UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Espectro del operador rotacional en dominios no simplemente conexos

Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Matemático

Autor: **Eduardo Andres Lara Sepúlveda**

Profesores Guía: **Rodolfo Rodríguez Alonso**
Pablo Antonio Venegas Tapia

Noviembre 2013
CONCEPCIÓN, CHILE

Agradecimientos: *Agradezco al profesor Rodolfo Rodríguez por sus ganas de trabajar, paciencia y buena disposición tanto en la elaboración de esta memoria como también en los ramos que me dictó. Agradezco también al Dr. Pablo Venegas por su ayuda y buen humor. Agradezco a mi familia, compañeros de la gloriosa y en especial a mis amigos ganados en todos estos años en Concepción.*

Agradezco el apoyo monetario brindado por el proyecto fondos basales, CMM, Universidad de Chile mediante una beca de tesis de pregrado y al centro CI2MA por permitir desarrollar parte de esta memoria en sus dependencias.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar la aproximación numérica del espectro del operador de rotacional. Este problema fue estudiado por R. Rodríguez y P. Venegas en [22], considerando dominios simplemente conexos, en este trabajo se presenta una extensión de los resultados obtenidos en [22], a dominios no simplemente conexos. Más precisamente, nos centramos en el siguiente problema de valores propios: Hallar $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ tales que

$$\begin{aligned}
\mathbf{curl}\, \boldsymbol{u} &= \lambda \boldsymbol{u} \quad \text{en } \Omega, && (1.1)\\
\operatorname{div} \boldsymbol{u} &= 0 \quad \text{en } \Omega, && (1.2)\\
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} &= 0 \quad \text{en } \Gamma, && (1.3)\\
\langle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j} &= 0 \quad j = 1, \dots, J. && (1.4)
\end{aligned}$$

Donde Ω es un dominio acotado con frontera Γ y vector normal unitario exterior $\boldsymbol{n}$, Σ_j, $j = 1, \dots, J$, son superficies de corte que hacen a Ω simplemente conexo. Este problema fue abordado teóricamente por Yoshida y Giga en [26] y, posteriormente, en un marco más general, por R. Hiptmair, P. Kotiuga y S. Tordeux en [16]. Las restricciones (1.4) son necesarias para que el problema espectral resulte bien planteado. En efecto, Yoshida y Giga demostraron en el Teorema 2 de [26] que, sin estas restricciones, todo numero complejo es un valor propio del problema (1.1)-(1.3). Más recientemente, R. Hiptmair, P. Kotiuga y S. Tordeux en [16] estudian las restricciones (1.4) así como otras que hacen que el problema tenga solo espectro discreto.

El problema espectral del operador rotacional tiene una larga tradición en matemática y física. Una gran parte del mérito es de Beltrami [2], que parece ser el primero que consideró este problema en el contexto de la dinámica de fluidos. Ésta es la razón de que las correspondientes autofunciones se llaman campos de Beltrami. Tales campos se usan en física solar para comprobar la teoría de erupciones y calentamiento de la corona solar. En el contexto de la mecánica de fluidos, se utiliza en el estudio del equilibrio estático de cristales líquidos esmécticos y en materiales superconductores, sólo por nombrar unas pocas; incluso el movimiento de las partículas en tornados y trombas marinas se puede aproximar por campos de Beltrami.

Por otro lado, las autofunciones de este problema espectral son casos particulares de los llamados *campos libres de fuerza*. Estos son campos vectoriales que satisfacen la primera ecuación del problema de autovalores anterior, con λ no necesariamente constante pero si una función escalar. El nombre surge de la magnetohidrodinámica, ya que un campo magnético $\boldsymbol{H}$ que satisface tal ecuación en un medio isótropo, induce una fuerza de Lorentz nula: $\boldsymbol{F} := \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} = \mathbf{curl}\, \boldsymbol{H} \times (\mu \boldsymbol{H}) = \mathbf{0}$. En [24], Woltjer mostró que el estado de mínima densidad de energía magnética dentro de un sistema cerrado se alcanza cuando λ es espacialmente constante. En tal caso $\boldsymbol{H}$ se llama un *campo lineal libre de fuerza* y su determinación está naturalmente relacionada con el problema espectral del operador rotacional. Las autofunciones de este problema también se conocen como campos de *decaimiento libre* o *campos de Taylor* y juegan un rol importante, por ejemplo, en el estudio de turbulencia en física de plasmas [23].

La condición de contorno $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ es la más natural para un dominio acotado y corresponde a un campo confinado dentro de ella. La solución analítica de este problema se conoce sólo bajo suposiciones particulares de simetría. Las primeras fueron obtenidas por Chandrasekhar y Kendall para dominios esféricos en el contexto de los plasmas astrofísicos que surgen en el modelado de la corona solar [12] (ver también [11, 24, 25]). Más recientemente, Cantarella et al [10] estudiaron el problema en dominios generales con simetría esférica y Morse [20] lo hizo en dominios cilindros acotados.

En dominios generales, Boulmezaud, Maday y Amari estudiaron en [7] diferentes problemas de contorno cuyas soluciones son campos lineales libres de fuerza y demuestran existencia, unicidad, y regularidad de la solución de esos problemas. Basándose en el análisis de ese artículo, Boulmezaud y Amari proponen y analizan discretizaciones por elementos finitos para resolver numéricamente diversos problemas lineales [5] y no lineales [6] de *campos libres de fuerza*.

En este trabajo, nos enfocamos en el problema espectral (1.1)–(1.4). Primero consideramos una formulación débil mixta en la que la restricción de divergencia nula (1.2) se impone mediante un multiplicador de Lagrange y demostramos que ésta es equivalente al problema espectral de un operador compacto y auto-adjunto. Esto nos permite dar una caracterización completa de las soluciones de (1.1)–(1.4). Proponemos una discretización basada en elementos finitos de Nédélec de orden arbitrario para la variable principal y elementos lagrangianos clásicos del mismo orden para el multiplicador de Lagrange. El análisis de esta discretización se basa en el uso de la teoría de aproximación espectral para métodos mixtos, derivada en [18]. Discutimos la convergencia espectral del método propuesto y establecemos estimaciones a priori del error. Esta discretización por elementos finitos de la formulación mixta conduce a una problema degenerado de valores propios que involucra a dos matrices no definidas positivas. Aunque el problema de valores propios resultante se demuestra que está bien planteado, su degeneración nos impide usar directamente herramientas computacionales clásicas para el cálculo de la solución. Esto sin embargo se salva transformando el problema matricial degenerado en otro, donde una de las matrices involucradas es definida positiva, lo que permite que se puedan aplicar herramientas computacionales clásicas.

Como una alternativa, derivamos otra formulación débil más adecuada para propósitos numéricos, ya que conduce a un problema de valores propios generalizado que implica dos matrices hermitianas, donde la del lado derecho es definida positiva. Por lo tanto, puede usarse software estándar para resolver este problema. Proponemos una discretización basada en los elementos finitos de Nédélec de orden arbitrario [21]. Usando la teoría espectral para operadores no compactos de [13, 14], demostramos convergencia espectral y establecemos estimaciones de orden óptimo para el error. También demostramos que el método es libre de modos espurios.

El esquema de este trabajo es el siguiente. En la Sección 2, introducimos algunos espacios de funciones y resultados generales que serán utilizados a lo largo del documento. En la Sección 3, primero damos una formulación débil mixta, con la cual obtenemos una caracterización espectral de la solución del problema de autovalores. Luego, proponemos una formulación débil alternativa más adecuada para propósitos numéricos. En la Sección 4, introducimos discretizaciones por elementos finitos de ambas formulaciones. Demostramos convergencia espectral con orden óptimo y ausencia de modos espurios en ambos casos. En la Sección 5 se describe la forma de implementar eficazmente estos métodos. En la Sección 6, presentamos los resultados numéricos, que nos permiten comprobar los resultados teóricos y evaluar el rendimiento del método.

Capítulo 2

Preliminares

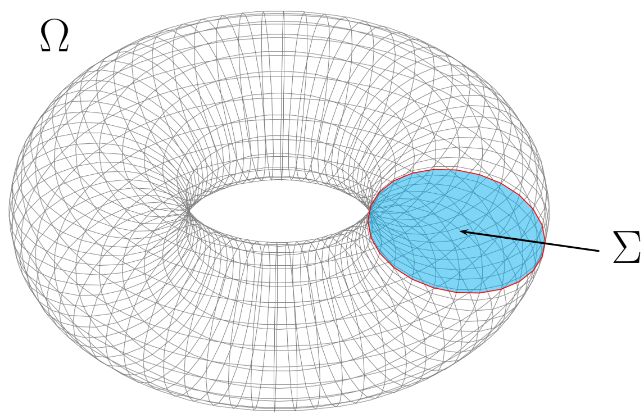

Figura 2.1: Dominio toroidal, ejemplo de un dominio no simplemente conexo, con superficie de corte interior Σ.

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^3$ un dominio acotado no necesariamente simplemente conexo, con una frontera Lipschitz continua Γ. Asumiremos que existen J superficies conexas $\Sigma_j,\ j = 1, \ldots, J$, contenidas en Ω llamadas cortes interiores tales que,

para cada $j = 1, \ldots, J,$ la superficie Σ_j es un subconjunto abierto de una superficie suave con borde; (2.1)

$$\partial\Sigma_j \subset \partial\Omega,\ j = 1, \ldots, J; \tag{2.2}$$

$$\bar{\Sigma}_i \cap \bar{\Sigma}_j = \emptyset \text{ si } i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, J; \tag{2.3}$$

el conjunto $\Omega^0 := \Omega \setminus \cup_{j=1}^{J} \Sigma_j$ es simplemente conexo y pseudo Lipschitz. (2.4)

Asumimos que Ω es acotado y, o bien Γ es suave o Ω es un poliedro Lipschitz. Sean $\Gamma_0,\dots,\Gamma_I$ las componentes conexas de Γ, con Γ_0 siendo la única frontera conexa no acotada de $\mathbb{R}^3/\bar{\Omega}$. Las restantes componentes conexas, $\Gamma_1\dots,\Gamma_I$, son a su vez las fronteras de las componentes conexas acotadas de $\mathbb{R}^3/\bar{\Omega}$ y, por lo tanto, superficies cerradas.

Consideramos el espacio $\mathrm{L}^2(\Omega)$ con la correspondiente norma $\|\cdot\|_{0,\Omega}$; por conveniencia, tambien denotamos $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ la norma de $\mathrm{L}^2(\Omega)^3$. Para todo $s>0$, consideramos el espacio de Sobolev $\mathrm{H}^s(\Omega)$ con norma $\|\cdot\|_{s,\Omega}$; también denotamos por $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ la norma del espacio $\mathrm{H}^s(\Omega)^3$.

