \mathcal{T}_n y \mathcal{T}_{n-1} tal que satisface la siguiente propiedad de aproximación:

$$\|\mathbf{v} - \hat{\mathcal{P}}_h^n \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq C_{18} \hat{h}_n \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (4.1)$$

Además, sea $\mathcal{P}_h^n : Q \rightarrow Q_h^n$ la proyección- L^2 definida como $(\mathcal{P}_h^n \mathbf{v}, \phi) = (\mathbf{v}, \phi) \quad \forall \phi \in Q_h^n$ tal que satisface la siguiente propiedad de aproximación:

$$\|\mathbf{v} - \mathcal{P}_h^n \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq C_{19} h_n \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad (4.2)$$

El *esquema completamente discreto* se define como sigue: Dado $\mathbf{U}_0 = \mathcal{P}_h^0 \mathbf{u}_0$, hallar $\{(\boldsymbol{\Sigma}_n, \mathbf{U}_n)\}_{n \in \{0, \dots, N\}}$ con $(\boldsymbol{\Sigma}_n, \mathbf{U}_n) \in H_{0,h}^n \times Q_h^n$ tal que

$$a(\boldsymbol{\Sigma}_0, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{U}_0) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_{0,h}^0, \quad (4.3)$$

y para $n \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\Sigma}_n, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{U}_n) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_{0,h}^n, \\ -(\Delta_t \mathbf{U}_n, \mathbf{v})_{0,\Omega} + b(\boldsymbol{\Sigma}_n, \mathbf{v}) &= -(\mathbf{f}_n, \mathbf{v})_{0,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in Q_h^n. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dada una sucesión de valores discretos $\{\mathbf{U}_n\}$, $\{\boldsymbol{\Sigma}_n\}$, $n \in \{0, \dots, N\}$, asociamos dos funciones continuas del tiempo a través de interpolantes lineales continuos a trozos $\mathbf{U}(t)$, $\boldsymbol{\Sigma}(t)$, $t \in [0, T]$, como

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t) &= \frac{t_n - t}{\tau_n} \mathbf{U}_{n-1} + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \mathbf{U}_n \\ &= \mathbf{U}_{n-1} + (t - t_{n-1}) \Delta_t \mathbf{U}_n, \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, \dots, N, \\ \boldsymbol{\Sigma}(t) &= \frac{t_n - t}{\tau_n} \boldsymbol{\Sigma}_{n-1} + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \boldsymbol{\Sigma}_n \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_{n-1} + (t - t_{n-1}) \Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_n, \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Notar que la derivada temporal de \mathbf{U} restringida a $]t_{n-1}, t_n]$ es

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \Delta_t \mathbf{U}_n \quad \forall t \in]t_{n-1}, t_n]. \quad (4.5)$$

Sean los errores $\mathbf{e}_u(t) = \mathbf{U}(t) - \mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{e}_\sigma(t) = \boldsymbol{\Sigma}(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)$. Tal como se hizo en el análisis

para el problema semidiscreto, se debe definir un concepto análogo al de los *residuos* pero en el contexto completamente discreto. Este concepto será de utilidad, tal como en la sección anterior, para encontrar las cotas deseadas para el error a posteriori.

Definición 4.1 *Se define para $n \geq 1$, los residuos discretos como sigue:*

$$\mathcal{R}_1^n(\boldsymbol{\tau}) := -a(\boldsymbol{\Sigma}_n, \boldsymbol{\tau}) - b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{U}_n) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0,$$

$$\mathcal{R}_2^n(\mathbf{v}) := (\mathcal{P}_h^n(\Delta_t \mathbf{U}_n), \mathbf{v})_{0,\Omega} - b(\boldsymbol{\Sigma}_n, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}_n, \mathbf{v})_{0,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in Q,$$

y para $n = 0$ se define $\mathcal{R}_1^0(\boldsymbol{\tau}) := -\frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\Sigma}_0^d, \boldsymbol{\tau}^d)_{0,\Omega} - (\mathbf{U}_0, \mathbf{div} \boldsymbol{\tau})_{0,\Omega}$ y $\mathcal{R}_2^0(\mathbf{v}) := 0$.

Notar que $\mathcal{R}_1^n(\boldsymbol{\tau}_n) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_n \in H_{0,h}^n$ y $\mathcal{R}_2^n(\mathbf{v}_n) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_n \in Q_h^n$. Además, para cada $t \in]t_{n-1}, t_n]$, $n \in \{1, \dots, N\}$, se satisface:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{e}_\sigma(t), \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_u(t)) &= -\mathcal{R}_1^n(\boldsymbol{\tau}) + a(\boldsymbol{\Sigma}(t) - \boldsymbol{\Sigma}_n, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{U}(t) - \mathbf{U}_n) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0, \\ - \left(\frac{d\mathbf{e}_u(t)}{dt}, \mathbf{v} \right)_{0,\Omega} + b(\mathbf{e}_\sigma(t), \mathbf{v}) &= -\mathcal{R}_2^n(\mathbf{v}) + b(\boldsymbol{\Sigma}(t) - \boldsymbol{\Sigma}_n, \mathbf{v}) + (\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_n, \mathbf{v})_{0,\Omega} \\ &\quad + \frac{1}{\tau_n} (\mathcal{P}_h^n \mathbf{U}_{n-1} - \mathbf{U}_{n-1}, \mathbf{v})_{0,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in Q. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Siguiendo la misma idea desarrollada en el esquema semi-discreto, se definen las *reconstrucciones elípticas mixtas* en el nivel $t = t_n$ como sigue:

Definición 4.2 *Para cada $n \in \{0, \dots, N\}$, dados $\boldsymbol{\Sigma}_n$ y \mathbf{U}_n , se definen las reconstrucciones elípticas mixtas $(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n, \hat{\mathbf{U}}_n)$ como la solución de la formulación variacional mixta: Hallar $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega)$ y $\hat{\mathbf{U}}_n \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tal que*

$$\begin{aligned} a(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n - \boldsymbol{\Sigma}_n, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \hat{\mathbf{U}}_n - \mathbf{U}_n) &= \mathcal{R}_1^n(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0, \quad n = 0, \dots, N, \\ b(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n - \boldsymbol{\Sigma}_n, \mathbf{v}) &= \mathcal{R}_2^n(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in Q, \quad n = 0, \dots, N. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Se sabe que se puede probar además que $\hat{\mathbf{U}}_n \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ (cf. [3, Página 147]). Dada una sucesión de valores discretos $\{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n\}_{n \in \{0, \dots, N\}}$ y $\{\hat{\mathbf{U}}_n\}_{n \in \{0, \dots, N\}}$ se definen respectivamente los interpolantes lineales continuos a trozos $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(t)$ y $\hat{\mathbf{U}}(t)$ como

$$\hat{\mathbf{U}}(t) = \hat{\mathbf{U}}_{n-1} + (t - t_{n-1}) \Delta_t \hat{\mathbf{U}}_n \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\hat{\Sigma}(t) = \hat{\Sigma}_{n-1} + (t - t_{n-1})\Delta_t \hat{\Sigma}_n \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Notar que la derivada temporal de $\hat{\mathbf{U}}(t)$ con t restringida a $]t_{n-1}, t_n]$ es

$$\frac{d\hat{\mathbf{U}}(t)}{dt} = \Delta_t \hat{\mathbf{U}}_n \quad \forall t \in]t_{n-1}, t_n]. \quad (4.8)$$

Con el fin de obtener las estimaciones deseadas, para cada $t \in [0, T]$ se descompone el error en dos contribuciones:

$$\mathbf{e}_u(t) = (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t) - (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t), \quad (4.9)$$

y

$$\mathbf{e}_\sigma(t) = (\hat{\Sigma} - \sigma)(t) - (\hat{\Sigma} - \Sigma)(t). \quad (4.10)$$

Insertando (4.7) dentro de (4.6) y considerando las definiciones (4.9) y (4.10) se obtiene, para cada $t \in]t_{n-1}, t_n]$, $n \in \{1, \dots, N\}$:

$$\begin{aligned} a((\hat{\Sigma} - \sigma)(t), \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t)) &= a(\hat{\Sigma}(t) - \hat{\Sigma}_n, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \hat{\mathbf{U}}(t) - \hat{\mathbf{U}}_n) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0, \\ - \left(\frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t), \mathbf{v} \right)_{0,\Omega} + b((\hat{\Sigma} - \sigma)(t), \mathbf{v}) &= - \left(\frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t), \mathbf{v} \right)_{0,\Omega} + b(\hat{\Sigma}(t) - \hat{\Sigma}_n, \mathbf{v}) \\ &\quad + (\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_n, \mathbf{v})_{0,\Omega} \\ &\quad + \frac{1}{\tau_n} (\mathcal{P}_h^n \mathbf{U}_{n-1} - \mathbf{U}_{n-1}, \mathbf{v})_{0,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in Q. \end{aligned} \quad (4.11)$$

No obstante, debemos escribir algunos términos de (4.11) de una manera deseable para obtener las cotas. Nos fijamos en el segundo término del lado de derecho de la segunda ecuación de (4.11). Con respecto a este término, se tiene el siguiente resultado:

Lema 4.1 *La siguiente expresión se satisface para cada $t \in]t_{n-1}, t_n]$:*

$$b(\hat{\Sigma}(t) - \hat{\Sigma}_n, \mathbf{v}) = (\mathbf{div}(\hat{\Sigma}(t) - \hat{\Sigma}_n), \mathbf{v})_{0,\Omega} = (t - t_n) \left\{ (\mathbf{div} \Delta_t \Sigma_n, \mathbf{v})_{0,\Omega} + \Delta_t \mathcal{R}_2^n(\mathbf{v}) \right\} \quad \forall \mathbf{v} \in Q. \quad (4.12)$$

Demostración: Notamos que de la definición de la reconstrucción elíptica se tiene

$$(\mathbf{div} \hat{\Sigma}_n, \mathbf{v})_{0,\Omega} = (\mathbf{div} \Sigma_n, \mathbf{v})_{0,\Omega} + \mathcal{R}_2^n(\mathbf{v}) \quad (4.13)$$

Por otra parte, es fácil chequear que de la definición de $\hat{\Sigma}$ se cumple que

$$\hat{\Sigma}(t) - \hat{\Sigma}_n = (t - t_n)\Delta_t\hat{\Sigma}_n.$$

Entonces, se tiene, usando (4.13),

$$\begin{aligned} (\mathbf{div}(\hat{\Sigma}(t) - \hat{\Sigma}_n), \mathbf{v})_{0,\Omega} &= (t - t_n)(\mathbf{div} \Delta_t \hat{\Sigma}_n, \mathbf{v})_{0,\Omega} = (t - t_n)\tau_n^{-1}(\mathbf{div} \hat{\Sigma}_n - \mathbf{div} \hat{\Sigma}_{n-1}, \mathbf{v})_{0,\Omega} \\ &= (t - t_n)\tau_n^{-1} \left\{ \{(\mathbf{div} \Sigma_n, \mathbf{v})_{0,\Omega} + \mathcal{R}_2^n(\mathbf{v})\} - \{(\mathbf{div} \Sigma_{n-1}, \mathbf{v})_{0,\Omega} + \mathcal{R}_2^{n-1}(\mathbf{v})\} \right\} \\ &= (t - t_n)\tau_n^{-1} \left\{ (\mathbf{div}(\Sigma_n - \Sigma_{n-1}), \mathbf{v})_{0,\Omega} + (\mathcal{R}_2^n - \mathcal{R}_2^{n-1})(\mathbf{v}) \right\} \\ &= (t - t_n) \left\{ (\mathbf{div}(\Delta_t \Sigma_n), \mathbf{v})_{0,\Omega} + \Delta_t \mathcal{R}_2^n(\mathbf{v}) \right\} \end{aligned}$$

concluyendo la demostración. ■

Además, por otra parte, es fácil ver que

$$a(\hat{\Sigma}(t) - \hat{\Sigma}_n, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \hat{\mathbf{U}}(t) - \hat{\mathbf{U}}_n) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0. \quad (4.14)$$

Así, usando (4.12) y (4.14), se tiene que el sistema (4.11) se reduce a

$$(S5) \left\{ \begin{array}{ll} a((\hat{\Sigma} - \boldsymbol{\sigma})(t), \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t)) = 0 & \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0, \\ - \left(\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t), \mathbf{v} \right)_{0,\Omega} + b((\hat{\Sigma} - \boldsymbol{\sigma})(t), \mathbf{v}) \\ = - \left(\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t), \mathbf{v} \right)_{0,\Omega} + (t - t_n)\{(\mathbf{div} \Delta_t \Sigma_n, \mathbf{v})_{0,\Omega} + \Delta_t \mathcal{R}_2^n(\mathbf{v})\} \\ + (\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_n, \mathbf{v})_{0,\Omega} + \frac{1}{\tau_n} (\mathcal{P}_h^n \mathbf{U}_{n-1} - \mathbf{U}_{n-1}, \mathbf{v})_{0,\Omega} & \forall \mathbf{v} \in Q, \end{array} \right. \quad (4.15)$$

con $t \in]t_{n-1}, t_n]$, $n \in \{1, \dots, N\}$. Por otro lado, de las definiciones de $\hat{\mathbf{U}}$ y $\hat{\Sigma}$, y desde (4.7) tenemos el siguiente sistema para cada $t \in]t_{n-1}, t_n]$, $n \in \{1, \dots, N\}$:

$$(S6) \left\{ \begin{array}{ll} a(\hat{\Sigma}(t) - \Sigma(t), \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \hat{\mathbf{U}}(t) - \mathbf{U}(t)) = [\hat{\mathcal{R}}_1(\boldsymbol{\tau})](t) & \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0, \\ b(\hat{\Sigma}(t) - \Sigma(t), \mathbf{v}) = [\hat{\mathcal{R}}_2(\mathbf{v})](t) & \forall \mathbf{v} \in Q, \end{array} \right. \quad (4.16)$$

donde $\hat{\mathcal{R}}_1(\boldsymbol{\tau})$ y $\hat{\mathcal{R}}_2(\mathbf{v})$ son los interpolantes continuos a trozos de $\mathcal{R}_1^n(\boldsymbol{\tau})$ y $\mathcal{R}_2^n(\mathbf{v})$ respectivamente, esto es,

$$[\hat{\mathcal{R}}_1(\boldsymbol{\tau})](t) := \frac{t_n - t}{\tau_n} \mathcal{R}_1^{n-1}(\boldsymbol{\tau}) + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \mathcal{R}_1^n(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0 \quad \forall t \in]t_{n-1}, t_n]$$

y

$$[\hat{\mathcal{R}}_2(\mathbf{v})](t) := \frac{t_n - t}{\tau_n} \mathcal{R}_2^{n-1}(\mathbf{v}) + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \mathcal{R}_2^n(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in Q \quad \forall t \in]t_{n-1}, t_n].$$

