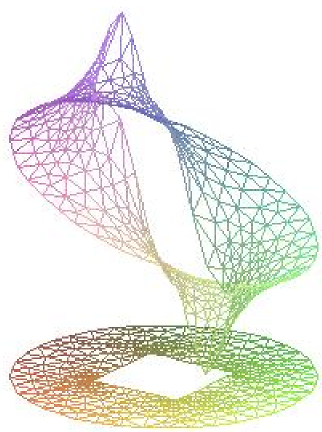
Universidad de Concepción
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Memoria para optar al título de Ingeniero Matemático

Simulación numérica del tracto superior respiratorio.



Tesista:
Gonzalo Rivera Acuña

Profesor Guía:
Dr. Rodolfo Rodríguez

13 de diciembre de 2011

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a Dios, por estar presente en los momentos más difíciles del transcurso de mi vida, en especial de mi carrera, a mis padres Jacqueline Acuña, Enrique Rivera y a mis hermanos, sin ellos nada hubiera sido posible, los tendré siempre en mi corazón, a mis amigos y compañeros que siempre me entregaron su alegría y su apoyo. Por último, a mi profesor guía, Rodolfo Rodríguez, por su constante apoyo, paciencia y dedicación, antes y durante el desarrollo de esta memoria.

1. Resumen

En el presente trabajo se describe un modelo numérico que representa el ronquido que emite un ser humano. Para poder generar simulaciones numéricas de como se produce el ronquido durante la respiración, fue necesario generar un modelo que simule el tracto superior respiratorio, junto con el paladar blando. Para ello se consideró un modelo mecánico análogo al de [1], como el que se muestra en la Figura 3 y se procedió a trabajar por separado el paladar blando y el tracto superior respiratorio. Por último se resolvió el problema acoplado. Cada una de estas etapas están presentadas en 3 capítulos.

En el primer capítulo se desarrolló un modelo numérico para el paladar blando, para esto se supuso que podía ser simulado por una viga elástica empotrada en un extremo y libre en el otro. Esto fue validado en [1].

Puesto que la viga elástica que se utilizó para el modelo es de largo y grosor pequeño, se determinó que la teoría que mejor se ajustaba a este tipo de vigas es la de Timoshenko. Seguido a esto, se procedió a la obtención de las ecuaciones que representan la vibración de la viga elástica para el caso estacionario y evolutivo, se determinó la formulación variacional asociada a estas ecuaciones y se analizó dicha formulación variacional. Por último, en este capítulo se presentan algunos resultados numéricos para la validación de los códigos desarrollados en Matlab. Para ello se utilizaron elementos finitos lineales unidimensionales para la parte espacial, con integración reducida para los términos de corte [4] y el método de Newmark para la parte temporal. Además se observó que el caso evolutivo de la viga elástica de Timoshenko presenta el mismo fenómeno que el caso estacionario, el cual es conocido como bloqueo numérico del método [4].

El segundo capítulo presenta un modelo numérico para simular el tracto superior respiratorio y el aire que circula por él, para ellos se utilizaron las ecuaciones de un fluido potencial acústico, las cuales se deducen de las de Navier-Stokes, luego se procedió a determinar su formulación variacional y analizarla. Por último se presenta un ejemplo numérico para la validación de los códigos desarrollados en Matlab, el cual contiene la implementación del método de elementos finitos tradicional (Galerkin) basado en el código de [7] y el método de Newmark para la parte temporal.

En el último capítulo se procedió a resolver el problema acoplado paladar blando-tracto superior respiratorio (fluido acústico-viga elástica), para ello se supuso la hipótesis de pequeñas fluctuaciones de la velocidad y, consiguientemente, las de la presión. Así puede suponerse que el dominio del fluido no cambia en el tiempo, sin embargo la variación de presiones del fluido a través del dominio de la viga es el que produce la vibración de ésta, con lo cual el acople entre los modelos esta dado por la diferencia de presión en ambas caras de la viga, la que corresponde a la carga que actúa sobre ésta.

2. Introducción

Distintos fenómenos que se producen en el tracto superior respiratorio, como el ronquido del ser humano y la apnea, han sido modelados física y matemáticamente [1,2,3]. El objetivo de este proyecto es introducir y analizar un modelo numérico de estos fenómenos.

En [1] se describe el desarrollo de un modelo *in vitro* del tracto superior respiratorio, mediante un aparato mecánico en él que la parte vibrante (generadora del ronquido) es una viga flexible dentro de un canal por el que circula aire y la apnea se modela mediante la paredes flexibles del canal. Este modelo *in vitro* se ha validado en esa referencia con datos de experimentos *in vivo*. Por otra parte, en [2] se ha estudiado analíticamente la estabilidad de este modelo, ya que sus inestabilidades corresponden al fenómeno de la apnea.

El modelo numérico a desarrollar en este proyecto de tesis se basa en las ecuaciones de Timoshenko para la viga elástica y en un modelo potencial acústico para el fluido. Bajo la hipótesis de pequeñas fluctuaciones de la velocidad y, consiguientemente, las de la presión, puede suponerse que el dominio del fluido no cambia en el tiempo. El acople entre los modelos está dado por la diferencia de presión en ambas caras de la viga, la que corresponde a la carga que actúa sobre ésta.

Con la finalidad de resolver el problema evolutivo acoplado se utilizarán elementos finitos lineales estándar para la presión del fluido y elementos lineales unidimensionales para las rotaciones y desplazamientos de la viga, además de integración reducida de los términos de corte para evitar el bloqueo numérico [4]. Esta técnica, bien conocida para problemas estacionarios, se testeará para problemas evolutivos ya que en la bibliografía no se presentan antecedentes con respecto a estos problemas.

El modelo resultante permite simular vibraciones elastoacústicas del sistema acoplado fluido acústico-viga elástica que corresponden al ronquido en este modelo.

3. Presentación del Problema

Los principales conductos y estructuras del tracto superior respiratorio son la nariz, la cavidad nasal, la boca, la garganta (faringe) y la laringe (ver Figura 1). El sistema respiratorio se encuentra recubierto por una membrana mucosa que segrega moco, el cual atrapa partículas pequeñas como polen o humo. Estructuras pilosas, que se denominan cilios, recubren la membrana mucosa y desplazan las partículas atrapadas en el moco fuera de la nariz. El aire que se inhala se humedece, se calienta y se limpia mediante el tejido que recubre la cavidad nasal.

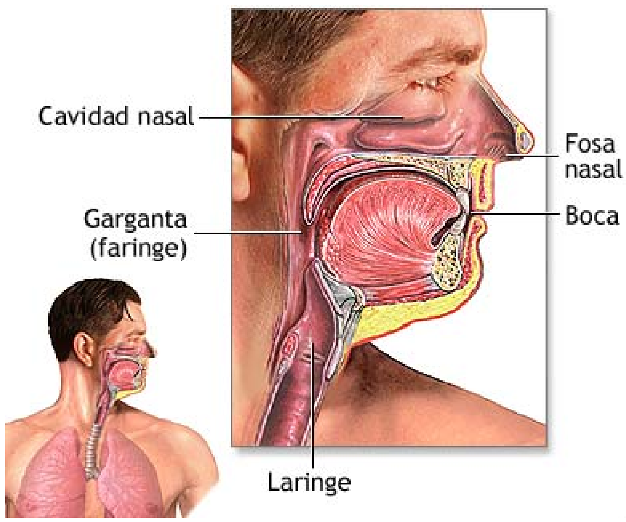


Figura 1: Tracto superior respiratorio.

La úvula o campanilla es una pequeña masa carnosa que cuelga del paladar blando, por encima de la raíz de la lengua. Está formada por tejido conjuntivo y mucosa, además de tres músculos: el tensor y el elevador del paladar, y el propio músculo de la úvula. Funciona con el resto del paladar blando separando la cavidad bucal de la nasal e impidiendo que la comida y los líquidos lleguen a esta última en el vómito. La úvula es una pequeña estructura cónica que cuelga del borde inferior del velo del paladar. El espacio que queda entre los laterales del paladar se llama istmo de las fauces y está delimitado por el borde libre del velo del paladar, arriba; por la lengua, abajo; por los pilares del velo del paladar y las amígdalas a los lados.

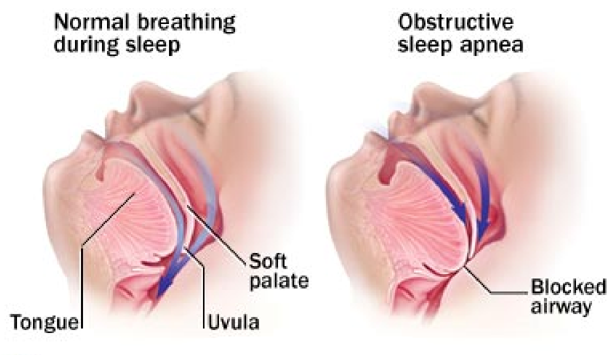


Figura 2: Como se produce el ronquido y apnea.

El ronquido ocurre cuando se obstruye la circulación del aire en los pasajes ubicados detrás de la boca y la nariz. Es la manifestación ruidosa de la vibración producida por el choque entre el paladar blando, cuando el aire que pasa por la parte posterior de la boca y la nariz no encuentra el camino libre (ver Figura 2).

El ronquido del ser humano y la apnea, han sido modelados física [1,3] y matemáticamente [1,2]. El objetivo de este proyecto es describir un modelo numérico del fenómeno del ronquido. Para generar simulaciones numéricas de como se produce el ronquido durante la respiración, es necesario generar un modelo que simule el tracto superior respiratorio, junto con el paladar blando. Para ello se consideró un modelo mecánico análogo al de [1], como el que se muestra en la Figura 3.

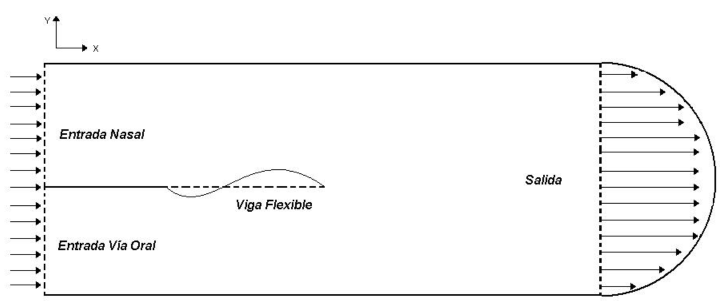


Figura 3: Modelo del tracto superior respiratorio ([2]).

El modelo numérico que se desarrollará para poder resolver el problema mecánico de la Figura 3 es un modelo acoplado fluido acústico-viga elástica bajo la hipótesis de pequeñas fluctuaciones de la velocidad y, consiguientemente, las de la presión. Así puede suponerse que el dominio del fluido no cambia en el tiempo, sin embargo la variación de presiones del fluido a través del dominio de la viga es el que produce la vibración de ésta. Con lo cual el acople entre los modelos está dado por la diferencia de presión en ambas caras de la viga, la que corresponde a la carga que actúa sobre ésta.

Para la modelación de la viga elástica y el fluido se utilizarán las ecuaciones de Timoshenko [4,5,6] y un modelo potencial acústico, respectivamente. A continuación se presenta la formulación matemática del modelo acoplado fluido acústico-viga elástica con el cual se trabajará.

Sea $Q_T := (0,T) \times \Omega$ donde Ω es un dominio abierto y conexo de $\mathbb{R}^2$, con frontera $\partial\Omega := \mathit{\Gamma}_D \cup \mathit{\Gamma}_N$ tal que $\mathit{\Gamma}_D \cap \mathit{\Gamma}_N = \emptyset$, $|\mathit{\Gamma}_D| \neq 0$, $|\mathit{\Gamma}_N| \neq 0$. Sea $f \in L^2((0,T); H^{1/2}(\Gamma_D))$, la presión del fluido en una parte de la frontera Γ_D, que se supone conocida. Esta presión la cual es dato corresponde a la presión exterior en la boca y la nariz junto a la presión interior en la faringe. Sea $R_T := (0,T) \times I$ donde $I = (0,L) \subseteq \mathbb{R}$ es el dominio de la viga elástica. El problema consiste en encontrar la presión p en el dominio Ω, junto a la rotación ϕ y el desplazamiento w en el dominio de la viga elástica I, tales que:

$$
\left\{
\begin{array}{rll}
\ddot{p} - c^2 \mathit{\Delta} p & = 0 & \text{en } Q_T, \\
p & = f & \text{en } \Gamma_D \\
\dfrac{\partial p}{\partial n} & = 0, & \text{en } \Gamma_N, \\
p(0,\cdot) & = p_0 & \text{en } \Omega, \\
\dot{p}(0,\cdot) & = \dot{p}_0 & \text{en } \Omega, \\
\rho \mathbf{I_n} \ddot{\phi} - \mathbf{E} \mathbf{I_n} \phi'' + \mathbf{G}\mathbf{A}\,(\phi - w') & = 0 & \text{en } R_T, \\
\rho \mathbf{A} \ddot{w} + \mathbf{G}\mathbf{A}\,(\phi - w')' & = [\![p(t,x)]\!] & \text{en } R_T, \\
\phi(\cdot,0) & = 0 & \text{en } (0,\, T), \\
w(\cdot,0) & = 0 & \text{en } (0,\, T), \\
\phi'(\cdot,L) & = 0 & \text{en } (0,\, T), \\
\phi(\cdot,L) - w'(\cdot,L) & = 0 & \text{en } (0,\, T), \\
\phi(0,\cdot) & = \phi_0 & \text{en } I, \\
\dot{\phi}(0,\cdot) & = \dot{\phi}_0 & \text{en } I, \\
w(0,\cdot) & = w_0 & \text{en } I, \\
\dot{w}(0,) & = \dot{w}_0 & \text{en } I,
\end{array}
\right.
\tag{3.0.1}
$$

donde $[\![p(t,x)]\!]$ representa el salto de presión entre la parte superior de la viga y su parte inferior, $p_0(x,y) \in L^2(\Omega)$ y $\dot{p}_0(x,y) \in L^2(\Omega)$ son las condiciones iniciales de la presión y su derivada temporal, $\phi_0(x)$, $\dot{\phi}_0(x) \in L^2(I)$, $w_0(x)$ y $\dot{w}_0(x) \in L^2(I)$ son las condiciones iniciales de la rotación y el desplazamiento así como sus derivadas temporales.

$\mathbf{E}$, $\mathbf{I_n}$, $\mathbf{A}$,$\mathbf{G}$ ρ y c^2 son parámetros físicos y geométricos de la viga elástica y el fluido acústico que se explicarán más adelante. Las condiciones de contorno de la viga elástica corresponden a una que ésta empotrada en un extremo ($x = 0$) y libre en el otro ($x = L$).

4. Viga elástica

En éste capítulo se presentará un modelo para la vibración del paladar blando. Para ello se supondrá que el paladar blando puede ser simulado por una viga elástica empotrada en un extremo y libre en el otro como muestra la Figura 4. En la cual sólo se permiten desplazamientos en una dirección, en nuestro caso en la dirección ξ (ver Figura 5).

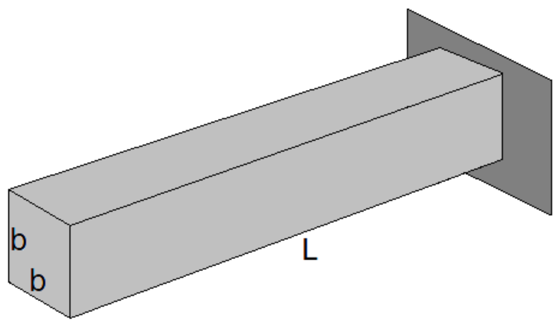


Figura 4: Viga elástica empotrada en un extremo y libre en el otro, de largo L y grosor b.

Se define S como la sección transversal de la viga (ver Figura 5).

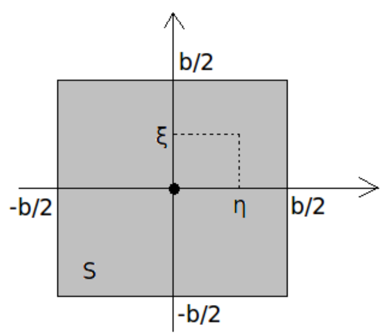


Figura 5: Sección transversal de la viga [5].

Las propiedades geométricas de la sección transversal se determinan por los siguientes parámetros;

- El área de S: $\mathbf{A} := \int_S d\xi \, d\eta = b^2$.
- Momento de inercia $\mathbf{I_n} := \int_S \xi^2 d\xi \, d\eta = \frac{b^4}{12}$.

Puesto que la viga elástica que se modelará es de dimensiones pequeñas, es decir, esta viga es de grosor y largo pequeño, la teoría de Timoshenko es la que más se acomoda para estos modelos en desmedro de la teoría de Euler-Bernoulli, ya que en ésta, el giro relativo de la sección se aproxima mediante la derivada del desplazamiento vertical. Esto constituye una aproximación válida sólo para piezas largas en relación a las dimensiones de la sección transversal, en las que las deformaciones debidas al esfuerzo cortante son despreciables frente a las deformaciones ocasionadas por el momento flector. En la teoría de Timoshenko no se desprecian las deformaciones debido al esfuerzo cortante y por lo tanto, es válida también para vigas cortas, a diferencia de la Teoría de Euler-Bernoulli.

4.1. Modelo estacionario de Timoshenko

Para formular el problema se utiliza la hipótesis cinemática de Timoshenko. La deformación se describe por el desplazamiento de la línea de centroides, $w : (0, L) \to \mathbb{R}$ y la rotación de las secciones transversales, $\phi : (0, L) \to \mathbb{R}$. Las propiedades físicas de la viga elástica se determinan por el módulo de elasticidad $\mathbf{E}$ y de corte $\mathbf{G} := \dfrac{\mathbf{E}}{2(1+\nu)}$, con ν el coeficiente de Poisson; todos los coeficientes son estrictamente positivos.

Estos coeficientes no necesariamente son constantes, sino que se permite su variación a lo largo de la viga. Teniendo todo esto en cuenta, la formulación del problema es la siguiente:

$$
\left\{
\begin{aligned}
-(\mathbf{EI_n}\phi')' + \mathbf{GA}\,(\phi - w') &= 0 && \text{en } I,\\
(\mathbf{GA}\phi - w')' &= f(x) && \text{en } I,\\
\phi(0) &= 0,\\
w(0) &= 0,\\
\phi'(L) &= 0,\\
\phi(L) - w'(L) &= 0,
\end{aligned}
\right.
\tag{4.1.1}
$$

donde $I := (0, L)$ es el dominio de la viga elástica y $f \in L^2(I)$ representa la carga a la que se somete la viga elástica.

Definiendo $\widehat{H}^1(I) := \{u \in H^1(I) : u(0) = 0\}$, multiplicando la primera ecuación de (4.1.1) por $\psi \in \widehat{H}^1(I)$ e integrando por partes se obtiene:

$$
\int_I \mathbf{EI_n}\phi'\psi' + \int_I \mathbf{GA}(\phi - w')\psi = 0,
\tag{4.1.2}
$$

donde hemos usado que $\phi'(L) = 0$ y $\psi(0) = 0$.

Del mismo modo, multiplicando la segunda ecuación de (4.1.1) por $v \in \widehat{H}^1(I)$ e integrando por partes resulta:

$$
-\int_I \mathbf{GA}(\phi - w')v' = \int_I fv,
\tag{4.1.3}
$$

donde hemos usado que $\phi(L) - w'(L) = 0$ y $v(0) = 0$.

Luego, sumando (4.1.2) y (4.1.3) se obtiene que la formulación variacional asociada al problema (4.1.1) esta dada por:

$$
\begin{cases}
\text{Hallar } (\phi, w) \in \mathbf{H} \text{ tales que:}\\
\\
A\left((\phi, w), (\psi, v)\right) = F\left((\psi, v)\right) \qquad \forall (\psi, v) \in \mathbf{H},
\end{cases}
.
\tag{4.1.4}
$$

donde $\mathbf{H} := \left(\widehat{H}^1(I) \times \widehat{H}^1(I)\right)$ y las formas A y F se definen como:

1. $A : (\mathbf{H} \times \mathbf{H}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$A((\phi, w), (\psi, v)) := \int_I \mathbf{EI_n} \phi'(x)\psi'(x) + \int_I \mathbf{GA}(\phi(x) - w'(x))(\psi(x) - v'(x)); \tag{4.1.5}$$

2. $F : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F((\psi, v)) := \int_I f(x)v(x). \tag{4.1.6}$$

Observaciones:

- Se define la norma en $\mathbf{H}$ como: $\|(u, v)\|_{\mathbf{H},I} := \sqrt{\|u\|^2_{1,\Omega} + \|v\|^2_{1,\Omega}} \quad \forall u, v \in \widehat{H}^1(I)$.
- $\mathbf{E}$, $\mathbf{I_n}$, $\mathbf{G}$ y $\mathbf{A}$ son todas positivas.
- $A((\phi, w), (\phi, w)) = \mathbf{EI_n}\|\phi'\|^2_{0,\Omega} + \mathbf{GA}\|\phi - w'\|^2_{0,\Omega}$.
- La forma A es simétrica: $A((\phi, w), (\psi, v)) = A((\psi, v), (\phi, w))$.
- De la desigualdad de Poincaré y la definición de la forma A es claro que, $\exists c, c' > 0$:

  1. $c\|\phi\|^2_{1,\Omega} \leq \|\phi'\|^2_{0,\Omega} \leq \dfrac{1}{\mathbf{EI_n}} A((\phi, w), (\phi, w))$;
  2. $c'\|w\|^2_{1,\Omega} \leq \|w'\|^2_{0,\Omega} \leq (\|\phi - w'\|_{0,\Omega} + \|\phi\|_{0,\Omega})^2 \leq 2\left(\dfrac{1}{\mathbf{GA}} + \dfrac{1}{\mathbf{EI_n}}\right) A((\phi, w), (\phi, w))$.

  Con lo cual si sumamos (1) y (2) se obtiene que
  $\min\{c, c'\}(\|\phi\|^2_{1,\Omega} + \|w\|^2_{1,\Omega}) \leq \left(\dfrac{2}{\mathbf{GA}} + \dfrac{3}{\mathbf{EI_n}}\right) A((\phi, w), (\phi, w))$,
  o, equivalentemente,
  $\alpha\|((\phi, w))\|^2_{\mathbf{H},I} \leq A((\phi, w), (\phi, w))$ donde $\alpha := \dfrac{\min\{c, c'\}}{\left(\dfrac{2}{\mathbf{GA}} + \dfrac{3}{\mathbf{EI_n}}\right)}$. Por lo tanto, se tiene que la forma A es $\mathbf{H}$-elíptica.
- La forma A es continua. En efecto,

$$|A((\phi, w), (\psi, v))| = \left| \int_I \mathbf{EI_n}\phi'\psi' + \int_I \mathbf{GA}(\phi - w')(\psi - v') \right|$$
$$\leq \mathbf{EI_n}\|\phi\|_{1,\Omega}\|\psi\|_{1,\Omega} + \mathbf{GA}(\|\phi\|_{1,\Omega} + \|w\|_{1,\Omega})(\|\psi\|_{1,\Omega} + \|v\|_{1,\Omega})$$
$$\leq (\mathbf{EI_n} + \mathbf{GA}) \left(\|\phi\|_{1,\Omega} + \|w\|_{1,\Omega}\right) \left(\|\psi\|_{1,\Omega} + \|v\|_{1,\Omega}\right)$$
$$\leq (\mathbf{EI_n} + \mathbf{GA}) \left(\|\phi\|^2_{1,\Omega} + \|w\|^2_{1,\Omega}\right)^{1/2} \left(\|\psi\|^2_{1,\Omega} + \|v\|^2_{1,\Omega}\right)^{1/2}$$

$$\leq (\mathbf{EI_n} + \mathbf{GA}) \| \, (\phi, w) \, \|_H \| \, (\psi, v) \, \|_H$$

$$\therefore |A((\phi, w), (\psi, v))| \leq (\mathbf{EI_n} + \mathbf{GA}) \|(\phi, w)\|_{\mathbf{H},\Omega} \|(\psi, v)\|_{\mathbf{H},\Omega}.$$

- De manera similar se demuestra que la forma F es continua.