Sea $\mathcal{D}(\Omega)$ el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω y $\mathcal{D}(\bar{\Omega}):=\left\{\phi|_\Omega:\ \phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)\right\}$.

Sea $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ el espacio de trazas en Γ de funciones en $\mathrm{H}^1(\Omega)$, con espacio dual $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ y paridad dual $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$.

En lo que sigue, vamos a utilizar los espacios de Hilbert

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega) &:= \left\{\boldsymbol{v}\in\mathrm{L}^2(\Omega)^3:\ \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\in\mathrm{L}^2(\Omega)^3\right\},\\
\mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega) &:= \left\{\boldsymbol{v}\in\mathrm{L}^2(\Omega)^3:\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\in\mathrm{L}^2(\Omega)\right\},
\end{aligned}$$

con sus respectivas normas definidas por $\|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbf{curl},\Omega}:=\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}+\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}$ y $\|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathrm{div},\Omega}:=\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}+\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}$, y los siguientes subespacios cerrados:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_0(\mathrm{div};\Omega) &:= \{\boldsymbol{v}\in\mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega):\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0 \text{ en } \Gamma\},\\
\mathrm{H}_0(\mathbf{curl};\Omega) &:= \{\boldsymbol{v}\in\mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega):\ \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}=\mathbf{0} \text{ en } \Gamma\},\\
\mathrm{H}(\mathrm{div}^0;\Omega) &:= \{\boldsymbol{v}\in\mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega):\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0 \text{ en } \Omega\},\\
\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega) &:= \{\boldsymbol{v}\in\mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega):\ \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}=\mathbf{0} \text{ en } \Omega\},\\
\mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0;\Omega) &:= \mathrm{H}_0(\mathrm{div};\Omega)\cap\mathrm{H}(\mathrm{div}^0;\Omega),\\
\mathrm{H}_0(\mathbf{curl}^0;\Omega) &:= \mathrm{H}_0(\mathbf{curl};\Omega)\cap\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega).
\end{aligned}$$

Notemos que las condiciones $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$ y $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}=\mathbf{0}$ en Γ, deben entenderse en el sentido de $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$.

También definimos los espacios

$$\boldsymbol{K}_T(\Omega):=\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega)\cap\mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0;\Omega),$$

$$\boldsymbol{K}_N(\Omega):=\mathrm{H}_0(\mathbf{curl}^0;\Omega)\cap\mathrm{H}(\mathrm{div}^0;\Omega),$$

$$\mathrm{H}^s(\mathbf{curl};\Omega):=\left\{\boldsymbol{v}\in\mathrm{H}^s(\Omega)^3:\ \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\in\mathrm{H}^s(\Omega)^3\right\},\ s>0.$$

Recordemos que si Ω tiene frontera suave o es un poliedro, entonces existe $s>1/2$, sólo dependiente del dominio Ω, tal que las inclusiones

$$\mathrm{H}_0(\mathbf{curl};\Omega)\cap\mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)\hookrightarrow\mathrm{H}^s(\Omega)^3,\quad \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)\cap\mathrm{H}_0(\mathrm{div};\Omega)\hookrightarrow\mathrm{H}^s(\Omega)^3 \tag{2.5}$$

son continuas (ver, por ejemplo, [1], Proposición 3.7, si Ω es un poliedro, y Teorema 2.9 y 2.12, si Γ es suave).

Consideramos Ω no simplemente conexo, sea $\{\Sigma_j;\ 1 \le j \le J\}$ un conjunto admisible de cortes para Ω, sea Ω^0 definido como en (2.4), además fijamos una normal unitaria $\boldsymbol{n}_j$ en cada cara $\Sigma_j,\ 1 \le j \le J$, denotamos Σ_j^- y Σ_j^+ las dos cara de Σ_j, de manera que $\boldsymbol{n}_j$ apunte desde Σ_j^- a Σ_j^+.

- Para cualquier función q en $\mathrm{H}^1(\Omega^0)$, denotamos por $[\![q]\!]_j$ al salto de q a través de Σ_j (i.e. la diferencia de las trazas de q, $[\![q]\!]_j = q|_{\Sigma_j^+} - q|_{\Sigma_j^-}$).

- Para cualquier función $q \in \mathrm{H}^1(\Omega^0)$, ∇q es el gradiente de q en el sentido distribucional en $\mathcal{D}'(\Omega^0)$, que pertenece a $\mathrm{L}^2(\Omega^0)^3$ y por lo tanto puede ser extendido a $\mathrm{L}^2(\Omega)^3$. Con el fin de distinguir esta extensión, del gradiente de q en $\mathcal{D}'(\Omega)$, la denotamos $\widetilde{\nabla} q$.

La siguiente formula de Green se puede encontrar en [1, Lema 3.10].

Lema 1. *Si $\boldsymbol{\psi}$ pertenece a $\mathrm{H}_0(\mathrm{div};\Omega)$, la restricción de $\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{n}$ a cualquier Σ_j pertenece a $\mathrm{H}^{1/2}(\Sigma_j)'$ y se tiene la siguiente formula de Green:*

$$\forall \chi \in \mathrm{H}^1(\Omega^0), \quad \sum_{j=1}^{J} \langle \boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{n}, [\![\chi]\!]_j \rangle_{\Sigma_j} = \int_{\Omega^0} \boldsymbol{\psi}\cdot\nabla\chi\, dx + \int_{\Omega^0} (\mathrm{div}\,\boldsymbol{\psi})\chi\, dx.$$

Para lo que sigue necesitamos definir

$$\Theta := \left\{ r \in \mathrm{H}^1(\Omega^0) : [\![r]\!]_j = \text{constante}\ ,\ 1 \le j \le J \right\}.$$

Notemos que, dado $r \in \Theta$, se tiene que $r \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ si y sólo si $[\![r]\!]_j = 0\ j = 1, \dots, J$.

De [1, Lema 3.11] se desprende la siguiente caracterización del espacio $\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega)$

Lema 2. $\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega) = \widetilde{\nabla}\Theta$.

La siguiente caracterización de $\boldsymbol{K}_T$ puede ser hallada en [1, Proposición 3.14].

Lema 3. *La dimensión de $\boldsymbol{K}_T(\Omega)$ es igual a J (el número de cortes interiores) y es generado por $\widetilde{\nabla} q_j$, $1 \le j \le J$, donde q_j es la única solución en $\mathrm{H}^1(\Omega^0)/\mathbb{R}$, del siguiente problema:*

$$\begin{aligned} \Delta q_j &= 0 \qquad \textit{en } \Omega^0, \\ \partial_n q_j &= 0 \qquad \textit{en } \partial\Omega, \\ [\![q_j]\!]_k &= \textit{constante} \quad \textit{y} \quad [\![\partial_n q_j]\!]_k = 0,\ 1 \le k \le J, \\ \langle \partial_n q_j, 1 \rangle_{\Sigma_k} &= \delta_{j,k} \quad ,\ 1 \le k \le J \end{aligned}$$

Además la siguiente caracterización puede ser hallada en [1, Proposición 3.18].

Lema 4. *La dimensión de $\boldsymbol{K}_N$ es igual a I (el número de componentes conexas de la frontera). Este espacio es generado por las funciones ∇q_i, $1 \leq i \leq I$, donde $q_i \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ es la única solución de el problema*

$$\begin{cases} -\Delta q_i = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ q_i|_{\Gamma_0} = 0 \quad y \quad q_i|_{\Gamma_k} = \text{constante}, \ 1 \leq k \leq I, \\ \langle \partial_n q_i, 1 \rangle_{\Gamma_0} = -1 \quad y \quad \langle \partial_n q_i, 1 \rangle_{\Gamma_k} = \delta_{ik}, \ 1 \leq k \leq I. \end{cases}$$

Por otro lado, consideremos la descomposición de Helmholtz de $\mathrm{L}^2(\Omega)^3$:

$$\mathrm{L}^2(\Omega)^3 = \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0; \Omega) \oplus \nabla(\mathrm{H}^1(\Omega)).$$

Estos espacios son ortogonales en $\mathrm{L}^2(\Omega)^3$. Definimos el complemento ortogonal de $\boldsymbol{K}_T$ en $\mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$, como

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} := \boldsymbol{K}_T{}^{\perp_{\mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0;\Omega)}}.$$

De aquí tenemos que

$$\mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0; \Omega) = \boldsymbol{\mathcal{X}} \oplus \boldsymbol{K}_T.$$

Esta descomposición es ortogonal en $\mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$ como también en $\mathrm{L}^2(\Omega)^3$. Por lo tanto tenemos la siguiente descomposición

$$\mathrm{L}^2(\Omega)^3 = \underbrace{\boldsymbol{\mathcal{X}} \oplus \boldsymbol{K}_T}_{H_0(\mathrm{div}^0;\Omega)} \oplus \nabla(\mathrm{H}^1(\Omega)) = \boldsymbol{\mathcal{X}} \oplus \underbrace{\boldsymbol{K}_T \oplus \nabla(\mathrm{H}^1(\Omega))}_{\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega) \quad (*)}. \tag{2.6}$$

Estos tres espacios son ortogonales en $\mathrm{L}^2(\Omega)^3$. Además, es fácil ver (*). En efecto, $\boldsymbol{K}_T \oplus \nabla(\mathrm{H}^1(\Omega)) \subset \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega)$. Para el reciproco consideremos

$$\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega) \subset \mathrm{L}^2(\Omega)^3 = \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0; \Omega) \oplus \nabla(\mathrm{H}^1(\Omega)).$$

Por lo tanto existen $\boldsymbol{v}_1 \in \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$ y $\boldsymbol{v}_2 \in \nabla(\mathrm{H}^1(\Omega))$ tales que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$. Luego

$$0 = \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v} = \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_1 + \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 \in K_T.$$

Por lo tanto, como $\boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{K}_T$ y $\boldsymbol{v}_2 \in \nabla(\mathrm{H}^1(\Omega))$ tenemos que $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}_T \oplus \nabla(\mathrm{H}^1(\Omega))$. De lo anterior, concluimos la igualdad:

$$\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega) = \boldsymbol{K}_T \oplus \nabla(\mathrm{H}^1(\Omega)).$$

También necesitaremos el siguiente espacio, que juega un papel fundamental en todo lo que sigue:

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}} := \{\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega) \,:\, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\}.$$

A continuación, demostramos tres resultados auxiliares.

Lema 5. $\mathcal{D}(\Omega)^3 \subset \boldsymbol{\mathcal{Z}}$.

Demostración. Sea $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$ tenemos que demostrar que $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$. En efecto, consideramos $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{K}_T$

$$(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi})_{\mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0;\Omega)} = \int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\psi} = \int_\Omega \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi} = 0.$$

Concluimos que $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{K}_T{}^{\perp_{\mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0;\Omega)}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}$.