Notar que en el nivel $t = t_n$, con $n \in \{1, \dots, N\}$, se tiene

$$[\hat{\mathcal{R}}_1(\boldsymbol{\tau})](t_n) = \mathcal{R}_1^n(\boldsymbol{\tau}) \quad (4.17)$$

y

$$[\hat{\mathcal{R}}_2(\mathbf{v})](t_n) = \mathcal{R}_2^n(\mathbf{v}). \quad (4.18)$$

Además notar que las respectivas derivadas temporales quedan como

$$\frac{d}{dt}[\hat{\mathcal{R}}_1(\boldsymbol{\tau})](t) = \Delta_t \mathcal{R}_1^n(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall t \in]t_{n-1}, t_n] \quad (4.19)$$

y

$$\frac{d}{dt}[\hat{\mathcal{R}}_2(\mathbf{v})](t) = \Delta_t \mathcal{R}_2^n(\mathbf{v}) \quad \forall t \in]t_{n-1}, t_n]. \quad (4.20)$$

Notar también que de la definición de las reconstrucciones elípticas mixtas y de $\boldsymbol{\sigma}^d(t) = \mu \nabla \mathbf{u}(t)$ (ec. (2.3)), podemos obtener fácilmente

$$\frac{1}{\mu} (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(t) - \boldsymbol{\sigma}(t))^d = \nabla (\hat{\mathbf{U}}(t) - \mathbf{u}(t)). \quad (4.21)$$

Con el fin de obtener las estimaciones deseadas, se tienen los siguientes resultados preliminares, y siguiendo la misma idea desarrollada en el esquema semi-discreto, debido al uso de las reconstrucciones elípticas mixtas, el error se divide en dos contribuciones. La primera es referida al sistema **(S5)** (cf. (4.15)) y la segunda es referida al sistema **(S6)** (cf. (4.16)).

4.1.1. Primera contribución: $(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})$

Los términos que nos interesan acotar son $\|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_m)\|_{0,\Omega}$ y $\|(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t_m)\|_{a,1}$, con $m \in \{1, \dots, N\}$. Por conveniencia, antes de establecer los resultados, se definen las siguientes expresiones, para cada $n \in \{1, \dots, N\}$:

$$\mathcal{F}_1^n := \tau_n^3 (\|\Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_n\|_{0,\Omega}^2 + \|C_{18} \hat{h}_n \Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega}^2), \quad (4.22)$$

$$\mathcal{F}_2^n := \tau_n \|h_n(I - \mathcal{P}_h^n)\mathbf{U}_{n-1}\|_{0,\Omega}^2, \quad (4.23)$$

$$\mathcal{F}_3^n := \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{f}(s) - \mathbf{f}_n\|_{0,\Omega}^2 ds, \quad (4.24)$$

$$\mathcal{F}_4^n := \tau_n^3 \left\{ \|\mathbf{div}(\Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_n)\|_{0,\Omega}^2 + \|\Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega}^2 \right\}, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{F}_5^n := \begin{cases} \|\tau_n^{-1} h_n(I - \mathcal{P}_h^n)\mathbf{U}_{n-1}\|_{0,\Omega}^2 & \text{si } n = 1 \text{ o } n = m \\ \tau_n^2 \|\hat{h}_n \Delta_t(\tau_n^{-1}(\mathcal{P}_h^n - I)\mathbf{U}_{n-1})\|_{0,\Omega}^2 & \text{si } n \in \{2, \dots, m-1\}, \end{cases} \quad (4.26)$$

Además, definimos para cada $m \in \{1, \dots, N\}$ la siguiente cantidad que expresa un error, el cual aparecerá en los siguientes resultados:

$$\mathbb{E}_m(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) := \left\{ \int_0^{t_m} |(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)|_{a,1}^2 ds \right\}^{1/2}. \quad (4.27)$$

Ahora bien, para obtener las cotas para $\|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_m)\|_{0,\Omega}$, con $m \in \{1, \dots, N\}$, se debe antes establecer dos lemas técnicos previos que serán de utilidad en la demostración del teorema que establece esta cota. El siguiente lema tiene que ver con el segundo término del lado derecho de la segunda ecuación de **(S5)**(cf. (4.15)) y con la cantidad \mathcal{F}_1^n previamente definida.

Lema 4.2 *Existe $C_{20} > 0$ tal que, para cada $m \in \{1, \dots, N\}$, la siguiente estimación de error se satisface:*

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s) \left\{ (\mathbf{div} \Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_n, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})_{0,\Omega} + \Delta_t \mathcal{R}_2^n(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) \right\} ds \leq C_{20} \left\{ \sum_{n=1}^m \mathcal{F}_1^n \right\}^{1/2} \mathbb{E}_m(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma}). \quad (4.28)$$

Demostración: Integrando por partes, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (4.21) obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{div} \Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_n, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})_{0,\Omega} &= -(\Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_n, \nabla(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}))_{0,\Omega} \\ &\leq \|\Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_n\|_{0,\Omega} \|\nabla(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})\|_{0,\Omega} \leq \|\Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_n\|_{0,\Omega} |\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma}|_{a,1} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Por otra parte, como $(\mathcal{R}_2^n - \mathcal{R}_2^{n-1})(\mathbf{w}_h) = 0$ para todo $\mathbf{w}_h \in Q_h^n \cap Q_h^{n-1}$, tenemos que

$$\Delta_t \mathcal{R}_2^n(\mathbf{v}) = \Delta_t \mathcal{R}_2^n(\mathbf{v} - \mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{v} \in Q \quad \forall \mathbf{w}_h \in Q_h^n \cap Q_h^{n-1}. \quad (4.30)$$

Luego, usando $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u} \in Q$ y $\mathbf{w}_h = \hat{\mathcal{P}}_h^n(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) \in Q_h^n \cap Q_h^{n-1}$ dentro de (4.30), la estimación (4.1) y la identidad (4.21) obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_t \mathcal{R}_2^n(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) &= \Delta_t \mathcal{R}_2^n(\{\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}\} - \hat{\mathcal{P}}_h^n(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})) \leq \|\Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega} \|\{\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}\} - \hat{\mathcal{P}}_h^n(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|\Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega} C_{18} \hat{h}_n \|\nabla(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})\|_{0,\Omega} = \|C_{18} \hat{h}_n \Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega} |\hat{\Sigma} - \sigma|_{a,1} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Luego, usando desigualdad de Cauchy-Schwarz y desigualdades triangulares obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s) [(\operatorname{div} \Delta_t \Sigma_n, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})_{0,\Omega} + \Delta_t \mathcal{R}_2^n(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})] ds \\ &\leq \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} |t_n - s| (\|\Delta_t \Sigma_n\|_{0,\Omega} + \|C_{18} \hat{h}_n \Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega}) |(\hat{\Sigma} - \sigma)(s)|_{a,1} ds \\ &\leq \left\{ 2 \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} |t_n - s|^2 (\|\Delta_t \Sigma_n\|_{0,\Omega}^2 + \|C_{18} \hat{h}_n \Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega}^2) ds \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} |(\hat{\Sigma} - \sigma)(s)|_{a,1}^2 ds \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{2} \left\{ \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} |t_n - s|^2 (\|\Delta_t \Sigma_n\|_{0,\Omega}^2 + \|C_{18} \hat{h}_n \Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega}^2) ds \right\}^{1/2} \mathbb{E}_m(\hat{\Sigma} - \sigma) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Finalmente, usando el hecho que $(\|\Delta_t \Sigma_n\|_{0,\Omega}^2 + \|C_{18} \hat{h}_n \Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega}^2)$ no depende de $s \in]t_{n-1}, t_n]$ y $|t_n - s| \leq \tau_n$ para todo $s \in]t_{n-1}, t_n]$ se tiene

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} |t_n - s|^2 (\|\Delta_t \Sigma_n\|_{0,\Omega}^2 + \|C_{18} \hat{h}_n \Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega}^2) ds \\ &= \sum_{n=1}^m \left\{ \int_{t_{n-1}}^{t_n} |t_n - s|^2 ds \right\} (\|\Delta_t \Sigma_n\|_{0,\Omega}^2 + \|C_{18} \hat{h}_n \Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega}^2) \\ &\leq \sum_{n=1}^m \left\{ \int_{t_{n-1}}^{t_n} \tau_n^2 ds \right\} (\|\Delta_t \Sigma_n\|_{0,\Omega}^2 + \|C_{18} \hat{h}_n \Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega}^2) \\ &= \sum_{n=1}^m \tau_n^3 (\|\Delta_t \Sigma_n\|_{0,\Omega}^2 + \|C_{18} \hat{h}_n \Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega}^2). \end{aligned}$$

Reemplazando esta última expresión arriba concluimos la demostración con $C_{20} := \sqrt{2} > 0$. ■

El Lema que se presenta a continuación tiene que ver con el último término del lado derecho de la segunda ecuación de **(S5)** (cf. (4.15)) y con la cantidad \mathcal{F}_2^n previamente

definida.

Lema 4.3 *Existe $C_{21} > 0$ tal que la siguiente desigualdad se satisface para cada $m \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{1}{\tau_n} ((I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})_{0,\Omega} ds \leq C_{21} \left\{ \sum_{n=1}^m \mathcal{F}_2^n \right\}^{1/2} \mathbb{E}_m(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \quad (4.33)$$

Demostración: Usando la definición del proyector ortogonal \mathcal{P}_h^n , se tiene

$$\frac{1}{\tau_n} \left((I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u} \right)_{0,\Omega} = \frac{1}{\tau_n} \left((I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u} - \mathcal{P}_h^n(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) \right)_{0,\Omega} \quad (4.34)$$

Entonces, usando (4.34), la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la estimación (4.2) y la identidad (4.21) llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_n} \left((I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u} \right)_{0,\Omega} &\leq \frac{1}{\tau_n} \|(I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}\|_{0,\Omega} C_{19} h_n \|\nabla(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})\|_{0,\Omega} \\ &= \frac{1}{\tau_n} \|C_{19} h_n (I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}\|_{0,\Omega} |\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma}|_{a,1} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Así, integrando (4.35) entre 0 a t_m , con $m \in \{1, \dots, N\}$ y aplicando Cauchy-Schwarz nuevamente, obtenemos directamente (4.33) concluyendo la demostración con $C_{21} := \sqrt{C_{19}} > 0$. ■

A continuación, a partir de los dos lemas anteriores, se establece el teorema que nos entrega la cota deseada:

Teorema 4.1 *Para cualquier $t \in [0, T]$, sea $(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{u}(t)) \in H_0 \times Q$ la solución de (2.4), sean $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ y $\hat{\mathbf{U}}$ las reconstrucciones elípticas mixtas definidas arriba y sea $\mathcal{H}_3 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por*

$$\mathcal{H}_3(t) := \|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t)\|_{0,\Omega}^2 + 2 \int_0^t |(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(s)|_{a,1}^2 ds.$$

Entonces, para cada $m \in \{1, \dots, N\}$, la siguiente desigualdad se satisface:

$$\mathcal{H}_3(t_m) \leq C_{22} \left\{ \|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^m \mathcal{F}_i^n \right\}, \quad (4.36)$$

donde $C_{22} > 0$ es una constante independiente de h_m , $m \in \{1, \dots, N\}$.

Demostración: Tomando $\boldsymbol{\tau} = (\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t)$ y $\mathbf{v} = (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t)$ en **(S5)** (ec. (4.15)) y sustrayendo ambas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t)\|_{0,\Omega}^2 + |(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t)|_{a,1}^2 &= \left(\frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t) \right)_{0,\Omega} \\ &+ (t_n - t) \left\{ (\mathbf{div} \Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_n, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t))_{0,\Omega} + \Delta_t \mathcal{R}_2^n((\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t)) \right\} \\ &+ (\mathbf{f}_n - \mathbf{f}(t), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t))_{0,\Omega} + \frac{1}{\tau_n} ((I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t))_{0,\Omega} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Integrando (4.37) respecto al tiempo, de 0 a t_m , con $m \in \{1, \dots, N\}$, llegamos a

$$\mathcal{H}_3(t_m) \leq \mathbb{A}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}; \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) + 2\mathbb{B}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) + 2\mathbb{C}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}), \quad (4.38)$$

de donde, para cada $m \in \{1, \dots, N\}$ se define:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}; \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) &:= \|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega}^2 + 2 \int_0^{t_m} \left(\frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s) \right)_{0,\Omega} ds \\ &+ 2 \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{f}_n - \mathbf{f}(s), \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})_{0,\Omega} ds, \end{aligned}$$

$$\mathbb{B}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) := \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s) \left\{ (\mathbf{div} \Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_n, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s))_{0,\Omega} + \Delta_t \mathcal{R}_2^n((\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s)) \right\} ds,$$

y

$$\mathbb{C}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) := \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{1}{\tau_n} ((I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s))_{0,\Omega} ds.$$

Sea $t_m^* \in [0, t_m]$ tal que

$$\mathcal{H}_3(t_m^*) := \max_{0 \leq t \leq t_m} \mathcal{H}_3(t).$$

Además, notar que

$$\|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t)\|_{0,\Omega} \leq \mathcal{H}_3^{1/2}(t_m^*) \quad \forall t \in [0, t_m] \quad (4.39)$$

y

$$\left\{ \int_0^{t_m} |(\hat{\Sigma} - \sigma)^d(s)|_{a,1}^2 ds \right\}^{1/2} =: \mathbb{E}_m(\hat{\Sigma} - \sigma) \leq \mathcal{H}_3^{1/2}(t_m^*). \quad (4.40)$$

De esta manera, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (4.38) podemos estimar el primer término del lado derecho de (4.38) como sigue:

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}; \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U}) \\ & \leq \|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega}^2 + 2 \int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{0,\Omega} \|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s)\|_{0,\Omega} ds \\ & \quad + 2 \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}(s)\|_{0,\Omega} \|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s)\|_{0,\Omega} ds \\ & \leq \left\{ \|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega} + 2 \int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{0,\Omega} ds + 2 \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}(s)\|_{0,\Omega} ds \right\} \\ & \quad \times \mathcal{H}_3^{1/2}(t_m^*) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Por otra parte, usando el lema 4.2 (cf. (4.28)) y el lema 18 (cf. (4.33)) y la observación (4.40), obtenemos directamente estimaciones para el segundo y tercer término del lado derecho de (4.38):

$$\mathbb{B}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) \leq C_{10} \left\{ \sum_{n=1}^m \mathcal{F}_1^n \right\}^{1/2} \mathcal{H}_3^{1/2}(t_m^*) \quad (4.42)$$

y

$$\mathbb{C}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) \leq C_{11} \left\{ \sum_{n=1}^m \mathcal{F}_2^n \right\}^{1/2} \mathcal{H}_3^{1/2}(t_m^*). \quad (4.43)$$

Luego, se reemplaza (4.41), (4.42) y (4.43) dentro de (4.38), y que el resultado es válido también para $t = t_m^*$, para así cancelar uno de los términos de ambos lados para poder usar $\mathcal{H}_3^{1/2}(t_m) \leq \mathcal{H}_3^{1/2}(t_m^*)$. Elevando al cuadrado a ambos lados y usando la notación (4.24) para el término $\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}(s)\|_{0,\Omega}^2 ds$, concluimos la demostración. ■

Notar que nos queda estimar la expresión

$$\int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds,$$

la cual se hará en la próxima Sección.