De las observaciones anteriores se concluye que se cumplen todas las hipótesis del lema de Lax-Milgram (ver Teorema A.2) y por lo tanto, se puede asegurar que el problema (4.1.4) tiene solución única.

4.1.1. Discretización espacial

Para la discretización espacial consideremos una partición (no necesariamente uniforme), del intervalo $[0, L]$. Considere una familia $\{\mathscr{T}_h\}$ de particiones del intervalo I:

$\mathscr{T}_h : \quad 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_M = L$ con $M > 1$ e $I_j := (x_{j-1}, x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, M$,
con un paso de malla $h := \max\limits_{j=1,\ldots,M} (x_{j-1}, x_j)$.

Definimos:

$$H_h := \{v \in \mathscr{C}^0(\overline{I}); v\big|_{\overline{I}_j} \in \mathbb{P}_k(\overline{I}_j), \qquad 1 \leq j \leq M, \quad I_j \in \mathscr{T}_h\} \cap \widehat{H}^1(I), \qquad k \geq 1,$$

donde $\mathbb{P}_k$ designa el espacio de polinomios a lo más de grado k en el intervalo $\overline{I}_j$. Claramente $H_h \subseteq \widehat{H}^1(\Omega)$ y por lo tanto $\mathbf{H_h} := (H_h, H_h) \subseteq \mathbf{H}$.

4.1.2. Problema variacional discreto

A continuación se presenta el problema variacional discreto a resolver:

$$(4.1.7) \qquad \begin{cases} \text{Hallar } (\phi_h, w_h) \in \mathbf{H_h} \text{ tales que:} \\ \\ A\left((\phi_h, w_h), (\psi_h, v_h)\right) = F\left((\psi_h, v_h)\right) \qquad \forall (\psi_h, v_h) \in \mathbf{H_h}, \end{cases}$$

puesto que $\mathbf{H_h} \subseteq \mathbf{H}$ es de dimensión finita, todas las hipótesis del lema de Lax-Milgram (ver Teorema A.2) se siguen cumpliendo. Por lo tanto el problema discreto (4.1.7) tiene solución única.

4.1.3. Descripción matricial

Sea $\{u_j\}_{j=1}^M$ una base de H_h. Escribimos $\phi_h, w_h \in H_h$, en términos de esta base:

$$\phi_h = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i u_i, \qquad w_h = \sum_{j=1}^{M} \beta_j u_j, \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i, j \leq M,$$

y testeamos el problema discreto (4.1.7) con $\psi_h = u_k$, $v_h = u_l$, $1 \leq k, l \leq M$. Entonces, el problema discreto (4.1.7) es equivalente al siguiente problema matricial:

$$\mathbf{B}\mu = \mathbf{F},$$

donde:

1.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{EI_n K_1} + \mathbf{GAK_2} & -\mathbf{GAK_3}^t \\ -\mathbf{GAK_3} & \mathbf{GAK_4} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}. \tag{4.1.8}$$

2.

$$\mathbf{K_1} = \left(\int_I u_i' u_k' \right)_{i,k=1,\ldots,M}, \qquad \mathbf{K_2} = \left(\int_I u_i u_k \right)_{i,k=1,\ldots,M}, \tag{4.1.9}$$

$$\mathbf{K_3} = \left(\int_I u_i u_l' \right)_{i,l=1,\ldots,M}, \qquad \mathbf{K_4} = \left(\int_I u_j' u_l' \right)_{j,l=1,\ldots,M}. \tag{4.1.10}$$

3.

$$\mu = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \left(\int_I f u_l \right)_{l=1,\ldots,M}. \tag{4.1.11}$$

Debido a que la viga elástica a modelar es una estructura de espesor muy pequeño, el método de elementos finitos tradicional aplicado al modelo de Timoshenko, presenta un fenómeno llamado *bloqueo numérico.* Desde el punto de vista del análisis numérico, este fenómeno por lo general se manifiesta en que las estimaciones del error a priori dependen del espesor de la estructura, de manera que degeneran cuando este parámetro se hace pequeño. Para evitar el bloqueo numérico se puede utilizar el método de elementos finitos mixtos o métodos especiales basados en la integración reducida del término de corte, el cual es equivalente a usar elementos finitos mixtos como se demostró en [4].

Es importante destacar cuales son los términos de corte, en este caso son de la forma:

$$\int_I \mathbf{GA}(\phi_h - w_h')(\psi_h - v_h').$$

Estos términos, en la implementación numérica, se resolverán usando métodos de integración reducida y métodos de integración exacta según corresponda.

Para visualizar este bloqueo se presentará un ejemplo numérico, de una viga elástica de grosor pequeño en comparación al largo de ésta y se compararan los resultados obtenidos tomando como solución “exacta”la interpolada de la solución analítica.

4.1.4. Resultados numéricos

En esta sección se presentan los resultados de algunas pruebas numéricas, calculadas con un código propio desarrollado en MATLAB, el cual contiene la implementación del método de elementos finitos tradicional, con el menor orden posible $k = 1$, es decir, elementos finitos lineales a trozos y continuos para el desplazamiento ϕ y la rotación w.

A continuación se presenta un ejemplo cuyo propósito es validar el código y observar el fenómeno del bloqueo numérico mediante la resolución de un problema con una solución analítica conocida.

Consideremos una viga de acero de 4cm. de largo y 0.02cm. de grosor, empotrada en un extremo y libre en el otro, sobre la cual se ejerce una fuerza $f(x) := -\mathbf{EI_n}$ y cuyas constantes físicas son:

- Módulo de elasticidad: $\mathbf{E} = 2{,}1 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2$.
- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0{,}3$.

Por lo tanto, la formulación matemática del problema es la siguiente:

Dados $I = (0,\ 4)$ y $b = 0.02$, encontrar $\phi, w \in \mathbb{R}$ tales que:

$$
(4.1.12)\qquad \begin{cases} -\mathbf{EI_n}\phi'' + \mathbf{GA}\,(\phi - w') &= 0 \qquad \text{en } I, \\ \mathbf{GA}\,(\phi - w')' &= -\mathbf{EI_n} \qquad \text{en } I, \\ \phi(0) &= 0, \\ w(0) &= 0, \\ \phi'(4) &= 0, \\ \phi(4) - w(4)' &= 0, \end{cases}
$$

cuya solución analítica para la rotación ϕ y el desplazamiento w son:

$$
(4.1.13)\qquad \begin{aligned} \text{Rotación } \phi &= -\frac{x^3}{6} + 2x^2 - 8x. \\ \text{Desplazamiento } w &= -\frac{x^4}{24} + \frac{2x^3}{3} + \left(-8 + \frac{\mathbf{EI_n}}{\mathbf{GA}}\right)\frac{x^2}{2} - \frac{4x\mathbf{EI_n}}{\mathbf{GA}}. \end{aligned}
$$

Para resolver el problema (4.1.12) numéricamente se utilizaron elementos finitos del tipo $\mathbb{P}_1$. A continuación se presentan los resultados obtenidos para la rotación ϕ y el desplazamiento w, utilizando un método de integración exacta y posteriormente utilizando el método de integración reducida para el término de corte:

En la Figura 6 se muestra el gráfico en escala logarítmica de los errores de la rotación $e(\phi) = \phi - \phi_h$, en norma $L^2(I)$ y en seminorma $H^1(I)$ versus el número de intervalos N en que se dividió el espacio.

Figura 6: Errores de la rotación ϕ en norma $L^2(I)$ y en seminorma $H^1(I)$, utilizando un método de integración exacta para el término de corte.

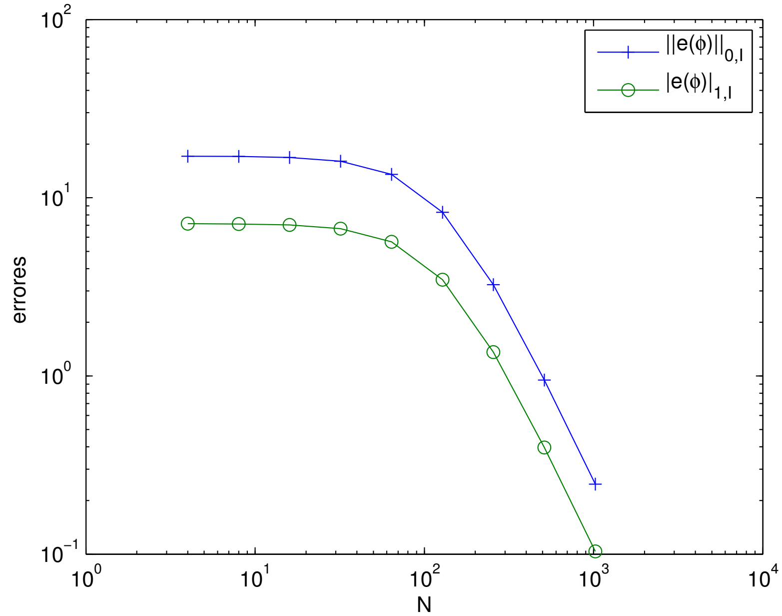
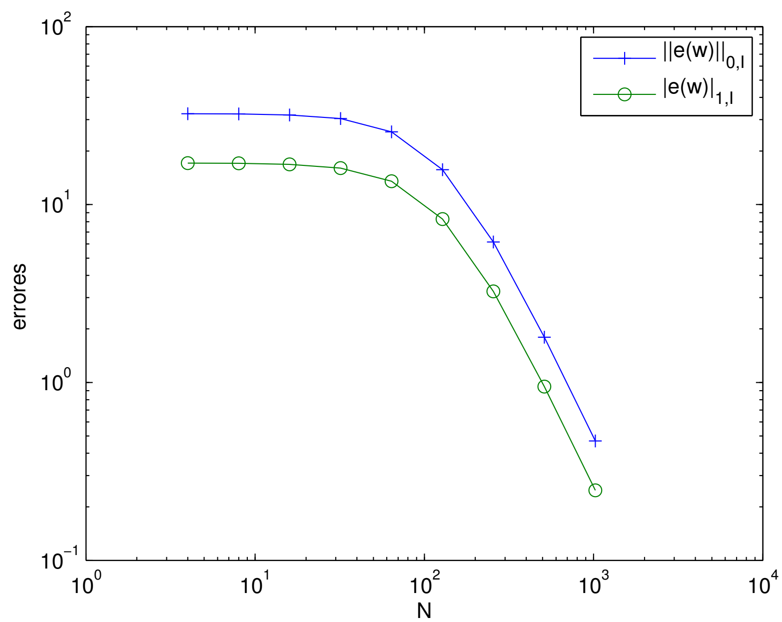


Figura 7: Errores del desplazamiento w en norma $L^2(I)$ y en seminorma $H^1(I)$, utilizando un método de integración exacta para el término de corte.



En la Figuras 7 se muestra el gráfico en escala logarítmica de los errores de los desplazamientos $e(w) = w - w_h$, en norma $L^2(I)$ y en seminorma $H^1(I)$ versus el número de intervalos N.

En las Figuras 6 y 7 se observa como se produce el bloqueo numérico del método esto es debido a que el grosor de la viga es muy pequeño ([4]). Puede verse que los errores no se reducen significativamente hasta que el número de elementos N es suficientemente grande.

En las Figuras 8 y 9 se muestra el gráfico en escala logarítmica de los errores de la rotación ϕ y del desplazamiento w en norma $L^2(I)$ y en la seminorma $H^1(I)$, pero utilizando el método de integración reducida para el término de corte.

Figura 8: Errores de la rotación ϕ en norma $L^2(I)$ y en seminorma $H^1(I)$, utilizando un método de integración reducida para el término de corte.

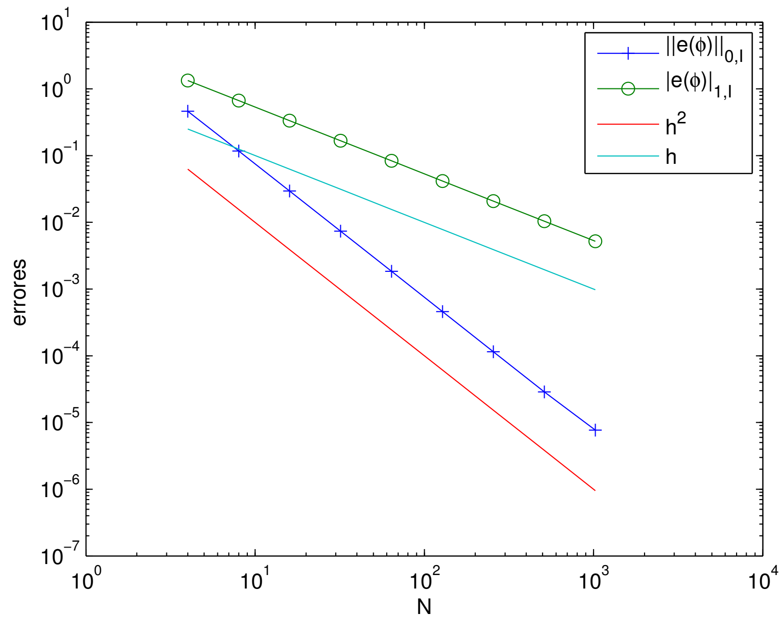
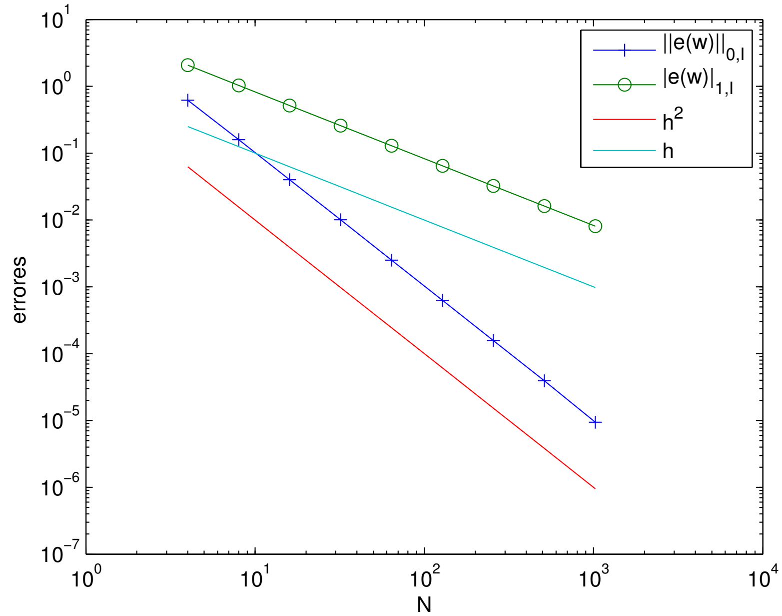


Figura 9: Errores del desplazamiento w en norma $L^2(I)$ y en seminorma $H^1(I)$, utilizando un método de integración reducida para el término de corte.



En las Figuras 8 y 9 se observa que utilizando el método de integración reducida para los términos de corte, no se produce el fenómeno del bloqueo numérico como en el caso anterior, así se concluye que el método converge sin ningún problema a la solución exacta y en los ordenes que corresponden, es decir $\mathcal{O}(h^2)$ para el error en $L^2(I)$ y $\mathcal{O}(h)$ para la seminorma $H^1(I)$ ya sea para la rotación ϕ o el desplazamiento w, donde $h := \dfrac{L}{N}$.

En las Tablas 1 y 2 se presentan los errores en norma $L^2(I)$ y seminorma $H^1(I)$ para la rotación ϕ y el desplazamiento w respectivamente, en diferentes mallas para distintos métodos (con integración exacta e integración reducida).

Tabla 1: Errores de la rotación ϕ en norma $L^2(I)$ y seminorma $H^1(I)$ usando el método de integración exacta e integración reducida para el término de corte.

	Integración exacta		Integración reducida	
N	$\|\|\phi - \phi_h\|\|_{0,I}$	$\|\phi - \phi_h\|_{1,I}$	$\|\|\phi - \phi_h\|\|_{0,I}$	$\|\phi - \phi_h\|_{1,I}$
4	17.088967158808	7.148692473784	0.462731423499	1.338531533675
8	17.033866093960	7.125939242047	0.117312818638	0.667317390740
16	16.824636836071	7.038431520617	0.029429194945	0.333414703580
32	16.037157260172	6.709004118485	0.007363600497	0.166676838931
64	13.508173687063	5.651046500949	0.001841306895	0.083334605005
128	8.2832547931175	3.465289553511	0.000460370880	0.041666825709
256	3.2519221810726	1.360516152708	0.000115146144	0.020833353321
512	0.9481807846423	0.396784671956	0.000028787720	0.010416669157
1024	0.2473308019135	0.103595757132	0.000007705313	0.005208333872

Tabla 2: Errores del desplazamiento w en norma $L^2(I)$ y seminorma $H^1(I)$ usando el método de integración exacta e integración reducida para el término de corte.

	Integración exacta		Integración reducida	
N	$\|\|w - w_h\|\|_{0,I}$	$\|w - w_h\|_{1,I}$	$\|\|w - w_h\|\|_{0,I}$	$\|w - w_h\|_{1,I}$
4	32.398047184222	17.089217514382	0.619428421007	2.081350968547
8	32.297510634991	17.034122726531	0.159449655887	1.034951183938
16	31.901039511082	16.824893567187	0.040155361177	0.516666524923
32	30.407922205224	16.037408441538	0.010057232880	0.258229183407
64	25.612738249125	13.508405795495	0.002515434910	0.129101489716
128	15.705812106782	8.2834473047988	0.000628894445	0.064549104269
256	6.1659432258311	3.2520765430818	0.000157131520	0.032274347087
512	1.7978379135420	0.9483176718968	0.000039339458	0.016137147819
1024	0.4689617960958	0.2474623481726	0.000009393585	0.008068571162

Puede verse claramente que los errores del método con integración reducida son significativamente más pequeños que los del método con integración exacta.

4.2. Modelo evolutivo de la viga elástica de Timoshenko

A continuación se presenta el modelo evolutivo, donde la viga elástica de Timoshenko sigue manteniendo las mismas características físicas que el modelo estacionario.

Sea $Q_T := I \times (0, T)$ y la función $f \in L^2((0,T); L^2(I))$ que representa la carga a la cual es sometida la viga elástica, el problema evolutivo asociado al modelo de Timoshenko es el siguiente :

$$(4.2.1)\qquad \begin{cases} \rho\mathbf{I_n}\ddot{\phi} - \mathbf{EI_n}\phi'' + \mathbf{GA}\,(\phi - w') & = 0 \qquad \text{en } Q_T, \\ \rho\mathbf{A}\ddot{w} + \mathbf{GA}\,(\phi - w')' & = f \qquad \text{en } Q_T, \\ \phi(\cdot, 0) & = 0 \qquad \text{en } (0, T), \\ w(\cdot, 0) & = 0 \qquad \text{en } (0, T), \\ \phi'(\cdot, L) & = 0 \qquad \text{en } (0, T), \\ \phi(\cdot, L) - w'(\cdot, L) & = 0 \qquad \text{en } (0, T), \\ \phi(0, \cdot) & = \phi_0 \qquad \text{en } I, \\ \dot{\phi}(0, \cdot) & = \dot{\phi}_0 \qquad \text{en } I, \\ w(0, \cdot) & = w_0 \qquad \text{en } I, \\ \dot{w}(0, \cdot) & = \dot{w}_0 \qquad \text{en } I, \end{cases}$$

donde ρ es la densidad de la viga y ϕ', w' denotan derivadas espaciales y $\dot{\phi}, \dot{w}$ derivadas temporales. Además ρ es la densidad de la viga.

Multiplicando la primera ecuación de (4.2.1) por $\psi \in \widehat{H}^1(I)$ e integrando por partes se tiene:

$$(4.2.2)\qquad \int_I \rho\mathbf{I_n}\ddot{\phi}\psi + \int_I \mathbf{EI_n}\phi'\psi' + \int_I \mathbf{GA}(\phi - w')\psi = 0.$$

Del mismo modo, multiplicando la segunda ecuación de (4.2.1) por $v \in \widehat{H}^1(I)$ e integrando por partes resulta:

$$(4.2.3)\qquad \int_I \rho\mathbf{A}\ddot{w}\psi - \int_I \mathbf{GA}(\phi - w')v' = \int_I fv.$$

Luego, sumando (4.2.2) y (4.2.3) se obtiene la formulación variacional asociada al problema (4.2.1):

$$(4.2.4)\qquad \begin{cases} \text{Hallar } \phi, w : [0,T] \longrightarrow \widehat{H}^1(I) \text{ tales que:} \\ \displaystyle\int_I \rho\mathbf{I_n}\ddot{\phi}\psi + \int_I \rho\mathbf{A}\ddot{w}v + A((\phi, w), (\psi, v)) = F((\psi, v)) \qquad \forall \psi, v \in \widehat{H}^1(I), \\ \qquad \phi(0, \cdot) = \phi_0 \qquad \text{en } I, \\ \qquad \dot{\phi}(0, \cdot) = \dot{\phi}_0 \qquad \text{en } I, \\ \qquad w(0, \cdot) = w_0 \qquad \text{en } I, \\ \qquad \dot{w}(0, \cdot) = \dot{w}_0 \qquad \text{en } I, \end{cases}$$

donde las formas $A : (\mathbf{H} \times \mathbf{H}) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $F : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ están definidas en (4.1.5) y (4.1.6) respectivamente y $\ddot{\phi}$, $\ddot{w}$ deben entenderse en el sentido de las distribuciones en $(0, T)$.

Observaciones:

- Ya se demostró anteriormente que la forma A es acotada, $\mathbf{H}$-elíptica y simétrica.
- Se sabe que la inyección canónica de $\mathbf{H}$ en $\mathbf{L}$ donde, $\mathbf{L} := \left(L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\right)$ es compacta.

Luego, se cumplen todas las hipótesis del Teorema A.3 y, por lo tanto, el problema (4.2.4) tiene solución única.