□

Lema 6. *Sean $\varphi_i \in \mathrm{H}^1(\Omega^0)$ funciones cualesquiera tales que $[\![\varphi_i]\!]_j = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le J$. Entonces $\Theta = \mathrm{H}^1(\Omega) \oplus \langle\{\varphi_1, \dots, \varphi_J\}\rangle$.*

Demostración. La inclusión $\mathrm{H}^1(\Omega) \oplus \langle\{\varphi_1, \dots, \varphi_J\}\rangle \subset \Theta$ es inmediata ya que si $\psi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ necesariamente $[\![\psi]\!]_j = 0,\ j = 1, \dots, J$ esto implica que $\psi \in \Theta$. Además, claramente se tiene que $\langle\{\varphi_1, \dots, \varphi_J\}\rangle \subset \Theta$.

Recíprocamente, si $\psi \in \Theta$ se tiene que:

$$\psi = \left(\psi - \sum_{i=1}^{J} [\![\psi]\!]_i \varphi_i\right) + \sum_{i=1}^{J} [\![\psi]\!]_i \varphi_j.$$

Observemos que $\left[\!\!\left[\psi - \sum_{i=1}^J [\![\psi]\!]_i \varphi_i\right]\!\!\right]_j = 0, j = 1, \dots, J$, esto muestra que $\left(\psi - \sum_{i=1}^J [\![\psi]\!]_i \varphi_i\right) \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. Por lo tanto, si $\psi \in \Theta$ entonces puede ser descompuesto en una función que pertenece a $\mathrm{H}^1(\Omega)$ más una que pertenece a $\langle\{\varphi_1, \dots, \varphi_J\}\rangle$. Por lo que demostramos el resultado. □

Lema 7. $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ *si y sólo si satisface*

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0 \quad \textit{en } \Omega, \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \textit{en } \Gamma, \tag{2.8}$$

$$\langle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}, 1\rangle_{\Sigma_j} = 0 \quad j = 1, \dots, J. \tag{2.9}$$

Demostración. Sea $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$, utilizando (2.6) se tiene que $\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$, $\forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega)$ y en virtud del Lema 2, consideramos $\boldsymbol{v} = \widetilde{\nabla}\varphi$ con $\varphi \in \Theta$ y $[\![\varphi]\!]_j = 0$,$\forall j = 1, \dots, J$, integrando por partes obtenemos que $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$, es decir, satisface (2.7) y (2.8). Considerando ahora $\boldsymbol{v} = \widetilde{\nabla}\varphi$ con $\varphi \in \Theta$ y $[\![\varphi]\!]_1 = 1$ y $[\![\varphi]\!]_j = 0$ $\forall j = 2, \dots, J$ utilizando el Lema 1 obtenemos que $\langle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}, 1\rangle_{\Sigma_1} = 0$. Haciendo lo anterior para cada $j = 2, \dots, J$, obtenemos finalmente $\langle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}, 1\rangle_{\Sigma_j} = 0 \quad j = 1, \dots, J$.

Recíprocamente, tenemos que demostrar:

$$\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega).$$

Esto por Lema 2 equivale a demostrar que

$$\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \Theta.$$

En efecto, si $\boldsymbol{u}$ satisface (2.7)–(2.8) y usando integración por partes, tenemos que

$$\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega).$$

Por otro lado tomamos φ_i como en el Lema 6, dado que $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$, usando Lema 1 y en virtud de (2.9), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{u} \nabla \varphi_i &= - \int_\Omega \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}\, \varphi_i + \sum_{j=1}^{J} \langle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}, [\![\varphi_i]\!]_j \rangle_{\Sigma_j} \\ &= \langle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{\Sigma_i} = 0. \end{aligned}$$

Con esto y en virtud de Lema 6 obtenemos que

$$\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \Theta.$$

Con esto concluimos el resultado. $\square$

A lo largo de este trabajo, C denota una constante genérica, no necesariamente la misma en cada aparición.

Capítulo 3

Problema espectral del operador rotacional

3.1. Formulación mixta

Consideremos el siguiente problema:

Problema 1. *Hallar* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)$, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, *tales que*

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} &= \lambda \boldsymbol{u} && \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} &= 0 && \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} &= 0 && \text{en } \Gamma, \\ \langle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j} &= 0 && j = 1, \ldots, J. \end{aligned}$$

La siguiente es una formulación mixta de este problema.

Problema 2. *Hallar* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\chi}) \in \boldsymbol{\mathcal{Z}} \times \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega)$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\chi}) \neq \mathbf{0}$, *tales que*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}} + \int_\Omega \boldsymbol{\chi} \cdot \bar{\boldsymbol{v}} = \lambda \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}} && \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}, \\ &\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega). \end{aligned}$$

Con el fin de establecer la equivalencia de estos dos problemas, primero notemos que por el Lema 7 las últimas tres ecuaciones del Problema 1 son equivalentes a la segunda ecuación de la formulación anterior .

Por lo tanto, es evidente que si $(\lambda, \boldsymbol{u})$ es una solución del Problema 1, entonces, $(\lambda, \boldsymbol{u}, \mathbf{0})$ soluciona el Problema 2. Recíprocamente, si $(\lambda, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\chi})$ es una solución del Problema 2, como $\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega) \subset \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, tomando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\chi}$ en la primera ecuación, concluimos que $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, solo necesitamos demostrar que $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}$

en Ω. Con este fin, testeamos la primera ecuación de Problema 2 con $\boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$ e integrando por partes concluimos que

$$\mathbf{curl}\,(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} - \lambda \boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega.$$

Por otro lado como $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, tenemos que $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$. De la segunda ecuación del Problema 2 y usando el Lema 7 tenemos que $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$. Con esto tenemos que $(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} - \lambda \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$, luego por (2.6) concluimos que $(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} - \lambda \boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$. De este análisis concluimos el siguiente resultado de equivalencia.

Proposición 1. *Si $(\lambda, \boldsymbol{u})$ es una solución del Problema 1, entonces $(\lambda, \boldsymbol{u}, \mathbf{0})$ es una solución del Problema 2. Recíprocamente si $(\lambda, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\chi})$ es una solución del Problema 2, Entonces $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}$ y $(\lambda, \boldsymbol{u})$ es una solución del Problema 1.*

De este resultado notamos que para estudiar el Problema 1, basta con analizar el Problema 2, para ello, consideramos el siguiente operador solución:

$$\begin{aligned} S:\ \boldsymbol{\mathcal{Z}} &\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{Z}}, \\ \boldsymbol{f} &\longmapsto S\boldsymbol{f} := \boldsymbol{w}, \end{aligned}$$

con $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ tal que existe $\boldsymbol{\chi} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega)$ que satisface

$$\int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{w} \cdot \mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}} + \int_\Omega \boldsymbol{\chi} \cdot \bar{\boldsymbol{v}} = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}, \tag{3.1}$$

$$\int_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega). \tag{3.2}$$

Las condiciones de Babuška-Brezzi para este problema mixto son fáciles de comprobar. En particular, la condición inf-sup:

$$\sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}} \frac{\int_\Omega \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega)}} \geq \|\boldsymbol{\eta}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^3} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega)$$

se tiene, considerando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\eta} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega) \subset \boldsymbol{\mathcal{Z}}$. La elipticidad en el núcleo

$$\exists \alpha > 0 : \quad \int_\Omega |\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}|^2 \geq \alpha \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{curl},\Omega} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}, \tag{3.3}$$

se sigue por el hecho que $\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq C \|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}$ para todo $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}} \subset \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap \mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega)$; ver [1, Corolario 3.16]. Por consiguiente, (3.1)–(3.2) tiene una única solución $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\chi})$, que satisface

$$\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq C \|f\|_{0,\Omega}\,. \tag{3.4}$$

Por otra parte por los mismos argumentos de antes se tiene que $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, el operador S es bien definido y es continuo.

Claramente, $S\boldsymbol{u} = \mu\boldsymbol{u}$, con $\mu \neq 0$, si y sólo si $(\lambda, \boldsymbol{u}, \mathbf{0})$ es una solución del Problema 2, con $\lambda = \frac{1}{\mu}$. Así, nos centramos en la caracterización del espectro de S.

Lema 8. *Sea $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ y $\boldsymbol{w} = S\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$. Entonces $\boldsymbol{w} \in \mathrm{H}^s(\mathbf{curl}; \Omega)$ y*

$$\|\boldsymbol{w}\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{w}\|_{s,\Omega} \leq C\,\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\,.$$

En consecuencia $S : \boldsymbol{\mathcal{Z}} \to \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ es compacto.

Demostración. De (3.2) tenemos que $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$. Entonces $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}} \cap \boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega) \cap \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0; \Omega) \subset \mathrm{H}^s(\Omega)^3$, donde la última inclusión es continua (cf. [1, Proposición 3.7]).

Por otra parte, como $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}$, tomando $\boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3 \subset \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ en (3.1), se sigue

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\mathbf{curl}\,\boldsymbol{w} - \boldsymbol{f}) \cdot \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v} = 0 \\
\Rightarrow\quad &\int_\Omega \mathbf{curl}\,(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{w} - f) \cdot \boldsymbol{v} = 0 \\
\Rightarrow\quad &\mathbf{curl}(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{w}) = \mathbf{curl}\,f \in \mathrm{L}^2(\Omega) \\
\Rightarrow\quad &\mathbf{curl}\,\boldsymbol{w} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega)
\end{aligned}$$

Además, como $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ en particular tenemos $\mathbf{curl}\,w \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$ y en virtud de lo anterior,

$$\mathbf{curl}\,\boldsymbol{w} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega) \cap \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0; \Omega) \subset \mathrm{H}^s(\Omega)^3.$$

Donde otra vez la inclusión es continua.Concluimos que

$$\boldsymbol{w} \in \mathrm{H}^s(\mathbf{curl}; \Omega) \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{Z}}.$$

Esta inclusión es continua y compacta (lo último se deprende de [1, Teorema 2.8]), de manera que S es un operador compacto. Por último, la anterior inclusión continua y de (3.4) concluimos que la estimación del lema es correcta. □

El siguiente paso es establecer algunas propiedades del espacio $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ que se utilizaran mas adelante. El primero es el siguiente resultado, que se ha demostrado en [26, Teorema 1] en un contexto más general (ver también [17, Proposición 2.3]). Incluimos aquí una prueba elemental.