El otro objetivo de esta Sección es obtener una cota para $|(\hat{\Sigma} - \sigma)(t_m)|_{a,1}$. Para ello, es necesario antes establecer un resultado que se usará en la demostración de la cota deseada, el cual se enuncia a continuación y tiene que ver con la cantidad \mathcal{F}_5^n previamente definida en (4.26).

Lema 4.4 *La siguiente expresión se satisface para cada $m \in \{2, \dots, N\}$:*

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{1}{\tau_n} \left((I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}, \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s) \right)_{0,\Omega} ds \\
&= -(\tau_1^{-1} (I - \mathcal{P}_h^1) \mathbf{U}_0, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_0))_{0,\Omega} + (\tau_m^{-1} (I - \mathcal{P}_h^m) \mathbf{U}_{m-1}, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_m))_{0,\Omega} \\
&+ \sum_{n=2}^m \tau_n (\Delta_t (\tau_n^{-1} (\mathcal{P}_h^n - I) \mathbf{U}_{n-1}), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_{n-1}))_{0,\Omega}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Demostración: Integrando $\frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})$ desde t_{n-1} a t_n dentro de la sumatoria se obtiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{1}{\tau_n} \left((I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}, \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) \right)_{0,\Omega} ds \\
&= \sum_{n=1}^m \frac{1}{\tau_n} \left((I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_n) - (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_{n-1}) \right)_{0,\Omega} \\
&= (\tau_1^{-1} (I - \mathcal{P}_h^1) \mathbf{U}_0, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_1) - (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_0))_{0,\Omega} \\
&+ (\tau_m^{-1} (I - \mathcal{P}_h^m) \mathbf{U}_{m-1}, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_m) - (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_{m-1}))_{0,\Omega} \\
&+ \sum_{n=2}^{m-1} \frac{1}{\tau_n} \left((I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_n) - (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_{n-1}) \right)_{0,\Omega}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Notar que la sumatoria del lado derecho de (4.45) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{m-1} \frac{1}{\tau_n} \left((I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_n) - (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_{n-1}) \right)_{0,\Omega} \\
&= (\tau_2^{-1} (I - \mathcal{P}_h^2) \mathbf{U}_1, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_2))_{0,\Omega} - (\tau_2^{-1} (I - \mathcal{P}_h^2) \mathbf{U}_1, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_1))_{0,\Omega} \\
&+ (\tau_3^{-1} (I - \mathcal{P}_h^3) \mathbf{U}_2, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_3))_{0,\Omega} - (\tau_3^{-1} (I - \mathcal{P}_h^3) \mathbf{U}_2, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_2))_{0,\Omega} \\
&+ \dots + \\
&(\tau_{m-1}^{-1} (I - \mathcal{P}_h^{m-1}) \mathbf{U}_{m-2}, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_{m-1}))_{0,\Omega} - (\tau_{m-1}^{-1} (I - \mathcal{P}_h^{m-1}) \mathbf{U}_{m-2}, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_{m-2}))_{0,\Omega}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Consideramos los lados derechos de las expresiones (4.45) y (4.46). Juntando el término

$$(\tau_1^{-1}(I - \mathcal{P}_h^1)\mathbf{U}_0, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_1))_{0,\Omega}$$

de (4.45) con

$$-(\tau_2^{-1}(I - \mathcal{P}_h^2)\mathbf{U}_1, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_1))_{0,\Omega}$$

de (4.46), se forma el término

$$\tau_2(\Delta_t(\tau_2^{-1}(\mathcal{P}_h^2 - I)\mathbf{U}_1), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_1))_{0,\Omega}.$$

De la misma manera se obtiene

$$\tau_m(\Delta_t(\tau_m^{-1}(\mathcal{P}_h^m - I)\mathbf{U}_{m-1}), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_{m-1}))_{0,\Omega},$$

y así, los otros términos de la sumatoria se agrupan de manera similar (argumento telescópico), obteniendo (4.44) y concluyendo la demostración. ■

Ahora se establece el otro resultado anunciado para $\hat{\Sigma} - \sigma$:

Teorema 4.2 *Para cualquier $t \in [0, T]$, sean $(\sigma(t), \mathbf{u}(t)) \in H_0 \times Q$ la solución de (2.4), $\hat{\Sigma}$ y $\hat{\mathbf{U}}$ las reconstrucciones elípticas mixtas definidas previamente y sea $\mathcal{H}_4 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por*

$$\mathcal{H}_4(t) := |(\hat{\Sigma} - \sigma)(t)|_{a,1}^2 + 2 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds.$$

Entonces, para cada $m \in \{1, \dots, N\}$, la siguiente desigualdad se satisface:

$$\mathcal{H}_4(t_m) \leq C_{23} \left\{ |(\hat{\Sigma} - \sigma)(0)|_{a,1}^2 + \int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \sum_{i=3}^5 \sum_{n=1}^m \mathcal{F}_i^n \right\}, \quad (4.47)$$

donde $C_{23} > 0$ es una constante independiente de h_m , $m \in \{1, \dots, N\}$.

Demostración: Derivando la primera ecuación de **(S5)** (cf. (4.15)) respecto a t se tiene

$$a \left(\frac{d}{dt}(\hat{\Sigma} - \sigma)(t), \tau \right) + b \left(\tau, \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t) \right) = 0 \quad \forall \tau \in H_0 \quad (4.48)$$

Ahora, tomando $\tau = (\hat{\Sigma} - \sigma)(t)$ en (4.48) y $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t)$ en la segunda ecuación de **(S5)** (cf. (4.15)) y sustrayendo ambas expresiones se llega a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |(\hat{\Sigma} - \sigma)(t)|_a^2 + \left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t) \right\|_{0,\Omega}^2 \\
&= \left(\frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t), \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t) \right)_{0,\Omega} \\
&+ (t_n - t) \left\{ \left(\operatorname{div} \Delta_t \Sigma_n, \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t) \right)_{0,\Omega} + \Delta_t \mathcal{R}_2^n \left(\frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t) \right) \right\} \\
&+ \left(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}(t), \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t) \right)_{0,\Omega} + \frac{1}{\tau_n} \left((I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}, \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t) \right)_{0,\Omega}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Integrando (4.49) de 0 a t_m , con $m \in \{1, \dots, N\}$ obtenemos

$$\mathcal{H}_4(t_m) = \tilde{\mathbb{A}}_0(\hat{\Sigma} - \sigma) + 2\tilde{\mathbb{B}}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U}, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) + 2\tilde{\mathbb{C}}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}), \tag{4.50}$$

donde

$$\tilde{\mathbb{A}}_0(\hat{\Sigma} - \sigma) := |(\hat{\Sigma} - \sigma)(0)|_{a,1}^2,$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathbb{B}}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U}, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) \\
&:= \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s), \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s) \right)_{0,\Omega} ds \\
&+ \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s) \left\{ \left(\operatorname{div} \Delta_t \Sigma_n, \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s) \right)_{0,\Omega} + \Delta_t \mathcal{R}_2^n \left(\frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s) \right) \right\} ds \\
&+ \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}(s), \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s) \right)_{0,\Omega} ds,
\end{aligned}$$

y

$$\tilde{\mathbb{C}}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) := \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{1}{\tau_n} \left((I - \mathcal{P}_h^n) \mathbf{U}_{n-1}, \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s) \right)_{0,\Omega} ds.$$

Sea $t_m^{**} \in [0, t_m]$ tal que

$$\mathcal{H}_4(t_m^{**}) := \max_{0 \leq t \leq t_m} \mathcal{H}_4(t).$$

Primero notar que el primer término del lado derecho de (4.50) se puede estimar como

$$\tilde{\mathbb{A}}_0 := |(\hat{\Sigma} - \sigma)(0)|_{a,1}^2 \leq |(\hat{\Sigma} - \sigma)(0)|_{a,1} \mathcal{H}_4^{1/2}(t_m^{**}). \quad (4.51)$$

Además notar que, usando Cauchy-Schwarz podemos estimar de manera directa el segundo término del lado derecho de (4.50) como

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbb{B}}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U}, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) \\ & \leq \left\{ \left(\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{3} \sum_{n=1}^m \tau_n^3 (\|\mathbf{div} \Delta_t \Sigma_n\|_{0,\Omega}^2 + \|\Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega}^2) \right)^{1/2} \right. \\ & \quad \left. + \left(\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}\|_{0,\Omega}^2 ds \right)^{1/2} \right\} \left(\int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right)^{1/2} \\ & \leq \left\{ \left(\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{3} \sum_{n=1}^m \tau_n^3 \left\{ \|\mathbf{div} \Delta_t \Sigma_n\|_{0,\Omega}^2 + \|\Delta_t \mathcal{R}_2^n\|_{0,\Omega}^2 \right\} \right)^{1/2} \right. \\ & \quad \left. + \left(\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}\|_{0,\Omega}^2 ds \right)^{1/2} \right\} \mathcal{H}_4^{1/2}(t_m^{**}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Por otro lado, para el último término de (4.50), usamos el lema previo (cf. (4.44)) y las proyecciones \mathcal{P}_h^n sobre las mallas temporales extremas ($n = 0$ y $n = m$) y las proyecciones $\hat{\mathcal{P}}_h^n$ sobre las mallas temporales internas ($2 \leq n \leq m-1$) con el fin de obtener

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{C}}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) & = -(\tau_1^{-1}(I - \mathcal{P}_h^1)\mathbf{U}_0, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_0) - \mathcal{P}_h^0((\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_0)))_{0,\Omega} \\ & \quad + (\tau_m^{-1}(I - \mathcal{P}_h^m)\mathbf{U}_{m-1}, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_m) - \mathcal{P}_h^m((\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_m)))_{0,\Omega} \\ & \quad + \sum_{n=2}^m \tau_n (\Delta_t(\tau_n^{-1}(\mathcal{P}_h^n - I)\mathbf{U}_{n-1}), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_{n-1}) - \hat{\mathcal{P}}_h^{n-1}((\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_{n-1})))_{0,\Omega} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Por lo tanto, usando (4.68), (4.2) y Cauchy-Schwarz dentro de (4.53) obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{C}}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) & \leq \|\tau_1^{-1} h_1 (I - \mathcal{P}_h^1) \mathbf{U}_0\|_{0,\Omega} \|\nabla((\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_0))\|_{0,\Omega} \\ & \quad + \|\tau_m^{-1} h_m (I - \mathcal{P}_h^m) \mathbf{U}_{m-1}\|_{0,\Omega} \|\nabla((\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_m))\|_{0,\Omega} \\ & \quad + \sum_{n=2}^m \tau_n \|\hat{h}_n \Delta_t(\tau_n^{-1}(\mathcal{P}_h^n - I)\mathbf{U}_{n-1})\|_{0,\Omega} \|\nabla((\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_{n-1}))\|_{0,\Omega} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Usando (4.21) dentro de (4.54) en conjunto con la definición de $\mathcal{H}_4(t_m^{**})$, llegamos a:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}_m(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) \leq & \left\{ \|\tau_1^{-1} h_1 (I - \mathcal{P}_h^1) \mathbf{U}_0\|_{0,\Omega} + \|\tau_m^{-1} h_m (I - \mathcal{P}_h^m) \mathbf{U}_{m-1}\|_{0,\Omega} \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^m \tau_n \|\hat{h}_n \Delta_t (\tau_n^{-1} (\mathcal{P}_h^n - I) \mathbf{U}_{n-1})\|_{0,\Omega} \right\} \mathcal{H}_4^{1/2}(t_m^{**}). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Finalmente, sustituyendo (4.51), (4.52) y (4.55) dentro de (4.50) después de reemplazar t_m por t_m^{**} , elevando al cuadrado y usando las notaciones (4.24), (4.25) y (4.26) obtenemos (4.47) y de esta manera concluimos la demostración. ■

Notar que de la misma manera que en el teorema anterior, queda por acotar la expresión

$$\int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds,$$

la cual será estimada en la próxima Sección.