4.2.1. Discretización Temporal y Espacial

Para la discretización en tiempo consideremos una partición uniforme del intervalo $[0,\, T]$, en los tiempos intermedios $0 = t^0 < t^1 < ... < t^N = T$, con $N > 1$ y denotemos $\Delta t := t^n - t^{n-1}$, $1 \leq n \leq N$. Análogamente, consideremos la familia de particiones $\{\mathscr{T}_h\}_{h>0}$, del intervalo I como en la sección anterior $\mathscr{T}_h: \quad 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_M = L\ ,\ M > 1\ ,\ I_j := (x_{j-1},\, x_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, M.$

Al igual que en el caso estacionario definimos:

$$H_h := \{v \in \mathscr{C}^0(\bar{I}); v\big|_{\bar{I}_j} \in \mathbb{P}_k(\bar{I}_j), \quad 1 \leq j \leq M, \quad I_j \in \mathscr{T}_h\} \cap \widehat{H}^1(I), \qquad k \geq 1.$$

4.2.2. Problema semi-discreto en el tiempo

A continuación se presenta el problema semi-discreto resultante de utilizar el método de Newmark para la parte temporal:

Dados $(\phi_0, w_0) \in \mathbf{L}$ y $(\phi_1, w_1) \in \mathbf{L}$ con $\phi_1 := \phi_0 + \Delta t\dot{\phi}_0,\ w_1 := w_0 + \Delta t\dot{w}_0$, se presenta la formulación variacional asociada al problema (4.2.4):

$$(4.2.5) \qquad \begin{cases} \text{Para } n = 1, \ldots, N-1, \text{ hallar } (\phi^{n+1}, w^{n+1}) \in \mathbf{H} \text{ tales que:} \\ \\ \displaystyle\int_I \rho \mathbf{I_n} \delta^{n+1}(\phi)\psi + \int_I \rho \mathbf{A} \delta^{n+1}(w) v + A((\varrho^{n+1}(\phi), \varrho^{n+1}(w)), (\psi, v)) \\ \displaystyle\qquad\qquad = \int_I \left(\varrho^{n+1}(f)\right) v \quad \forall \psi, v \in \mathbf{H}, \end{cases}$$

donde δ^{n+1} y ϱ^{n+1} se definen como:

$$(4.2.6) \qquad \delta^{n+1}(u) := \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} \qquad 1 \leq n \leq N-1,$$

$$(4.2.7) \qquad \varrho^{n+1}(z) := \left(\frac{1}{4}z^{n+1} + \frac{1}{2}z^n + \frac{1}{4}z^{n-1}\right) \qquad 1 \leq n \leq N-1,$$

o equivalentemente:

Dados $(\phi_0, w_0) \in \mathbf{L}$ y $(\phi_1, w_1) \in \mathbf{L}$ de la misma forma de antes:

$$
\begin{cases}
\text{Para } n = 1, \ldots, N-1, \text{ hallar } (\phi^{(n+1)}, w^{(n+1)}) \in \mathbf{H} \text{ tales que:} \\
\\
D((\phi^{(n+1)}, w^{(n+1)}), (\psi, v)) = F_{n+1}((\psi, v))) \qquad \forall (\psi, v) \in \mathbf{H},
\end{cases}
\tag{4.2.8}
$$

donde las formas $D : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $F_{n+1} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ están dadas por:

$$
D((\phi^{(n+1)}, w^{(n+1)}), (\psi, v)) := \frac{\rho \mathbf{I_n}}{\Delta t^2} \int_I \phi^{(n+1)} \psi + \frac{\rho \mathbf{A}}{\Delta t^2} \int_I w^{(n+1)} v + \frac{1}{4} A((\phi^{(n+1)}, w^{(n+1)}), (\psi, v)),
$$

$$
\begin{aligned}
F_{n+1}((\psi, v)) := \int_I \left(\varrho^{n+1}(f) \right) v + \frac{\rho \mathbf{A}}{\Delta t^2} \int_I (2w^{(n)} - w^{(n-1)}) v + \frac{\rho \mathbf{I_n}}{\Delta t^2} \int_I (2\phi^{(n)} - \phi^{(n-1)}) \psi \\
- \frac{1}{2} A((\phi^n, w^n), (\psi, v)) - \frac{1}{4} A((\phi^{n-1}, w^{n-1}), (\psi, v)).
\end{aligned}
$$

Para asegurar la existencia y unicidad del problema (4.2.8) semi-discretizado en el tiempo, es necesario que se cumplan las hipótesis del lema de Lax-Milgram (ver Teorema A.2). Por lo tanto se tiene que demostrar que:

1. La forma $D : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathbf{H}$-elíptica y continua. En efecto, sea $m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq N$ se tiene que:

   $$
   \left| D((\phi^{(m)}, w^{(m)}), (\psi, v)) \right| \leq \frac{\rho \mathbf{I_n}}{\Delta t^2} \|\phi^m\|_{1,I} \|\psi\|_{1,I} + \frac{\rho \mathbf{A}}{\Delta t^2} \|w^m\|_{1,I} \|v\|_{1,I} + \left| \frac{1}{4} A((\phi^{(m)}, w^{(m)}), (\psi, v)) \right|,
   $$

   de la sección anterior sabemos que la forma A es acotada y procediendo de la misma forma en que se acotó A se concluye que:

   $$
   \left| D((\phi^{(m)}, w^{(m)}), (\psi, v)) \right| \leq \left(\frac{\rho \mathbf{I_n}}{\Delta t^2} + \frac{\rho \mathbf{A}}{\Delta t^2} + \frac{1}{4} (\mathbf{EI_n} + \mathbf{GA}) \right) \|(\phi^m, w^m)\|_{\mathbf{H},\Omega} \|(\psi, v)\|_{\mathbf{H},\Omega}.
   $$

   Por otro lado,

   $$
   D((\phi^{(m)}, w^{(m)}), (\phi^{(m)}, w^{(m)})) = \frac{\rho \mathbf{I_n}}{\Delta t^2} \|\phi^m\|_{1,I}^2 + \frac{\rho \mathbf{A}}{\Delta t^2} \|w^m\|_{1,I}^2 + \frac{1}{4} A((\phi^{(m)}, w^{(m)}), (\phi^{(m)}, w^{(m)})),
   $$

   con lo cual,

   $$
   D((\phi^{(m)}, w^{(m)}), (\phi^{(m)}, w^{(m)})) \geq \frac{1}{4} A((\phi^{(m)}, w^{(m)}), (\phi^{(m)}, w^{(m)})) \geq \frac{\alpha}{4} \|(\phi^m, w^m)\|_{\mathbf{H},\Omega}^2,
   $$

   esto pues en la sección anterior se probó que la forma A era $\mathbf{H}$-elíptica. Por lo tanto, la forma D es acotada y $\mathbf{H}$-elíptica.

2. De manera similar se demuestra que las formas $F_{n+1} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas $1 \leq n \leq N-1$.

Por último, se presenta el esquema del problema variacional discreto en el espacio:

Dados $(\phi_0, w_0) \in \mathbf{L}$ y $(\phi_1, w_1) \in \mathbf{L}$:

$$\text{(4.2.9)} \qquad \begin{cases} \text{Para } n = 1, \ldots, N-1 \text{ hallar } (\phi_h^{(n+1)}, w_h^{(n+1)}) \in \mathbf{H_h} \text{ tales que:} \\ \\ D((\phi_h^{(n+1)}, w_h^{(n+1)}), (\psi_h, v_h)) = F_{n+1}((\psi_h, v_h)) \quad \forall (\psi_h, v_h) \in \mathbf{H_h}. \end{cases}$$

Puesto que $\mathbf{H_h} : (H_h, H_h) \subseteq \mathbf{H}$ es de dimensión finita, todas las hipótesis del lema de Lax-Milgram (Teorema A.2) se siguen cumpliendo. Por lo tanto el problema (4.2.9) tiene solución única $\forall n = \{1, \ldots, N-1\}$.

4.2.3. Descripción matricial

Sea $\{u_j\}_{j=1}^M$ una base de H_h. Escribimos $\phi_h^{(n+1)}, w_h^{(n+1)} \in H_h$ en términos de esta base:

$$\phi_h^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^{(n+1)} u_i, \qquad w_h^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{M} \beta_j^{(n+1)} u_j, \quad 1 \leq n \leq N, \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} \quad 1 \leq i, j \leq M,$$

y testeamos el problema discreto (4.2.9) con $\psi_h = u_k$, $v_h = u_l$, $1 \leq k, l \leq M$. Entonces el problema discreto (4.2.9) es equivalente al siguiente problema matricial:

$$\mathbf{S}\mu^{(n+1)} = \mathbf{F}^{n+1} + 2\mathbf{Q}\mu^{(n)} - \mathbf{S}\mu^{(n-1)}, \quad 1 \leq n \leq N-1,$$

donde:

1. $\mathbf{S} := \mathbf{C} + \dfrac{\Delta t^2}{4}\mathbf{B}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{I_n K_2} \\ \\ \rho \mathbf{A K_6} \end{bmatrix}.$
2. $\mathbf{Q} := \mathbf{C} - \dfrac{\Delta t^2}{4}\mathbf{B}, \qquad K_6 = \left(\displaystyle\int_I u_j u_l \right)_{k,l=1,\ldots,M}.$
3. $\mathbf{K_2}$ y $\mathbf{B}$ ya fueron definidos anteriormente en (4.1.8) y (4.1.9) respectivamente.
4. $\mu^{(m)} = \begin{bmatrix} \alpha^{(m)} \\ \\ \beta^{(m)} \end{bmatrix}, \qquad 1 \leq m \leq N, \qquad \mathbf{F}^{n+1} = \dfrac{\mathbf{G}^{(n+1)} + 2\mathbf{G}^{(n)} + \mathbf{G}^{(n-1)}}{4}.$
5. $\mathbf{G}^m = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \Delta t^2 \mathbf{H}^m \end{bmatrix}, \qquad 1 \leq m \leq N.$
6. $\mathbf{H}^m = \left(\displaystyle\int_I f^m u_l \right)_{l=1,\ldots,M}, \qquad 1 \leq m \leq N.$

Cabe esperar que el modelo evolutivo de la viga elástica de Timoshenko, al igual que el modelo estacionario, presente el fenómeno de bloqueo numérico, ya mencionado en la sección anterior. Debido a que en la bibliografía sólo se encuentra desarrollado el bloqueo de los problemas evolutivos de placas [9,10] y no se encuentra nada relacionado con el bloqueo de los problemas evolutivos de la viga elástica de Timoshenko, no existe teoría que lo avale.

Para observar si el bloqueo se produce en el modelo evolutivo de la viga elástica de Timoshenko, se decidió testearlo empíricamente. Con este propósito ello se crearon 2 ejemplos numéricos donde se observa el bloqueo.

4.2.4. Resultados numéricos

En esta sección se presentan los resultados de algunas pruebas numéricas, calculadas con un código propio desarrollado en MATLAB, el cual contiene la implementación del método de elementos finitos tradicional, con el menor orden posible $k = 1$, es decir, elementos finitos lineales a trozos y continuos para el desplazamiento ϕ_h y la rotación w_h, junto al esquema de Newmark para la discretización del tiempo, con una partición homogénea y $\beta = \dfrac{1}{4}$.

A continuación se presentan los ejemplos, cuyo propósito es validar el código y observar el fenómeno del bloqueo numérico mediante la resolución de un problema con una solución analítica conocida. Para todos los casos se han utilizado los siguientes parámetros físicos

- Módulo de elasticidad: $\mathbf{E} = 2{,}1 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2$.
- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0{,}3$.
- Densidad: $\rho = 7{,}85 \times 10^{-3} \text{kgf/cm}^3$.

que corresponden a una viga de acero. Se supondrá además que la viga es de 4cm. de largo y 0.02cm. de grosor, empotrada en un extremo y libre en el otro.

1. ***Problema evolutivo sin carga:***

   Consideremos el problema del cálculo de los modos de vibración libre de una viga elástica, empotrada en un extremo y libre en el otro. La formulación variacional del problema consiste en:

   (4.2.10)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Hallar } (0,0) \neq (\phi, w) \in \mathbf{H} \text{ y } \omega > 0 \text{ tales que:} \\ \qquad \displaystyle\int_0^L \mathbf{E}\mathbf{I_n}\phi'\psi' + \int_0^L \mathbf{G}\mathbf{A}(\phi - w')(\psi - v') \quad = \omega^2 \left(\int_0^L \rho \mathbf{I_n}\phi\psi + \int_0^L \rho \mathbf{A} w v \right) \quad \forall (\psi, v) \in \mathbf{H}, \end{array}\right.$$

   o, equivalentemente,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Hallar } (0,0) \neq \mathbf{u} \in \mathbf{H} \text{ y } \omega > 0 \text{ tal que:} \\ \qquad A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega^2 \mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \end{array}\right. \tag{4.2.11}$$

donde:

- ω es la frecuencia de la vibración y (ϕ, w) son las amplitudes de la rotación y el desplazamiento respectivamente.
- $\mathbf{u} := (\phi, w) \in \mathbf{H}$ y $\mathbf{v} := (\psi, v) \in \mathbf{H}$.
- La forma bilineal $b : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por:

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_0^L \rho \mathbf{I_n} \phi \psi + \int_0^L \rho \mathbf{A} w v.$$

- La forma bilineal A fue definida en (4.1.5).

Sea ω_1 la menor frecuencia de la vibración asociada al problema variacional (4.2.11) y $\mathbf{U}$ el modo propio asociado a ésta. Definimos el siguiente problema:

$$\text{(4.2.12)} \qquad \left\{ \begin{array}{rl} \text{Hallar } \mathbf{u} : [0,T] \longrightarrow \widehat{H}^1(I) \text{ tal que:} & \\ \mathbf{b}(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \\ \mathbf{u}(0,x) = U & \text{en } I, \\ \dot{\mathbf{u}}(0,x) = 0 & \text{en } I. \end{array} \right.$$

Se sabe que la solución del problema variacional (4.2.12) es $\mathbf{u} := \cos(\omega_1 t)\mathbf{U}$ ya que esta satisface:

a) $\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{U}$ y $\dot{\mathbf{u}}(0,x) = 0$.

b) $\ddot{\mathbf{u}} = -\omega_1^2 \cos(\omega_1 t)\mathbf{U} \Longrightarrow \mathbf{b}(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = -\omega_1^2 \cos(\omega_1 t)\mathbf{b}(\mathbf{U}, \mathbf{v})$.

c) $A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \cos(\omega_1 t) A(\mathbf{U}, \mathbf{v}) = \omega_1^2 \cos(\omega_1 t)\mathbf{b}(\mathbf{U}, \mathbf{v})$,
luego sumando (b) y (c) se obtiene que $\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

$\therefore$ por (a), (b) y (c) $\mathbf{u} := \cos(\omega_1 t)\mathbf{U}$ es solución del problema (4.2.12).

Por lo tanto, el problema utilizado para testear si existe o no bloqueo numérico en el modelo evolutivo de la viga elástica de Timoshonko es el definido en (4.2.12) cuya solución es
$\mathbf{u} := \cos(\omega_1 t)\mathbf{U}$.
Para los valores analíticos de la frecuencia y de los modos propios se utilizó [6]. De acuerdo a esta referencia, si ω es la frecuencia de vibración los modos propios normales son:

$$\phi = H \left(\cosh b\alpha\xi + \frac{\theta}{\lambda\zeta} \sinh b\alpha\xi - \cos b\beta\xi + \theta \sin b\beta\xi \right).$$

$$w = D \left(\cosh b\alpha\xi - \lambda \sinh b\alpha\xi - \cos b\beta\xi + \delta \sin b\beta\xi \right),$$

donde:

- $\xi := \dfrac{x}{L}$; $\quad b^2 := \dfrac{\rho \mathbf{A} L^4 \omega^2}{\mathbf{EI_n}}$; $\quad \begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix} := \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\mp (r^2 + s^2) + \sqrt{(r^2 - s^2)^2 + \dfrac{4}{b^2}}}$;
- $r^2 := \dfrac{\mathbf{I_n}}{\mathbf{A} L^2}$; $\quad s^2 = \dfrac{\mathbf{EI_n}}{\mathbf{AG} L^2}$. $\quad \lambda := \dfrac{\alpha}{\beta}$; $\quad \zeta := \dfrac{(\alpha^2 + r^2)}{(\alpha^2 + s^2)}$.
- $\delta := \dfrac{\frac{1}{\lambda} \sinh b\alpha - \sin b\beta}{\zeta \cosh b\alpha + \cos b\beta}$; $\quad \theta := -\dfrac{\lambda \sinh b\alpha + \sin b\beta}{\frac{1}{\zeta} \cosh b\alpha + \cos b\beta} = \dfrac{-1}{\delta}$.

- $D = \dfrac{L\theta}{b\alpha\lambda\zeta}\left(1 - b^2 s^2(\alpha^2 + r^2)\right) H; \qquad H = 1.$

A su vez ω se obtiene resolviendo:

$$2 + \left(b^2 s^2 \left(r^2 - s^2\right)^2 + 2\right) \cosh b\alpha \cos b\beta - \frac{b(s^2 + r^2)}{\sqrt{1 - b^2 r^2 s^2}} \sinh b\alpha \sin b\beta = 0.$$

Resolvimos esta ecuación mediante el comando `fzero` de MATLAB y obtuvimos el valor $\omega = 20.750921721489636$.

A continuación se presentan los resultados obtenidos para la rotación ϕ y el desplazamiento w, utilizando un método de integración exacta y posteriormente utilizando el método de integración reducida para el término de corte. Además se consideró la misma partición N para el tiempo y el espacio, de manera que h y Δt tienden ambas a cero con orden $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$, es decir que $\Delta t = \mathcal{O}(h)$.

Por último se hicieron los cálculos para un tiempo $T := \dfrac{2\pi}{\omega}$.

En la Figura 10 se muestra el gráfico en escala logarítmica de los errores de la rotación ϕ en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$ versus el número de intervalos N en que se dividió el tiempo y el espacio, donde:

- El error en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ se define como: $\|\phi - \phi_h\|_{[0,T]\times L^2(I)}$ donde:
  $\|\phi\|^2_{[0,T]\times L^2(I)} = \displaystyle\int_0^T \|\phi(t)\|^2_{0,I}\,dt.$
- $|\phi - \phi_h|_{[0,T]\times H^1(I)}$ es el error en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$ donde:
  $|\phi|^2_{[0,T]\times H^1(I)} = \displaystyle\int_0^T \|\nabla\phi(t)\|^2_{0,I}\,dt.$

Figura 10: Errores de la rotación ϕ en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, utilizando un método de integración exacta para el término de corte.

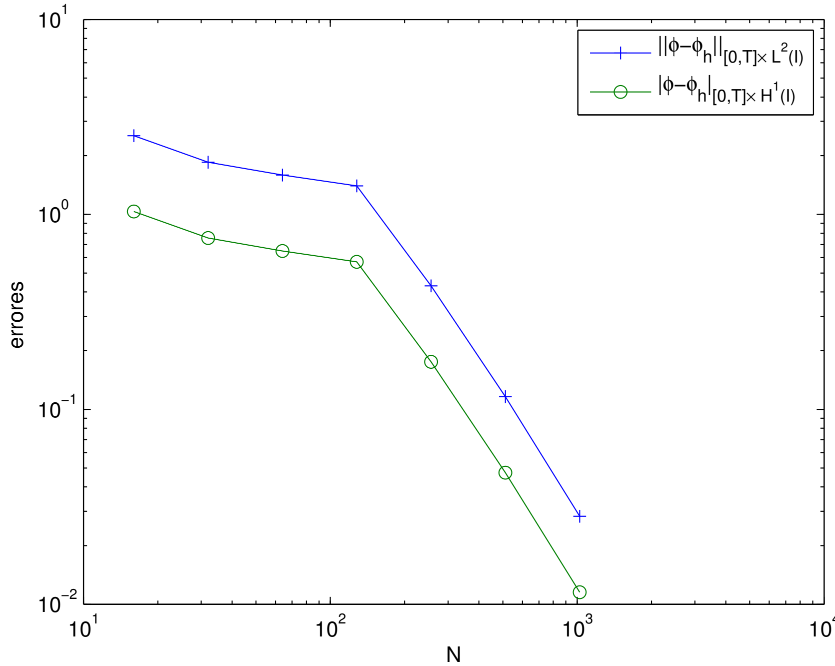
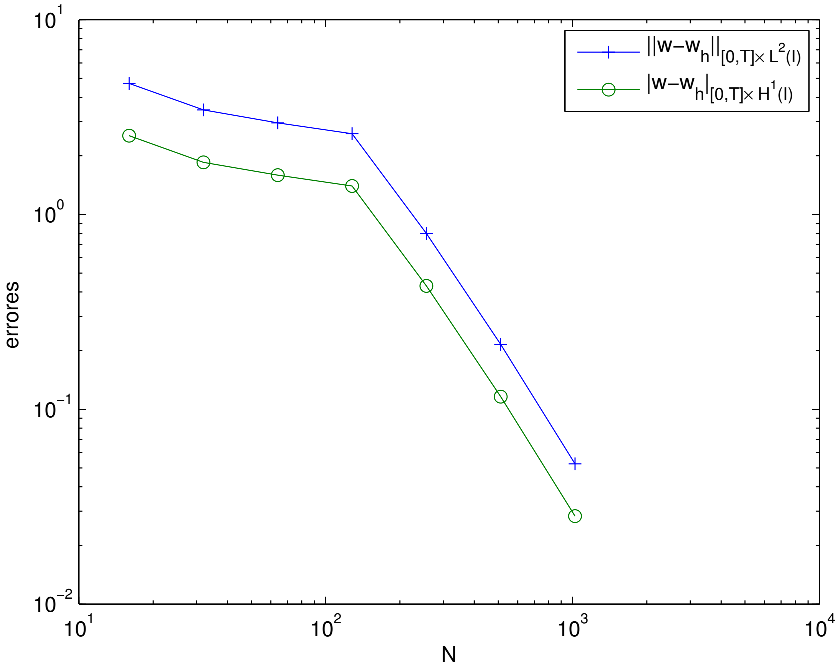


Figura 11: Errores del desplazamiento w en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, utilizando un método de integración exacta para el término de corte.



En la Figura 11 se muestra el gráfico en escala logarítmica de los errores de la rotación w en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$ versus N que es el número de intervalos en que se dividió el tiempo y el espacio.

En las Figuras 10 y 11 se observa que en el problema evolutivo de la viga elástica de Timoshenko sin carga, igual existe bloqueo numérico del método. También se observa que con N suficientemente grande los errores en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ convergen con el mismo orden que el error en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$.

Figura 12: Errores de la rotación ϕ en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, utilizando un método de integración reducida para el término de corte.

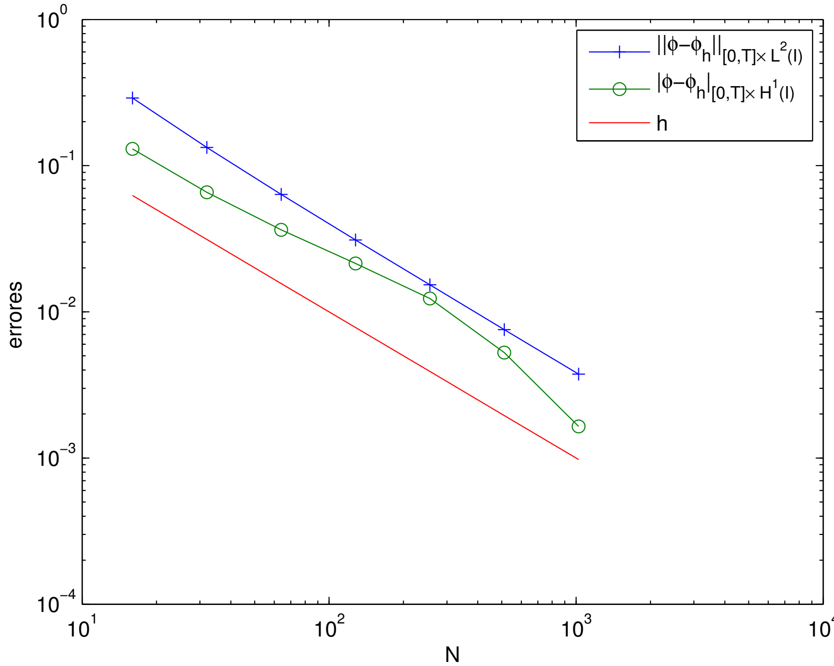
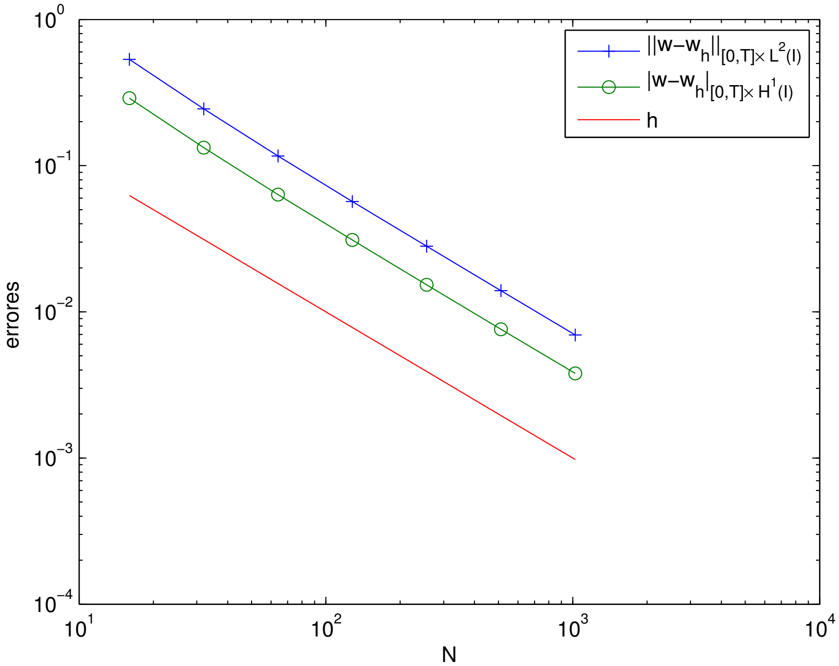


Figura 13: Errores del desplazamiento w en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, utilizando un método de integración reducida para el término de corte.