Proposición 2. *Para todo $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$*

$$\int_\Omega (\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y} \cdot \bar{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{y} \cdot \mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{z}}) = 0.$$

Demostración. Sea $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, entonces $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$, de donde, por Lema 7 tenemos que $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y} \in \mathrm{H}_0(\mathbf{curl}^0;\Omega)$ y $\langle \mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{n}, 1\rangle_{\Sigma_j} = 0,\ 1 \le j \le J$. Por lo anterior existe un único $\boldsymbol{\phi} \in \mathrm{H}_0(\mathbf{curl};\Omega) \cap \mathrm{H}(\mathrm{div}^0;\Omega)$ (cf. [1, Teorema 3.17]), tal que

$$\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y} = \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi} \quad \text{en } \Omega.$$

Reescribimos $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi} + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\phi})$, con $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\phi} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega)$. Con esto tenemos que

$$\int_\Omega (\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\cdot\bar{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{y}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{z}}) = \int_\Omega (\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi}\cdot\bar{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{z}}) + \int_\Omega (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\phi})\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{z}}.$$

Ahora, para todo $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega)^3$ y como $\boldsymbol{\phi} \in \mathrm{H}_0(\mathbf{curl};\Omega)$,

$$\int_\Omega (\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}}) = \langle \boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}\rangle_{\partial\Omega} = 0$$

y por la densidad de $\mathrm{H}^1(\Omega)^3 \hookrightarrow \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)$ obtenemos

$$\int_\Omega (\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi}\cdot\bar{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{z}}) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}} \subset \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega).$$

Por otra parte, tenemos que

$$\int_\Omega (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\phi})\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{z}} = 0$$

porque $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} = \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega)^{\perp_{\mathrm{L}^2(\Omega)^3}}$ e $(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\phi}) \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega)$. Así, concluimos la demostración. □

Una primera consecuencia de la proposición anterior es el siguiente resultado de densidad para las funciones suaves de $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$.

Proposición 3. *El subespacio $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ es denso en $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$.*

Demostración. La demostración esta basada en una propiedad clásica (ver, por ejemplo, [15, Sección I, (2.14)]), que en nuestro caso se expresa de la siguiente manera: $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ es denso en $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ si y sólo si cada elemento de $\boldsymbol{\mathcal{Z}}'$ que se anula en $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ también se anula en $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$.

Sea $L \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}'$. Ya que $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ es un espacio de Hilbert, existe $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ tal que

$$\langle L, \boldsymbol{v}\rangle = \int_\Omega \left(\boldsymbol{l}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} + \tilde{\boldsymbol{l}}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}}\right) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}},$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la paridad dual entre $\boldsymbol{\mathcal{Z}}'$ y $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$, y $\tilde{\boldsymbol{l}} := \mathbf{curl}\,\boldsymbol{l}$. Ahora, asumimos que L se anula en $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, es decir,

$$\langle L, \boldsymbol{v}\rangle = \int_\Omega \left(\boldsymbol{l}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} + \tilde{\boldsymbol{l}}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}}\right) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}. \tag{3.5}$$

Necesitamos demostrar que L se anula también en $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$. Con este fin, por Lema 5 tenemos que $\mathcal{D}(\Omega)^3 \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, se sigue que

$$\int_\Omega \boldsymbol{l} \cdot \bar{\boldsymbol{v}} + \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{l}} \cdot \mathbf{curl}\, \bar{\boldsymbol{v}} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$$

de donde $\boldsymbol{l} = -\,\mathbf{curl}\, \tilde{\boldsymbol{l}}$. Notemos que, para demostrar que L se anula en $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$, basta con demostrar que $\tilde{\boldsymbol{l}} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, con esto en mente, demostraremos que $\mathbf{curl}\, \tilde{\boldsymbol{l}} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$, o equivalentemente que satisface (2.7)-(2.9) (ver Lema 7). Primero, dado que $\nabla\left(\mathcal{D}(\bar{\Omega})\right) \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, obtenemos

$$\int_\Omega \boldsymbol{l} \cdot \nabla \bar{\psi} = 0 \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}).$$

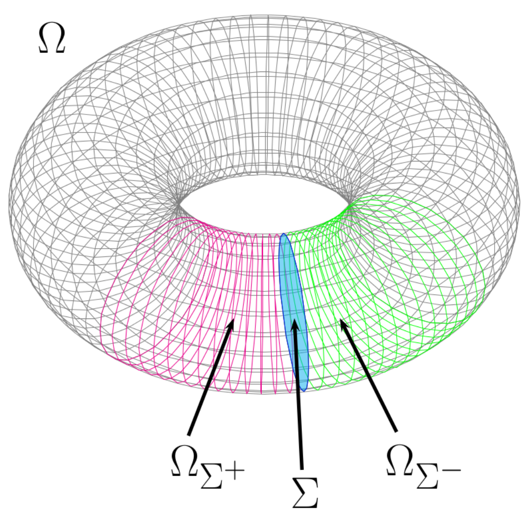

Figura 3.1: Dominio Toroidal.

Entonces, $\mathbf{curl}\, \tilde{\boldsymbol{l}} = -\boldsymbol{l} \in \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$, es decir, $\mathbf{curl}\, \tilde{\boldsymbol{l}}$ satisface (2.7)-(2.8). Para demostrar que $\mathbf{curl}\, \tilde{\boldsymbol{l}}$ satisface (2.9), es decir $\langle \mathbf{curl}\, \tilde{\boldsymbol{l}} \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j} = 0 \quad j = 1, \ldots, J$, con el fin de fijar ideas pensaremos en un dominio no simplemente conexo de solo una manija (ver Figura 2).

Sin pérdida de generalidad pensaremos en Ω como en la Figura 2. En este caso el número de cortes es $J = 1$. Podemos hallar una función $\chi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}^0)$ tal que $\chi = 1$ en el volumen Ω_{Σ^+} y $\chi = 0$ en un volumen Ω_{Σ^-}. Observemos que $\nabla \chi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}$. Entonces por Lema 1 y tomado $\boldsymbol{v} = \nabla \chi$ en (3.5) y el que $\boldsymbol{l} \in \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0; \Omega)$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}, [\![\chi]\!]_1\rangle_\Sigma &= \int_{\Omega^0} \boldsymbol{l}\cdot\nabla\chi + \int_{\Omega^0} \operatorname{div}\boldsymbol{l}\,\chi \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\langle \mathbf{curl}\,\tilde{\boldsymbol{l}}\cdot\boldsymbol{n}, 1\rangle_\Sigma = 0$, de modo que $\tilde{\boldsymbol{l}} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$. De este modo utilizando la Proposición 2 obtenemos

$$
\langle L, \boldsymbol{v}\rangle = \int_\Omega \left(\boldsymbol{l}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} + \tilde{\boldsymbol{l}}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}}\right) = \int_\Omega (-\,\mathbf{curl}\,\tilde{\boldsymbol{l}}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} + \tilde{\boldsymbol{l}}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{Z}}.
$$

$\square$

Otra consecuencia de la Proposición 2 es que el operador S es autoadjunto, que, junto con su compacidad, nos permitirá obtener una caracterización completa del espectro.

Proposición 4. *S es autoadjunto.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{w} := S\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\cap\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ y $\boldsymbol{v} := S\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\cap\boldsymbol{\mathcal{Z}}$. De (3.1) es fácil ver que $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{w} - \boldsymbol{f} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega)$ y también $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{g} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega)$. En consecuencia, como $\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega) = \boldsymbol{\mathcal{X}}^{\perp_{\mathrm{L}^2(\Omega)^3}}$ y usando la Proposición 2 se tiene que

$$
\int_\Omega (S\boldsymbol{f})\cdot\bar{\boldsymbol{g}} = \int_\Omega \boldsymbol{w}\cdot\bar{\boldsymbol{g}} = \int_\Omega \boldsymbol{w}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}} = \int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{w}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\left(\overline{S\boldsymbol{g}}\right),
$$

además

$$
\int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{w}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{g}} = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{g}} = \int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{f}\cdot\bar{\boldsymbol{g}} = \int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{f}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}}
$$

con lo cual concluimos la demostración. $\square$

Ahora, estamos en posición de establecer una caracterización espectral de S.

Lema 9. *El espectro de S está dado por $\sigma(S) = \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$, con $\{\mu_n\}$ una sucesión de autovalores no nulos de multiplicidad finita que convergen a cero. 0 es un autovalor de S con espacio propio asociado $\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega)$. Además $\boldsymbol{\mathcal{Z}} = (\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap\boldsymbol{\mathcal{Z}}) \oplus \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega)$, esta descomposición es ortogonal en $\mathrm{L}^2(\Omega)^3$ y en $\mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)$. El espacio $\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ es un espacio invariante de S y $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son los autovalores de $S|_{\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap\boldsymbol{\mathcal{Z}}} : \boldsymbol{\mathcal{X}}\cap\boldsymbol{\mathcal{Z}} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}\cap\boldsymbol{\mathcal{Z}}$. Por otra parte, existe una base Hilbertiana $\{\boldsymbol{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\boldsymbol{\mathcal{X}}\cap\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ de autofunciones de S.*

Demostración. El resultado es consecuencia de la clásica caracterización espectral de un operador compacto y autoadjunto (ver [9]). Por otra parte $\mu = 0$ es un autovalor de S con espacio propio asociado $\operatorname{Ker} S := \left\{ \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}} : \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \operatorname{\mathbf{curl}} \boldsymbol{v} = 0 \ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}} \right\} = \left\{ \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}} : \int_\Omega \operatorname{\mathbf{curl}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}} \right\}$ la última igualdad se tiene por Proposición 2. Además por Lema 5 concluimos que $\operatorname{Ker} S = \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega)$. Por otro lado, considerando la definición de $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ es fácil ver que $(\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}) + \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega) \subset \boldsymbol{\mathcal{Z}}$. Recíprocamente si $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, en particular $\boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^3$ y por (2.6) tenemos que $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \oplus \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega)$, por lo tanto tenemos que $\boldsymbol{v} \in (\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}) \oplus \left(\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega) \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}} \right) \subset (\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}) \oplus \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega)$, observemos también que de (2.6) se desprende la ortogonalidad. Con esto demostramos la igualdad $\boldsymbol{\mathcal{Z}} = (\boldsymbol{\mathcal{X}} \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}) \oplus \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega)$ esta descomposición es ortogonal en $\mathrm{L}^2(\Omega)^3$ y también en $\mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega)$. $\square$

El lema anterior y la relación entre los espectros de S y del Problema 2, da una caracterización completa de las soluciones de este último y, en consecuencia, de la solución del Problema 1.

Teorema 3.1.1. *Problema 1 tiene un conjunto numerable de soluciones* $(\lambda_n, \boldsymbol{u}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *y* $\{\boldsymbol{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *es una base Hilbertiana de* $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$.

3.2. Formulación primal

Una forma de aproximar las soluciones de Problema 1 es considerar una aproximación por elementos finitos del Problema 2. El enfoque consistirá simplemente en utilizar espacios de elementos finitos que aproximen a $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ y $\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega)$ para una discretización directa del problema. En la Sección 4.1 se propone y analiza un método de elementos finitos aplicado a este problema (ver Problema 4).