4.1.2. Segunda contribución: $(\hat{\Sigma} - \Sigma, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})$

Notamos que el sistema **(S6)** (cf. (4.16)) es similar en *forma* al sistema **(S2)** (cf. (3.8)), luego, podemos proceder de manera análoga a la Sección 3.1.2, ya que en cada tiempo t_0, \dots, t_N se tiene una discretización del espacio y de esta manera podemos tener una estimación para $\|((\hat{\Sigma} - \Sigma)(t_m), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m))\|_{H_0 \times Q}$, con $m \in \{1, \dots, n\}$. Definimos las siguientes notaciones para los estimadores de esta segunda contribución del error, para cada $m \in \{1, \dots, N\}$:

$$\Theta_{1,m} := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_m} \theta_{K,m}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.56)$$

$$\tilde{\Theta}_{1,m} := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_m} \partial_t \theta_{K,m}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.57)$$

donde, para cada $K \in \mathcal{T}_m$ se tiene

$$\begin{aligned}
\theta_{K,m}^2 &:= \|\mathcal{P}_h^m(\Delta_t \mathbf{U}_m) - \mathbf{div} \Sigma_m - \mathbf{f}_m\|_{0,K}^2 + h_m^2 \left\| \mathbf{rot} \left\{ \frac{1}{\mu} \Sigma_m^d \right\} \right\|_{0,K}^2 \\
&+ h_m \left\| \nabla \mathbf{U}_m - \frac{1}{\mu} \Sigma_m^d \right\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Omega)} h_m \left\| \left[\frac{1}{\mu} \Sigma_m^d \mathbf{s} \right] \right\|_{0,e}^2 \\
&+ \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Gamma)} h_m \left\| \frac{1}{\mu} \Sigma_m^d \mathbf{s} \right\|_{0,e}^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\partial_t \theta_{K,m}^2 &:= \|\Delta_t(\mathcal{P}_h^m(\Delta_t \mathbf{U}_m)) - \mathbf{div} \Delta_t \Sigma_m - \Delta_t \mathbf{f}_m\|_{0,K}^2 + h_m^2 \left\| \mathbf{rot} \left\{ \frac{1}{\mu} \Delta_t \Sigma_m^d \right\} \right\|_{0,K}^2 \\
&+ h_m \left\| \nabla(\Delta_t \mathbf{U}_m) - \frac{1}{\mu} \Delta_t \Sigma_m^d \right\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Omega)} h_m \left\| \left[\frac{1}{\mu} \Delta_t \Sigma_m^d \mathbf{s} \right] \right\|_{0,e}^2 \\
&+ \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Gamma)} h_m \left\| \mu^{-1} \Delta_t \Sigma_m^d \mathbf{s} \right\|_{0,e}^2.
\end{aligned}$$

El próximo resultado sigue la misma idea desarrollada en el Teorema 3.2 (cf. (3.38))

Teorema 4.3 *La siguiente desigualdad se satisface para cada $m \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\|(\hat{\Sigma} - \Sigma)(t_m), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m)\|_{H_0 \times Q} \leq C_{24} \Theta_{1,m}, \quad (4.58)$$

donde $C_{24} > 0$ es independiente de h_m .

Demostración: Gracias a la dependencia continua de la solución de **(S6)** (cf. (4.16)), tenemos la condición inf-sup global para la solución $((\hat{\Sigma} - \Sigma)(t_m), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m)) \in H_0 \times Q$, esto es, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&C \|(\hat{\Sigma} - \Sigma)(t_m), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m)\|_{H_0 \times Q} \\
&\leq \sup_{(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in H_0 \times Q \setminus \{\theta\}} \frac{a((\hat{\Sigma} - \Sigma)(t_m), \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m)) + b((\hat{\Sigma} - \Sigma)(t_m), \mathbf{v})}{\|(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\|_{H_0 \times Q}}
\end{aligned}$$

Usando **(S6)** (cf. (4.16)) conjunto con (4.17) y (4.18) (con el correspondiente cambio de índice $n = m$ aquí) obtenemos

$$\begin{aligned}
C\|((\hat{\Sigma} - \Sigma)(t_m), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m))\|_{H_0 \times Q} &\leq \sup_{(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in H_0 \times Q \setminus \{\theta\}} \frac{[\hat{\mathcal{R}}_1(\boldsymbol{\tau})](t_m) + [\hat{\mathcal{R}}_2(\mathbf{v})](t_m)}{\|(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\|_{H_0 \times Q}} \\
&\leq \sup_{(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in H_0 \times Q \setminus \{\theta\}} \frac{\mathcal{R}_1^m(\boldsymbol{\tau}) + \mathcal{R}_2^m(\mathbf{v})}{\|(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\|_{H_0 \times Q}} \quad (4.59) \\
&\leq \sup_{\boldsymbol{\tau} \in H_0} \frac{\mathcal{R}_1^m(\boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\text{div}, \Omega}} + \|\mathcal{R}_2^m\|_{0, \Omega}
\end{aligned}$$

Debido a que $\mathcal{R}_1^m(\boldsymbol{\tau})$ es similar a $\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau})$, se pueden seguir los mismos argumentos desarrollados en [11, Lemas 4.3,4.4] con el fin de obtener:

$$|\mathcal{R}_1^m(\boldsymbol{\tau})| \leq \tilde{C} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_m} \theta_{1,K}^2(t_m) + \theta_{2,K}^2(t_m) \right)^{1/2} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\text{div}, \Omega}$$

con $\tilde{C} > 0$, y $\theta_{1,K}^2$ y $\theta_{2,K}^2$ definidos como en (3.36) y (3.37) pero con $\underline{\Sigma}$ en vez de $\underline{\sigma}_h$ y $\underline{\mathbf{U}}$ en vez de $\underline{\mathbf{u}}_h$. Por otro lado, es claro que

$$\|\mathcal{R}_2^m\|_{0, \Omega} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_m} \|\mathcal{P}_h^m(\Delta_t \mathbf{U}_m) - \mathbf{div} \Sigma_m - \mathbf{f}_m\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}.$$

Siguiendo ambas observaciones y reemplazándolas en (4.59) llegamos directamente a (4.58), concluyendo la demostración. ■

Ahora, del teorema 3.1.3 (ec. (3.40)), se tiene la estimación de error para la derivada temporal $\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})$:

Lema 4.5 *La siguiente estimación de error se satisface para cada $m \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m) \right\|_{0, \Omega} \leq C_{25} \tilde{\Theta}_{1,m}, \quad (4.60)$$

donde $C_{25} > 0$ no depende de h_m .

Demostración: Siguiendo la misma línea desarrollada a lo largo de la Subsección 3.1.3, basaremos nuestro análisis tomando derivadas temporales a ambas ecuaciones del sistema **(S6)**(cf. (4.16)). Entonces, derivando ambas ecuaciones respecto a t , y usando (4.19) y (4.20), en el nivel $t = t_m$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
a \left(\frac{d}{dt}(\hat{\Sigma} - \Sigma)(t_m), \boldsymbol{\tau} \right) + b \left(\boldsymbol{\tau}, \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m) \right) &= \Delta_t \mathcal{R}_1^m(\boldsymbol{\tau}) \\
b \left(\frac{d}{dt}(\hat{\Sigma} - \Sigma)(t_m), \mathbf{v} \right) &= \Delta_t \mathcal{R}_2^m(\mathbf{v}),
\end{aligned} \tag{4.61}$$

donde

$$\Delta_t \mathcal{R}_1^m(\boldsymbol{\tau}) := -\frac{1}{\mu} (\Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_m^d, \boldsymbol{\tau}^d)_{0,\Omega} - (\Delta_t \mathbf{U}_m, \mathbf{div} \boldsymbol{\tau})_{0,\Omega}$$

y

$$\Delta_t \mathcal{R}_2^m(\mathbf{v}) := (\Delta_t (\mathcal{P}_h^m(\Delta_t \mathbf{U}_m)) - \mathbf{div}(\Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_m) - \Delta_t \mathbf{f}_m, \mathbf{v})_{0,\Omega}.$$

De (4.61), se tiene que existe $C > 0$ tal que

$$C \left\| \left(\frac{d}{dt}(\hat{\Sigma} - \Sigma)(t_m), \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m) \right) \right\| \leq \sup_{\boldsymbol{\tau} \in H_0} \frac{\Delta_t \mathcal{R}_1^m(\boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\text{div},\Omega}} + \|\Delta_t \mathcal{R}_2^m\|_{0,\Omega}.$$

Siguiendo las mismas ideas del teorema anterior, y del Teorema 3.7, usando además el hecho que

$$\left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m) \right\|_{0,\Omega} \leq \left\| \left(\frac{d}{dt}(\hat{\Sigma} - \Sigma)(t_m), \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m) \right) \right\|_{H_0 \times Q},$$

obtenemos directamente (4.60) terminado la prueba. ■

Sin embargo, del análisis de la primera contribución, específicamente de los Teoremas 4.1 y 4.2, notamos que en el lado derecho de ambas estimaciones, aparece el término $\int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds$, el cual no ha sido estimado. Esto se resuelve en el siguiente teorema.

Teorema 4.4 *La siguiente desigualdad se satisface para cada $m \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 \leq C_{15}^2 \sum_{n=1}^m \tau_n \tilde{\Theta}_{1,n}^2 \tag{4.62}$$

Demostración: Usando (4.5) y (4.8) obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t) = \Delta_t(\hat{\mathbf{U}}_n - \mathbf{U}_n) \quad \forall t \in]t_{n-1}, t_n] \quad \forall n \in \{1, \dots, N\},$$

esto es, $\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})$ es constante a lo largo de cada intervalo $]t_{n-1}, t_n]$, $n \in \{1, \dots, N\}$. Luego, usando (4.60) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds &= \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \\
&= \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_n) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \\
&\leq C_{15}^2 \sum_{n=1}^m \tau_n \tilde{\Theta}_{1,n}^2,
\end{aligned}$$

concluyendo la demostración. ■

4.1.3. Estimación de error a posteriori para $(\Sigma - \sigma, \mathbf{U} - \mathbf{u})$

Ahora se usan los resultados de las secciones anteriores para dar lugar a una estimación a posteriori para $(\Sigma - \sigma, \mathbf{U} - \mathbf{u})$. Recordamos la definición de $\|(\cdot, \cdot)\|_1 : H_0 \times Q \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, dada en la Sección 3.1.4, la cual estaba dada como sigue:

$$\|(\sigma, \mathbf{v})\|_1 := |\sigma|_{a,1} + \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \quad \forall (\sigma, \mathbf{v}) \in H_0 \times Q.$$

Notamos que al igual que en el esquema semi-discreto, específicamente en la Sección 3.1.4, las expresiones $\|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(0)\|_{0,\Omega}$ y $|(\hat{\Sigma} - \Sigma)(0)|_{a,1}$, usando el Teorema 4.3 (cf. (4.58)) se pueden estimar como

$$\max \left\{ \|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(0)\|_{0,\Omega}, |(\hat{\Sigma} - \Sigma)(0)|_{a,1} \right\} \leq C_{24} \Theta_{1,0} \quad (4.63)$$

Damos paso al resultado principal de toda esta Sección:

Teorema 4.5 *Para todo $t \in [0, T]$, sean $(\sigma(t), \mathbf{u}(t)) \in H_0 \times Q$ y (Σ, \mathbf{U}) la solución de (2.4) y (4.4) respectivamente. Entonces, para cada $m \in \{1, \dots, N\}$, se tiene:*

$$\begin{aligned}
&\|(\Sigma_m, \mathbf{U}_m) - (\sigma(t_m), \mathbf{u}(t_m))\|_1^2 \\
&\leq C_{26} \left\{ \|(\mathbf{U} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega}^2 + |(\Sigma - \sigma)(0)|_{a,1}^2 + \Theta_{1,0}^2 + \sum_{i=1}^5 \sum_{n=1}^m \mathcal{F}_i^n + \sum_{n=1}^m \tau_n \tilde{\Theta}_{1,n}^2 + \Theta_{1,m}^2 \right\}
\end{aligned} \quad (4.64)$$

donde $C_{26} > 0$ indica una constante independiente de h_m .

Demostración: Aplicando desigualdades conocidas llegamos a:

$$\begin{aligned}
& \|\|(\boldsymbol{\Sigma}_m, \mathbf{U}_m) - (\boldsymbol{\sigma}(t_m), \mathbf{u}(t_m))\|\|_1^2 \\
& \leq 2\|\|(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t_m), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_m)\|\|_1^2 + 2\|\|(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(t_m) - \boldsymbol{\Sigma}_m, \hat{\mathbf{U}}(t_m) - \mathbf{U}_m)\|\|_1^2
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Usando la definición de $\|\|\cdot\|\|_1$ y las estimaciones (4.47) y (4.36), el primer sumando se puede estimar como:

$$\begin{aligned}
& \|\|(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t_m), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_m)\|\|_1^2 \\
& \leq 2|(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t_m)|_{a,1}^2 + 2\|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_m)\|_{0,\Omega}^2 \\
& \leq 2C_{23} \left\{ |(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(0)|_{a,1}^2 + \int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \sum_{i=3}^5 \sum_{n=1}^m \mathcal{F}_i^n \right\} \\
& + 2C_{22} \left\{ \|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(0)\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^m \mathcal{F}_i^n \right\}.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Por otra parte, usando desigualdades conocidas y la estimación (4.58), podemos estimar el segundo término del lado derecho de (4.65) como

$$\begin{aligned}
\|\|(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(t_m) - \boldsymbol{\Sigma}_m), (\hat{\mathbf{U}}(t_m) - \mathbf{u}_m)\|\|_1^2 & \leq 2|(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\Sigma})(t_m)|_{a,1}^2 + \|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m)\|_{0,\Omega}^2 \\
& \leq 2\|(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\Sigma})(t_m)\|_{\text{div},\Omega}^2 + 2\|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m)\|_{0,\Omega}^2 \\
& \leq 2\|((\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\Sigma})(t_m), (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m))\|_{H_0 \times Q}^2 \\
& \leq 2C_{14}^2 \Theta_{1,m}^2
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Insertando (4.66) y (4.67) dentro de (4.65), usando la desigualdad triangular en conjunto con (4.63) sobre las condiciones iniciales, la estimación (4.62) y juntando términos semejantes llegamos a (4.64), lo que concluye la demostración. ■

4.2. El problema de Stokes-Darcy evolutivo

En esta Sección se realizará un análisis de error a posteriori para el esquema completamente discreto mixto del problema de Stokes-Darcy, basado en el método de Euler regresivo. Todos los resultados en esta Sección se desprenden naturalmente siguiendo las mismas ideas desarrolladas en la Sección 4.1, para el problema de Stokes, por lo cual se omitirán los detalles de las demostraciones en donde la estructura subyacente de las expresiones sea la

misma.