De las Figuras 12 y 13 se observa que si se utiliza el método de integración reducida para el término de corte no se produce el bloqueo numérico. También se observa que los errores convergen con el orden que predice la teoría de Newmark $\mathcal{O}(\Delta t) = \mathcal{O}(h)$, donde $h := \dfrac{1}{N}$, ya que en este caso particular, el número de intervalos en que se dividió el tiempo y el espacio fue el mismo.

En las Tablas 3 y 4 se presentan los errores en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$ para la rotación ϕ y el desplazamiento w respectivamente, en diferentes mallas para distintos métodos (con integración exacta e integración reducida).

Tabla 3: Errores de la rotación ϕ en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, con integración exacta e integración reducida para el término corte.

	Integración exacta		Integración reducida	
N	$\|\|\phi-\phi_h\|\|_{[0,T]\times L^2(I)}$	$\|\phi-\phi_h\|_{[0,T]\times H^1(I)}$	$\|\|\phi-\phi_h\|\|_{[0,T]\times L^2(I)}$	$\|\phi-\phi_h\|_{[0,T]\times H^1(I)}$
16	2.53490388511	1.03349024659	0.289950706637	0.130116085474
32	1.85331547741	0.75563687092	0.133054031323	0.065667092411
64	1.59245174065	0.64928505849	0.063496973888	0.036365204790
128	1.40115826398	0.57128928106	0.030996820379	0.021432490161
256	0.43014071671	0.17538335042	0.015304563074	0.012331030597
512	0.11605024897	0.04732052705	0.007563644411	0.005258242842
1024	0.02825746268	0.01152525312	0.003749842139	0.001647607417

Tabla 4: Errores del desplazamiento w en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, con integración exacta e integración reducida para el término de corte.

	Integración exacta		Integración reducida	
N	$\|\|w-w_h\|\|_{[0,T]\times L^2(I)}$	$\|w-w_h\|_{[0,T]\times H^1(I)}$	$\|\|w-w_h\|\|_{[0,T]\times L^2(I)}$	$\|w-w_h\|_{[0,T]\times H^1(I)}$
16	4.7066738179	2.53577741974	0.532424157043	0.289142998933
32	3.4391604426	1.85343527817	0.244345015145	0.132875335679
64	2.9547966760	1.59250020412	0.116564569856	0.063448923851
128	2.5997905732	1.40118511802	0.05688568786	0.0309820632454
256	0.7981046851	0.43015312115	0.028095981813	0.015306691661
512	0.2153252397	0.11605745991	0.013961438379	0.007607392952
1024	0.0524302524	0.02826345457	0.006955687735	0.003790422418

Puede verse claramente que los errores del método con integración reducida son significativamente más pequeños que los del método con integración exacta.

Para asegurarse que realmente los métodos utilizados convergen con el orden que la teoría predice se decidió que la partición del espacio sea tal que $h=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{N}\right)$ y que la partición del intervalo del tiempo sea N^2, con lo cual $\Delta t=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{N^2}\right)$ de manera que $\Delta t=\mathcal{O}\left(h^2\right)$. A continuación se presentan los resultados obtenidos para la rotación ϕ utilizando un método de integración exacta y posteriormente utilizando el método de integración reducida para el término de corte, para un tiempo $T:=\dfrac{2\pi}{16\omega}$.

En la Figura 14 se muestra el gráfico en escala logarítmica de los errores de la rotación ϕ en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$ que fueron definidos anteriormente versus el número de intervalos N en que se dividió el espacio.

Figura 14: Errores de la rotación ϕ en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, utilizando un método de integración exacta para el término de corte.

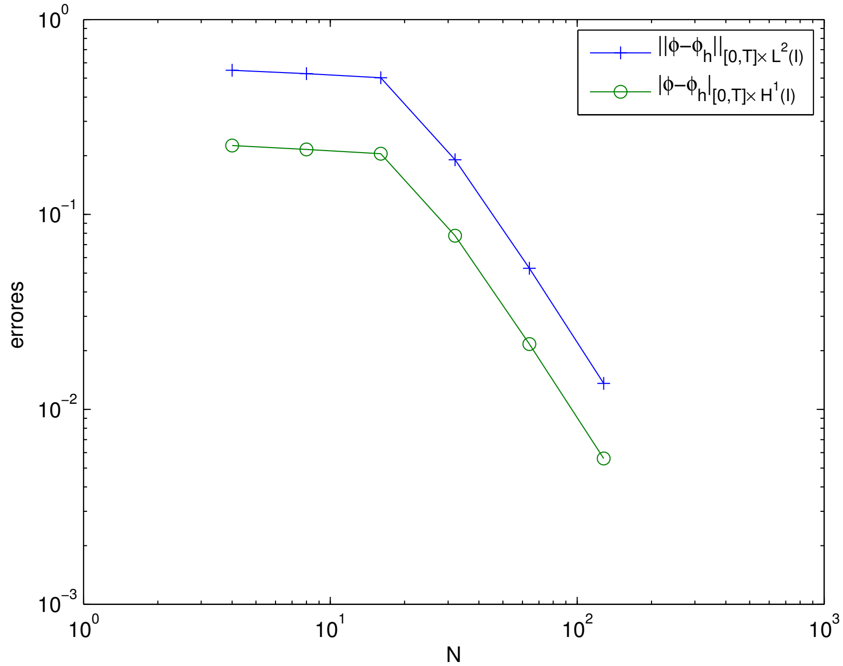
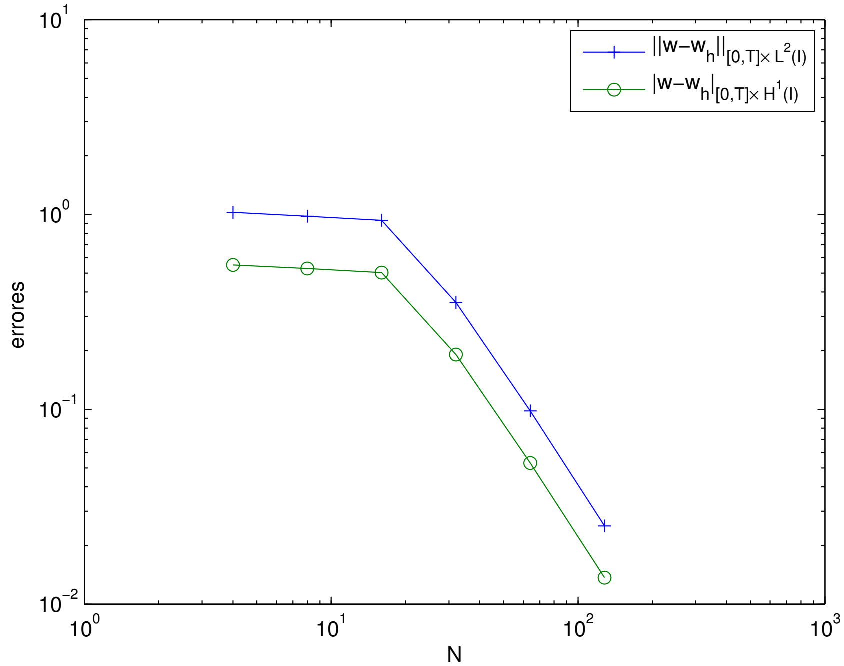


Figura 15: Errores del desplazamiento w en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, utilizando un método de integración exacta para el término de corte.



En la Figura 15 se muestra el gráfico en escala logarítmica de los errores del desplazamiento w en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$ que fueron definidos anteriormente versus N en que es el número de intervalos que se dividió el espacio.

De las Figuras 14 y 15 se observa que en el problema evolutivo de la viga elástica de Timoshenko sin carga, igual se presenta el fenómeno del bloqueo numérico.

Figura 16: Errores de la rotación ϕ en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, utilizando un método de integración reducida para el término de corte.

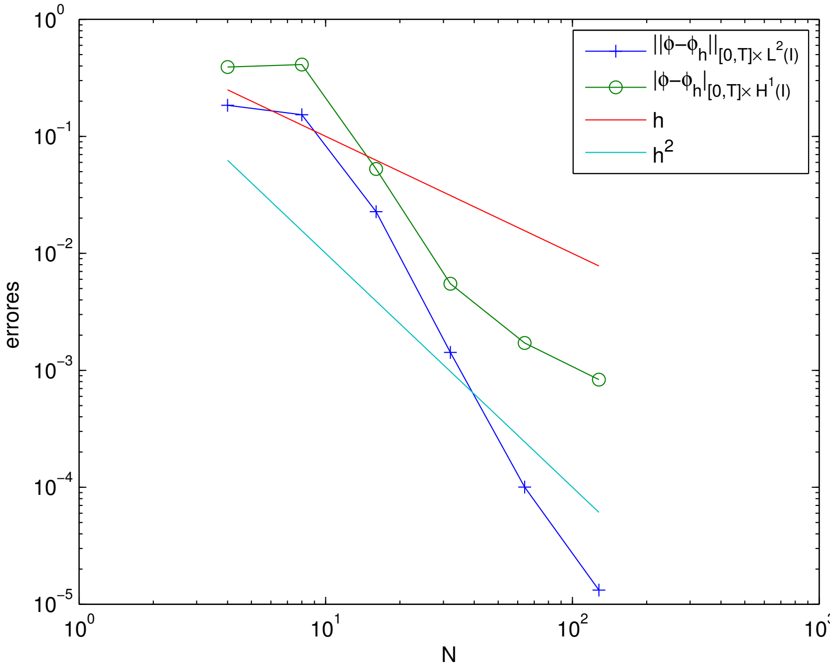
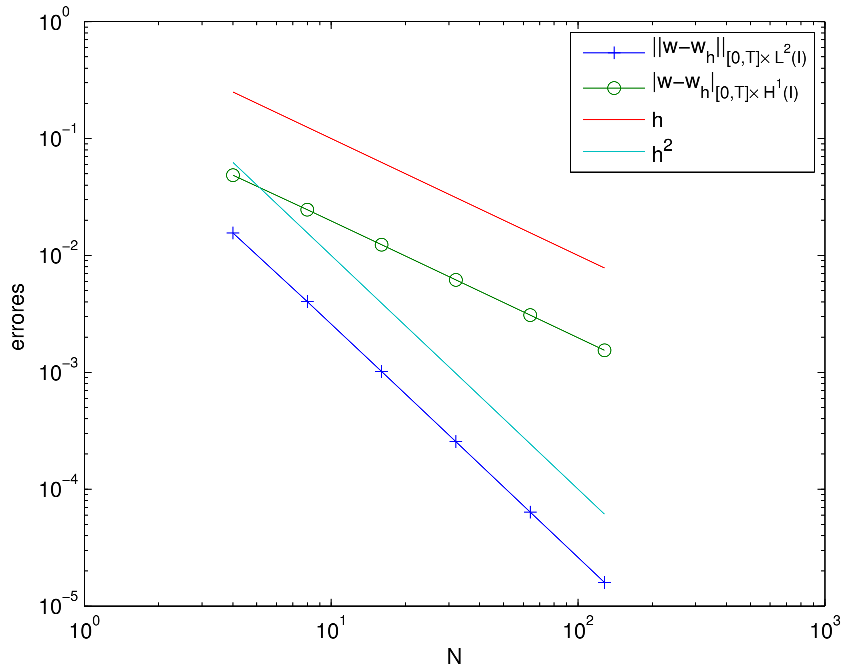


Figura 17: Errores del desplazamiento w en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, utilizando un método de integración reducida para el término de corte.



De las Figuras 16 y 17 se observa que si se utiliza el método de integración reducida para el término de corte no se produce el bloqueo numérico, y si bien los errores son al inicio inestables para la rotación ϕ, luego convergen con el orden que predice la teoría de Newmark. Es decir, $\mathcal{O}(h)$ para la seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$ y $\mathcal{O}(h^2)$ para la norma $L^2(0,T;L^2(I))$. Pues el error en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$ converge con orden $\mathcal{O}(\Delta t + h) = \mathcal{O}(h)$. Así mismo, el error en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ según la teoría converge con orden $\mathcal{O}(\Delta t + h^2) = \mathcal{O}(h^2)$.

En las Tablas 5 y 6 se presentan los errores en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$ para la rotación ϕ y el desplazamiento w respectivamente, en diferentes mallas para distintos métodos (con integración exacta e integración reducida).

Tabla 5: Errores de la rotación en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, con integración exacta e integración reducida para el término de corte.

	Integración exacta		Integración reducida	
N	$\|\|\phi-\phi_h\|\|_{[0,T]\times L^2(I)}$	$\|\phi-\phi_h\|_{[0,T]\times H^1(I)}$	$\|\|\phi-\phi_h\|\|_{[0,T]\times L^2(I)}$	$\|\phi-\phi_h\|_{[0,T]\times H^1(I)}$
4	0.549252094534	0.225385985237	0.184280938205	0.392322210883
8	0.527475045318	0.215581244860	0.153005020802	0.411516488277
16	0.502574897944	0.2049179522810	0.022703277121	0.052608099913
32	0.190724939703	0.0778121331298	0.001423644873	0.005491915695
64	0.052928918401	0.0216395092070	0.000100458224	0.001711619315
128	0.013581236517	0.0055985413549	0.000013192784	0.000833721976

Tabla 6: Errores del desplazamiento w en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, con integración exacta e integración reducida para el término de corte.

	Integración exacta		Integración reducida	
N	$\|\|w-w_h\|\|_{[0,T]\times L^2(I)}$	$\|w-w_h\|_{[0,T]\times H^1(I)}$	$\|\|w-w_h\|\|_{[0,T]\times L^2(I)}$	$\|w-w_h\|_{[0,T]\times H^1(I)}$
4	1.024941062897	0.550332293515	0.015544521469	0.048560987264
8	0.979984300022	0.527760188099	0.004027545316	0.024596286832
16	0.93279090378	0.502659585376	0.00101606230	0.012342086920
32	0.35382777737	0.190780172554	0.00025446207	0.006177450910
64	0.09817974390	0.053004477086	0.00006365247	0.003089550223
128	0.02519197711	0.013664961590	0.00001591585	0.001544878899

En las Tablas 5 y 6 puede observarse claramente que los errores del método con integración reducida son significativamente más pequeños que los del método con integración exacta y su convergencia es mucho más rápida.

2. ***Problema evolutivo con carga:***

   Sea ω_1 la menor frecuencia de la vibración asociada al problema (4.2.11) y $\mathbf{U}$ el modo propio asociado a ésta, definimos el siguiente problema:

$$
\left\{
\begin{array}{r}
\text{Hallar } \mathbf{u} : [0,T] \longrightarrow \widehat{H}^1(I) \text{ tal que:} \\
\mathbf{b}(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{b}(U, \mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}; \\
\mathbf{u} = \left(1 + \dfrac{1}{\omega_1^2}\right) U \qquad \text{en } \Omega; \\
\dot{\mathbf{u}} = 0 \qquad \text{en } \Omega;
\end{array}
\right.
\tag{4.2.13}
$$

   Se sabe que $\mathbf{u} := \left(\cos(\omega_1 t) + \dfrac{1}{\omega_1^2}\right) \mathbf{U}$ es solución del problema (4.2.13) pues:

   a) $\mathbf{u} = \left(1 + \dfrac{1}{\omega_1^2}\right) \mathbf{U}$ en todo Ω y $\dot{\mathbf{u}} = 0$ en todo Ω

   b) $\ddot{\mathbf{u}} = -\omega_1^2 \cos(\omega_1 t)\mathbf{U} \Longrightarrow \mathbf{b}(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = -\omega_1^2 \cos(\omega_1 t)\mathbf{b}(\mathbf{U}, \mathbf{v})$

   c) $A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left(\cos(\omega_1 t) + \dfrac{1}{\omega_1^2}\right) A(\mathbf{U}, \mathbf{v}) = \omega_1^2 \left(\cos(\omega_1 t) + \dfrac{1}{\omega_1^2}\right) \mathbf{b}(\mathbf{U}, \mathbf{v})$

   $\therefore$ Luego por (a), (b) y (c) $\mathbf{u} = \left(\cos(\omega_1 t) + \dfrac{1}{\omega_1^2}\right) \mathbf{U}$ es solución del problema (4.2.13)

   Por lo tanto, el problema utilizado para testear si existe o no bloqueo numérico en el modelo evolutivo de la viga elástica de Timoshonko, es el definido en (4.2.13) cuya solución es $\mathbf{u} = \left(\cos(\omega_1 t) + \dfrac{1}{\omega_1^2}\right) \mathbf{U}$.

   A continuación se presentan los resultados obtenidos para la rotación ϕ y el desplazamiento w, utilizando un método de integración exacta y posteriormente utilizando el método de integración reducida para el término de corte y donde el tiempo T es el mismo que en el ejemplo anterior, la frecuencia ω y los modos propios ϕ, w analíticos también son los mismos que se usaron en el ejemplo anterior. Para asegurarse que realmente los métodos utilizados, convergen con el orden que la teoría predice, se decidió que la partición del espacio sea con $h = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{N}\right)$ y que la partición del intervalo del tiempo sea con $\Delta t = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{N^2}\right)$.

Figura 18: Errores de la rotación ϕ en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, utilizando un método de integración exacta para el término de corte.

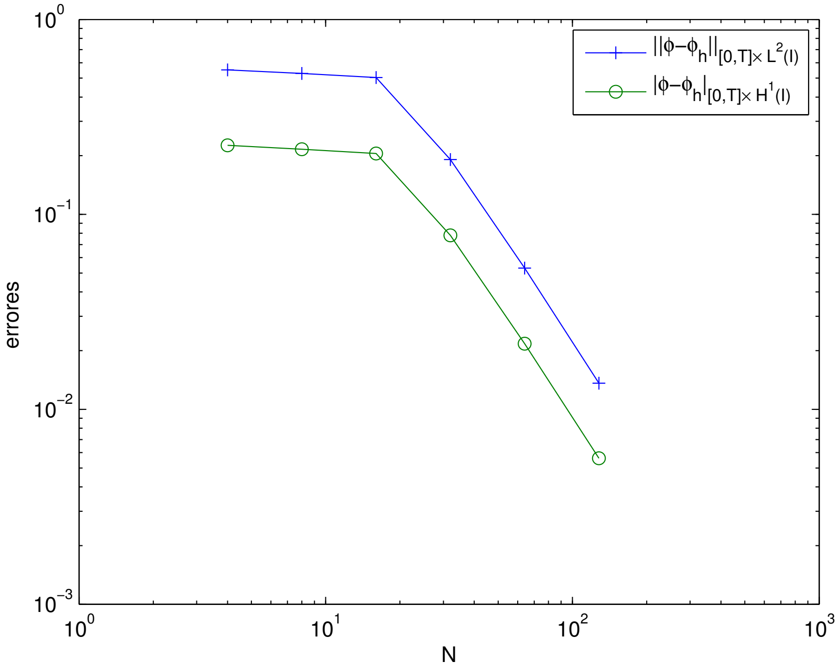
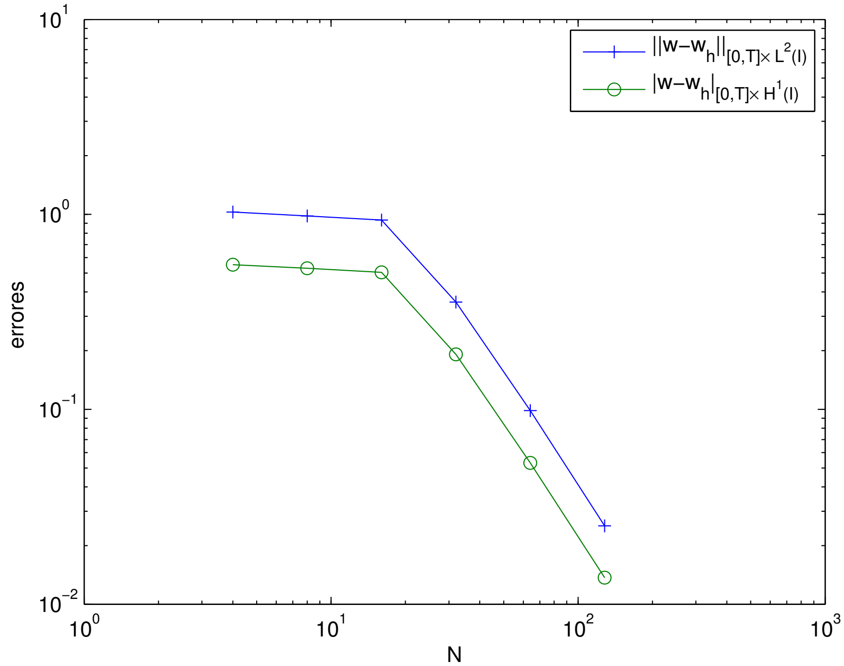


Figura 19: Errores del desplazamiento w en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, utilizando un método de integración exacta para el término de corte.



De las Figuras 18 y 19 se observa que en el problema evolutivo de la viga elástica de Timoshenko con carga igual presenta el fenómeno del bloqueo numérico.

Figura 20: Errores de la rotación ϕ en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, utilizando un método de integración reducida para el término de corte.

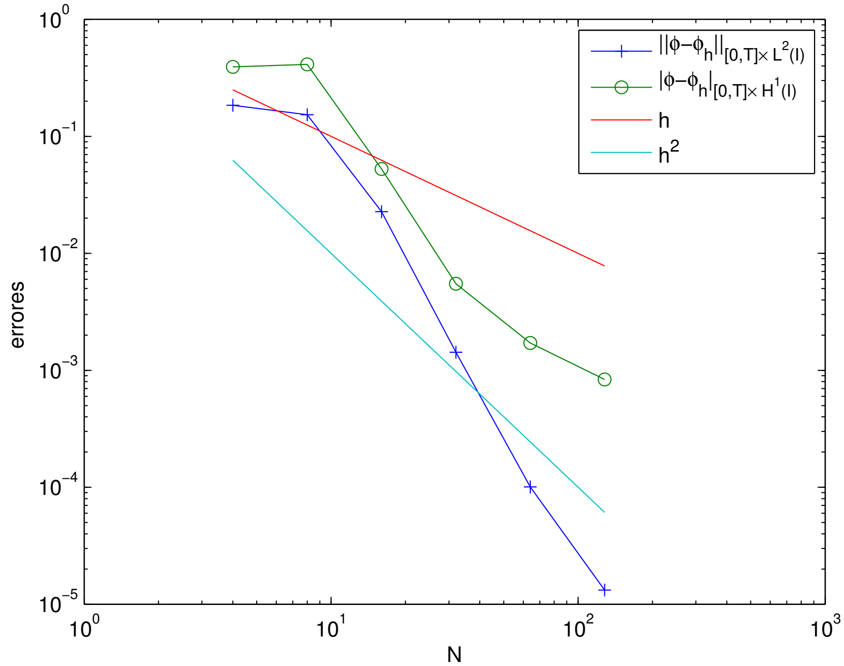
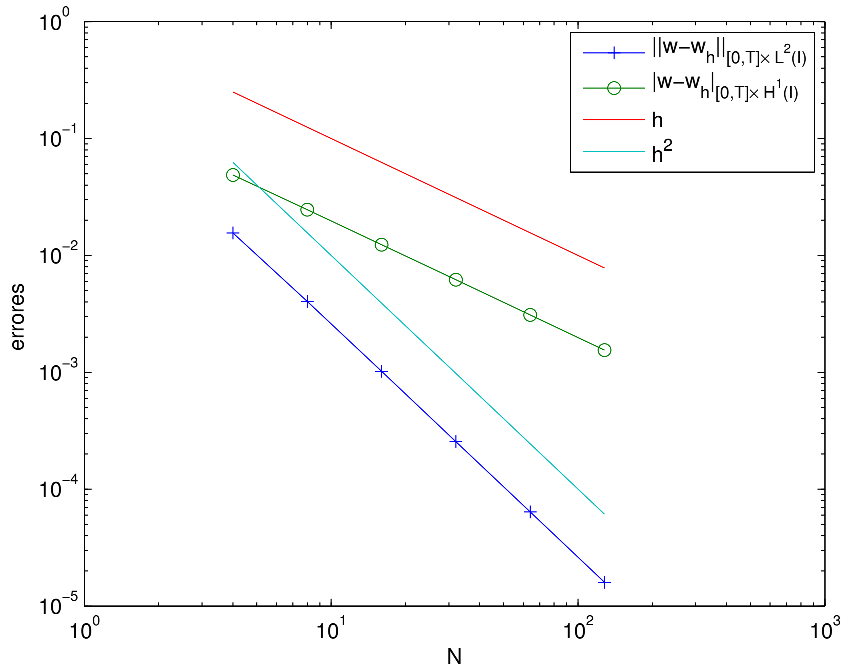


Figura 21: Errores del desplazamiento w en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, utilizando un método de integración reducida para el término de corte.