Esto conduce a un problema de valores propios generalizado que involucra dos matrices no definidas positivas. A pesar de este hecho, demostraremos que este problema de valores propios con matrices degeneradas está bien planteado. Sin embargo, debido a este carácter degenerado, no puede usarse una herramienta computacional clásica, lo que hace el cálculo de la solución significativamente más complicado.

Para superar este inconveniente introducimos una formulación alternativa. Esta formulación conducirá, tras una discretización, a un problema generalizado de autovalores que involucra a dos matrices hermitianas, donde la matriz del lado derecho es definida positiva. Así, podemos usar una herramienta computacional clásica para la resolución numérica.

Para derivar esta formulación alternativa, notamos que, para $\lambda \neq 0$, el Problema 1 es equivalente a: Hallar $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)$, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} &= \lambda \boldsymbol{u} && \text{en } \Omega, \\ \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} &= 0 && \text{en } \Gamma, \\ \langle \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}, 1\rangle_{\Sigma_j} &= 0 && j = 1,\dots,J. \end{aligned}$$

Claramente, la solución $\boldsymbol{u}$ del problema anterior pertenece a $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ y satisface

$$\int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}} = \lambda\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}} = \lambda\int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} = \lambda^2\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} \qquad \forall \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{Z}},$$

donde también hemos utilizado la Proposición 2. Por lo tanto, lo anterior nos lleva a considerar el siguiente problema:

Problema 3. *Hallar $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, tal que*

$$\int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}} = \lambda^2\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} \qquad \forall \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{Z}}.$$

Acabamos de demostrar el siguiente resultado.

Lema 10. *Si $(\lambda,\boldsymbol{u})$ es una solución del Problema 1, entonces es una solución del Problema 3.*

El reciproco es parcialmente verdadero. Para demostrarlo, consideramos el operador solución:

$$\begin{aligned} T:\ \boldsymbol{\mathcal{Z}} &\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{Z}}, \\ \boldsymbol{f} &\longmapsto T\boldsymbol{f} := \boldsymbol{w}, \end{aligned}$$

con $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ tal que

$$\int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{w}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}} + \int_\Omega \boldsymbol{w}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} \qquad \forall \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{Z}}. \tag{3.6}$$

El Problema (3.6) está bien planteado, esto es consecuencia directa del Lema de Lax Milgram, por lo cual T está bien definido y es continuo. Notemos que $T\boldsymbol{u} = \mu\boldsymbol{u}$, con $\mu \neq 0$, si y sólo si $(\lambda,\boldsymbol{u})$ es una solución del Problema 3, con $\lambda^2 + 1 = \frac{1}{\mu}$.

Claramente $\mu = 1$ es un autovalor de T, correspondiente a $\lambda = 0$ autovalor del Problema 3 con espacio propio

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} := \{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{Z}}:\ \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega\} = \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega) = \nabla\left(\mathrm{H}^1(\Omega)\right)\oplus\boldsymbol{K}_T. \tag{3.7}$$

Ya que T es claramente autoadjunto (cf. (3.6)), el complemento ortogonal de $\boldsymbol{\mathcal{K}}$,

$$\boldsymbol{\mathcal{V}} := \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\perp_{\boldsymbol{\mathcal{Z}}}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}\cap\boldsymbol{\mathcal{Z}} \tag{3.8}$$

este es un subespacio invariante de T. Por lo tanto,

$$\widehat{T} := T|_{\boldsymbol{\mathcal{V}}} : \boldsymbol{\mathcal{V}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}}$$

es un operador bien definido, acotado y $\sigma(T) = \sigma(\widehat{T}) \cup \{1\}$.

Por otra parte, ya que T toma valores en el espacio $\boldsymbol{\mathcal{Z}} \subset \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)$ y, por (2.5) deducimos que $\mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega) \cap \boldsymbol{\mathcal{X}} \hookrightarrow \mathrm{H}^s(\Omega)^3 \cap \boldsymbol{\mathcal{X}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}}$ donde la primera inclusión es continua y la segunda es compacta, esto se sigue del siguiente Lema, con esto derivamos la compacidad de $\widehat{T}$.

Lema 11. *Sea $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ y $\boldsymbol{w} := T\boldsymbol{f}$. Entonces, $\boldsymbol{w} \in \mathrm{H}^s(\mathbf{curl};\Omega)$ y*

$$\|\boldsymbol{w}\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{w}\|_{s,\Omega} \leq C\,\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\,.$$

Demostración. De la definición de T, $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{f}$ están relacionados por (3.6). Tomando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ en esta ecuación, tenemos

$$\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\,. \tag{3.9}$$

Además, puesto que $\nabla\left(\mathrm{H}^1(\Omega)\right) \subset \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, tomando en (3.6) $\boldsymbol{v} = \nabla\psi$, $\psi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, se sigue que

$$\int_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \nabla\bar{\psi} = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \nabla\bar{\psi} = 0 \qquad \forall\psi \in \mathrm{H}^1(\Omega).$$

por lo tanto, por $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{V}} \subset \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0;\Omega)$, tenemos que $\boldsymbol{w} \in \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0;\Omega)$, también. Por consiguiente, $\boldsymbol{w} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega) \cap \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0;\Omega) \hookrightarrow \mathrm{H}^s(\Omega)^3$ (cf. (2.5)) y, usando (3.9), se sigue

$$\|\boldsymbol{w}\|_{s,\Omega} \leq C\,\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq C\,\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\,.$$

Por otro lado, considerando $\boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3 \subset \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ en (3.6), obtenemos

$$\mathbf{curl}\,(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} \quad \text{in } \Omega. \tag{3.10}$$

por lo tanto, $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{w} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)$ y, también $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ con lo cual $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0;\Omega)$. Entonces, los mismos argumentos anteriores nos permiten concluir que $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{w} \in \mathrm{H}^s(\Omega)^3$ y

$$\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{w}\|_{s,\Omega} \leq C\,\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq C\,\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\,,$$

la última desigualdad por (3.10) y (3.9). Así, concluimos la demostración. $\square$

El siguiente teorema muestra como los autovalores de T, con $\mu \neq 1$, están relacionados con la solución de Problema 1.

Teorema 3.2.1. *Las siguientes propiedades son válidas:*

a) El espectro de T se descompone como sigue:

$$\sigma(T) = \{1\} \cup \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}\,.$$

Por otra parte:

- *$\mu = 1$ es un autovalor de T con espacio propio infinito dimensional $\boldsymbol{\mathcal{K}}$;*
- *$\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de autovalores de multiplicidad finita, que converge a 0 y además $\mu_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$;*
- *$\mu = 0$ no es un autovalor de T.*

b) Si λ es un autovalor del Problema 1 con autoespacio $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, entonces $\mu = \frac{1}{1+\lambda^2}$ es un autovalor de T y $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es un subespacio invariante de T.

c) Si $\mu \neq 1$ es un autovalor de T con autoespacio $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, entonces existe un autovalor λ del Problema 1 tal que $\mu = \frac{1}{1+\lambda^2}$ y $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es un subespacio invariante de Problema 1.

Demostración. Ya hemos demostrado que $\mu = 1$ es un autovalor de T con el correspondiente espacio propio $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ y que $\sigma(T) = \sigma(\widehat{T}) \cup \{1\}$. Así, la caracterización espectral de T es una consecuencia de la compacidad de $\widehat{T}$. Por otra parte, $\mu = 0$ no es un autovalor de T; en efecto, si $T\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, entonces tomando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}$ en (3.6) tenemos que $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ en $\mathrm{L}^2(\Omega)^3$. Por otra parte, para todo autovalor $\mu_n \neq 1$, es fácil de mostrar por (3.6) que $\mu_n \in (0,1)$. Así, concluimos *a*).

A su vez, Lema 10 y los argumentos anteriores llevan a *b*).

Queda por demostrar que todos los valores propios de $\widehat{T}$ son de la forma $\mu = \frac{1}{1+\lambda^2}$, con λ es un valor propio de Problema 1. En efecto, de acuerdo con el Teorema 3.1.1, la sucesión de autofunciones de Problema 1 es una base Hilbertiana de $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$. Como ya hemos demostrado en *b*), que todos ellos son funciones propias de $\widehat{T}$, este operador no puede tener un par autovalor-autofunción adicional; de otra manera, dado que T es autoadjunto, la autofunción adicional tendría que ser ortogonal a toda la base Hilbertiana, que no puede suceder. Así, concluimos *c*). $\square$

Como consecuencia de este teorema y la relación entre los pares de autovalores-autofunciones del Problema 3 y los del operador T, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1. *Sea $\nu \neq 0$ un autovalor del Problema 3 y $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ el correspondiente autoespacio. Entonces, existe un autovalor λ de Problema 1 tal que $\nu = \lambda^2$ y $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es un subespacio invariante del Problema 1.*

Observación 1. Notemos que las autofunciones del Problema 3 no son necesariamente autofunciones de Problema 1. En efecto, si λ y $-\lambda$ son ambos valores propios de Problema 1, entonces λ^2 sería un valor propio del Problema 3, con multiplicidad igual a la suma de las de λ y $-\lambda$. Por otro lado, una función propia de Problema 3 correspondiente a λ^2 sería una combinación lineal de las funciones propias del Problema 1 asociado a λ y $-\lambda$, pero no necesariamente una función propia en sí. En otras palabras, en tal caso, en general las autofunciones del Problema 3 no son campos Beltrami que satisfagan $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} = \pm\lambda\boldsymbol{u}$. A primera vista se podría pensar que sería muy raro que λ y $-\lambda$ sean ambos valores propios del Problema 1. Sin embargo, como se muestra en la Sección 6, esto es algo que siempre sucede cuando el dominio Ω es simétrico.

Capítulo 4

Aproximación por Elementos Finitos

En esta sección introducimos una aproximación de Galerkin para el Problema 2 y también del Problema 3 y se demuestran algunos resultados de convergencia. De aquí en adelante, asumimos que Ω es un dominio poliédrico, $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ es una familia regular de particiones de $\bar{\Omega}$ en tetraedros T, tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{T\in\mathcal{T}_h} T$; el parámetro h representa el tamaño de la malla. De ahora en más C denotará una constante genérica independiente de h. Denotamos por $\mathcal{T}_h^\Gamma$ la correspondiente triangulación inducida en la frontera de Ω, a saber, $\mathcal{T}_h^\Gamma := \{F \text{ cara de } T \in \mathcal{T}_h : \ F \subset \Gamma\}$.

Para cualquier $T \in \mathcal{T}_h$, sea $\boldsymbol{\mathcal{N}}^k(T) := \mathbb{P}_{k-1}(T)^3 \oplus \big\{\boldsymbol{p} \in \bar{\mathbb{P}}_k(T)^3 : \ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} = 0\big\}$, donde $\mathbb{P}_k$ es el conjunto de polinomios de grado no mayor que k y $\bar{\mathbb{P}}_k$ el subconjunto de polinomios homogéneos de grado k.