Sea la partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ y para cada $n \in \{0, \dots, N\}$, sean $\tau_n := t_n - t_{n-1}$ y $\mathcal{T}_n := \mathcal{T}_{h,n}^S \cup \mathcal{T}_{h,n}^D$ donde $\mathcal{T}_{h,n}^S$ y $\mathcal{T}_{h,n}^D$ son refinamientos de una macrotriangulación que es triangulación de los dominios espaciales Ω_S y Ω_D respectivamente que satisfacen las hipótesis de regularidad usuales (cf. [4]). Dado que Ω_S y Ω_D coinciden en Σ , \mathcal{T}_n es un refinamiento de una macrotriangulación de $\Omega_S \cup \Sigma \cup \Omega_D$. Sea, para todo $x \in \Omega$,

$$h_n(x) := \text{diam}(K) \quad \text{donde } K \in \mathcal{T}_n \text{ y } x \in K.$$

Se define la derivada discreta como

$$\Delta_t \phi_{\star,n} := \frac{1}{\tau_n} (\phi_{\star,n} - \phi_{\star,n-1}) \quad \forall \star \in \{S, D, \Sigma\},$$

donde la notación $\phi_{\star,n}$, para cualquier función ϕ_{\star} , indica $\phi_{\star}(t_n)$, $\star \in \{S, D, \Sigma\}$. Para los elementos de los espacios producto, definimos su derivada discreta sobre cada componente, esto es,

$$\Delta_t(\boldsymbol{\tau}_{S,n}, \mathbf{v}_{D,n}, \boldsymbol{\psi}_{\Sigma,n}, \xi_{\Sigma,n}) := (\Delta_t \boldsymbol{\tau}_{S,n}, \Delta_t \mathbf{v}_{D,n}, \Delta_t \boldsymbol{\psi}_{\Sigma,n}, \Delta_t \xi_{\Sigma,n}) \quad \forall (\boldsymbol{\tau}_{S,n}, \mathbf{v}_{D,n}, \boldsymbol{\psi}_{\Sigma,n}, \xi_{\Sigma,n}) \in \mathbb{X}$$

y

$$\Delta_t(\mathbf{v}_{S,n}, q_{D,n}) := (\Delta_t \mathbf{v}_{S,n}, \Delta_t q_{D,n}) \quad \forall (\mathbf{v}_{S,n}, q_{D,n}) \in \mathbb{M}.$$

Para cada $n \in \{0, \dots, N\}$, consideraremos \mathbb{X}_h^n y \mathbb{M}_h^n definidos sobre las triangulaciones \mathcal{T}_n como los subespacios de elementos finitos de \mathbb{X} y \mathbb{M} respectivamente, definidos como sigue:

$$\mathbb{X}_h^n := \mathbb{H}^n(\Omega_S) \times \mathbf{H}_h^n(\Omega_D) \times \boldsymbol{\Xi}^n(\Sigma) \times \Xi_h^n(\Sigma)$$

y

$$\mathbb{M}_h^n := \mathbf{L}_h^n(\Omega_S) \times L_{h,0}^n(\Omega_D),$$

donde,

$$\mathbb{H}^n(\Omega_S) := \{\boldsymbol{\tau} : \Omega_S \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} : \mathbf{c}^t \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_h^n(\Omega_S) \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2\},$$

$$\mathbf{L}_h^n(\Omega_S) := L_h^n(\Omega_S) \times L_h^n(\Omega_S),$$

con

$$\mathbf{H}_h^n(\Omega_\star) := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega_\star) : \mathbf{v}_h|_K \in RT_0(K) \ \forall K \in \mathcal{T}_{h,n}^\star\}, \quad \forall \star \in \{S, D\},$$

$$L_h^n(\Omega_\star) := \{q_h : \Omega_\star \rightarrow \mathbb{R} : q_h|_K \in \mathbb{P}_0(K) \ \forall K \in \mathcal{T}_{h,n}^\star\} \quad \forall \star \in \{S, D\},$$

y

$$L_{h,0}^n(\Omega_D) := L_h^n(\Omega_D) \cap L_0^2(\Omega_D).$$

Además, para cada $n \in \{0, \dots, N\}$, podemos definir $\Sigma_{2h,n}$ de manera similar que en la Sección 2.2.2, y así podemos definir los siguientes espacios:

$$\Xi_h^n(\Sigma) := \{\xi_h \in C(\Sigma) : \xi_h|_e \in \mathbb{P}_1(e) \ \forall \text{ arco } e \in \Sigma_{2h,n}\}$$

y

$$\Xi^n(\Sigma) = \Xi_h^n(\Sigma) \times \Xi_h^n(\Sigma).$$

Dados dos refinamientos de la misma macrotriangulación $\mathcal{T}_{h,n-1}^\star$ y $\mathcal{T}_{h,n}^\star$, con $\star \in \{S, D\}$, definimos $\hat{\mathcal{T}}_{h,n}^\star$ como el *mejor engrosamiento común* de ellos, cuyo tamaño de malla está dado por $\hat{h}_n := \max\{h_n, h_{n-1}\}$ y sea $\hat{\mathbf{P}}_h^n : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}_h^n \cap \mathbb{M}_h^{n-1}$ como el operador vectorial definido como $\hat{\mathbf{P}}_h^n(\mathbf{v}_S, q_D) = (\hat{\mathcal{P}}_{h,S}^n \mathbf{v}_S, \hat{\mathcal{P}}_{h,D}^n q_D)$ para todo $(\mathbf{v}_S, q_D) \in \mathbb{M}$, donde $\hat{\mathcal{P}}_{h,S}^n$ y $\hat{\mathcal{P}}_{h,D}^n$ son las proyecciones relativas a los mejores engrosamientos comunes $\hat{\mathcal{T}}_{h,n}^S$ de $\mathcal{T}_{h,n}^S$ y $\mathcal{T}_{h,n-1}^S$ y $\hat{\mathcal{T}}_{h,n}^D$ de $\mathcal{T}_{h,n}^D$ y $\mathcal{T}_{h,n-1}^D$ respectivamente, y que satisfacen las siguientes propiedades de estabilidad:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_S - \hat{\mathcal{P}}_{h,S}^n \mathbf{v}_S\|_{0,\Omega_S} &\leq C_{27} \hat{h}_n \|\nabla \mathbf{v}_S\|_{0,\Omega_S} \quad \forall \mathbf{v}_S \in \mathbf{H}^1(\Omega_S), \\ \|q_D - \hat{\mathcal{P}}_{h,D}^n q_D\|_{0,\Omega_D} &\leq C_{28} \hat{h}_n \|\nabla q_D\|_{0,\Omega_D} \quad \forall q_D \in H^1(\Omega_D). \end{aligned} \tag{4.68}$$

También definimos $\mathbf{P}_h^n : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}_h^n$ como el operador vectorial dado por

$$\mathbf{P}_h^n(\mathbf{v}_S, q_D) := (\mathcal{P}_{h,S}^n \mathbf{v}_S, \mathcal{P}_{h,D}^n q_D),$$

donde $\mathcal{P}_{h,D}^n$ y $\mathcal{P}_{h,S}^n$ son las proyecciones ortogonales definidas como

$$(\mathcal{P}_{h,S}^n \mathbf{v}_S, \boldsymbol{\psi})_S = (\mathbf{v}_S, \boldsymbol{\psi})_S \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{L}_h^n(\Omega_S)$$

y

$$(\mathcal{P}_{h,D}^n q_D, \phi)_D = (q_D, \phi)_D \quad \forall \phi \in L_{h,0}^n(\Omega_D),$$

y que satisfacen las siguientes propiedades de estabilidad:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_S - \mathcal{P}_{h,S}^n \mathbf{v}_S\|_{0,\Omega} &\leq C_{29} h_n \|\nabla \mathbf{v}_S\|_{0,\Omega} \quad \forall \mathbf{v}_S \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \\ \|q_D - \mathcal{P}_{h,D}^n q_D\|_{0,\Omega} &\leq C_{30} h_n \|\nabla q_D\|_{0,\Omega} \quad \forall q_D \in H^1(\Omega_D). \end{aligned} \quad (4.69)$$

El *esquema completamente discreto* se lee como sigue: Dado $\underline{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{P}_h^0 \mathbf{u}_0$, hallar

$$\{(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}_n, \underline{\mathbf{U}}_n)\}_{n \in \{0, \dots, N\}},$$

con

$$(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}_n, \underline{\mathbf{U}}_n) := ((\boldsymbol{\Sigma}_{S,n}, \mathbf{U}_{D,n}, \Psi_{\boldsymbol{\Sigma},n}, \Lambda_{\boldsymbol{\Sigma},n}), (\mathbf{U}_{S,n}, P_{D,n})) \in \mathbb{X}_h^n \times \mathbb{M}_h^n,$$

tal que

$$\mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}_0, \underline{\boldsymbol{\tau}}) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{U}}_0) = 0 \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X}_h^0, \quad (4.70)$$

y para cada $n \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}_n, \underline{\boldsymbol{\tau}}) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{U}}_n) &= 0 \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X}_h^n, \\ -\mathcal{D}_n(\underline{\mathbf{U}}_n, \underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}_n, \underline{\mathbf{v}}) &= \mathcal{G}_n(\underline{\mathbf{v}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{M}_h^n, \end{aligned} \quad (4.71)$$

donde

$$\mathcal{D}_n(\underline{\mathbf{U}}_n, \underline{\mathbf{v}}) := (\Delta_t \mathbf{U}_{S,n}, \mathbf{v}_S)_S + (\Delta_t p_{D,n}, q_D)_D \quad \forall \underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_S, q_D) \in \mathbb{M}$$

y

$$\mathcal{G}_n(\underline{\mathbf{v}}) := -(\mathbf{f}_{S,n}, \mathbf{v}_S)_S - (f_{D,n}, q_D)_D \quad \forall \underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_S, q_D) \in \mathbb{M}.$$

Dadas dos sucesiones de valores discretos $\{\underline{\mathbf{U}}_n\}$, $\{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}_n\}$, $n \in \{0, \dots, N\}$, asociamos dos funciones temporales a través de interpolantes continuos a trozos $\underline{\mathbf{U}}(t)$, $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}(t)$, con $t \in [0, T]$, como

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{U}}(t) &= \frac{t_n - t}{\tau_n} \underline{\mathbf{U}}_{n-1} + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \underline{\mathbf{U}}_n \\ &= \underline{\mathbf{U}}_{n-1} + (t - t_{n-1}) \Delta_t \underline{\mathbf{U}}_n, \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(t) &= \frac{t_n - t}{\tau_n} \underline{\Sigma}_{n-1} + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \underline{\Sigma}_n \\ &= \underline{\Sigma}_{n-1} + (t - t_{n-1}) \Delta_t \underline{\Sigma}_n, \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

Notar que la derivada temporal de $\underline{\mathbf{U}}$ restringida a $]t_{n-1}, t_n]$ queda como

$$\frac{d\underline{\mathbf{U}}(t)}{dt} = \Delta_t \underline{\mathbf{U}}_n \quad \forall t \in]t_{n-1}, t_n]. \quad (4.72)$$

Sean $\underline{\mathbf{e}}_u(t) = \underline{\mathbf{U}}(t) - \underline{\mathbf{u}}(t)$ y $\underline{\mathbf{e}}_\sigma(t) = \underline{\Sigma}(t) - \underline{\sigma}(t)$. Tal como en el caso semidiscreto y para el problema de Stokes en la Sección anterior, debemos definir los *residuos discretos* como sigue:

Definición 4.3 Para cada $n \geq 1$, se definen los *residuos discretos* como:

$$\mathcal{R}_3^n(\underline{\boldsymbol{\tau}}) := -\mathcal{A}(\underline{\Sigma}_n, \underline{\boldsymbol{\tau}}) - \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{U}}_n) \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X},$$

$$\mathcal{R}_4^n(\underline{\mathbf{v}}) := (\mathcal{P}_{h,S}^n(\Delta_t \mathbf{U}_{S,n}), \mathbf{v}_S)_S + (\mathcal{P}_{h,D}^n(\Delta_t P_{D,n}), q_D)_D - \mathcal{B}(\underline{\Sigma}_n, \underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{G}_n(\underline{\mathbf{v}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_S, q_D) \in \mathbb{M},$$

y para $n = 0$ fijamos $\mathcal{R}_3^0(\underline{\boldsymbol{\tau}}) := -\mathcal{A}(\underline{\Sigma}_0, \underline{\boldsymbol{\tau}}) - \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{U}}_0)$ y $\mathcal{R}_4^0(\underline{\mathbf{v}}) := 0$.

Además notamos que $\mathcal{R}_3^n(\underline{\boldsymbol{\tau}}_n) = 0 \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}}_n \in \mathbb{X}_h^n$ y $\mathcal{R}_4^n(\underline{\mathbf{v}}_n) = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{v}}_n \in \mathbb{M}_h^n$ y que para todo $t \in]t_{n-1}, t_n]$, $n \in \{1, \dots, N\}$, se satisface el siguiente sistema mixto:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\underline{\mathbf{e}}_\sigma(t), \underline{\boldsymbol{\tau}}) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{e}}_u(t)) &= -\mathcal{R}_3^n(\underline{\boldsymbol{\tau}}) + \mathcal{A}(\underline{\Sigma}(t) - \underline{\Sigma}_n, \underline{\boldsymbol{\tau}}) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{U}}(t) - \underline{\mathbf{U}}_n) \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X}, \\ -\mathcal{D}_n(\underline{\mathbf{e}}_u(t), \underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{B}(\underline{\mathbf{e}}_\sigma(t), \underline{\mathbf{v}}) &= -\mathcal{R}_4^n(\underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{B}(\underline{\Sigma}(t) - \underline{\Sigma}_n, \underline{\mathbf{v}}) + (\mathcal{G} - \mathcal{G}_n)(\underline{\mathbf{v}}) \\ &\quad + \frac{1}{\tau_n} (\mathcal{P}_{h,S}^n \mathbf{U}_{S,n-1} - \mathbf{U}_{S,n-1}, \mathbf{v}_S)_S \\ &\quad + \frac{1}{\tau_n} (\mathcal{P}_{h,D}^n P_{D,n-1} - P_{D,n-1}, q_D)_D \quad \forall \underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_S, q_D) \in \mathbb{M}.\end{aligned} \quad (4.73)$$

Como es usual, debemos definir las *reconstrucciones elípticas mixtas* en el nivel $t = t_n$ como sigue:

Definición 4.4 Para cada $n \in \{0, \dots, N\}$, dados $\underline{\Sigma}_n$ y $\underline{\mathbf{U}}_n$, se definen las *reconstrucciones elípticas mixtas*

$$(\hat{\underline{\Sigma}}_n, \hat{\underline{\mathbf{U}}}_n) := ((\hat{\Sigma}_{S,n}, \hat{\mathbf{U}}_{D,n}, \hat{\Psi}_{\Sigma,n}, \hat{\Lambda}_{\Sigma,n}), (\hat{\mathbf{U}}_{S,n}, \hat{P}_{D,n}))$$

como la solución de la siguiente formulación variacional mixta: Hallar $\hat{\underline{\Sigma}}_n \in \mathbb{X}$ y $\hat{\underline{U}}_n \in \mathbb{M}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\hat{\underline{\Sigma}}_n - \underline{\Sigma}_n, \underline{\tau}) + \mathcal{B}(\underline{\tau}, \hat{\underline{U}}_n - \underline{U}_n) &= \mathcal{R}_3^n(\underline{\tau}) \quad \forall \underline{\tau} \in \mathbb{X}, \quad n = 0, \dots, N, \\ \mathcal{B}(\hat{\underline{\Sigma}}_n - \underline{\Sigma}_n, \underline{\mathbf{v}}) &= \mathcal{R}_4^n(\underline{\mathbf{v}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{M}, \quad n = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Se puede probar además que $\hat{\underline{U}}_n \in \tilde{\mathbb{M}} := \mathbf{H}^1(\Omega_S) \times H^1(\Omega_D)$ (cf. [3, Página 147]). Dada una sucesión de valores discretos $\{\hat{\underline{\Sigma}}_n\}_{n \in \{0, \dots, N\}}$ y $\{\hat{\underline{U}}_n\}_{n \in \{0, \dots, N\}}$ definimos respectivamente, $\hat{\underline{\Sigma}}(t)$ y $\hat{\underline{U}}(t)$ como sus interpolantes continuos a trozos, esto es,

$$\hat{\underline{U}}(t) = \hat{\underline{U}}_{n-1} + (t - t_{n-1})\Delta_t \hat{\underline{U}}_n \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, \dots, N$$

$$\hat{\underline{\Sigma}}(t) = \hat{\underline{\Sigma}}_{n-1} + (t - t_{n-1})\Delta_t \hat{\underline{\Sigma}}_n \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, \dots, N,$$

Notamos que la derivada temporal de $\hat{\underline{U}}(t)$ con t restringido a $]t_{n-1}, t_n]$ es

$$\frac{d\hat{\underline{U}}(t)}{dt} = \Delta_t \hat{\underline{U}}_n \quad \forall t \in]t_{n-1}, t_n]. \quad (4.75)$$

Para obtener las estimaciones de error, separamos los errores en dos contribuciones:

$$\mathbf{e}_u = (\hat{\underline{U}} - \mathbf{u}) - (\hat{\underline{U}} - \underline{U}), \quad (4.76)$$

y

$$\mathbf{e}_\sigma = (\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\sigma}) - (\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\Sigma}). \quad (4.77)$$

Insertando (4.74) en (4.73) y considerando las definiciones (4.76) y (4.77) obtenemos, para cada $t \in]t_{n-1}, t_n]$, $n \in \{1, \dots, N\}$, el sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\hat{\underline{\Sigma}}(t) - \underline{\sigma}(t), \underline{\tau}) + \mathcal{B}(\underline{\tau}, \hat{\underline{U}}(t) - \underline{\mathbf{u}}(t)) &= \mathcal{A}(\hat{\underline{\Sigma}}(t) - \hat{\underline{\Sigma}}_n, \underline{\tau}) + \mathcal{B}(\underline{\tau}, \hat{\underline{U}}(t) - \hat{\underline{U}}_n), \\ -\mathcal{D}(\hat{\underline{U}}(t) - \underline{\mathbf{u}}(t), \underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{B}(\hat{\underline{\Sigma}}(t) - \underline{\sigma}(t), \underline{\mathbf{v}}) &= -\mathcal{D}(\hat{\underline{U}}(t) - \underline{U}(t), \underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{B}(\hat{\underline{\Sigma}}(t) - \hat{\underline{\Sigma}}_n, \underline{\mathbf{v}}) \\ &\quad + (\mathcal{G}_n - \mathcal{G})(\underline{\mathbf{v}}) + \frac{1}{\tau_n} (\mathcal{P}_{h,S}^n \mathbf{U}_{S,n-1} - \mathbf{U}_{S,n-1}, \mathbf{v}_S)_S \\ &\quad + \frac{1}{\tau_n} (\mathcal{P}_{h,D}^n P_{D,n-1} - P_{D,n-1}, q_D)_D. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Debemos escribir algunos términos de (4.78) en una forma deseable con el fin de obtener una cota a posteriori. Nos fijamos sobre el segundo término del lado derecho de la segunda

ecuación de (4.78). Con respecto a este término, se tiene el siguiente resultado:

Lema 4.6 *La siguiente expresión se satisface para $t \in]t_{n-1}, t_n]$, con $n \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\mathcal{B}(\hat{\underline{\Sigma}} - \hat{\underline{\Sigma}}_n, \underline{\mathbf{v}}) = (t - t_n) \left\{ \mathcal{B}(\Delta_t \underline{\Sigma}_n, \underline{\mathbf{v}}) + \Delta_t \mathcal{R}_4^n(\underline{\mathbf{v}}) \right\} \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{M} \quad (4.79)$$

Demostración: Se sigue la misma idea desarrollada en la demostración del Lema 4.1. ■

Por su parte, no es difícil ver que

$$\mathcal{A}(\hat{\underline{\Sigma}} - \hat{\underline{\Sigma}}_n, \underline{\boldsymbol{\tau}}) + b(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\underline{\mathbf{U}}} - \hat{\underline{\mathbf{U}}}_n) = 0 \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X}. \quad (4.80)$$

De esta manera, usando (4.79) y (4.80), se tiene que (4.78) se reduce a:

$$(S7) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\boldsymbol{\tau}}) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\underline{\mathbf{U}}} - \underline{\mathbf{u}}) = 0 \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X}, \\ -\mathcal{D}(\hat{\underline{\mathbf{U}}} - \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{B}(\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\mathbf{v}}) = -\mathcal{D}(\hat{\underline{\mathbf{U}}} - \underline{\mathbf{U}}, \underline{\mathbf{v}}) + (t - t_n) [\mathcal{B}(\Delta_t \underline{\Sigma}_n, \underline{\mathbf{v}}) + \Delta_t \mathcal{R}_4^n(\underline{\mathbf{v}})] \\ \quad + (\mathcal{G}_n - \mathcal{G})(\underline{\mathbf{v}}) + \frac{1}{\tau_n} \left(\mathcal{P}_{h,S}^n \mathbf{U}_{S,n-1} - \mathbf{U}_{S,n-1}, \mathbf{v}_S \right)_S \\ \quad + \frac{1}{\tau_n} \left(\mathcal{P}_{h,D}^n P_{D,n-1} - P_{D,n-1}, q_D \right)_D \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{Q}. \end{array} \right. \quad (4.81)$$

Por otro lado, de las definiciones de $\hat{\underline{\Sigma}}$ y $\hat{\underline{\mathbf{U}}}$, y de (4.74), se tiene que el siguiente sistema se satisface para cada $t \in]t_{n-1}, t_n]$, $n \in \{1, \dots, N\}$

$$(S8) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(\hat{\underline{\Sigma}}(t) - \underline{\Sigma}(t), \underline{\boldsymbol{\tau}}) + \mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\underline{\mathbf{U}}}(t) - \underline{\mathbf{U}}(t)) = [\hat{\mathcal{R}}_3(\underline{\boldsymbol{\tau}})](t) \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X}, \\ \mathcal{B}(\hat{\underline{\Sigma}}(t) - \underline{\Sigma}(t), \underline{\mathbf{v}}) = [\hat{\mathcal{R}}_4(\underline{\mathbf{v}})](t) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{M}, \end{array} \right. \quad (4.82)$$

donde $\hat{\mathcal{R}}_3(\underline{\boldsymbol{\tau}})$ y $\hat{\mathcal{R}}_4(\underline{\mathbf{v}})$ son los interpolantes continuos a trozos de $\mathcal{R}_3^n(\underline{\boldsymbol{\tau}})$ y $\mathcal{R}_4^n(\underline{\mathbf{v}})$ respectivamente, esto es,

$$[\hat{\mathcal{R}}_3(\underline{\boldsymbol{\tau}})](t) := \frac{t_n - t}{\tau_n} \mathcal{R}_3^{n-1}(\underline{\boldsymbol{\tau}}) + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \mathcal{R}_3^n(\underline{\boldsymbol{\tau}}) \quad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{X} \quad \forall t \in]t_{n-1}, t_n]$$

y

$$[\hat{\mathcal{R}}_4(\underline{\mathbf{v}})](t) := \frac{t_n - t}{\tau_n} \mathcal{R}_4^{n-1}(\underline{\mathbf{v}}) + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \mathcal{R}_4^n(\underline{\mathbf{v}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{M} \quad \forall t \in]t_{n-1}, t_n].$$

Notar que en el nivel $t = t_n$, con $n \in \{1, \dots, N\}$, se tiene

$$[\hat{\mathcal{R}}_3(\underline{\boldsymbol{\tau}})](t_n) = \mathcal{R}_3^n(\underline{\boldsymbol{\tau}}) \quad (4.83)$$

y

$$[\hat{\mathcal{R}}_4(\mathbf{v})](t_n) = \mathcal{R}_4^n(\mathbf{v}). \quad (4.84)$$

Además notar que las derivadas temporales quedan como

$$\frac{d}{dt}[\hat{\mathcal{R}}_3(\boldsymbol{\tau})](t) = \Delta_t \mathcal{R}_3^n(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall t \in]t_{n-1}, t_n] \quad (4.85)$$

y

$$\frac{d}{dt}[\hat{\mathcal{R}}_4(\mathbf{v})](t) = \Delta_t \mathcal{R}_4^n(\mathbf{v}) \quad \forall t \in]t_{n-1}, t_n]. \quad (4.86)$$

Comenzamos con la primera contribución del error, referido al sistema **(S7)**:

4.2.1. Primera contribución

En esta Sección nos basaremos en el sistema **(S7)** (cf. (4.81)). Las estimaciones que nos interesan son $\|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t_m)\|_{\mathbb{M}}$ y $|(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma})(t_m)|_{a,2}$, con $m \in \{1, \dots, N\}$. Por conveniencia, antes de establecer los resultados que nos conducirán a las cotas deseadas, definimos las siguientes expresiones para cada $n \in \{1, \dots, N\}$:

$$\mathcal{F}_6^n := \tau_n^3 (\|\Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_{S,n}\|_{0,\Omega_S}^2 + \|\Delta_t \mathbf{U}_{D,n}\|_{0,\Omega_D}^2 + \|(C_{27} + C_{28})\hat{h}_n \Delta_t \mathcal{R}_4^n\|_{\mathbb{M}}^2), \quad (4.87)$$

$$\mathcal{F}_7^n := \tau_n [\|h_n(\mathbf{U}_{S,n-1} - \mathcal{P}_{h,S} \mathbf{U}_{S,n-1})\|_{0,\Omega_S}^2 + \|h_n(P_{D,n-1} - \mathcal{P}_{h,D}^n P_{D,n-1})\|_{0,\Omega_D}^2], \quad (4.88)$$

$$\mathcal{F}_8^n := \int_{t_{n-1}}^{t_n} \{\|\mathbf{f}_S - \mathbf{f}_{S,n}\|_{0,\Omega_S}^2 + \|f_D - f_{D,n}\|_{0,\Omega_D}^2\} ds \quad (4.89)$$

$$\mathcal{F}_9^n := \tau_n^3 (\|\mathbf{div}(\Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_{S,n})\|_{0,\Omega_S}^2 + \|\mathbf{div}(\Delta_t \mathbf{U}_{D,n})\|_{0,\Omega_D}^2 + \|\Delta_t \mathcal{R}_4^n\|_{\mathbb{M}}^2), \quad (4.90)$$

$$\mathcal{F}_{10}^n := \begin{cases} \|\tau_n^{-1} h_n (I - \mathcal{P}_{h,S}^n) \mathbf{U}_{S,n-1}\|_{0,\Omega_S}^2 & \text{if } n = 1 \text{ or } n = m \\ \tau_n^2 \|\hat{h}_n \Delta_t (\tau_n^{-1} (\mathcal{P}_{h,S}^n - I) \mathbf{U}_{S,n-1})\|_{0,\Omega_S}^2 & \text{if } n \in \{2, \dots, m-1\}, \end{cases} \quad (4.91)$$

$$\mathcal{F}_{11}^n := \begin{cases} \|\tau_n^{-1} h_n (I - \mathcal{P}_{h,D}^n) P_{D,n-1}\|_{0,\Omega_D}^2 & \text{if } n = 1 \text{ or } n = m \\ \tau_n^2 \|\hat{h}_n \Delta_t (\tau_n^{-1} (\mathcal{P}_{h,D}^n - I) P_{D,n-1})\|_{0,\Omega_D}^2 & \text{if } n \in \{2, \dots, m-1\}, \end{cases} \quad (4.92)$$

Con el fin de obtener las cotas deseadas, notamos que si seguimos la demostración del Lema 3.7 (cf. (3.56)), podemos deducir directamente la siguiente estimación:

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U}, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) \leq \left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U}) \right\|_{\mathbb{M}} \|\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}\|_{\mathbb{M}}. \quad (4.93)$$

A su vez notar que de la definición de las reconstrucciones elípticas mixtas y de (2.7)-(2.8) se tiene

$$\nabla(\hat{\mathbf{U}}_S - \mathbf{u}_S) = \nu^{-1} (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S - \boldsymbol{\sigma}_S)^d \quad (4.94)$$

y

$$\nabla(\hat{P}_D - p_D) = \mathbf{K}^{-1} (\hat{\mathbf{U}}_D - \mathbf{u}_D). \quad (4.95)$$

Además, será necesario establecer el siguiente resultado:

Lema 4.7 *Existe $C_{31} > 0$ tal que*

$$\max \left\{ \|\nu^{-1} (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S - \boldsymbol{\sigma}_S)^d\|_{0,\Omega_S}, \|\mathbf{K}^{-1} (\hat{\mathbf{U}}_D - \mathbf{u}_D)\|_{0,\Omega_D} \right\} \leq C_{31} |\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma}|_{a,2}. \quad (4.96)$$

Demostración: Tomando $\boldsymbol{\tau} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma}$ en la primera ecuación de **(S7)** (ec. (4.81)) obtenemos, aplicando integración por partes en Ω_S y Ω_D y las expresiones (4.94) y (4.95),