De las Figuras 20 y 21 se observa que si se utiliza el método de integración reducida para el término de corte no se produce el bloqueo numérico, y si bien los errores son al inicio inestables para la rotación ϕ, luego convergen con el orden que predice la teoría de Newmark, es decir, $\mathcal{O}(h)$ para la seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$ y $\mathcal{O}(h^2)$ para la norma $L^2(0,T;L^2(I))$.

En las Tablas 7 y 8 se presentan los errores en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$ para la rotación ϕ y el desplazamiento w respectivamente, en diferentes mallas para distintos métodos (con integración exacta e integración reducida).

Tabla 7: Errores de la rotación ϕ en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, con integración exacta e integración reducida para el término de corte.

	Integración exacta		Integración reducida	
N	$\|\|\phi-\phi_h\|\|_{0[0,T]\times L^2(I)}$	$\|\phi-\phi_h\|_{[0,T]\times H^1(I)}$	$\|\|\phi-\phi_h\|\|_{0[0,T]\times L^2(I)}$	$\|\phi-\phi_h\|_{[0,T]\times H^1(I)}$
4	0.550551511980	0.225919062217	0.184708653442	0.393233409115
8	0.528713850546	0.216087530132	0.153360333177	0.412472193678
16	0.503756073635	0.205399560514	0.022755998904	0.052730323787
32	0.191172292288	0.077994647840	0.001426948803	0.005504789916
64	0.053053005952	0.021690245595	0.000100689532	0.001715690651
128	0.013613073101	0.005611669746	0.000013222366	0.000835707627

Tabla 8: Errores del desplazamiento w en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$, con integración exacta e integración reducida para el término de corte.

N	$\|\|w-w_h\|\|_{[0,T]\times L^2(I)}$	$\|w-w_h\|_{[0,T]\times H^1(I)}$	$\|\|w-w_h\|\|_{[0,T]\times L^2(I)}$	$\|w-w_h\|_{[0,T]\times H^1(I)}$
4	1.027365424488	0.551634175616	0.015579759914	0.048676632790
8	0.982285723176	0.528999642762	0.004036729123	0.024654874280
16	0.934983153257	0.503840950134	0.001018382437	0.012371484498
32	0.354657682376	0.191227656419	0.000255043289	0.006192164627
64	0.098409915295	0.053128747102	0.000063797868	0.003096908998
128	0.025251030225	0.013697000665	0.000015952147	0.001548558527

En las Tablas 7 y 8 puede observarse que al igual que en el ejemplo evolutivo sin carga, claramente los errores del método con integración reducida son significativamente más pequeños que los del método con integración exacta y su convergencia es mucho más rápida.

5. Fluido

En el presente capítulo se presentará un modelo para el tracto superior respiratorio, que describa el comportamiento del fluido (aire) que entra a él, ya sea por vía oral o nasal.

Se decidió como primera opción utilizar un modelo de fluido potencial acústico para representar el comportamiento del fluido en el tracto superior respiratorio.

5.1. Modelo de un fluido potencial acústico

La deducción de las ecuaciones que modelan el comportamiento de un fluido potencial acústico se obtienen a partir de la ecuación de conservación de momentum de Navier-Stokes:

$$\rho\dot{v} = \mu\varDelta v - (\nabla v)v - \nabla p + g, \tag{5.1.1}$$

donde ρ es la densidad del fluido, μ la viscosidad de este, $v(\mathbf{x}, t)$ la velocidad de la partícula que en el instante t ocupa la posición $\mathbf{x}$, $p(\mathbf{x}, t)$ la presión del fluido y g una fuerza volumétrica que en nuestro caso es nula. En el modelo de un fluido potencial acústico μ es muy pequeño y por lo tanto se desprecia el término difusivo $\mu\varDelta v$ y tanto v como ∇v son pequeños, por lo que también se desprecia el término convectivo $(\nabla v)v$. De esa manera, la ecuación de Navier-Stokes se reduce a:

$$-\rho\dot{v} = \nabla p. \tag{5.1.2}$$

Por otra parte, el fluido se considera compresible, por lo que vale la así llamada relación isoentrópica entre la presión y la velocidad:

$$\dot{p} = -\rho c^2 \operatorname{div} v \qquad \text{en } \Omega\ ,\ t > 0, \tag{5.1.3}$$

donde c es la velocidad de propagación de onda acústica en el fluido y Ω es un dominio abierto y conexo de $\mathbb{R}^2$. Estas dos ecuaciones se complementan, con condiciones de contorno Dirichlet no homogéneas para la presión en las fosas nasales, la boca y la faringe y condiciones de pared rígida (Neumann homogéneas) en el resto de la frontera del tracto superior respiratorio. De ese modo llegamos al siguiente problema:

$$\left\{\begin{array}{rll} -\rho\dot{v} &= \nabla p & \text{en } \Omega,\ t > 0, \\ \dot{p} &= -\rho c^2 \operatorname{div} v & \text{en } \Omega,\ t > 0, \\ p &= f & \text{en } \Gamma_D,\ t > 0, \\ \dot{v}\cdot n &= 0, & \text{en } \Gamma_N,\ t > 0, \end{array}\right. \tag{5.1.4}$$

con frontera $\partial\Omega := \varGamma_D \cup \varGamma_N$, tal que $\varGamma_D \cap \varGamma_N = \emptyset$ y $f \in \mathscr{C}\left([0,T]; L^2(\Gamma_D)\right)$ es la presión presente en una parte de la frontera Γ_D, que se supone conocida. Esta presión, la cual es dato, corresponde a la presión exterior en la boca y la nariz junto a la presión interior en la faringe.

Si se deriva con respecto al tiempo la segunda ecuación del problema (5.1.4) se obtiene:

$$\ddot{p} = -\rho c^2 \operatorname{div} \dot{v} \qquad \text{en } \Omega,\ t > 0. \tag{5.1.5}$$

Además, de la primera ecuación del problema (5.1.4) se puede despejar $\dot{v}$ con lo cual resulta:

$$\dot{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} \qquad \text{en } \Omega,\ t > 0, \tag{5.1.6}$$

reemplazando (5.1.6) en (5.1.5) se tiene:

$$\ddot{p} = c^2 \Delta p \qquad \text{en } \Omega,\ t > 0. \tag{5.1.7}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial p}{\partial n} := \nabla p \cdot n = -\rho \dot{v} \cdot n = 0 \qquad \text{en } \Gamma_N. \tag{5.1.8}$$

A partir de estas deducciones se obtiene la siguiente formulación en presión, la cual es equivalente a (5.1.4):

$$\begin{cases} \ddot{p} - c^2 \Delta p &= 0 \qquad \text{en } Q_T, \\ p &= f \qquad \text{en } \Gamma_D \times [0,T], \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} &= 0 \qquad \text{en } \Gamma_N \times [0,T], \\ p(0,\cdot) &= p_0 \qquad \text{en } \Omega, \\ \dot{p}(0,\cdot) &= \dot{p}_0 \qquad \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{5.1.9}$$

donde $\dot{p}$ representa la derivada temporal, Δp es el Laplaciano respecto a las variables espaciales, $Q_T := \Omega \times (0,\, T)$, $p_0(x,y)$ y $\dot{p}_0(x,y)$ son las condiciones iniciales de la presión y su derivada temporal, respectivamente.

Sea:

- $H^1_{\Gamma_D}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u\big|_{\Gamma_D} := 0\}$.

Multiplicando la primera ecuación del problema (5.1.9) por $q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ e integrando por partes, se tiene:

$$\int_\Omega \ddot{p} q + c^2 \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q = 0 \qquad \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \quad \forall t \in (0,T).$$

Por lo tanto, la formulación variacional asociada al problema (5.1.9) esta dada por:

$$\begin{cases} \text{Hallar } p : [0,T] \longrightarrow H^1(\Omega) \text{ con } p\big|_{\Gamma_D} := f \text{ tal que:} \\ \displaystyle\int_\Omega \ddot{p} q + a(p,q) = 0 \qquad \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \\ \qquad p(0,\cdot) = p_0 \qquad \text{en } \Omega, \\ \qquad \dot{p}(0,\cdot) = \dot{p}_0 \qquad \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{5.1.10}$$

donde la forma $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

$$a(p,q) := c^2 \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q,$$

y $\dot{p}$ debe entenderse en el sentido de las distribuciones en $(0,T)$.

Para poder probar que el problema (5.1.10) tiene solución única es necesario que se cumplan todas las hipótesis del Teorema A.3, lo cual no ocurre debido a que $p\big|_{\Gamma_D} := f$ es una condición de Dirichlet no homogénea. Para solucionar este inconveniente se supondrá como hipótesis adicional que f es suficientemente suave, en particular que $f \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, bajo esta suposición se garantiza que existe $\hat{p} \in H^1(\Omega)$ tal que $\hat{p}\big|_{\Gamma_D} := f$.

Sea $P = p - \hat{p}$ se tiene que si p es solución del problema (5.1.10), entonces P lo es del siguiente problema:

$$(5.1.11) \qquad \begin{cases} \text{Hallar } P : [0,T] \longrightarrow H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \text{ con tal que:} \\ \displaystyle\int_\Omega \ddot{P}q + a(P,q) = -a(\hat{p},q) \qquad \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \\ \qquad p(0,\cdot) = p_0 \qquad \text{en } \Omega, \\ \qquad \dot{p}(0,\cdot) = \dot{p}_0 \qquad \text{en } \Omega, \end{cases}$$

Observaciones:

- La forma bilineal $a : H^1_{\Gamma_D} \times H^1_{\Gamma_D}$ es simétrica.
- Es claro que:

  1. La forma bilineal a es continua. Es decir: $\exists C > 0$ tal que $|a(p,q)| \leq C\|p\|_{1,\Omega}\|q\|_{1,\Omega}$.
     En efecto:
     Sea $p, q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ se tiene:
     $|a(p,q)| = \left| c^2 \displaystyle\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q \right| \leq c^2 \|\nabla p\|_{0,\Omega}\|\nabla q\|_{0,\Omega} \leq c^2 \|p\|_{1,\Omega}\|q\|_{1,\Omega}$.
  2. De la desigualdad de Poincaré es claro que la forma bilineal a es H-elíptica (donde $H := H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$) es decir:
     $\exists \alpha > 0 : A\,(q,q) \geq \alpha \|q\|^2_{1,\Omega}\|q\|^2_{1,\Omega}$.
     En efecto:
     Sea $q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ se tiene que:
     $A(q,q) = c^2 \displaystyle\int_\Omega \nabla q^2 = c^2 \|\nabla q\|^2_{0,\Omega} \geq \alpha c^2 \|q\|^2_{1,\Omega} \qquad \forall q \in H$.

- La inyección canónica de $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta.

Luego, puesto que se cumplen todas las hipótesis del Teorema A.3, el problema (5.1.11) tiene solución única. Entonces $p = P + \hat{p}$ es solución de problema (5.1.10), pero como la elección de $\hat{p}$ no es única tenemos que demostrar la unicidad de p.

Sean P_1 y P_2 solución del problema (5.1.10) entonces:
P_1 satisface:

$$(5.1.12) \qquad \begin{cases} P_1\big|_{\Gamma_D} := f \text{ y es tal que:} \\ \displaystyle\int_\Omega \ddot{P}_1 q + c^2 \int_\Omega \nabla P_1 \cdot \nabla q = 0 \qquad \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \\ \qquad P_1(0,\cdot) = p_0 \qquad \text{en } \Omega, \\ \qquad \dot{P}_1(0,\cdot) = \dot{p}_0 \qquad \text{en } \Omega, \end{cases}$$

y P_2 también satisface:

$$\left\{\begin{array}{rll} P_2\big|_{\Gamma_D} := f \text{ y es tal que:} & & \\ \displaystyle\int_\Omega \ddot{P}_2 q + c^2 \int_\Omega \nabla P_2 \cdot \nabla q & = 0 & \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \\ P_2(0,\cdot\,) & = p_0 & \text{en } \Omega, \\ \dot{P}_2(0,\cdot\,) & = \dot{p}_0 & \text{en } \Omega, \end{array}\right. \tag{5.1.13}$$

restando ambas expresiones (5.1.12) y (5.1.13) se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{rll} \displaystyle\int_\Omega (\ddot{P}_1 - \ddot{P}_2) q + c^2 \int_\Omega \nabla (P_1 - P_2) \cdot \nabla q & = 0 & \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \\ P_1(0,\cdot\,) - P_2(0,\cdot\,) & = 0 & \text{en } \Omega, \\ \dot{P}_1(0,\cdot\,) - \dot{P}_2(0,\cdot\,) & = 0 & \text{en } \Omega, \end{array}\right. \tag{5.1.14}$$

el cual ya se probó que tiene solución única, luego por el teorema A.4 se concluye:

$$\begin{aligned} \left\{ A(P_1 - P_2, P_1 - P_2) + \left| \frac{d(P_1 - P_2)}{dt} \right|^2 \right\}^{1/2} &\leq 0 \\ \Rightarrow \|P_1 - P_2\|_{1,\Omega} &\leq 0 \\ \Rightarrow P_1 &= P_2 \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Por lo tanto, el problema (5.1.10) tiene solución única.

5.2. Discretización Temporal y Espacial

Para la discretización en tiempo, al igual que en el modelo evolutivo de Timoshenko, consideremos una partición homogénea del intervalo $[0, T]$, en los tiempos intermedios $0 = t^0 < t^1 < ... < t^N = T$, con $N > 1$ y denotemos $\Delta t := t^n - t^{n-1}$, $1 \leq n \leq N$. Además, dado $\mathcal{T}_h$ una partición que pertenece a $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, familia de particiones de Ω, en triángulos que satisfacen las siguientes propiedades para todo $n = \{1, ..., N\}$.

1. Cualquier par de triángulos en $\mathcal{T}_h$ son disjuntos, comparten a lo más un lado o tienen un vértice en común.

   Sean:

   a) $h_T =$ diámetro de T.

   b) $\rho_T =$ diámetro máximo de la bola contenida en T.

2. Se define $h = \max\limits_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$.

3. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_h$ una familia de triangulaciones de Ω. Diremos que ella es regular, si existe $\sigma > 0$ tal que:
$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h \quad \forall h > 0.$$

Consideremos:

$$H_h := \{v \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}); v\big|_T \in \mathbb{P}_k(T)\ \forall T \in \mathcal{T}_h^n\} \cap H^1(\Omega), \qquad k \geq 1;$$

$$V_h := \{v \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}); v\big|_T \in \mathbb{P}_k(T)\ \forall T \in \mathcal{T}_h^n\} \cap H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \qquad k \geq 1,$$

claramente
$H_h \subseteq H^1(\Omega)$ y $V_h \subseteq H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$.

5.3. Problema semi-discreto en el tiempo

A continuación se presenta el problema semi-discreto resultante de utilizar el método de Newmark para la parte temporal:

Dado $p_0, \dot{p}_0 \in L^2(\Omega)$ y $p_1 := p_0 + \Delta t \dot{p}_0$.

$$\text{(5.3.1)} \qquad \begin{cases} \text{Para } n = 1, \dots, N-1 \text{ hallar } p^{n+1} \in H^1(\Omega) \text{ con } p^{n+1}\big|_{\Gamma_D} := f \text{ tal que:} \\ \displaystyle\int_\Omega \delta^{n+1}(p) q + c^2 \int_\Omega \nabla \varrho^{n+1}(p) \cdot \nabla q = 0 \quad \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \end{cases}$$

donde δ^{n+1} y ϱ^{n+1} fueron definidos en (4.2.6) y (4.2.7) respectivamente.

El problema (5.3.1) es equivalente al siguiente problema variacional:

Dados p_0 y $p_1 \in L^2(\Omega)$.

$$\text{(5.3.2)} \qquad \begin{cases} \text{Para } n = 1, \dots, N-1 \text{ hallar } p^{(n+1)} \in H^1(\Omega) \text{ con } p^{n+1}\big|_{\Gamma_D} := f \text{ tal que:} \\ \\ A(p^{(n+1)}, q) = F_n(q) \qquad \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \end{cases}$$

donde:

1. La forma bilineal $A : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ esta definida como:

$$A(p^{(n+1)}, q) := \frac{1}{\Delta t^2} \int_\Omega p^{(n+1)} q + c^2 \frac{1}{4} \int_\Omega \nabla p^{(n+1)} \cdot \nabla q;$$

2. La forma acotada $F_n : H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$F_n(q) := \frac{1}{\Delta t^2} \int_\Omega (2p^{(n)} - p^{(n-1)}) q - c^2 \frac{1}{4} \int_\Omega (2\nabla p^{(n)} + \nabla p^{(n-1)}) \cdot \nabla q, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Luego, dado que se supuso que en particular $f \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, se puede proceder igual que en el caso de la formulación variacional continua, es decir, con esta suposición se garantiza que existe $\hat{p}^{n+1} \in H^1(\Omega)$ tal que $\hat{p}^{n+1}\big|_{\Gamma_D} := f$, con $1 \leq n \leq N-1$.

Sea $P^{n+1} = p^{n+1} - \hat{p}^{n+1}$, con $1 \leq n \leq N-1$ se tiene que si p^{n+1} es solución del problema (5.3.1), entonces P^{n+1} lo es del siguiente:

Dados p_0 y $p_1 \in L^2(\Omega)$.

$$(5.3.3) \qquad \begin{cases} \text{Para } n = 1, \dots, N-1 \text{ hallar } P^{n+1} \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \text{ tal que:} \\ \\ A(P^{(n+1)}, q) = F_n(q) - A(\hat{p}^{n+1}, q) \qquad \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \end{cases}$$

luego dado que la forma bilineal A es H-elíptica (con $H := H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$), acotada y la forma F_n también es acotada, se cumplen todas las hipótesis del lema de Lax-Milgram (ver Teorema A.2). Por lo tanto el problema (5.3.3) tiene solución única $\forall n := \{1, \dots, N\}$.
Entonces $p^{n+1} = P^{n+1} + \hat{p}^{n+1}$ es solución de problema (5.3.2), pero al igual que antes, como la elección de $\hat{p}^{n+1}$ no es única, tenemos que demostrar la unicidad de p^{n+1}.

Procedemos por inducción en n. Sea $n \in \{1, \dots, N-1\}$ fijo y sean p^{n+1} y $\widetilde{p}^{n+1}$ soluciones del problema (5.3.1) entonces satisfacen:

$$A(p^{(n+1)}, q) = F_n(q) \qquad \forall q \in H^1_{\Gamma_D};$$

$$A(\widetilde{p}^{(n+1)}, q) = F_n(q) \qquad \forall q \in H^1_{\Gamma_D},$$

restando ambas expresiones se tiene que:

$$(5.3.4) \qquad A(p^{(n+1)} - \widetilde{p}^{(n+1)}, q) = 0 \qquad \forall q \in H^1_{\Gamma_D}.$$

Puesto que la ecuación (5.3.4) es valida $\forall q \in H^1_{\Gamma_D}$, se testea con
$q := p^{(n+1)} - \widetilde{p}^{(n+1)}$ obteniendo:

$$0 = \frac{1}{\Delta t^2} \|p^{(n+1)} - \widetilde{p}^{(n+1)}\|^2_{0,\Omega} + c^2 \frac{1}{4} \|\nabla(p^{(n+1)} - \widetilde{p}^{(n+1)})\|^2_{0,\Omega}.$$
$$\Longrightarrow 0 \geq \|p^{(n+1)} - \widetilde{p}^{(n+1)}\|^2_{0,\Omega} \Longrightarrow p^{(n+1)} = \widetilde{p}^{(n+1)},$$

Así se concluye que el problema (5.3.2) tiene solución única para cada $n := \{1, \dots, N-1\}$.

Por último se presenta el esquema del problema variacional discreto en el espacio:

Dados p_0 y $p_1 \in L^2(\Omega)$.

$$(5.3.5) \qquad \begin{cases} \text{Para } n = 1, \dots, N-1 \text{ hallar } p_h^{(n+1)}, \in H_h \text{ con } p_h^{n+1}\big|_{\Gamma_D} := f, \text{ tal que:} \\ \\ A(p_h^{(n+1)}, q_h) = F_n(q_h) \qquad \forall q_h \in V_h. \end{cases}$$

Procediendo de manera análoga a lo hecho anteriormente se prueba que (5.3.5) tiene solución única.

5.3.1. Descripción matricial

Sea $\{v_j\}_{j=1}^M$ una base de H_h. Escribimos $p_h^{(n+1)} \in H_h$ en términos de su base:

$$p_h^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^{(n+1)} v_i, \quad 1 \leq n \leq N; \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq M,$$

y testeamos el problema discreto (5.3.5) con $q_h = v_k$, $1 \leq k \leq M$. Entonces el problema discreto (5.3.5) es equivalente al siguiente problema matricial:

$$\mathbf{R}\mu^{(n+1)} = 2\mathbf{E}\mu^{(n)} - \mathbf{R}\mu^{(n-1)}, \quad 1 \leq n \leq N,$$

donde:

1. $\mathbf{R} := \mathbf{A} + \dfrac{\Delta t^2 C^2}{4}\mathbf{B}, \qquad \mathbf{E} := \mathbf{A} - \dfrac{\Delta t^2 C^2}{4}\mathbf{B}.$
2. $\mathbf{A} = \left(\displaystyle\int_\Omega v_i v_k\right)_{i,k=1,\dots,M}, \qquad \mathbf{B} = \left(\displaystyle\int_\Omega \nabla v_i \nabla v_k\right)_{i,k=1,\dots,M}.$

5.3.2. Resultados numéricos

En esta sección se presentan los resultados de algunas pruebas numéricas, calculadas con un código propio desarrollado en MATLAB, el cual contiene la implementación del método de elementos finitos tradicional basado en el código de [7], con el menor orden posible $k = 1$, es decir, elementos finitos lineales a trozos y continuos para la presión p_h, junto al esquema de Newmark para la discretización del tiempo, con una partición homogénea y $\beta = \dfrac{1}{4}$. Además para la generación de mallas se utilizó el software Triangle [8].

A continuación se presenta un ejemplo cuyo propósito es testear el código con una solución analítica conocida.
Sea $\Omega =: (0,10) \times (0,4)$, sujeta en toda su frontera y consideremos el problema del cálculo de los modos propios libres de la modelación del fluido potencial. La formulación variacional del problema consiste en :

$$\text{(5.3.6)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } p \neq 0 \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \text{ y } \omega > 0 \text{ tal que:} \\ \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q = \frac{\omega^2}{c^2}\int_\Omega pq \qquad \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \end{array} \right.$$

donde ω es la frecuencia y p es la amplitud de la presión.