El espacio correspondiente de aproximación global de $\mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)$ es el espacio de funciones que localmente pertenecen $\boldsymbol{\mathcal{N}}^k(T)$ y tienen componente tangencial continua a través de las caras de la triangulación $\mathcal{T}_h$. Este es el conocido espacio de Nédélec:

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}_h := \Big\{\boldsymbol{v}_h \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega) : \ \boldsymbol{v}_h|_T \in \boldsymbol{\mathcal{N}}^k(T) \ \ \forall T \in \mathcal{T}_h)\Big\}$$

(para más detalles ver, por ejemplo, [19, Sección 5.5]). De donde, el espacio natural de aproximación para $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ es

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h := \boldsymbol{\mathcal{N}}_h \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}} = \Big\{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{N}}_h : \ &\mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ en } \Gamma \\ &\text{y } \int_{\Sigma_j} \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n} = 0, \ j = 1, \dots, J\Big\}.\end{aligned}$$

Observemos que por el Teorema de Stokes tenemos que $\int_{\Sigma_j} \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n} = \int_{\partial\Sigma_j} \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{t}, \ \ j = 1, \dots, J$, donde $\boldsymbol{t}$ es el vector tangente a $\partial\Sigma_j$. Con esto, la definición anterior la podemos reescribir como

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h = \left\{ \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{N}}_h : \ \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ en } \Gamma \quad \text{y} \quad \int_{\partial\Sigma_j} \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{t} = 0 \quad j = 1, \ldots, J \right\}.$$

Denotamos por I_h^N a la interpolada de Nédélec (ver [19] para su definición precisa). Este interpolador esta bien definido, por ejemplo para funciones de $\mathrm{H}^s(\mathbf{curl}; \Omega)$:

$$\mathrm{H}^s(\mathbf{curl}; \Omega) \to \boldsymbol{\mathcal{N}}.$$

De manera que I_h^N es un operador lineal acotado. El siguiente lema muestra que la interpolada de Nédélec de funciones de $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ queda en $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$.

Lema 12. *$\forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^s(\mathbf{curl}; \Omega) \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ con $s > \frac{1}{2}$, se tiene que $I_h^N \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$.*

Demostración. sabemos que $I_h^N \boldsymbol{v}$ pertenece al espacio $\boldsymbol{\mathcal{N}}_h$. Además sea I_h^R el interpolador de Raviart-Thomas. Ya que $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, tenemos que $\mathbf{curl}\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ en Γ y $\langle \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j} = 0$, $j = 1, \ldots, J$. Por lo tanto, $\mathbf{curl}\left(I_h^N \boldsymbol{v}\right) \cdot \boldsymbol{n} = \left(I_h^R \,\mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}\right) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ en Γ, la primera igualdad se tiene por [19, Lema 5.40] y la segunda por la conocida propiedad del interpolador de Raviart-Thomas que preserva la nulidad de la componente normal en la frontera. Además, usando en Teorema de Stokes y la definición del interpolador de Nédélec, tenemos que

$$\int_{\Sigma_j} \mathbf{curl}\, I_h^N \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \int_{\gamma_j} I_h^N \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}_j = \int_{\gamma_j} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}_j = \int_{\Sigma_j} \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

Lo que muestra que $I_h^N \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$. □

Además, consideramos el espacio de aproximación de Θ, este es:

$$\Theta_h := \left\{ \psi_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : \ \psi_h|_T \in P_k(T) \ \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ y } [\![\widetilde{\psi}_h]\!]_{\Sigma_j} = c_j, \ j = 1, \ldots, J \right\},$$

Definamos

$$r_k := \min\{s, k\}, \tag{4.1}$$

donde $k \geq 1$ es el grado de los elementos finitos de Nédélec y $s > 1/2$ es un exponente de Sobolev tal que se tiene (2.5).

4.1. Formulación discreta mixta

Consideramos una aproximación por elementos finitos del Problema 2. El enfoque consistirá simplemente en utilizar los espacios de elementos finitos $\boldsymbol{\mathcal{N}}_h \subset \mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega)$ y $\Theta_h \subset \Theta$ para una discretización directa del problema. Por el Lema 2 sabemos que $\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega) = \widetilde{\nabla}\Theta$, con lo que el problema 2 se reescribe como:

Problema 4. *Hallar* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $(\boldsymbol{u}, \varphi) \in \boldsymbol{\mathcal{Z}} \times \Theta/\mathbb{C}$, $(\boldsymbol{u}, \varphi) \neq \mathbf{0}$, *tal que*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{curl}\, \bar{\boldsymbol{v}} + \int_\Omega \widetilde{\nabla}\varphi \cdot \bar{\boldsymbol{v}} = \lambda \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{curl}\, \bar{\boldsymbol{v}} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}},\\
&\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \widetilde{\nabla}\bar{\psi} = 0 \qquad \forall \psi \in \Theta/\mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Consideramos la siguiente discretización del Problema 4:

Problema 5. *Hallar* $\lambda_h \in \mathbb{C}$ *y* $(\boldsymbol{u}_h, \varphi_h) \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h \times \Theta_h/\mathbb{C}$, $(\boldsymbol{u}_h, \varphi_h) \neq \mathbf{0}$, *tal que*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}_h \cdot \mathbf{curl}\, \bar{\boldsymbol{v}}_h + \int_\Omega \widetilde{\nabla}\varphi_h \cdot \bar{\boldsymbol{v}}_h = \lambda_h \int_\Omega \boldsymbol{u}_h \cdot \mathbf{curl}\, \bar{\boldsymbol{v}}_h \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h,\\
&\int_\Omega \boldsymbol{u}_h \cdot \widetilde{\nabla}\bar{\psi}_h = 0 \qquad \forall \psi_h \in \Theta_h/\mathbb{C}.
\end{aligned}$$

El siguiente paso es demostrar que los valores propios y funciones propias de Problema 4 aproximan bien a las del Problema 5. Con este fin, vamos a aplicar la teoría clásica de valores propios para un problema mixto, las llamadas de tipo Q1 presentadas en [18, Sección 3]. Lo primero es demostrar que las siguientes propiedades, que corresponden a los supuestos (3.12)–(3.16) de [18, Sección 3], se cumplen en nuestro caso. Recordemos que $\boldsymbol{\mathcal{K}} \subset \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ es el autoespacio de T asociado con el autovalor $\mu = 1$ y $\boldsymbol{\mathcal{V}} := \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\perp_{\boldsymbol{\mathcal{Z}}}}$. De (3.8) sabemos que $\boldsymbol{\mathcal{V}} = \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, además en virtud de (2.6) y Lema 2 tenemos que $\boldsymbol{\mathcal{V}} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}} :\ \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \widetilde{\nabla}\bar{\psi} = 0 \ \ \forall \psi \in \Theta/\mathbb{C} \right\}$.

- existe $\alpha > 0$ tal que

$$\int_\Omega |\mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}|^2 \geq \alpha \, \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbf{curl},\Omega} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}, \tag{4.2}$$

- existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}} \frac{\left| \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \widetilde{\nabla}\bar{\psi} \right|}{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{curl},\Omega}} \geq \beta \, |\psi|_{1,\Omega} \qquad \forall \psi \in \Theta/\mathbb{C}; \tag{4.3}$$

- existe $\alpha_2 > 0$, independiente de h, tal que

$$\int_\Omega |\mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_h|^2 \geq \alpha_2 \, \|\boldsymbol{v}_h\|^2_{\mathbf{curl},\Omega} \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_h, \tag{4.4}$$

  donde, $\boldsymbol{\mathcal{V}}_h = \left\{ \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h :\ \int_\Omega \boldsymbol{v}_h \cdot \nabla\bar{\psi}_h = 0 \ \ \forall \psi_h \in \Theta_h/\mathbb{C} \right\}$;

- existe $\beta_2 > 0$, independiente de h, tal que

$$\sup_{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h} \frac{\left| \int_\Omega \boldsymbol{v}_h \cdot \widetilde{\nabla} \bar{\psi}_h \right|}{\|\boldsymbol{v}_h\|_{\mathbf{curl},\Omega}} \geq \beta_2 \, |\psi_h|_{1,\Omega} \qquad \forall \psi_h \in \Theta_h/\mathbb{C}; \tag{4.5}$$

- para cada $(\boldsymbol{v}, \psi) \in \boldsymbol{\mathcal{Z}} \times \Theta_h/\mathbb{C}$,

$$\lim_{h\to 0} \inf_{(\boldsymbol{v}_h,\psi_h)\in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h \times \Theta_h/\mathbb{C}} \Big(\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h\|_{\mathbf{curl},\Omega} + |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \Big) = 0. \tag{4.6}$$

Las primera elipticidad en el nucleo (4.2) fue demostrada en (3.3). Además (4.4) se sigue por [1, Proposition 4.6]. La condición inf-sup (4.3) se verifica considerando $\boldsymbol{v} = \widetilde{\nabla}\psi \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega) \subset \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ y la condición inf-sup (4.5) se verifica considerando $\boldsymbol{v}_h = \widetilde{\nabla}\psi_h \in \widetilde{\nabla}\Theta_h \subset \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega) \subset \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ (recordemos que $\widetilde{\nabla}\Theta = \mathrm{H}(\mathbf{curl}^0; \Omega)$), además es fácil ver que $\widetilde{\nabla}\psi_h \in \boldsymbol{\mathcal{N}}_h$, por lo tanto $\boldsymbol{v}_h = \widetilde{\nabla}\psi_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}} \cap \boldsymbol{\mathcal{N}}_h$.

Finalmente para demostrar (4.6), basta considerar $\boldsymbol{v}^* \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, gracias a la densidad de este espacio en $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ (ver Lema 3) y $\psi^* \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ por la densidad de este último en $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Notamos que para esta función se tiene que $I_h^N \boldsymbol{v}^* \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$, esto por el Lema 12.

En consecuencia la propiedad (4.6) se deduce inmediatamente de las densidades mencionadas tomando $\boldsymbol{v}_h = I_h^N \boldsymbol{v}^*$ y ψ_h la interpolada de Lagrange de ψ^*.