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) &= -\mathcal{B}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}) \\ &= -(\mathbf{div} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S - \boldsymbol{\sigma}_S, \hat{\mathbf{U}}_S - \mathbf{u}_S)_S + (\mathbf{div} (\hat{\mathbf{U}}_D - \mathbf{u}_D), \hat{P}_D - p_D)_D \\ &= (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S - \boldsymbol{\sigma}_S, \nabla(\hat{\mathbf{U}}_S - \mathbf{u}_S))_S + (\hat{\mathbf{U}}_D - \mathbf{u}_D, \nabla(\hat{P}_D - p_D))_D \\ &= (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S - \boldsymbol{\sigma}_S, \nu^{-1} (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S - \boldsymbol{\sigma}_S)^d)_S + (\hat{\mathbf{U}}_D - \mathbf{u}_D, \mathbf{K}^{-1} (\hat{\mathbf{U}}_D - \mathbf{u}_D))_D \end{aligned} \quad (4.97)$$

Sea $c > 0$ tal que $0 < c < \nu$. Luego, se cumple

$$(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S - \boldsymbol{\sigma}_S, \nu^{-1} (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S - \boldsymbol{\sigma}_S)^d)_S \geq c \|\nu^{-1} (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S - \boldsymbol{\sigma}_S)^d\|_{0,\Omega_S}^2. \quad (4.98)$$

Por otra parte, usando (2.9) y (2.10) obtenemos

$$\|\mathbf{K}^{-1}(\hat{\mathbf{U}}_D - \mathbf{u}_D)\|_{0,\Omega_D}^2 \leq \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} (K^{-1}(\hat{\mathbf{U}}_D - \mathbf{u}_D), (\hat{\mathbf{U}}_D - \mathbf{u}_D))_D,$$

o equivalentemente,

$$(\mathbf{K}^{-1}(\hat{\mathbf{U}}_D - \mathbf{u}_D), (\hat{\mathbf{U}}_D - \mathbf{u}_D))_D \geq \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2} \|\mathbf{K}^{-1}(\hat{\mathbf{U}}_D - \mathbf{u}_D)\|_{0,\Omega_D}^2. \quad (4.99)$$

Reemplazando (4.98) y (4.99) en (4.97) llegamos a

$$|\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\sigma}|_{a,2}^2 \geq c \|\nu^{-1}(\hat{\underline{\Sigma}}_S - \underline{\sigma}_S)^d\|_{0,\Omega_S}^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2} \|\mathbf{K}^{-1}(\hat{\mathbf{U}}_D - \mathbf{u}_D)\|_{0,\Omega_D}^2,$$

lo cual implica

$$\max \left\{ \|\nu^{-1}(\hat{\underline{\Sigma}}_S - \underline{\sigma}_S)^d\|_{0,\Omega_S}, \|\mathbf{K}^{-1}(\hat{\mathbf{U}}_D - \mathbf{u}_D)\|_{0,\Omega_D} \right\} \leq C_{14} |\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\sigma}|_{a,2},$$

con $C_{14} := \sqrt{\frac{1}{\min\{c, \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2}\}}} > 0$, concluyendo la demostración. ■

Además, definimos para cada $m \in \{1, \dots, N\}$ la siguiente expresión que expresa un error, el cual aparecerá en los siguientes resultados:

$$\mathbb{E}_m(\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\sigma}) := \left\{ \int_0^{t_m} |(\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\sigma})(s)|_{a,2}^2 ds \right\}^{1/2}. \quad (4.100)$$

Ahora bien, para obtener las cotas para $\|(\hat{\underline{\mathbf{U}}} - \underline{\mathbf{u}})(t_m)\|_{0,\Omega_D}$, con $m \in \{1, \dots, N\}$, se debe antes establecer dos lemas técnicos previos que nos servirán en la demostración del teorema que establece esta cota. El siguiente lema tiene que ver con el segundo término del lado derecho de **(S7)** (ec. (4.81)) y con la cantidad \mathcal{F}_6^n previamente definida.

Lema 4.8 *Existe $C_{32} > 0$ tal que para cada $m \in \{1, \dots, N\}$ se satisface la siguiente estimación:*

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s) [\mathcal{B}(\Delta_t \underline{\Sigma}_n, \hat{\underline{\mathbf{U}}} - \underline{\mathbf{u}}) + \Delta_t \mathcal{R}_4^n(\hat{\underline{\mathbf{U}}} - \underline{\mathbf{u}})] ds \leq C_{32} \left\{ \sum_{n=1}^m \mathcal{F}_6^n \right\}^{1/2} \mathbb{E}_m(\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\sigma}) \quad (4.101)$$

Demostración: Se procede de manera similar al Lema 4.2 y para acotar se debe usar necesariamente el Lema 4.7 (cf. (4.96)), con lo cual se tendrá que la constante C_{32} dependerá de la constante C_{31} obtenida en el Lema anterior. ■

El Lema que viene a continuación, tiene que ver con los dos últimos términos del lado derecho de la segunda ecuación de **(S7)** (ec. (4.81)) y con la cantidad \mathcal{F}_7^n previamente definida.

Lema 4.9 *Existe $C_{33} > 0$ tal que $m \in \{1, \dots, N\}$, la siguiente estimación se satisface*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\{ \frac{1}{\tau_n} (\mathbf{U}_{S,n-1} - \mathcal{P}_{h,S}^n \mathbf{U}_{S,n-1}, \hat{\mathbf{U}}_S - \mathbf{u}_S)_S + \frac{1}{\tau_n} (P_{D,n-1} - \mathcal{P}_{h,D}^n P_{D,n-1}, \hat{P}_D - p_D)_D \right\} ds \\ & \leq C_{32} \left\{ \sum_{n=1}^m \mathcal{F}_7^n \right\}^{1/2} \mathbb{E}(\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\sigma}) \end{aligned} \quad (4.102)$$

Demostración: Se sigue la misma idea desarrollada en el Lema 4.3, y para acotar también se usa el Lema 4.7 (ec. (4.96)), con lo cual se tiene que la constante C_{33} dependerá de la constante C_{31} , y por la naturaleza de los términos involucrados, de las constantes C_{29} y C_{30} . ■

Finalmente, llegamos al resultado que establece la cota para $\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u}$ anunciada:

Teorema 4.6 *Para cualquier $t \in [0, T]$, sean $(\underline{\sigma}(t), \mathbf{u}(t)) \in H_0 \times Q$ la solución de (2.12) y $\hat{\underline{\Sigma}}$ con $\hat{\mathbf{U}}$ las reconstrucciones elípticas mixtas definidas previamente y sea $\mathcal{H}_5 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por*

$$\mathcal{H}_5(t) := \frac{1}{2} \|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(t)\|_{\mathbb{M}}^2 + 2 \int_0^t |(\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\sigma})(s)|_{a,2}^2 ds$$

Entonces, para cada $m \in \{1, \dots, N\}$, la siguiente estimación de error se satisface:

$$\mathcal{H}_5(t_m) \leq C_{34} \left\{ \|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(0)\|_{\mathbb{M}}^2 + \int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s) \right\|_{\mathbb{M}}^2 ds + \sum_{i=6}^8 \sum_{n=1}^m \mathcal{F}_i^n \right\}. \quad (4.103)$$

donde $C_{34} > 0$ es una constante positiva convenientemente escogida y que es independiente de h_m , $m \in \{1, \dots, N\}$.

Demostración: Se sigue la misma idea desarrollada en la demostración del Teorema 4.1 (cf. (4.36)) con las debidas modificaciones en este contexto. ■

Notar que queda por estimar la expresión

$$\int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{\mathbb{M}}^2 ds,$$

la cual será estimada en la siguiente Sección.

Ahora se establece el otro resultado deseado para esta sección, esto es, la cota para $|(\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\sigma})(t_m)|_{a,2}$, con $m \in \{1, \dots, N\}$,

Teorema 4.7 *Para todo $t \in [0, T]$, sean $(\sigma(t), \mathbf{u}(t)) \in H_0 \times Q$ la solución de (2.12) y $\hat{\underline{\Sigma}}$ con $\hat{\mathbf{U}}$ las reconstrucciones elípticas mixtas definidas previamente y sea $\mathcal{H}_6 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por*

$$\mathcal{H}_6(t) := |(\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\sigma})(t)|_{a,2}^2 + \int_0^t \left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{u})(s) \right\|_{\mathbb{M}}^2 ds$$

Entonces, para cada $m \in \{1, \dots, N\}$, la siguiente estimación de error se satisface:

$$\mathcal{H}_6(t_m) \leq C_{35} \left\{ |(\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\sigma})(0)|_{a,2}^2 + \int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U}) \right\|_{\mathbb{M}}^2 + \sum_{i=8}^{11} \sum_{n=1}^m \mathcal{F}_i^n \right\}, \quad (4.104)$$

donde $C_{35} > 0$ es una constante independiente de h_m , $m \in \{1, \dots, N\}$.

Demostración: Se sigue la misma idea desarrollada en la demostración del Teorema 4.2 (cf. (4.47)) con las debidas modificaciones en este contexto. Además, dentro de la demostración, se deberá seguir la misma idea desarrollada en el Lema 4.4 (cf. (4.44)) para poder establecer:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{1}{\tau_n} \left((I - \mathcal{P}_{h,S}^n) \mathbf{U}_{S,n-1}, \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}}_S - \mathbf{u}_S) \right)_S ds &= -(\tau_1^{-1} (I - \mathcal{P}_{h,S}^1) \mathbf{U}_{S,0}, (\hat{\mathbf{U}}_S - \mathbf{u}_S)(t_0))_S \\ &+ (\tau_m^{-1} (I - \mathcal{P}_{h,S}^m) \mathbf{U}_{S,m-1}, (\hat{\mathbf{U}}_S - \mathbf{u}_S)(t_m))_S \\ &+ \sum_{n=2}^m \tau_n (\Delta_t (\tau_n^{-1} (\mathcal{P}_{h,S}^n - I) \mathbf{U}_{S,n-1}), (\hat{\mathbf{U}}_S - \mathbf{u}_S)(t_{n-1}))_S \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{1}{\tau_n} \left((I - \mathcal{P}_{h,D}^n) P_{n-1}, \frac{d}{dt} (\hat{P}_D - p_D) \right)_D ds &= -(\tau_1^{-1} (I - \mathcal{P}_{h,D}^1) P_0, (\hat{P}_D - p_D)(t_0))_{0,\Omega} \\
&+ (\tau_m^{-1} (I - \mathcal{P}_{h,D}^m) P_{m-1}, (\hat{P}_D - p_D)(t_m))_D \\
&+ \sum_{n=2}^m \tau_n (\Delta_t (\tau_n^{-1} (\mathcal{P}_{h,D}^n - I) P_{D,n-1}), (\hat{P}_D - p_D)(t_{n-1}))_D.
\end{aligned}$$

y así poder acotar acorde a la idea desarrollada en la demostración del Teorema 4.2 y obtener (4.104). ■

Notar que, de la misma manera que en el teorema anterior, queda por estimar

$$\int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{\mathbb{M}}^2 ds,$$

la cual, como habíamos adelantado, será estimada en la próxima Sección.

4.2.2. Segunda contribución

Notamos que **(S8)** (cf. (4.82)) tiene una estructura similar a **(S4)** (cf. (3.55)), con lo cual podemos usar las ideas desarrolladas en la Sección 3.2.2 para obtener las estimaciones deseadas. Para cada $m \in \{1, \dots, N\}$, definimos el siguiente estimador de error:

$$\Theta_{2,m} := \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,m}^S} \Theta_{S,K,m}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,m}^D} \Theta_{D,K,m}^2 \right\}^{1/2}, \quad (4.105)$$

donde, para cada $K \in \mathcal{T}_{h,m}^S$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\Theta_{S,K,m}^2 \\
&:= \|\mathcal{P}_{h,S}^m (\Delta_t \mathbf{U}_{S,m}) + \mathbf{div} \boldsymbol{\Sigma}_{S,m} + \mathbf{f}_{S,m}\|_{0,\Omega_S} + h_m^2 \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\Sigma}_{S,m}^d\|_{0,K}^2 + h_m^2 \|\boldsymbol{\Sigma}_{S,m}^d\|_{0,K}^2 \\
&+ \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Omega_S)} h_e \|\llbracket \boldsymbol{\Sigma}_{S,m}^d \mathbf{t} \rrbracket\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Gamma_S)} h_e \|\llbracket \boldsymbol{\Sigma}_{S,m}^d \mathbf{t} \rrbracket\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} h_e \|\mathbf{U}_{S,m} + \Psi_{\Sigma,m}\|_{0,e}^2 \\
&\sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} \left\{ h_e \left\| \boldsymbol{\Sigma}_{S,m} \mathbf{n} + \Lambda_{\Sigma,m} \mathbf{n} - \frac{\nu}{\kappa} (\Psi_{\Sigma,m} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} \right\|_{0,e}^2 + h_m \|\nu^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{S,m}^d \mathbf{t} + \nabla \Psi_{\Sigma,m} \mathbf{t}\|_{0,e}^2 \right\}
\end{aligned}$$

y para cada $K \in \mathcal{T}_{h,m}^D$,

$$\begin{aligned}
& \Theta_{D,K,m}^2 \\
& := \|\mathcal{P}_{h,D}^m(\Delta_t P_{D,m}) - \operatorname{div} \mathbf{U}_{D,m} + f_{D,m}\|_{0,K}^2 + h_m^2 \|\operatorname{rot}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{U}_{D,m})\|_{0,K}^2 + h_m^2 \|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{U}_{D,m}\|_{0,K}^2 \\
& + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Omega_D)} h_e \|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{U}_{D,m} \cdot \mathbf{t}\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} h_m \left\| \mathbf{K}^{-1} \mathbf{U}_{D,m} \cdot \mathbf{t} + \frac{d\Lambda_{\Sigma,m}}{d\mathbf{t}} \right\|_{0,e}^2 \\
& + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} \{h_e \|\mathbf{U}_{D,m} \cdot \mathbf{n} + \Psi_{\Sigma,m} \cdot \mathbf{n}\|_{0,e}^2 + h_e \|P_{D,m} - \Lambda_{\Sigma,m}\|_{0,e}^2\}.
\end{aligned}$$

El siguiente resultado sigue la misma idea del Teorema 3.6 (ec. (3.82))

Teorema 4.8 *La siguiente estimación de error a posteriori se satisface para cada $m \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\|(\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\Sigma}, \hat{\underline{\mathbf{U}}} - \underline{\mathbf{U}})(t_m)\|_{\mathbb{X} \times \mathbb{M}} \leq C_{36} \Theta_{2,m}, \quad (4.106)$$

donde $C_{36} > 0$ es independiente de h_m , $m \in \{1, \dots, N\}$.