Sea ω_1 la menor frecuencia de vibración libre y P el modo propio asociado a ésta, definimos el siguiente problema:

$$\text{(5.3.7)} \qquad \left\{ \begin{array}{rll} \text{Hallar } p : [0,T] \longrightarrow & H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \text{ tal que:} & \\ \displaystyle\int_\Omega \ddot{p}q + c^2\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q & = 0 & \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \\ p(0,\cdot\,) & = P & \text{en } \Omega, \\ \dot{p}(0,\cdot\,) & = 0 & \text{en } \Omega. \end{array} \right.$$

Se sabe que $p := \cos(\omega_1 t)P$ es solución del problema (5.3.7) pues:

1. $p(0,\cdot) = P$ en todo Ω y $\dot{p}(0,\cdot) = 0$ en todo Ω.
2. $\ddot{p} = -\omega_1^2\cos(\omega_1 t)P$

$$\Longrightarrow \int_\Omega \ddot{p}q + c^2\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q = 0 \qquad \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega).$$

Para el cálculo analítico de la menor frecuencia de vibración y su modo propio asociado, se utilizará el método de separación de variables. Así consideremos el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \ddot{p}(t,x,y) & = -c^2 \Delta p(t,x,y) & t > 0,\ (x,y) \in \Omega, \\ p(t,x,y) & = 0 & t > 0,\ (x,y) \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{5.3.8}$$

Aplicando separación de variables: $p(t,x,y) = T(t)P(x,y)$ y reemplazando en (5.3.8) se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{lll} T''(t)P(x,y) & = -c^2 T(t)\Delta P(x,y) & t > 0,\ (x,y) \in \Omega, \\ T(t)P(x,y) & = 0 & t > 0,\ (x,y) \in \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{5.3.9}$$

con lo cual, de la primera ecuación de (5.3.9) se obtiene que tenemos una ecuación que sólo depende de la variable tiempo t y es igual a otra ecuación que sólo depende de las variables espaciales x e y. Por lo tanto ambas ecuaciones deben ser iguales a una constante k.

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -c^2 \frac{\Delta P(x,y)}{P(x,y)} = k,$$

lo que implica:

1. $T''(t) - k\,T(t) = 0 \qquad t > 0,$
2. $-c^2 \Delta P(x,y) = k\,P(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega.$

Aplicamos nuevamente separación de variables: $P(x,y) = X(x)Y(y)$ a (2) se sigue:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -\frac{k}{c^2} X(x)Y(y),$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{k}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{k}{c^2} = -\mu.$$

Como tenemos una ecuación que sólo depende de la variable x y es igual a otra ecuación que sólo depende de la variable y, entonces ambas ecuaciones deben ser iguales a una constante $-\mu$.

Por lo tanto tenemos que resolver:

- $X''(x) + \mu X(x) = 0,$
- $Y''(y) + \nu Y(y) = 0,$

donde $\nu = \dfrac{k}{c^2} - \mu.$

Además de las condiciones de contorno tenemos:

$u(t,0,y) = T(t)X(0)Y(y) = 0 \quad \forall t \geq 0,\, 0 \leq y \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad X(0) = 0,$

$u(t,10,y) = T(t)X(20)Y(y) = 0 \qquad \forall t \geq 0,\, 0 \leq y \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad X(10) = 0,$

$u(t,x,0) = T(t)X(x)Y(0) = 0 \quad \forall t \geq 0,\, 0 \leq x \leq 10 \quad \Leftrightarrow \quad Y(0) = 0,$

$u(t,x,4) = T(t)X(x)Y(4) = 0 \qquad \forall t \geq 0,\, 0 \leq x \leq 10 \quad \Leftrightarrow \quad Y(4) = 0.$

Luego, nos quedan los problemas:

1.
$$\left\{ \begin{array}{rll} X''(x) + \mu X(x) & = 0 & \qquad t > 0,\ (x,y) \in \Omega, \\ X(0) & = 0, & \\ X(10) & = 0. & \end{array} \right.$$

2.
$$\left\{ \begin{array}{rll} Y''(y) + \nu Y(y) & = 0 & \qquad t > 0,\ (x,y) \in \Omega, \\ Y(0) & = 0, & \\ Y(4) & = 0. & \end{array} \right.$$

Los valores y funciones propias asociados al problema (1) son:

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{10}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

En efecto, buscamos valores propios reales:

- **Caso 1**:

  Si $\mu = 0$, entonces la solución general de $X''(x) = 0$ es:

  $X(x) = Ax + B$, donde A, B son constantes arbitrarias a determinar de las condiciones de contorno:

  $X(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(x) = Ax.$
  $X(10) = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad A = 0,$
  luego $A = B = 0$
  $\Rightarrow X(x) = 0$, concluyendo que $\mu = 0$ no es valor propio.

- **Caso 2**:

  Si $\mu < 0$, escribimos μ como $\mu = -\omega^2$, $\omega > 0$, por lo tanto:

$X(x) = Ae^{-\omega x} + Be^{\omega x}$, donde A y B son constantes arbitrarias a determinar de las condiciones de contorno del problema:

$X(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A + B = 0.$
$X(10) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ae^{-10\omega} + Be^{10\omega} = 0.$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\omega} & e^{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$
como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\omega} & e^{\omega} \end{vmatrix} \equiv e^{10\omega} - e^{-10\omega} \neq 0$, pues $\omega \neq 0$

$\Rightarrow$ el sistema tiene solución única $A = B = 0$

$\Rightarrow X(x) = 0$, por lo cual no existen valores propios negativos.

- **Caso 3**:

  Si $\mu > 0$ escribimos $\mu = \omega^2$, $\omega > 0$, por lo tanto:

  $X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ donde A, B son constantes arbitrarias a determinar de las condiciones de contorno:

  $X(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(x) = B\sin(\omega x),$
  $X(10) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B\sin(10\omega) = 0,$
  $\Leftrightarrow \sin(10\omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10\omega = n\pi, \quad n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_n = \frac{n\pi}{10}, \quad n \in \mathbb{N}.$

  $\Rightarrow \quad \mu_n = w_n^2 = \left(\frac{n\pi}{10}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$ son los valores propios positivos.

Análogamente los valores y funciones propias asociados a (2) son:

$$\nu_m = \left(\frac{m\pi}{4}\right)^2, \quad Y_n(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{4}y\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Como $\nu = \dfrac{k}{c^2} - \mu$, se obtiene:

$$\begin{cases} k_{n,m} &= c^2(\mu_n + \nu_m) &= c^2\left(\left(\frac{n\pi}{10}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{4}\right)^2\right), \\ P_{n,m}(x,y) &= X_n(x)Y_m(y) &= \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{4}y\right) \quad n, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Así $\omega_{n,m} = \sqrt{k_{n,m}} = \sqrt{c^2\left(\left(\frac{n\pi}{10}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{4}\right)^2\right)} \quad n, m = 1, 2, 3, ...$

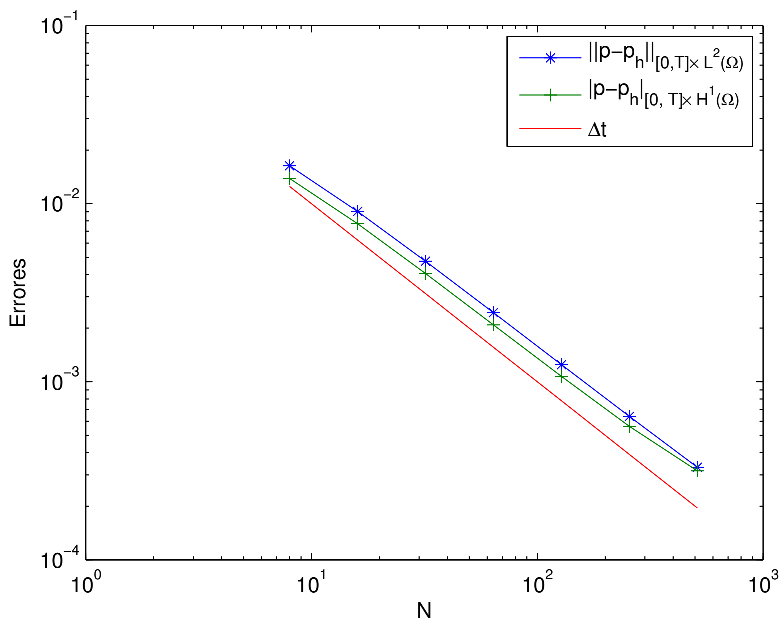
Tomando $n = m = 1$ se tiene que la menor frecuencia $\omega_1 = \sqrt{c^2\left(\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right)}$ y su modo propio asociado es: $P(x,y) = \sin\left(\frac{\pi}{10}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}y\right).$

Se sabe que $p := \cos(\omega_1 t)P$ es solución del problema (5.3.7), por lo tanto, se tomará como solución analítica:

$$p = \cos\left(\sqrt{c^2\left(\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right)}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{10}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}y\right).$$

A continuación se presentan los resultados obtenidos para la presión p, utilizando elementos finitos del tipo $\mathbb{P}_1$, es decir, elementos finitos lineales a trozos y continuos para la presión p_h, junto a un $h = 0.1875$ para la triangulación y el esquema de Newmark para la discretización temporal. Todos los cálculos se hicieron para un tiempo $T := \frac{2\pi}{\omega_1}$, además se ha utilizado la velocidad del sonido del aire $c := 34000\text{cm/seg}$.

Figura 22: Gráfico de los errores de la presión p.



En la Figura 22 se muestra el gráfico en escala logarítmica de los errores de la presión en norma $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ versus el número de intervalos N en que se dividió el tiempo,con h fijo, donde :

- El error en norma $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ se define como: $\|p-p_h\|_{[0,T]\times L^2(\Omega)}$ donde $\|p\|^2_{[0,T]\times L^2(\Omega)} = \int_0^T \|p(t)\|^2_{0,\Omega}dt.$
- $|p-p_h|_{[0,T]\times H^1(v)}$ es el error en seminorma $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ y donde $|p|^2_{[0,T]\times H^1(\Omega)} = \int_0^T \|\nabla p(t)\|^2_{0,\Omega}\mathrm{dt}.$

De la Figura 22 se observa que el método de integración temporal converge con el orden que predice la teoría para el esquema de Newmark $\mathcal{O}(\Delta t)$.

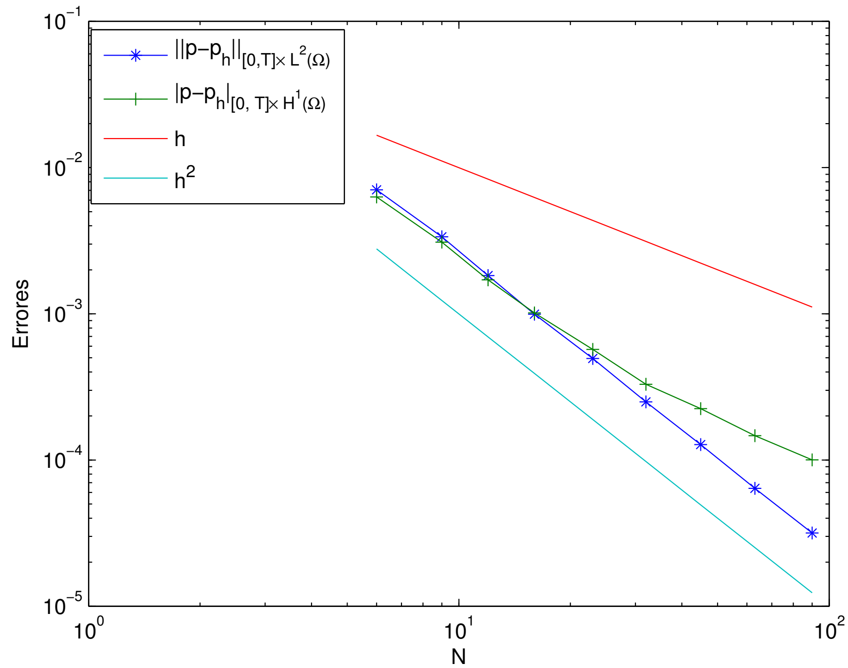
Tabla 9: Tabla de los errores de la presión en norma $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(\Omega))$

N	$\|\|p-p_h\|\|_{[0,T]\times L^2(\Omega)}$	$\|p-p_h\|_{[0,T]\times H^1(\Omega)}$
8	0.016308498341	0.013852251672
16	0.009045504822	0.007713110320
32	0.004754989214	0.004052450854
64	0.002443817011	0.002085718512
128	0.001246750917	0.001070990468
256	0.000637956602	0.000561568715
512	0.000331128336	0.000315744136

A continuación se presentan los resultados obtenidos para la presión p para el mismo intervalo de tiempo T y las mismas constantes físicas del caso anterior, utilizando elementos finitos lineales a trozos y continuos para la presión p_h y el esquema de Newmark para la discretización temporal, pero a diferencia del ejemplo anterior se hizo variar el h para la triangulación y se tomo $\Delta t = \mathcal{O}(h^2)$.

En la Figura 23 se muestra el gráfico en escala logarítmica de los errores de la presión en norma $L^2(0,T;L^2(I))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(I))$ versus N que representa el numero de vértices libres de la triangulación.

Figura 23: Gráfico de los errores de la presión p.



De la Figura 23 y la Tabla 10 se concluye que la norma $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ converge con $\mathcal{O}(h^2)$ y la seminorma $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ con $\mathcal{O}(h)$.

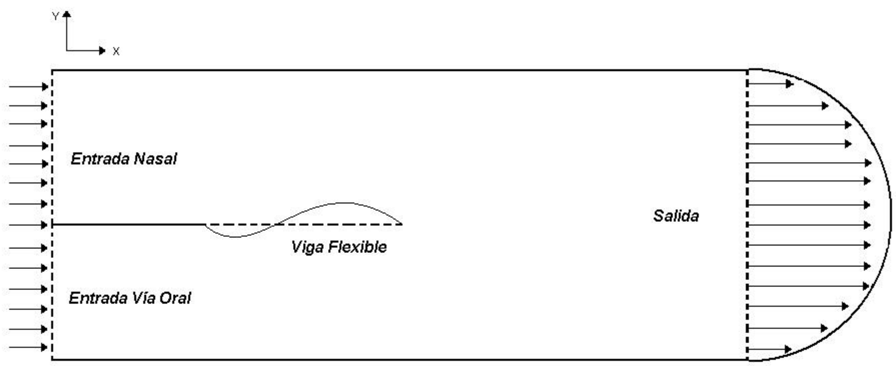
Tabla 10: Tabla de los errores de la presión en norma $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ y en seminorma $L^2(0,T;H^1(\Omega))$

h	$\|\|p-p_h\|\|_{[0,T]\times L^2(\Omega)}$	$\|p-p_h\|_{[0,T]\times H^1(\Omega)}$
6	0.007042856362931	0.006306930290474
9	0.003366852846761	0.003092406285008
12	0.001827426011840	0.001705931070652
16	0.000993586158585	0.001013952698687
23	0.000494768240708	0.000571218424819
32	0.000249985281452	0.000329578101868
45	0.000127498206055	0.000224647677384
63	0.000064049845930	0.000146546787238
90	0.000031702742689	0.000100169129963

6. Acoplamiento

Para poder generar simulaciones numéricas de como se produce el ronquido durante la respiración, es necesario generar un modelo que simule el tracto superior respiratorio, junto con el paladar blando y la úvula. Para ello se consideró un modelo mecánico análogo como el que se muestra en la figura 24.

Figura 24: modelo mecánico análogo.



El modelo numérico desarrollado para poder resolver el problema mecánico de la Figura 24, se basó en las ecuaciones de Timoshenko para la viga elástica y un modelo potencial acústico para el fluido. Bajo la hipótesis de pequeñas fluctuaciones de la velocidad y, consiguientemente, las de la presión, puede suponerse que el dominio del fluido no cambia en el tiempo, sin embargo, la variación de presiones del fluido a través del dominio de la viga es el que produce la vibración de ésta, con lo cual, el acople entre los modelos está dado por la diferencia de presión en ambas caras de la viga, la que corresponde a la carga que actúa sobre ésta.

Sea P_1 la presión inicial de la vía nasal, P_2 la presión inicial de la vía oral y P_0 la presión en la faringe. Se define Ω como el dominio abierto y conexo de R^2 del tracto superior respiratorio y $I \subseteq \mathbb{R}$ el dominio de la viga.

Se define la presión en la parte superior del dominio de la viga elástica (I) como P_3, del mismo modo se define la presión en la parte inferior del dominio de la viga elástica (I) como P_4. Puesto que el movimiento que se genera en la viga elástica está directamente relacionado con la diferencia de presiones a lo largo de su dominio, en conclusión la interacción entre el fluido y la viga elástica, es que el salto de presiones entre ambas caras de la viga, corresponden a la carga que actúa sobre ésta.

$$\left\{ \begin{array}{lll} (P_4 - P_3) & = f(t,x) & \text{en } (0,T)\times\Omega\times I. \end{array} \right. \tag{6.0.10}$$

6.1. Problema Acoplado Fluido-Viga elástica

A continuación se presenta la formulación matemática del modelo acoplado fluido acústico-viga elástica.

Sea $Q_T := (0,T)\times\Omega$, con frontera $\partial\Omega := \mathit{\Gamma}_D \cup \mathit{\Gamma}_N$ tal que $\mathit{\Gamma}_D \cap \mathit{\Gamma}_N = \emptyset$, $|\mathit{\Gamma}_D| \neq 0$, $|\mathit{\Gamma}_N| \neq 0$. Sea $f \in L^2((0,T); H^{1/2}(\Gamma_D))$, la presión del fluido en una parte de la frontera Γ_D. Esta presión, la cual es dato, corresponde a la presión exterior en la boca y la nariz junto a la presión interior en la laringe. Sea $R_T := (0,T)\times I$ donde $I = (0,L) \subseteq \mathbb{R}$ es el dominio de la viga elástica. El problema consiste en encontrar la presión p en el dominio Ω, junto a la rotación ϕ y el desplazamiento w en el dominio de la viga elástica I, tales que:

$$\left\{ \begin{array}{rll} \ddot{p} - c^2\Delta p & = 0 & \text{en } Q_T, \\ p & = f & \text{en } \Gamma_D \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} & = 0 & \text{en } \Gamma_N, \\ p(0,\cdot) & = p_0 & \text{en } \Omega, \\ \dot{p}(0,\cdot) & = \dot{p}_0 & \text{en } \Omega, \\ \rho\mathbf{I_n}\ddot{\phi} - \mathbf{EI_n}\phi'' + \mathbf{GA}\,(\phi - w') & = 0 & \text{en } R_T, \\ \rho\mathbf{A}\ddot{w} + \mathbf{GA}\,(\phi - w')' & = [\![p(t,x)]\!] & \text{en } R_T, \\ \phi(\cdot\,,0) & = 0 & \text{en } (0,\,T), \\ w(\cdot\,,0) & = 0 & \text{en } (0,\,T), \\ \phi'(\cdot\,,L) & = 0 & \text{en } (0,\,T), \\ \phi(\cdot\,,L) - w'(\cdot\,,L) & = 0 & \text{en } (0,\,T), \\ \phi(0,\cdot) & = \phi_0 & \text{en } I, \\ \dot{\phi}(0,\cdot) & = \dot{\phi}_0 & \text{en } I, \\ w(0,\cdot) & = w_0 & \text{en } I, \\ \dot{w}(0,\cdot) & = \dot{w}_0 & \text{en } I, \end{array} \right. \tag{6.1.1}$$

donde $[\![p(t,x)]\!]$, representa el salto de presión entre la parte superior del dominio I y su parte inferior como se explico anteriormente.

A continuación se presenta la formulación variacional asociada al problema (6.1.1), que es una combinación de la formulación variacional (4.2.4), asociada al problema evolutivo de la viga elástica de Timoshenko, y la formulación variacional (5.1.10) asociada al problema del fluido acústico potencial:

$$
\text{(6.1.2)} \qquad \begin{cases}
\text{Hallar } p : [0,T] \longrightarrow H^1(\Omega) \text{ con } p\big|_{\Gamma_D} := f \\
\quad \text{y } \phi, w : [0,T] \longrightarrow \widehat{H}^1(I) \text{ tales que:} \\
\displaystyle\int_\Omega \ddot{p}q + c^2 \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q = 0 \quad \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \\
\qquad p(0,\cdot) = p_0 \quad \text{en } \Omega, \\
\qquad \dot{p}(0,\cdot) = \dot{p}_0 \quad \text{en } \Omega, \\
\displaystyle\int_I \rho \mathbf{I_n} \ddot{\phi}\psi + \int_I \rho \mathbf{A} \ddot{w} v + A((\phi,w),(\psi,v)) = \int_I [\![p(t,x)]\!] v \quad \forall (\psi,v) \in \mathbf{V}, \\
\qquad \phi(0,\cdot) = \phi_0 \quad \text{en } I, \\
\qquad \dot{\phi}(0,\cdot) = \dot{\phi}_0 \quad \text{en } I, \\
\qquad w(0,\cdot) = w_0 \quad \text{en } I, \\
\qquad \dot{w}(0,\cdot) = \dot{w}_0 \quad \text{en } I,
\end{cases}
$$

donde $\mathbf{V} := (\widehat{H}^1(I), \widehat{H}^1(I))$, la forma $A : (\mathbf{V} \times \mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida en (4.1.5).

Para probar la existencia y unicidad del problema variacional (6.1.2) hay que considerar, que el acople es solo en una dirección: la solución del problema en el fluido afecta a la viga elástica, pero la solución del problema en la viga elástica no afecta al fluido. Por lo tanto, puede resolverse primero el problema en el fluido, calcular el salto de la presión a lo largo del dominio de la viga elástica, luego resolver el problema en la viga elástica usando ese salto de la presión como carga. Esto quiere decir que primero se resuelve el problema variacional asociado al problema del fluido potencial acústico y luego el problema variacional relacionado con el problema evolutivo de la viga elástica de Timoshenko. En los capítulos de la viga elástica y el fluido potencial acústico se demostró que ambos problemas por separados tenían solución y estas eran únicas. Por lo tanto, el problema variacional (6.1.2) también tiene solución única.

6.2. Discretización Temporal y Espacial

Para la discretización en tiempo al igual que en el modelo evolutivo de la viga elástica de Timoshenko y el fluido potencial acústico, consideremos una partición del intervalo $[0,T]$, en los tiempos intermedios $0 = t^0 < t^1 < ... < t^N = T$, con $N > 1$ y denotemos $\Delta t := t^n - t^{n-1}$, $1 \leq n \leq N$. Además, dado $\mathcal{T}_h$ una partición que pertenece a $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, familia de triangulaciones en elementos finitos de Ω, definimos:

$$H_h := \{v \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}); v\big|_T \in \mathbb{P}_k(T) \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h^n\} \cap H^1(\Omega), \qquad k \geq 1;$$

$$\widehat{H}_h := \{v \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}); v\big|_T \in \mathbb{P}_k(T) \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h^n\} \cap H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \qquad k \geq 1.$$

Finalmente, consideremos la familia de particiones $\{\mathscr{T}_h\}_{h>0}$, del intervalo I $\mathscr{T}_h : \quad 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_M = L$, $M > 1$, $I_j := (x_{j-1}, x_j)$, $\qquad j = 1, 2, \ldots, M$.
Al igual que el capitulo de la viga definimos:

$$V_h := \{v \in \mathscr{C}^0(\overline{I}); v\big|_{\overline{I}_j} \in \mathbb{P}_k(\overline{I}_j), \quad 1 \leq j \leq M, \quad I_j \in \mathscr{T}_h\} \cap \widehat{H}^1(I), \qquad k \geq 1.$$

Es claro que: $H_h \subseteq H^1(\Omega)$, $\widehat{H}_h \subseteq H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ y $V_h \subseteq \widehat{H}^1(I)$.

6.3. Problema semi-discreto en el tiempo

A continuación se presenta el problema semi-discreto resultante de utilizar el método de Newmark para la parte temporal:

Dados los datos iniciales p_0 y $p_1 \in L^2(\Omega)$ para el fluido, donde $p_1 := p_0 + \Delta t \dot{p}_0$, (ϕ_0, w_0) y $(\phi_1, w_1) \in L^2(I) \times L^2(I)$ para la viga elástica, donde $\phi_1 := \phi_0 + \Delta t \dot{\phi}_0$ y $w_1 := w_0 + \Delta t \dot{w}_0$.

$$(6.3.1) \qquad \begin{cases} \text{Para } n = 1, \ldots, N-1 \text{ hallar } p^{n+1} \in H^1(\Omega) \text{ con } p^{n+1}\big|_{\Gamma_D} := f \\ \qquad\qquad \text{y } (\phi^{n+1}, w^{n+1}) \in \mathbf{V} \text{ tales que:} \\ \displaystyle\int_\Omega \delta^{n+1}(p) q + c^2 \int_\Omega \nabla \delta^{n+1}(p) \cdot \nabla q = 0 \quad \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \\ \\ \displaystyle\int_I \rho \mathbf{I_n} \delta^{n+1}(\phi) \psi + \int_I \rho \mathbf{A} \delta^{n+1}(w) v + A((\delta^{n+1}(\phi), \delta^{n+1}(w)), (\psi, v)) \\ \qquad\qquad \displaystyle= \int_I \varrho^{n+1}(g) v \qquad \forall (\psi, v) \in \mathbf{V}, \end{cases}$$

donde $\mathbf{V} := (\widehat{H}^1(I) \times \widehat{H}^1(I))$ y la forma $A : (\mathbf{V} \times \mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida en (4.1.5), además δ^{n+1} y ϱ^{n+1} están definidos en (4.2.6) y (4.2.7) respectivamente.