Consideramos para lo que sigue el operador solución:

$$\begin{aligned} G:\ \boldsymbol{\mathcal{Z}} \times \Theta/\mathbb{C} &\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{Z}} \times \Theta/\mathbb{C}, \\ (\boldsymbol{f}, g) &\longmapsto G(\boldsymbol{f}, g) := (\boldsymbol{w}, \xi), \end{aligned}$$

con $(\boldsymbol{w}, \xi) \in \boldsymbol{\mathcal{Z}} \times \Theta/\mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{w} \cdot \mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}} + \int_\Omega \nabla\xi \cdot \bar{\boldsymbol{v}} = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}, \\ &\int_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \nabla\bar{\psi} = 0 \qquad \forall \psi \in \Theta. \end{aligned}$$

Del estudio del operador S en la Sección 3, tenemos que

$$G(\boldsymbol{f}, g) = (S\boldsymbol{f}, 0),\ \forall (\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{\mathcal{Z}} \times \Theta/\mathbb{C}. \tag{4.7}$$

Un supuesto adicional para aplicar los resultados de aproximación para problemas mixtos de valores propios de tipo Q1 por [18, Section 3] es que G tiene que ser compacto. Esto se sigue inmediatamente de la compacidad de S (ver Lema 8).

La teoría de aproximación espectral para problemas mixtos de tipo Q1 por [18, Section 3] también involucra al operador adjunto formal, G_*. En nuestro caso, este operador es definido por:

$$\begin{aligned} G_* : \ \boldsymbol{\mathcal{Z}} \times \Theta/\mathbb{C} &\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{Z}} \times \Theta/\mathbb{C}, \\ (\boldsymbol{f}, g) &\longmapsto G_*(\boldsymbol{f}, g) := (\boldsymbol{w}_*, \xi_*), \end{aligned}$$

con $(\boldsymbol{w}, \xi) \in \boldsymbol{\mathcal{Z}} \times \Theta/\mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{curl}\, \bar{\boldsymbol{w}}_* + \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla \bar{\xi}_* = \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{curl}\, \bar{\boldsymbol{f}} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}, \\ &\int_\Omega \nabla \psi \cdot \bar{\boldsymbol{w}}_* = 0 \qquad \forall \psi \in \Theta/\mathbb{C}. \end{aligned}$$

Usando la Proposición 2, concluimos que $G_* = G$. Sin embargo, como G_* es precisamente un adjunto formal, no podemos afirmar que G es autoadjunto. A pesar de esto, demostramos en el siguiente Lema que estos autovalores son no degenerados, en el sentido que su *ascent* es 1. Recordemos que para un operador A, el ascent de un autovalor λ se define como el menor entero α tal que $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^\alpha = \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^{\alpha+1}$.

Lema 13. *El ascent para cualquier autovalor no nulo de G, es uno.*

Demostración. Por contradicción, supondremos que para un autovalor μ su ascent es distinto de uno. Sea $(\mu, (\boldsymbol{u}, \varphi))$ un par autovalor-autofunción de G, $\mu \neq 0$, asumimos que G tiene una correspondiente autofunción generalizada; es decir,

$$G(\boldsymbol{u}, \varphi) = \mu(\boldsymbol{u}, \varphi), \tag{4.8}$$

donde $(\boldsymbol{u}, \varphi) \neq \mathbf{0}$, y existe $(\widetilde{\boldsymbol{u}}, \widetilde{\varphi})$ tal que

$$G(\widetilde{\boldsymbol{u}}, \widetilde{\varphi}) = \mu(\widetilde{\boldsymbol{u}}, \widetilde{\varphi}) + (\boldsymbol{u}, \varphi). \tag{4.9}$$

De (4.7), concluimos que, $\varphi = \widetilde{\varphi} = 0$ y, por lo tanto, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$. Además (4.8) y (4.9) se reescriben como:

$$\begin{aligned} S\boldsymbol{u} &= \mu \boldsymbol{u}, \\ S\widetilde{\boldsymbol{u}} &= \mu \widetilde{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u}. \end{aligned}$$

Esto ultimo nos dice que μ es autovalor de S y su ascent es distinto de cero. Esto contradice el hecho que S es autoadjunto (ver Proposición 4). Así se concluye el resultado. □

Ahora, estamos en posición de escribir el siguiente resultado de convergencia, este es consecuencia directa de [18, Teorema 3.1].

Teorema 4.1.1. *Sea λ un autovalor del Problema 4 de multiplicidad-finita m. Sea $\boldsymbol{\mathcal{E}} \subset \boldsymbol{\mathcal{Z}} \times \Theta/\mathbb{C}$ el correspondiente autoespacio. Entonces, existen exactamente m autovalores $\lambda_h^{(1)}, \ldots, \lambda_h^{(m)}$ del Problema 5 (repetidos de acuerdo a sus respectivas multiplicidades) que convergen a λ cuando h tiende a cero.*

Sea $\boldsymbol{\mathcal{E}}_h$ la suma directa de los autoespacios asociados a $\lambda_h^{(1)}, \ldots, \lambda_h^{(m)}$ y $\widehat{\gamma}_h := \delta\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h \times \Theta_h/\mathbb{C}\right)$. Entonces,

$$\widehat{\delta}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{E}}_h\right) \leq C\widehat{\gamma}_h$$

y

$$\left|\lambda - \lambda_h^{(i)}\right| \leq C\widehat{\gamma}_h^2, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

El siguiente resultado nos permitirá estimar $\widehat{\gamma}_h$.

Teorema 4.1.2. *Sea $\widehat{\gamma}_h$, definido como en Teorema 4.1.1. Entonces, existe $C > 0$ tal que*

$$\widehat{\gamma}_h \leq Ch^{r_k},$$

con r_k definido en (4.1).

Demostración. Sea $(\boldsymbol{v}, \mathbf{0}) \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$ tal que $\|(\boldsymbol{v}, \mathbf{0})\|_{\boldsymbol{\mathcal{Z}}\times\Theta} = \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{curl},\Omega} = 1$ (consideramos la norma $\|\cdot\|_{\boldsymbol{\mathcal{Z}}\times\Theta} = \|\cdot\|_{\mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)} + \|\cdot\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$). Dado que $G(\boldsymbol{v}, \mathbf{0}) = (S\boldsymbol{v}, \mathbf{0}) = \mu(\boldsymbol{v}, \mathbf{0})$, entonces, por el Lema 8 se sigue que $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^s(\mathbf{curl};\Omega)$ y

$$\|\boldsymbol{v}\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\|_{s,\Omega} \leq \frac{C}{\mu}\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega} \leq \frac{C}{\mu}.$$

En virtud de la Proposición 3 y procediendo como en la demostración de (4.6), tenemos que si $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ entonces $I_h^N\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$. Por lo tanto, usando la estimación estándar del error del interpolador de Nédélec (cf. [19, Teorema 5.41(1)]), obtenemos

$$\delta\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h\right) \leq \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{E}} \\ \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{curl},\Omega}=1}} \left\|\boldsymbol{v} - I_h^N\boldsymbol{v}\right\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq Ch^{r_k}\left(\|\boldsymbol{v}\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\|_{s,\Omega}\right) \leq \frac{C}{\mu}h^{r_k}.$$

Con esto, termina la demostración. □

Así, el Teorema 4.1.1 y el Teorema 4.1.2, implica que los autovalores y autofunciones del Problema 5 convergen a los del Problema 4 con orden óptimo.

4.2. Formulación discreta primal

La aproximación de Galerkin del Problema 3 es la siguiente:

Problema 6. *Hallar* $\lambda_h \in \mathbb{C}$ *y* $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$, $\boldsymbol{u}_h \neq \mathbf{0}$, *tal que*

$$\int_\Omega \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}_h \cdot \mathbf{curl}\, \bar{\boldsymbol{v}}_h = \lambda_h^2 \int_\Omega \boldsymbol{u}_h \cdot \bar{\boldsymbol{v}}_h \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h.$$

Notemos que el Problema 6 conduce a un problema generalizado de autovalores, bien planteado, con matrices hermitianas y la del lado derecho es definida positiva. Para resolver este problema, es necesario imponer de alguna manera la restricciones $\mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}_h \cdot \boldsymbol{n} = 0$ y $\int_{\partial\Sigma_j} \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{t} = 0,\ j = 1, \ldots, J$ en la definición de $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$; vamos a abordar este punto en la Sección 5.

Consideramos el operador solución discreto correspondiente:

$$\begin{aligned} T_h :\ \boldsymbol{\mathcal{Z}} &\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{Z}}, \\ \boldsymbol{f} &\longmapsto T_h \boldsymbol{f} := \boldsymbol{w}_h, \end{aligned}$$

con $\boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$ tal que

$$\int_\Omega \mathbf{curl}\, \boldsymbol{w}_h \cdot \mathbf{curl}\, \bar{\boldsymbol{v}}_h + \int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot \bar{\boldsymbol{v}}_h = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \bar{\boldsymbol{v}}_h \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h.$$

Como consecuencia del lema de Lax Milgram, T_h está bien definido, es un operador lineal y acotado. Claramente λ_h es un autovalor del Problema 6 si y solo si $\frac{1}{1+\lambda_h^2} \in \sigma(T_h)$.

Para demostrar la convergencia y estimaciones del error para el esquema de Galerkin propuesto, usaremos resultados de aproximación espectral de operadores no compactos como [13, 14]. Con este objetivo, consideramos la restricción de T_h al espacio invariante $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$. Para evitar sobrecargar la notación, de aquí en adelante T_h denotará $T_h|_{\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h}$.

Con el fin de usar la teoría de [13, 14] necesitamos demostrar las siguientes propiedades:

- P1: $\lim\limits_{h \to 0} \|(T - T_h)\,|_{\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h}\| = 0$,
- P2: $\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}\ \lim\limits_{h\to 0} \inf\limits_{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h} \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h\|_{\mathbf{curl},\Omega} = 0.$

La propiedad P2 se deduce inmediatamente de la Proposición 3 y las estimaciones de error del interpolador de Nédélec. Con el fin de demostrar la propiedad P1, establecemos algunos resultados preliminares.

Recordemos que $\boldsymbol{\mathcal{K}} \subset \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ es el autoespacio de T asociado con el autovalor $\mu = 1$ y $\boldsymbol{\mathcal{V}} := \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\perp_{\boldsymbol{\mathcal{Z}}}}$. De (3.8) sabemos que $\boldsymbol{\mathcal{V}} = \boldsymbol{\mathcal{X}} \cap \boldsymbol{\mathcal{Z}}$. El operador T restringido a $\boldsymbol{\mathcal{K}}$

es la identidad; además, la restricción a su complemento ortogonal es un operador de regularización, esto fue demostrado en el Lema 11.

Claramente $\mu_h = 1$ es un autovalor de T_h con espacio propio asociado

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_h := \{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h : \ \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_h = \mathbf{0}\} \subset \boldsymbol{\mathcal{K}},$$

de modo que T_h restringida a $\boldsymbol{\mathcal{K}}_h$ es la identidad. Sea $\boldsymbol{\mathcal{V}}_h := \boldsymbol{\mathcal{K}}_h^{\perp_{\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h}}$, notemos que $\boldsymbol{\mathcal{V}}_h \not\subset \boldsymbol{\mathcal{V}}$. Sin embargo, el siguiente lema muestra que el término en $\mathrm{H}(\mathbf{curl}^0;\Omega)$ en la descomposición de Helmholtz (2.6) de $\boldsymbol{\mathcal{V}}_h$ es asintóticamente despreciable.