Demostración: La buena definición del problema estacionario de Stokes-Darcy, es equivalente a la condición inf-sup global (3.66), la cual implica, usando el sistema **(S8)** (ec. (4.82)), (4.83) y (4.84) (con el correspondiente cambio de índice $n = m$ acá), que se satisface

$$C \|(\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\Sigma}, \hat{\underline{\mathbf{U}}} - \underline{\mathbf{U}})(t_m)\|_{\mathbb{X} \times \mathbb{M}} \leq \sup_{(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{v}}) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M} \setminus \{\theta\}} \frac{|\mathcal{R}_3^m(\underline{\boldsymbol{\tau}})| + |\mathcal{R}_4^m(\underline{\mathbf{v}})|}{\|(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{v}})\|_{\mathbb{X} \times \mathbb{M}}} \quad (4.107)$$

Siguiendo la misma idea de la deducción de la estimación de error a posteriori para la segunda contribución en el esquema semi-discreto, podemos descomponer \mathcal{R}_3^m y \mathcal{R}_4^m como

$$\mathcal{R}_3^m(\underline{\boldsymbol{\tau}}) = \mathcal{R}_3^{m,1}(\tau_S) + \mathcal{R}_3^{m,2}(\mathbf{v}_S) + \mathcal{R}_3^{m,3}(\phi) + \mathcal{R}_3^{m,4}(\xi)$$

y

$$\mathcal{R}_4^m(\underline{\mathbf{v}}) = \mathcal{R}_4^{m,1}(\mathbf{v}_S) + \mathcal{R}_4^{m,2}(q_D),$$

donde $\mathcal{R}_1^{m,i}$, $i \in \{1, \dots, 4\}$ y $\mathcal{R}_2^{m,j}$, $j \in \{1, 2\}$ están definidas como (3.68), (3.69), (3.70), (3.71), (3.72) y (3.73), pero, con $\underline{\Sigma}_{S,m}$ en vez de $\sigma_{S,h}$, $\mathbf{U}_{D,m}$ en vez $\mathbf{u}_{D,h}$, $\Psi_{\Sigma,m}$ en vez de ϕ_h , $\Lambda_{\Sigma,m}$ en vez de λ_h , $\mathbf{U}_{S,m}$ en vez de $\mathbf{u}_{S,h}$ y $P_{D,m}$ en vez de $p_{D,h}$. Usando los Lemas 3.11, 3.12 y 3.13 en este contexto para estimar \mathcal{R}_3^m y el Lema 3.14 en este contexto para estimar \mathcal{R}_4^m , se concluye directamente la demostración. ■

De la Sección 4.2.1, sabemos que nos queda por estimar la expresión

$$\int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{\mathbb{M}}^2 ds,$$

la cual aparece en los lados derechos de (4.103) y (4.104). Para ello, primero debemos estimar $\left\| \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m) \right\|_{\mathbb{M}}$, que se sigue directamente del teorema previo. Para cada $m \in \{1, \dots, N\}$, definimos el siguiente estimador de error:

$$\tilde{\Theta}_{2,m} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{h,m}^S} \partial_t \Theta_{S,K,m}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,m}^D} \partial_t \Theta_{D,K,m}^2 \right)^{1/2}. \quad (4.108)$$

donde, para cada $K \in \mathcal{T}_{h,m}^S$,

$$\begin{aligned} \partial_t \Theta_{S,K,m}^2 &:= \left\| \Delta_t (\mathcal{P}_{h,S}^m(\Delta_t \mathbf{U}_{S,m})) + \mathbf{div} \Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_{S,m} + \Delta_t \mathbf{f}_{S,m} \right\|_{0,\Omega_S} + h_m^2 \left\| \mathbf{rot} \Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_{S,h}^d \right\|_{0,K}^2 \\ &+ h_m^2 \left\| \Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_{S,h}^d \right\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Omega_S)} h_m \left\| \left[\Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_{S,m}^d \mathbf{t} \right] \right\|_{0,e}^2 \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Gamma_S)} h_m \left\| \Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_{S,h}^d \mathbf{t} \right\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} h_m \left\| \Delta_t \mathbf{U}_{S,h} + \Delta_t \Psi_{\Sigma,m} \right\|_{0,e}^2 \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} \left\{ h_m \left\| \Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_{S,m} \mathbf{n} + \Delta_t \Lambda_{\Sigma,m} \mathbf{n} - \frac{\nu}{\kappa} (\Delta_t \Psi_{\Sigma,m} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} \right\|_{0,e}^2 \right. \\ &\left. + h_m \left\| \nu^{-1} \Delta_t \boldsymbol{\Sigma}_{S,m}^d \mathbf{t} + \nabla \{ \Delta_t \Psi_{\Sigma,m} \} \mathbf{t} \right\|_{0,e}^2 \right\} \end{aligned}$$

y para cada $K \in \mathcal{T}_{h,m}^D$,

$$\begin{aligned} \partial_t \Theta_{D,K}^2 &:= \left\| \Delta_t (\mathcal{P}_{h,D}^m(\Delta_t P_{D,m})) - \mathbf{div} (\Delta_t \mathbf{U}_{D,h}) + \Delta_t f_{D,m} \right\|_{0,K} + h_m^2 \left\| \mathbf{rot} (\mathbf{K}^{-1} \Delta_t \mathbf{U}_{D,m}) \right\|_{0,K}^2 \\ &+ h_m^2 \left\| \mathbf{K}^{-1} \Delta_t \mathbf{U}_{D,m} \right\|_{0,K}^2 \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h(\Omega_D)} h_m \left\| \left[\mathbf{K}^{-1} \Delta_t \mathbf{U}_{D,m} \cdot \mathbf{t} \right] \right\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} h_m \left\| \mathbf{K}^{-1} \Delta_t \mathbf{U}_{D,m} \cdot \mathbf{t} + \Delta_t \frac{d\Lambda_{\Sigma,m}}{dt} \right\|_{0,e}^2 \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\Sigma)} \left\{ h_m \left\| \Delta_t \mathbf{U}_{D,h} \cdot \mathbf{n} + \Delta_t \Psi_{\Sigma,m} \cdot \mathbf{n} \right\|_{0,e}^2 + h_m \left\| \Delta_t P_{D,m} - \Delta_t \Lambda_{\Sigma,m} \right\|_{0,e}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Ahora, siguiendo la misma idea que expresa el Teorema 3.7 (cf. (3.85)) para el caso

semi-discreto, se tiene la siguiente estimación de error para $\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})$:

Lema 4.10 *La siguiente estimación se satisface para cada $m \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(t_m) \right\|_{\mathbb{M}} \leq C_{37} \tilde{\Theta}_{2,m}, \quad (4.109)$$

donde $C_{37} > 0$ es independiente de h_m .

Demostración: Se sigue la misma línea argumentativa de la demostración del Lema 4.5. ■

Ahora damos el resultado anunciado

Teorema 4.9 *La siguiente estimación se satisface para cada $m \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\int_0^{t_m} \left\| \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(s) \right\|_{0,\Omega}^2 \leq C_{37}^2 \sum_{n=1}^m \tau_n \tilde{\Theta}_{2,n}^2 \quad (4.110)$$

Demostración: Se sigue la misma idea desarrollada en el Teorema 4.4 ■

4.2.3. Estimación de error a posteriori para $(\underline{\Sigma} - \underline{\sigma}, \underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{u}})$

Ahora se usarán los resultados de las secciones previas para obtener una estimación de error a posteriori para $(\underline{\Sigma} - \underline{\sigma}, \underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{u}})$. Recordamos la definición de $\|(\cdot, \cdot)\|_2 : \mathbb{X} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$:

$$\|(\underline{\sigma}, \underline{\mathbf{v}})\|_2 := |\underline{\sigma}|_{a,2} + \|\underline{\mathbf{v}}\|_{\mathbb{M}} \quad \forall (\underline{\sigma}, \underline{\mathbf{v}}) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M}.$$

De la misma manera que en el caso semi-discreto (Sección 3.2.4) las expresiones $\|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(0)\|_{\mathbb{M}}$ y $|(\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\Sigma})(0)|_{a,2}$ son calculables pues de (4.106) deducimos que

$$\max \left\{ \|(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U})(0)\|_{\mathbb{M}}, |(\hat{\underline{\Sigma}} - \underline{\Sigma})(0)| \right\} \leq C_{36} \Theta_{2,0} \quad (4.111)$$

Ahora damos el resultado anunciado y final de esta tesis:

Teorema 4.10 *Para todo $t \in [0, T]$, sean $(\underline{\sigma}(t), \underline{\mathbf{u}}(t)) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M}$ y $(\underline{\Sigma}, \mathbf{U})$ la solución de (2.12) y (4.71) respectivamente. Entonces, para cada $m \in \{1, \dots, N\}$, se tiene:*

$$\begin{aligned} & \|(\underline{\Sigma}_m, \mathbf{U}_m) - (\underline{\sigma}(t_m), \underline{\mathbf{u}}(t_m))\|_2^2 \\ & \leq C_{38} \left\{ \|(\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{u}})(0)\|_{\mathbb{M}}^2 + |(\underline{\Sigma} - \underline{\sigma})(0)|_{a,2}^2 + \Theta_{2,0} + \sum_{i=6}^{11} \sum_{n=1}^m \mathcal{F}_i^n + \sum_{n=1}^m \tau_n \tilde{\Theta}_{2,n}^2 + \Theta_{2,m}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.112)$$

donde $C_{38} > 0$ indica una constante que no depende de h_m , $m \in \{1, \dots, N\}$.

Demostración: Se sigue la misma idea desarrollada en la demostración del teorema 4.5 aplicada a este contexto. ■

Capítulo 5

Conclusiones y posibles extensiones

En esta tesis se demostró que existe una metodología que permite obtener estimadores de error a posteriori confiables para las formulaciones completamente mixtas de problemas evolutivos de interés en mecánica de fluidos, a saber, los problemas de Stokes y Stokes-Darcy. Esta metodología consiste en ayudarse de las reconstrucciones elípticas para separar el error en dos contribuciones, una evolutiva, en la cual para ser acotada se aplican técnicas estándar en problemas parabólicos, y otra estacionaria en donde el acotamiento es mediado gracias a lo que se conoce en los respectivos análisis de error a posteriori de los problemas elípticos asociados.

No obstante, el trabajo hecho aquí está incompleto. Por una parte, se deben realizar los experimentos numéricos adecuados, como así también, demostrar que los estimadores de error a posteriori son eficientes. Se presume que esta eficiencia es complicada de hacerla analíticamente, por lo cual se sugiere demostrar la eficiencia de estos estimadores de manera numérica.

Además, puede ser interesante extender este trabajo para los casos no homogéneo y no lineal. Para el caso no homogéneo quizás se deba usar otras técnicas de acotamiento debido a que en el esquema completamente discreto, la aparición del término que dependía de la frontera hacía que se sobreestimara la cota, razón por la cual se trabajó sólo con el caso homogéneo. Para el caso no lineal, se debería pensar en una manera similar de separar el error de modo tal de aprovechar lo ya realizado en los análisis de error a posteriori para los problemas no lineales asociados.

Bibliografía

- [1] AKRIUIS, G., MAKRIDAKIS, C. AND NOCHETTO, R.H., *A posteriori error estimates for the Crank-Nicolson method for parabolic problems*. Mathematics of Computation, vol. 75, pp. 511-531, (2006).
- [2] BOFFI, D. AND GASTALDI, G., *Analysis of finite element approximation of evolution problems in mixed form*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 42, 4, pp. 1502-1526, (2006).
- [3] BRAESS, D., *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Elastic Theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [4] BRENNER, S. AND SCOTT, L., *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 2008.
- [5] BREZZI, F. AND FORTIN, M., *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 1991.
- [6] CARTENSEN, C., *A posteriori error estimate for the mixed finite element method*. Mathematics of Computation, vol. 66, 218, pp. 465-476, (1997).
- [7] CIARLET, P.G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1978.
- [8] CLÉMENT, P., *Approximation by finite element functions using local regularization*. RAIRO Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, vol. 9, pp. 77-84, (1975).
- [9] EVANS, L., *Partial Differential Equations: Second Edition*, Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [10] HIPTMAIR, R., *Finite elements in computational electromagnetism*. Acta Numerica, vol. 11, pp. 237-339, (2002).

- [11] GATICA, G.N., MARQUEZ, A. AND SANCHEZ, M., *Analysis of a velocity-pressure-pseudostress formulation for the stationary Stokes equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, 17-20, pp. 1064-1079, (2010).
- [12] GATICA, G.N., OYARZÚA, R. AND SAYAS F.J., *Analysis of fully-mixed finite element methods for the Stokes-Darcy coupled problem*. Mathematics of Computation, vol. 80, 276, pp. 1911-1948, (2011).
- [13] GATICA, G.N., OYARZÚA, R. AND SAYAS, F.J., *A residual-based a posteriori error estimator for a fully-mixed formulation of the Stokes-Darcy coupled problem*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 200, 21-22, pp. 1877-1891, (2011).
- [14] GIRAULT, V. AND RAVIART, P.-A., *Finite Element Approximation of the Navier Stokes Equations*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 749, Springer-Verlag, 1979.
- [15] GIRAULT, V. AND RAVIART, P.-A., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, 1986.
- [16] KARKATSANI, F. AND MAKRIDAKIS, C., *A posteriori error estimates for time-dependent Stokes equations*. IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 27, pp. 741-764, (2007).
- [17] LARSON, M. AND MALQVIST, A., *A posteriori error estimates for mixed finite element approximations of elliptic problems*. Numerische Mathematik, vol. 108, 3, 487-500, (2008).
- [18] LARSON, M. AND MALQVIST, A., *A posteriori error estimates for mixed finite element approximation of parabolic problems*. Numerische Mathematik, vol. 118, pp. 33-48, (2011).
- [19] MAKRIDAKIS, C. AND NOCHETTO, R.H., *Elliptic reconstruction and a posteriori error estimates for parabolic problems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 41, 4, pp. 1585-1594, (2003).
- [20] MEMON, S., NATARAJ, N. AND KUMAR, A., *An a posteriori error analysis of mixed finite element Galerkin approximations to second order linear parabolic problems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 50, 3, pp. 1367 - 1393, (2012).

- [21] ROBERTS, J. AND THOMAS, J., Mixed and Hybrid Methods. In: Handbook of Numerical Analysis, edited by P.G. Ciarlet and J.L. Lions, vol. II, Finite Element Methods (Part 1), 1991, North-Holland, Amsterdam.