Definimos:

1. La forma bilineal $B : H^1(\Omega) \times H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$B(p^{(n+1)}, q) := \frac{1}{\Delta t^2} \int_\Omega p^{(n+1)} q + c^2 \frac{1}{4} \int_\Omega \nabla p^{(n+1)} \cdot \nabla q.$$

2. La forma acotada $G_n : H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$G_n(q) := \frac{1}{\Delta t^2} \int_\Omega (2p^{(n)} - p^{(n-1)}) q - c^2 \frac{1}{4} \int_\Omega (2\nabla p^{(n)} + \nabla p^{(n-1)}) \cdot \nabla q.$$

3. La forma $D : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$D((\phi^{(n+1)}, w^{(n+1)}), (\psi, v)) := \frac{\rho \mathbf{I_n}}{\Delta t^2} \int_I \phi^{(n+1)} \psi + \frac{\rho \mathbf{A}}{\Delta t^2} \int_I w^{(n+1)} v + \frac{1}{4} A((\phi^{(n+1)}, w^{(n+1)}), (\psi, v)).$$

4. Y por último las formas acotadas $F_{n+1} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$F_{n+1}((\psi, v)) := \frac{1}{4} \int_I f^{n+1} v + \frac{1}{2} \int_I f^n v + \frac{1}{4} \int_I f^{n-1} v + \frac{\rho \mathbf{A}}{\Delta t^2} \int_I (2w^{(n)} - w^{(n-1)}) v$$

$$+ \frac{\rho \mathbf{I_n}}{\Delta t^2} \int_I (2\phi^{(n)} - \phi^{(n-1)}) \psi - \frac{1}{2} A((\phi^n, w^n), (\psi, v)) - \frac{1}{4} A((\phi^{n-1}, w^{n-1}), (\psi, v)),$$

donde la forma $A : (\mathbf{V} \times \mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida en (4.1.5).

Con todas estas definiciones se puede reescribir la formulación variacional (6.3.1) de la siguiente forma:

Dado los datos iniciales $p_0 \in L^2(\Omega)$ y $p_1 \in L^2(\Omega)$ definido como antes, para el fluido, $(\phi_0, w_0) \in L^2(I) \times L^2(I)$ y $(\phi_1, w_1) \in L^2(I) \times L^2(I)$ definidos como antes, para la viga elástica.

$$
\text{(6.3.2)} \qquad \begin{cases} \text{Para } n = 1, \ldots, N-1 \text{ hallar } p^{(n+1)} \in H^1(\Omega) \text{ con } p^{n+1}\big|_{\Gamma_D} := f \\ \qquad \text{y } (\phi^{(n+1)}, w^{(n+1)}) \in \mathbf{V} \text{ tales que:} \\ \qquad B(p^{(n+1)}, q) = G_n(q) \qquad \forall q \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \\ D((\phi^{(n+1)}, w^{(n+1)}), (\psi, v)) = F_{n+1}((\psi, v))) \qquad \forall (\psi, v) \in \mathbf{V}. \end{cases}
$$

Para asegurar la existencia y unicidad del problema (6.3.2), semi-discretizado en el tiempo, al igual que en el caso continuo, hay que tener en cuenta que primero se resuelve el problema asociado a la presión p^{n+1}, luego se calcula el salto de la presión a lo largo del dominio de la viga elástica y luego este ingresa como dato al problema asociado a la rotación ϕ^{n+1} y desplazamiento w^{n+1} de la viga elástica. Puesto que el problema (6.3.2) también es una combinación de los problemas semi-discretizados (4.2.8) y (5.3.2) los cuales tienen soluciones únicas, en consecuencia este también tiene solución única.

Por último se presenta el esquema del problema variacional discreto en el espacio:

Dado los datos iniciales p_0 y $p_1 \in L^2(\Omega)$ para el fluido y (ϕ_0, w_0) y $(\phi_1, w_1) \in L^2(I) \times L^2(I)$ para la viga elástica.

$$
\text{(6.3.3)} \qquad \begin{cases} \text{Para } n = 1, \ldots, N-1 \text{ hallar } p_h^{(n+1)} \in H_h \text{ con } p_h^{n+1}\big|_{\Gamma_D} := f \\ \qquad \text{y } (\phi_h^{(n+1)}, w_h^{(n+1)}) \in \mathbf{V_h} \text{ tales que:} \\ \qquad B(p_h^{(n+1)}, q_h) = G_n(q_h) \qquad \forall q_h \in \widehat{H}_h, \\ D((\phi_h^{(n+1)}, w_h^{(n+1)}), (\psi_h, v_h)) = F_{n+1}((\psi_h, v_h))) \qquad \forall (\psi_h, v_h) \in \mathbf{V_h}, \end{cases}
$$

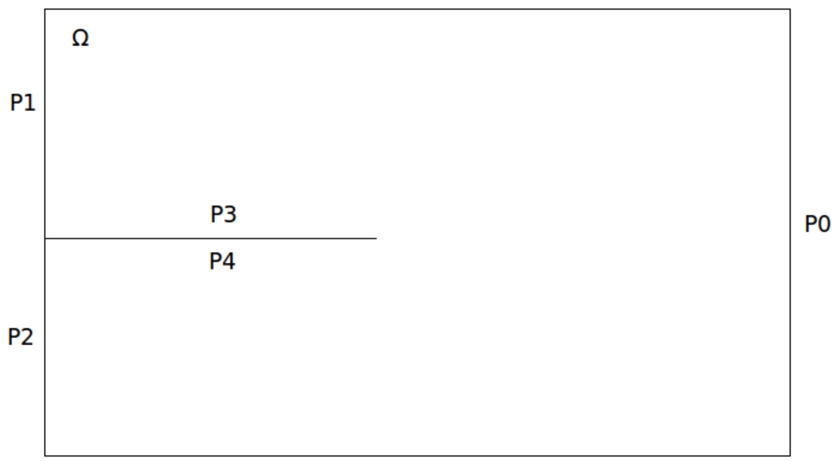
el cual, también tiene solución única por lo ya explicado anteriormente.

6.4. Implementación numérica:

En esta sección se presentan los resultados de algunas pruebas numéricas, calculadas con un código de MATLAB, el cual contiene la implementación del método de elementos finitos tradicional, con el menor orden posible $k = 1$; es decir, elementos finitos lineales a trozos y continuos para la presión p_h y para el par de la rotación ϕ_h y desplazamiento w_h, junto al esquema de Newmark para la discretización del tiempo, con una partición homogénea y $\beta = \dfrac{1}{4}$. Además para la generación de mallas se utilizó el software Triangle [8].

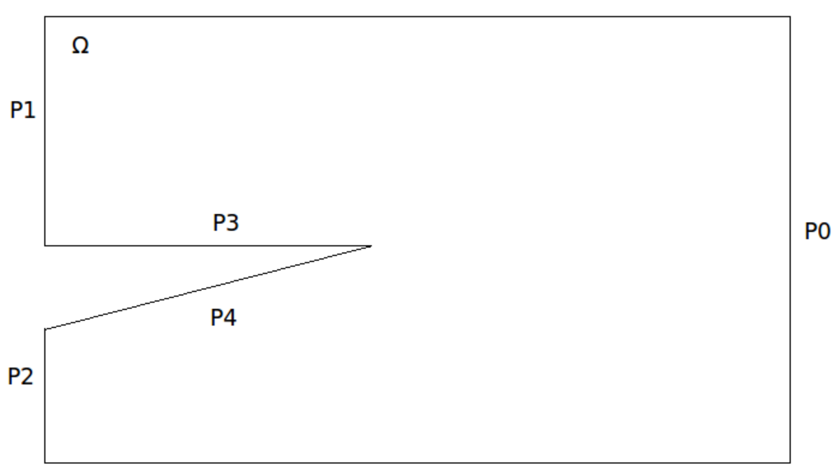
Sea P_1 la presión inicial de la vía nasal, P_2 la presión inicial de la vía oral y P_0 la presión en el esófago. Se define $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ como la geometría del conducto superior respiratorio (ver Figura 25), para la modelación del problema acoplado fluido acústico-viga elástica, se supondrá que en un inicio la viga elástica esta en reposo y sera parte de la geometría del conducto superior respiratorio, con lo cual este quedará dividido en dos y como la variación de la presión no es necesariamente igual sobre la viga elástica que debajo de ésta, se define P_3 la presión arriba de la viga y P_4 la presión bajo la viga. Esto será de utilidad más adelante para la interacción entre el dominio de la viga y el dominio del conducto superior respiratorio, ya que como la presión del fluido genera el movimiento de la viga elástica, es necesario conocer la diferencia de presiones en todo punto del dominio de ésta.

Figura 25: Geometría del conducto superior respiratorio.



Puesto que el software que se utilizó para la generación de mallas fue Triangle, que tiene el defecto de que a un segmento no se le puede asignar dos referencias diferentes, lo que se hizo para solucionar este problema es generar un dominio Ω_1 en Triangle, como el que se muestra en la figura 26.

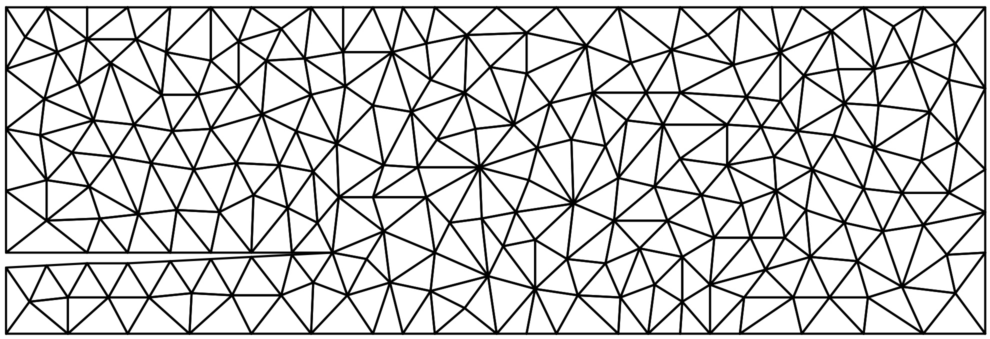
Figura 26: Geometria inicial del conducto superior respiratorio.



Luego se creó una subrutina en Matlab, la cual traslada todos los puntos que estén bajo la recta marcada con referencia P_4 hacia arriba, con lo cual en el mismo segmento quedan puntos con referencia P_3 y referencia P_4 , así queda bien definida la viga con referencia superior e inferior que será utilizada para calcular la variación de presión en la viga elástica.

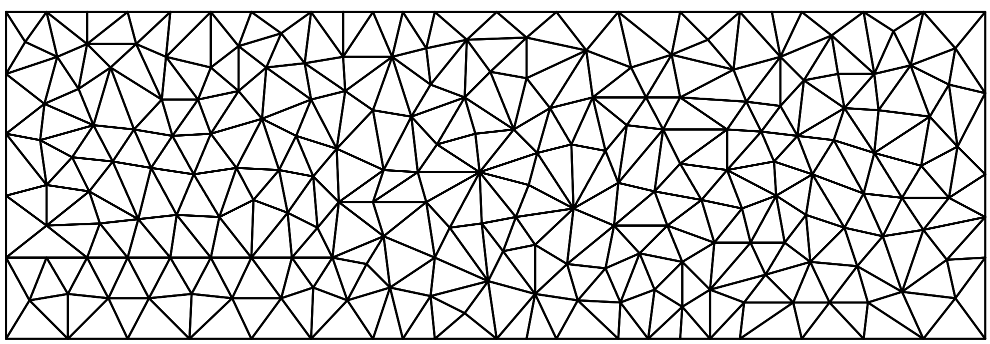
A continuación se presenta un ejemplo de esta subrutina: Sea Ω_1 (Ver Figura 27) el polígono que se genera al unir los siguientes puntos $(0,0); (3,0); (3,1); (0,1); (0,0.25); (1,0.25); (0,0.2)$ y $(0,0)$ en $\mathbb{R}^2$

Figura 27: Mallado de Ω_1.



Después que se corre la subrutina se obtiene la geometría Ω que es la que se utilizará para resolver el problema acoplado.

Figura 28: Malla de Ω que se obtiene como salida de la subrutina de Matlab.



Adicionalmente, el movimiento que se genera en la viga elástica esta directamente relacionado con el cambio de presión, que ocurre en la intersección entre los dominios del conducto superior respiratorio y el del paladar blando, es decir, entre el canal por donde circula el fluido y la viga elástica. Hay que tener presente que los puntos del dominio del conducto superior respiratorio, que interactúan con la viga elástica en su parte superior e inferior, no necesariamente coinciden con los puntos que pertenecen al dominio de la viga elástica.

Se tuvo que generar una subrutina en MATLAB, la cual se corre después de obtener la presión en todos los puntos de la triangulación que pertenecen al dominio Ω, del conducto superior respiratorio, después se buscan aquellos puntos del conducto que se intersectan con el dominio I (ver Figura 29) que representa a la viga elástica, dado que entre todos estos puntos están aquellos que tiene la presión sobre la viga y los otros bajo ésta, se crearon 2 vectores donde cada uno de ellos contenía el punto y la presión en ese punto.

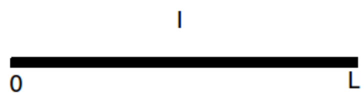
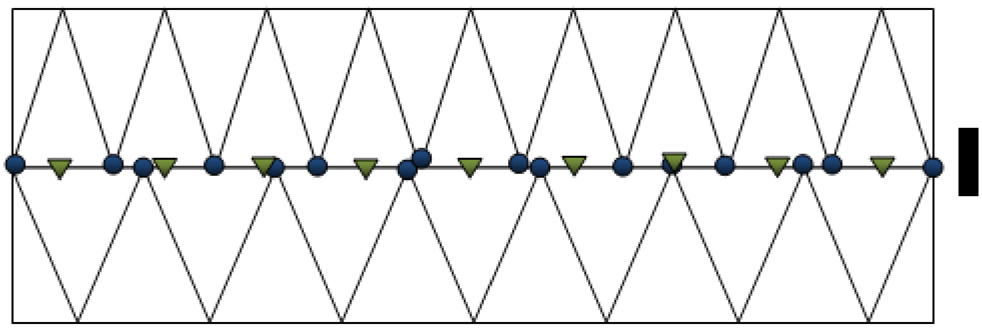


Figura 29: Dominio de la viga elástica I.

Nótese que los puntos del dominio de I no necesariamente son los puntos del dominio Ω como se explico anteriormente (ver Figura 30).

Figura 30: Intersección entre los puntos del dominio Ω y el dominio I.



Se define la presión en la parte superior del dominio de la viga elástica (I) como P_3, ésta representa la proyección de las presiones de los puntos más cercanos que pertenecen al dominio de Ω que se intersectan con los puntos que pertenecen al dominio I. Del mismo modo se define la presión en la parte inferior del dominio de la viga elástica (I) como P_4, ésta representa la proyección de los puntos más cercanos que pertenecen al dominio de Ω que se intersectan con los puntos que pertenecen al dominio I. Dado que ahora se tiene el valor de la presión, sobre y bajo todos lo puntos del dominio I de la viga elástica, se hace la diferencia entre éstas, puesto que el movimiento que se genera en la viga elástica está directamente relacionado con el cambio de presión a lo largo de su dominio, con lo cual se tiene que el salto de presiones entre ambas caras de la viga, corresponden a la carga que actúa sobre ésta.

$$\left\{ \begin{array}{ll} (P_4 - P_3) = f(t,x) & \text{en } (0,T) \times \Omega \times I. \end{array} \right. \tag{6.4.1}$$

A continuación se presenta un ejemplo cuyo propósito es testear el código. Supondremos que el conducto superior respiratorio es de 4cm. de ancho y 20cm. de largo, que el paladar blando tiene un largo de 4cm. y esta ubicado a 1cm. de alto por el conducto superior respiratorio (ver Figuras 31,32). Por lo tanto, su formulación matemática es la siguiente:

Sea Ω la región encerrada entre los siguientes puntos de $\mathbb{R}^2$:
$(0,0); (20,0); (20,4); (0,4); (0,1); (4,1); (0;1); (0,0)$ (ver Figura 31), donde $\partial\Omega := \Gamma_D \cup \Gamma_N$ tal que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| \neq 0$, $|\Gamma_N| \neq 0$ y I el intervalo $[0,4]$ (ver Figura 32)

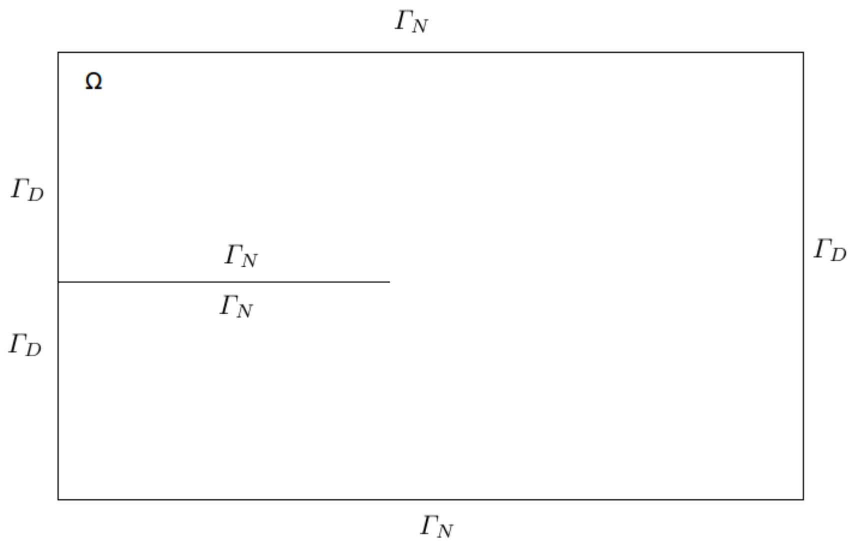


Figura 31: Dominio del tracto superior respiratorio Ω.

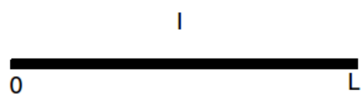


Figura 32: Dominio de la viga elástica I.

Se define el siguiente problema:

$$
(6.4.2) \qquad \begin{cases}
\ddot{p} - c^2 \Delta p &= 0 & \text{en } Q_T, \\
p &= f & \text{en } \Gamma_D \\
\dfrac{\partial p}{\partial n} &= 0 & \text{en } \Gamma_N, \\
p(0, \mathbf{x}) &= 0 & \text{en } \Omega, \\
\dot{p}(0, \cdot\,) &= 0 & \text{en } \Omega, \\
\rho \mathbf{I_n} \ddot{\phi} - \mathbf{EI_n} \phi'' + \mathbf{GA}\,(\phi - w') &= 0 & \text{en } R_T, \\
\rho \mathbf{A} \ddot{w} + \mathbf{GA}\,(\phi - w')' &= [\![p(t,x)]\!] & \text{en } R_T, \\
\phi(\cdot\,, 0) = 0 &= w(\cdot\,, 0) & \text{en } (0, T), \\
\phi'(\cdot\,, L) = 0 &= (\phi(\cdot\,, L) - w'(\cdot\,, L)) & \text{en } (0, T), \\
\phi(0, \cdot\,) &= 0 & \text{en } I, \\
\dot{\phi}(0, \cdot\,) &= 0 & \text{en } I, \\
w(0, \cdot\,) &= 0 & \text{en } I, \\
\dot{w}(0, \cdot\,) &= 0 & \text{en } I,
\end{cases}
$$

donde $Q_T := (0,T) \times \Omega$, $R_T := (0,T) \times I$ y $f \in L^2(\Gamma_D)$ que se define como:

$$f := \begin{cases} 20 & \text{si, } x = 0 \wedge y \geq 1, \\ 0 & \text{si, } x = 0 < y \geq 1, \\ -10 & \text{si, } x = 20, \end{cases} \tag{6.4.3}$$

representa la presión en la nariz, boca y faringe respectivamente, además para este caso se han utilizado los siguientes parámetros físicos, que corresponden a las características de un viga de acero y a la velocidad del sonido del aire.

- Módulo de elasticidad: $\mathbf{E} = 2{,}1 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2$.
- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0{,}3$.
- Densidad: $\rho = 7{,}85 \times 10^{-3} \text{kgf/cm}^3$.
- Velocidad de propagación de onda acústica en el fluido $c := 34000 \text{cm/seg}$.

Para la solución numérica se utilizaron elementos finitos del tipo $\mathbb{P}_1$ para la presión, es decir, elementos finitos lineales a trozos y continuos para la presión p_h y con $h = 0.3750$ para la triangulación, junto al esquema de Newmark para la discretización del tiempo, con una partición homogénea $\Delta t = \dfrac{T}{100}$. Por último se utilizaron elementos finitos lineales a trozos y continuos para la rotación ϕ_h y el desplazamiento w_h con una partición homogénea $N = 400$.

Los resultados obtenidos para $T = 0{,}011764663516101$ fueron los siguientes.

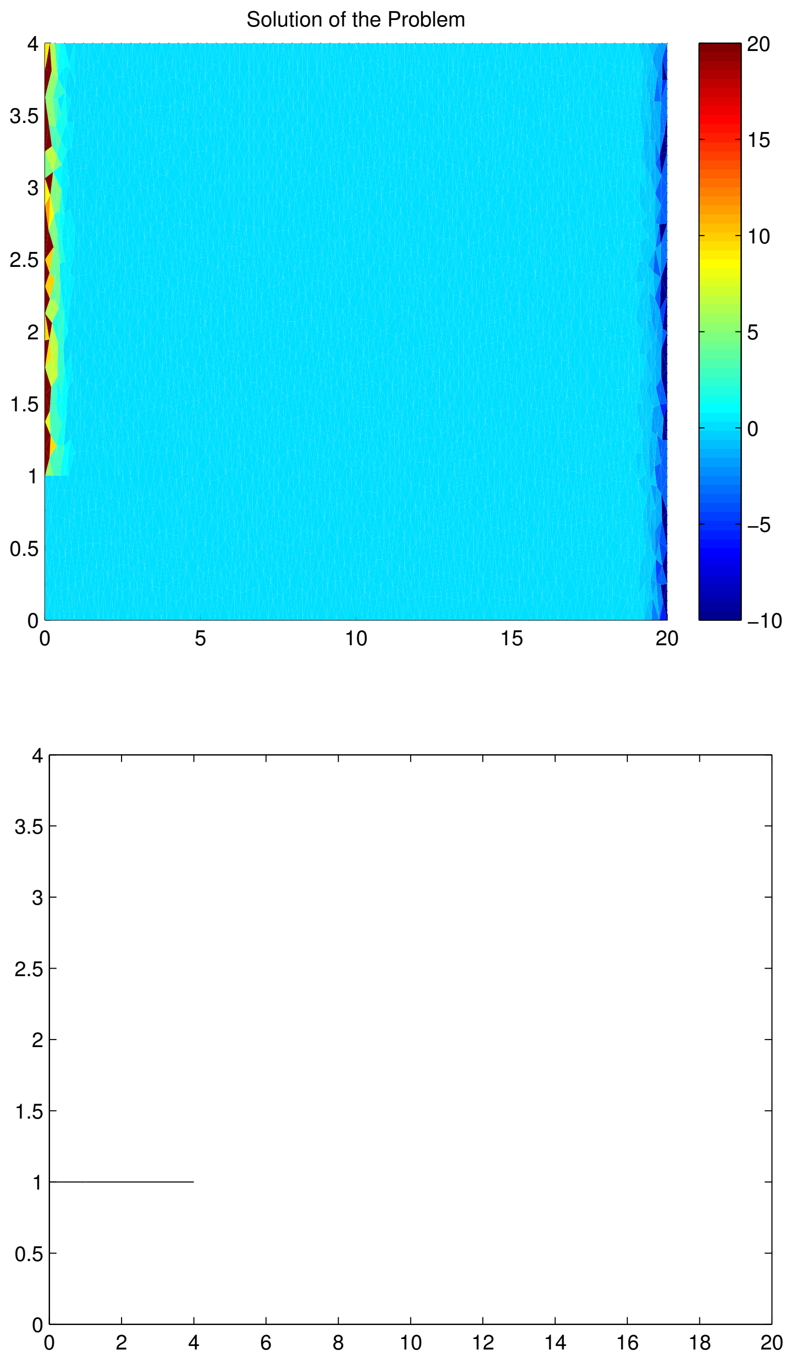


Figura 33: solución obtenida para un tiempo $t = 2{,}35293\,\exp(-05)$.

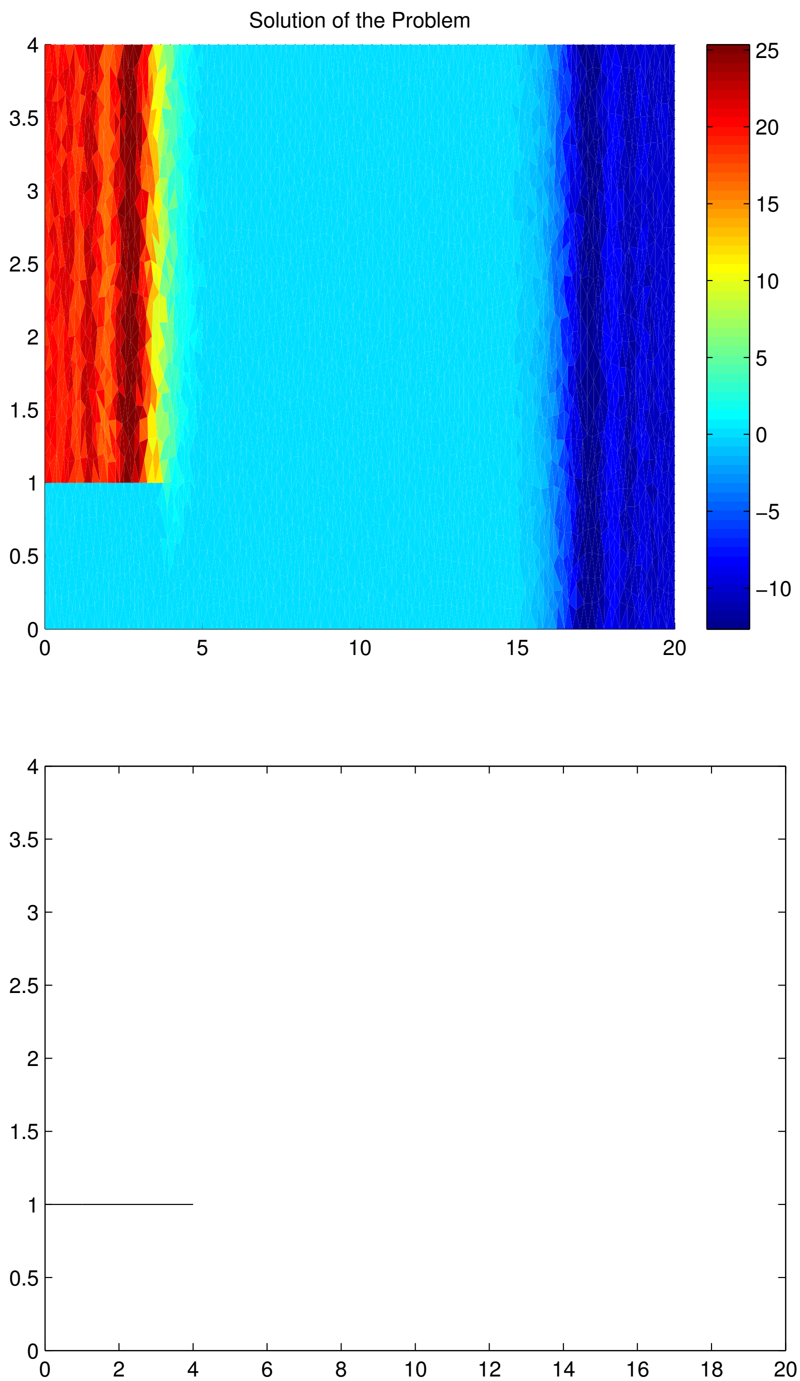


Figura 34: solución obtenida para un tiempo $t = 1{,}41176e - 04$.

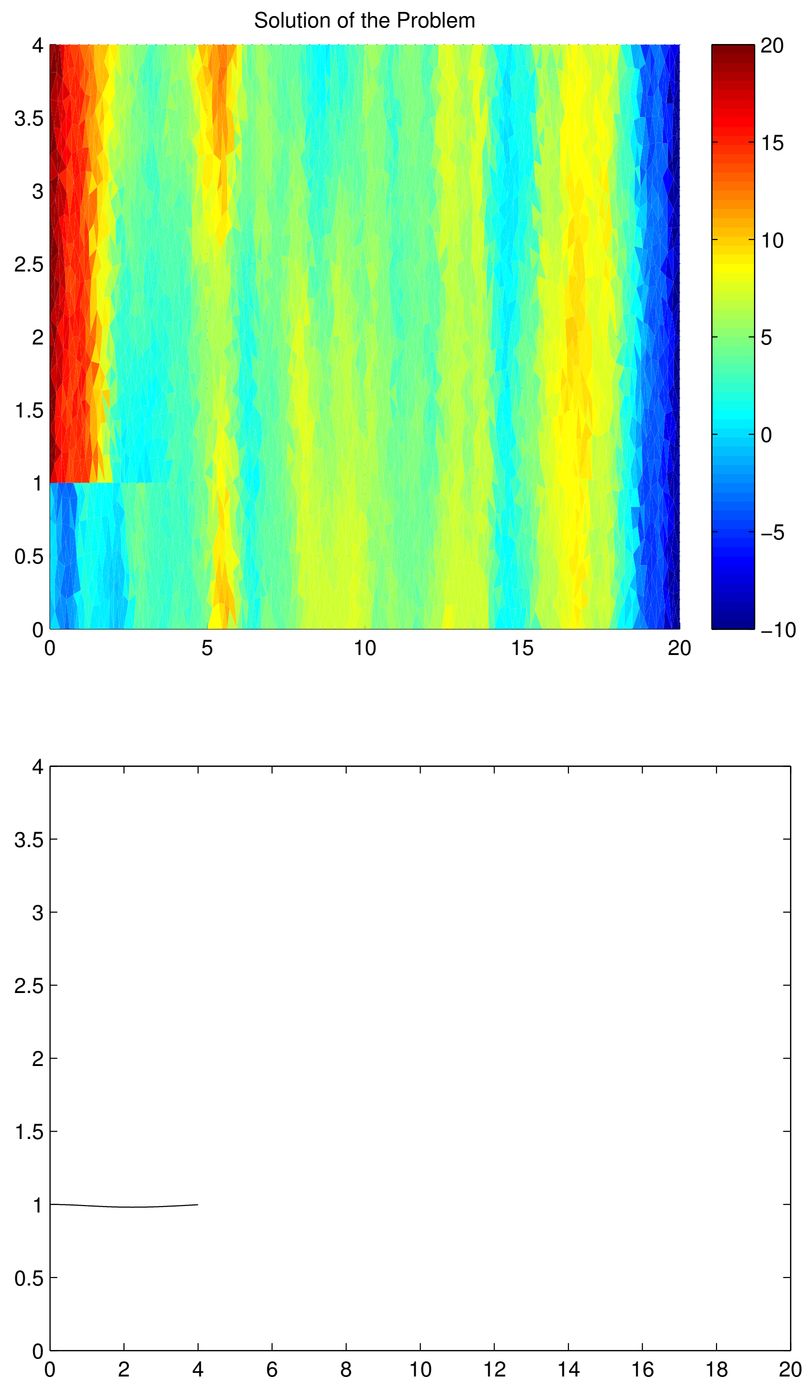


Figura 35: solución obtenida para un tiempo $t = 0{,}00179$.

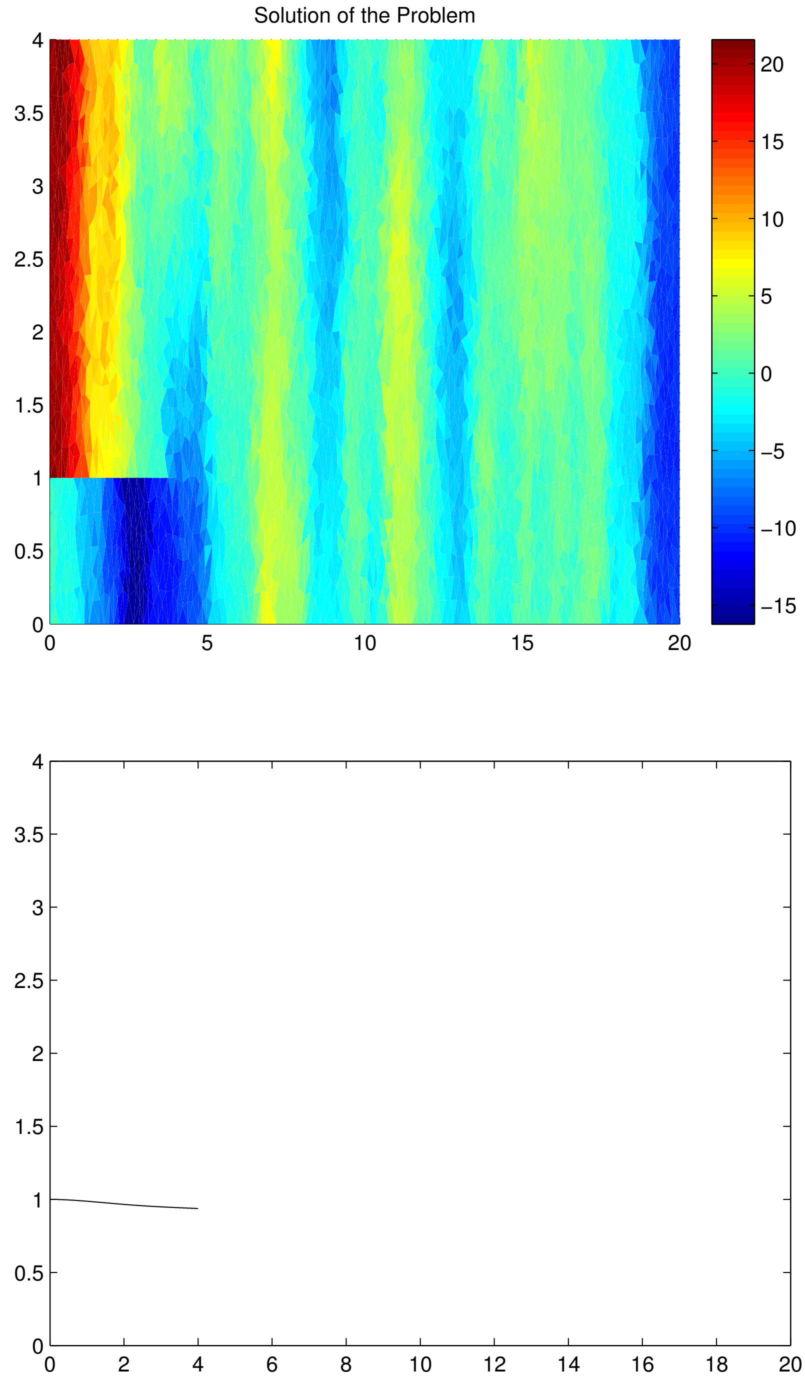


Figura 36: solución obtenida para un tiempo $t = 0{,}00355$.

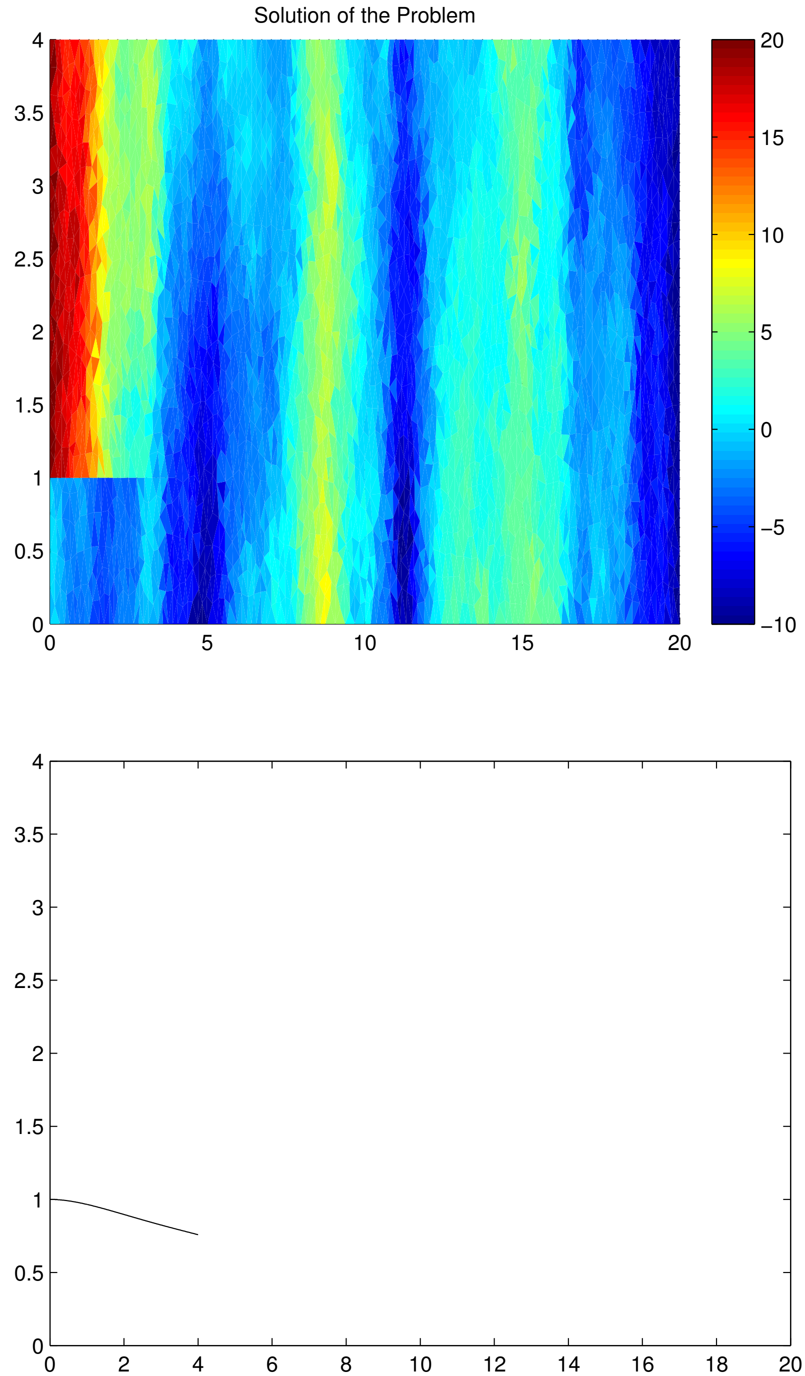


Figura 37: solución obtenida para un tiempo $t = 0{,}00708$.

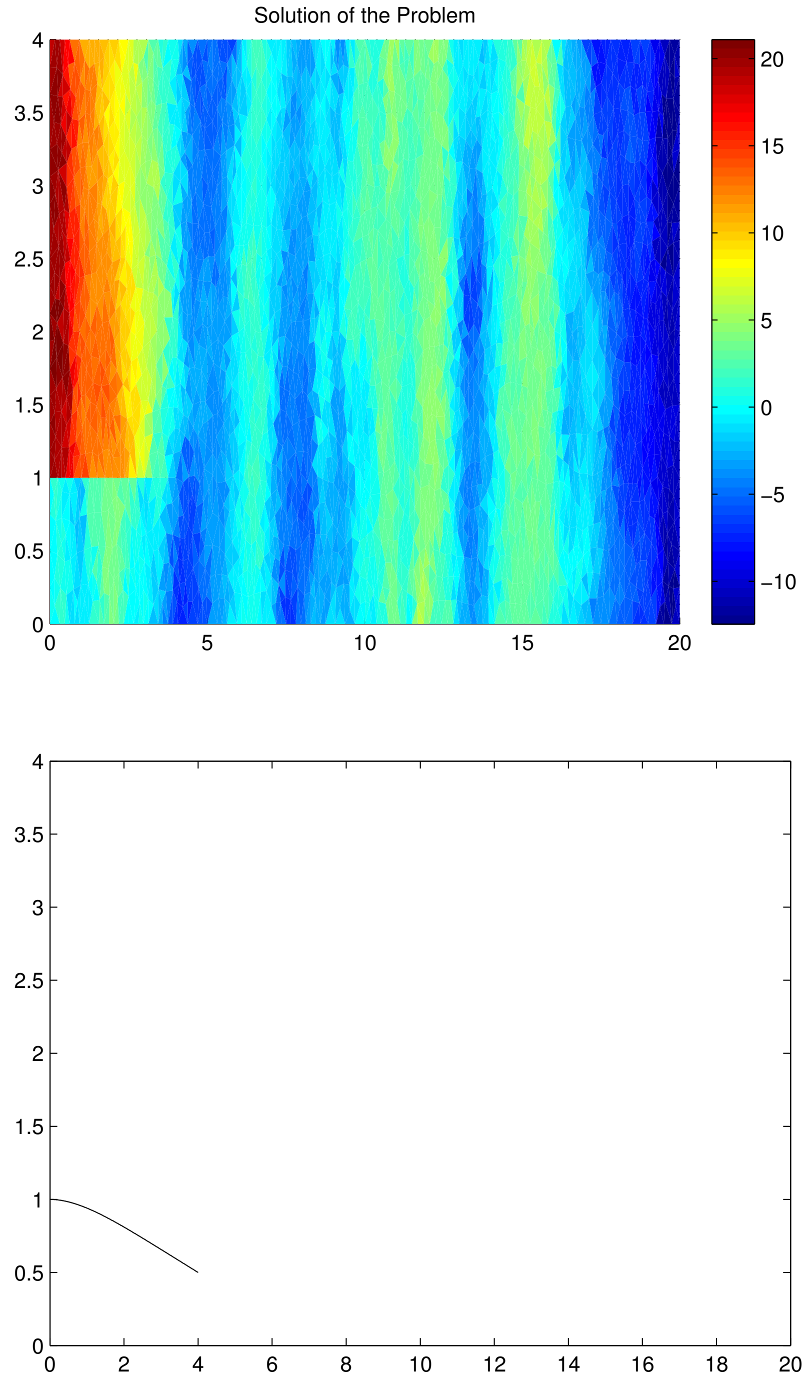


Figura 38: solución obtenida para un tiempo $t = 0{,}01061$.

7. Conclusiones y trabajos futuros

- El problema evolutivo de una viga elástica de Timoshenko se resuelve con orden óptimo mediante elementos finitos lineales a trozos y continuos con integración reducida de los términos de corte y el esquema de Newmark para la discretización temporal. Además, este método no presenta bloqueo numérico, cosa que sí ocurre cuando no se utiliza integración reducida. Esto está demostrado en el caso estacionario y en el problema de modos propios, pero no en el evolutivo. Como trabajo futuro, se pretende estudiar teóricamente este fenómeno para el problema evolutivo de una viga elástica de Timoshenko.

- Pese a lo elemental del modelo del fluido, la diferentes presiones en la frontera del dominio induce vibraciones en la viga elástica. Para trabajos futuros se pretende utilizar un modelo totalmente acoplado, es decir:

  1. Incluir en el modelo la presión que la viga ejerce sobre el fluido.
  2. Tomar en cuenta los cambios que ocurren del dominio del fluido por el movimiento de la viga.
  3. Considerar modelos menos idealizados del fluido.

A. Teoremas utilizados

En esta sección se enumeran los teoremas que se utilizaron en los capítulos anteriores para asegurar la existencia y unicidad de los problemas que se trataron:

Teorema A.1 (Rellich) *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ de frontera $\mathscr{C}^1$ por pedazos, entonces la inyección canónica de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta.*

Demostración: Ver Teorema 1.5-2 en [11]

Teorema A.2 (Lax-Milgram) *Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert real, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal que verifica:*

1. *a es acotada, es decir, $\exists M > 0 : |a(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V \quad \forall u, v \in V$*
2. *a es V-elíptica, es decir $\exists C > 0 : |a(u,u)| \geq C\|u\|_V^2 \quad \forall u \in V$*

entonces $\forall F \in V' : \exists! u \in V \;\; a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$, además $\|u\|_V \leq \hat{C}\|F\|_{V'}$, con $\hat{C} > 0$

Demostración: Ver Teorema 2.2-1 en [11]

Teorema A.3 Sean V y H, dos espacios de Hilbert tales que $V \subset H$ con inyección continua y V es denso en H.

Considere la forma bilineal $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, V-elíptica y simétrica. Además considere que la inyección canónica de $V \in H$ es compacta.

Entonces, dado $u_0 \in V$, $u_1 \in H$ y $f \in L^2(0,T;H)$ el siguiente problema tiene solución única:
(A.0.4)

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in \mathscr{C}(0,T;V) \cap \mathscr{C}^1(0,T;H) \text{ tal que} \\ \\ \forall v \in V \qquad \dfrac{d^2}{dt^2}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v) \qquad \text{en el sentido de las distribuciones } (0,T) \\ \qquad\qquad u(0) = u_0 \qquad ; \qquad \dfrac{d}{dt}u(0) = u_1 \end{cases}$$

Demostración: Ver Teorema 8.2-2 en [11]

Teorema A.4 Bajo las condiciones del Teorema A.3 la solución u del problema (A.0.4) satisface la siguiente desigualdad:

$$\left\{ a(u(t),u(t)) + \left|\frac{du}{dt}(t)\right|^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ a(u_0,u_0) + |u_1|^2 \right\}^{1/2} + \int_0^t |f(s)|\, ds \tag{A.0.5}$$

Demostración: Ver Teorema 8.2-3 en [11]

BIBLIOGRAFIA

[1] Y. Aurégan and C. Depollier, Snoring: linear stability analysis and *in vitro* experiments, *Journal of Sound and Vibration*, **188** (1995) 39–54.

[2] T.S. Balint and A.D. Lucey, Instability of a cantilevered flexible plate in viscous channel flow. *Journal of Fluids and Structures*, **20** (2005) 893–912.

[3] N. Gavriely and O. Jensen Theory and measurement of snores. *Journal of Applied Physiology*, **74** (1993) 2828–2837.

[4] Douglas N. Arnold, Discretization by finite elements of a model parameter dependent problem, *Numerische. Mathematik*, **37** (1981) 405–421.

[5] Erwin Hernández, Enique Otárola, Rodolfo Rodrígez and Frank Sanhueza, Approximation of the vibration modes of a Timoshenko curved rod of arbitrary geometry, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **29** (2009) 180–207.

[6] T.C Huang, The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams whith simple end conditions, *Journal on Applied Mechanicsk*, (1961) 579–584.

[7] Jochen Alberty, Carsten Carstensen and Stefan A. Funken, Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation *Numerical Algorithms*, **20** (1999) 117–137.

[8] J.R. Shewchuk, Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation, *Comp. Geom. Theor. Appl.* **22** (2002) 21–74.

[9] Shen R. Wu, A priori error estimation of a four-node Reissner-Mindlin plate element for elastodynamics *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **194** (2005) 2257–2281.

[10] Shen R. Wu, REISSNER-MINDLIN plate theory for elastodymanics.

[11] P.A Raviart and J.M Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partialles