Lema 14. *Para $\boldsymbol{f}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_h$, existen $\boldsymbol{\chi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ y $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$ tal que $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\eta}$ y se tiene:*

a) $\boldsymbol{\chi} \in \mathrm{H}^s(\Omega)^3$ *con* $\|\boldsymbol{\chi}\|_{s,\Omega} \le C \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{f}_h\|_{0,\Omega}$,

b) $\|\boldsymbol{\eta}\|_{0,\Omega} \le C h^{r_1} \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{f}_h\|_{0,\Omega}$, *con r_1 definido en* (4.1).

Demostración. Como $\boldsymbol{f}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_h \subset \boldsymbol{\mathcal{Z}}$, la descomposición $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\eta}$ se sigue por el hecho que $\boldsymbol{\mathcal{V}} = \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\perp_{\boldsymbol{\mathcal{Z}}}}$. Ahora, ya que $\boldsymbol{\mathcal{V}} \subset \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega) \cap \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0;\Omega)$, tenemos que $\boldsymbol{\chi} \in \mathrm{H}^s(\Omega)^3$, esto nuevamente por (2.5). Por otra parte, de la definición de $\boldsymbol{\mathcal{K}}$, $\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\chi} = \mathbf{curl}\, \boldsymbol{f}_h$, por lo tanto,

$$\|\boldsymbol{\chi}\|_{s,\Omega} \le C \|\boldsymbol{\chi}\|_{\mathbf{curl},\Omega} \le C \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\chi}\|_{0,\Omega} = C \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{f}_h\|_{0,\Omega},$$

la última desigualdad porque, $\|\boldsymbol{\chi}\|_{0,\Omega} \le C \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\chi}\|_{0,\Omega}$ para todo $\boldsymbol{\chi} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega) \cap \mathrm{H}_0(\mathrm{div}^0;\Omega)$ (cf. [1, Corolario 3.16]). Así concluimos (a).

Para demostrar (b), vamos a utilizar el interpolador de Nédélec I_h^N. Según [19, Teorema 5.41(2)], como $\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\chi} = \mathbf{curl}\, \boldsymbol{f}_h$, tenemos que

$$\left\|\boldsymbol{\chi} - I_h^N \boldsymbol{\chi}\right\|_{0,\Omega} \le C \left(h^{r_1} \|\boldsymbol{\chi}\|_{s,\Omega} + h \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{f}_h\|_{0,\Omega}\right) \le C h^{r_1} \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{f}_h\|_{0,\Omega}. \quad (4.10)$$

Por otro lado, sea I_h^R el interpolador de Raviart Thomas (ver [19, Sección 5.4]). ya que $\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\chi} = \mathbf{curl}\, \boldsymbol{f}_h \in \mathrm{H}^\varepsilon(\Omega)^3$ para todo $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, de acuerdo a la Observación 5.16 y el Lema 5.40 de [19], se sigue que

$$\mathbf{curl}\left(I_h^N \boldsymbol{\chi}\right) = I_h^R \left(\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\chi}\right) = I_h^R \left(\mathbf{curl}\, \boldsymbol{f}_h\right) = \mathbf{curl}\, \boldsymbol{f}_h. \quad (4.11)$$

Notemos que, en particular, esta igualdad implica que $I_h^N \boldsymbol{\chi} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$. Ahora, escribimos

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{0,\Omega}^2 = \int_\Omega \boldsymbol{\eta} \cdot (\boldsymbol{f}_h - \boldsymbol{\chi}) = \int_\Omega \boldsymbol{\eta} \cdot \left(\boldsymbol{f}_h - I_h^N \boldsymbol{\chi}\right) + \int_\Omega \boldsymbol{\eta} \cdot \left(I_h^N \boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}\right). \quad (4.12)$$

En virtud de (4.11) tenemos que $(\boldsymbol{f}_h - I_h^N \boldsymbol{\chi}) \in \boldsymbol{\mathcal{K}}_h \subset \boldsymbol{\mathcal{K}}$, de modo que $\boldsymbol{\chi} \perp \left(\boldsymbol{f}_h - I_h^N \boldsymbol{\chi}\right)$ en $\mathrm{L}^2(\Omega)^3$ y, ya que $\boldsymbol{f}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_h = \boldsymbol{\mathcal{K}}_h^{\perp_{\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h}}$, se sigue que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\eta} \cdot \left(\boldsymbol{f}_h - I_h^N \boldsymbol{\chi}\right) = \int_\Omega \boldsymbol{f}_h \cdot \left(\boldsymbol{f}_h - I_h^N \boldsymbol{\chi}\right) - \int_\Omega \boldsymbol{\chi} \cdot \left(\boldsymbol{f}_h - I_h^N \boldsymbol{\chi}\right) = 0.$$

Por lo tanto, a partir de (4.12) y (4.10), concluimos que

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{0,\Omega} \leq \left\|I_h^N \boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}\right\|_{0,\Omega} \leq C h^{r_1} \left\|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{f}_h\right\|_{0,\Omega}.$$

Así, terminamos la demostración □

Ahora estamos listos para demostrar el siguiente resultado, del que se deriva la propiedad P1.

Lema 15. *Existe $C > 0$ tal que, para todo $\boldsymbol{f}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_h$,*

$$\left\|(T - T_h)\, \boldsymbol{f}_h\right\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq C h^{r_1} \left\|\boldsymbol{f}_h\right\|_{\mathbf{curl},\Omega},$$

con r_1 definido en (4.1).

Demostración. Dado $\boldsymbol{f}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_h$, sea $\boldsymbol{\chi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ y $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$ como en el Lema 14. Sea $\boldsymbol{z} := T\boldsymbol{\chi}$ y $\boldsymbol{z}_h := T_h\boldsymbol{\chi}$. La siguiente estimación de Cea se sigue inmediatamente por la definición de T y T_h:

$$\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_h\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq C \inf_{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h} \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{v}_h\|_{\mathbf{curl},\Omega}.$$

Entonces, usando el interpolador de Nédélec, Lema 12 y la estimación del error (cf. [19, Teorema 5.41(1)]), resulta que

$$\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_h\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq C \left\|\boldsymbol{z} - I_h^N \boldsymbol{z}\right\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq C h^{r_k} \left(\|\boldsymbol{z}\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{z}\|_{s,\Omega}\right).$$

Así, por Lema 11, y el hecho que $\boldsymbol{\mathcal{K}} \perp \boldsymbol{\mathcal{V}}$ en $\mathrm{L}^2(\Omega)$, tenemos

$$\|(T - T_h)\, \boldsymbol{\chi}\|_{\mathbf{curl},\Omega} = \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_h\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq C h^{r_k} \|\boldsymbol{\chi}\|_{0,\Omega} \leq C h^{r_k} \|\boldsymbol{f}_h\|_{0,\Omega}.$$

Por otro lado, para $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$, dado que $T\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}$ y $T_h\boldsymbol{\eta}$ es la proyección de Galerkin de $\boldsymbol{\eta}$ en $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$, usando Lema 14(b) podemos escribir

$$\|(T - T_h)\, \boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq \|\boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{curl},\Omega} = \|\boldsymbol{\eta}\|_{0,\Omega} \leq C h^{r_1} \|\boldsymbol{f}_h\|_{\mathbf{curl},\Omega}.$$

por lo tanto,

$$\|(T - T_h)\, \boldsymbol{f}_h\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq \|(T - T_h)\, \boldsymbol{\chi}\|_{\mathbf{curl},\Omega} + \|(T - T_h)\, \boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq C h^{r_1} \|\boldsymbol{f}_h\|_{\mathbf{curl},\Omega}$$

y concluimos la demostración. □

La propiedad P1 claramente se obtiene por el lema anterior y el hecho que T y T_h coinciden en $\boldsymbol{\mathcal{K}}_h$. Como primera consecuencia, tenemos el siguiente resultado que es demostrado a partir de la propiedad P1 en [13, Teorema 1].

Teorema 4.2.1. *Sea $J \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto que contiene a $\sigma(T)$. Entonces, existe $h_0 > 0$ tal que $\sigma(T_h) \subset J \ \forall h < h_0$.*

Una consecuencia del teorema anterior, es que sabemos que el método numérico propuesto no introduce modos espurios (por ejemplo, si usamos elementos finitos de Lagrange; ver [4]).

Ahora, estamos en posición de escribir el resultado principal de este sección, relacionado con la convergencia del esquema propuesto.

Teorema 4.2.2. *Sea $\mu \in \sigma(T)$ un autovalor de multiplicidad finita m y sea $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ el correspondiente espacio propio. Existe $h_0 > 0$ tal que, para todo $h < h_0$, $\sigma(T_h)$ contiene m autovalores $\mu_h^{(1)}, \ldots, \mu_h^{(m)}$ (repetidos de acuerdo a su respectivas multiplicidades) tal que*

$$\mu_h^{(i)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \mu, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Sea $\boldsymbol{\mathcal{E}}_h$ es la suma directa de los espacios correspondientes. Entonces,

$$\widehat{\delta}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{E}}_h\right) \leq C\gamma_h,$$

y

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left| \mu - \mu_h^{(i)} \right| \leq C\gamma_h^2,$$

donde

$$\gamma_h := \delta\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h\right) := \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{E}} \\ \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{curl},\Omega} = 1}} \inf_{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h} \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h\|_{\mathbf{curl},\Omega}$$

y

$$\widehat{\delta}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{E}}_h\right) := \max\left\{\delta\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{E}}_h\right), \delta\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}_h, \boldsymbol{\mathcal{E}}\right)\right\}.$$

Demostración. Como ya hemos demostrado que se tienen las propiedades P1 y P2, el resultado es consecuencia directa de [13, Sección 2] y Teoremas 1 y 3 en [14]. □

Por el teorema previo, concluimos la convergencia espectral con orden óptimo de la aproximación, solo resta tener una estimación adecuada del termino γ_h.

Teorema 4.2.3. *Sea γ_h definido como en el Teorema 4.2.2. Entonces, existe $C > 0$ tal que*

$$\gamma_h \leq Ch^{r_k},$$

con r_k definido en (4.1)*.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$ tal que $\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{curl},\Omega} = 1$. ya que $T\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$, por Lema 11 se sigue que $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^s(\mathbf{curl};\Omega)$ y

$$\|\boldsymbol{v}\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\|_{s,\Omega} \leq \frac{C}{\mu}\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega} \leq \frac{C}{\mu}.$$

En virtud de la Proposición 3 y procediendo como en la demostración de (4.6), tenemos que si $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}$ entonces $I_h^N \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$. Por lo tanto, usando la estimación estándar del error del interpolador de Nédélec (cf. [19, Teorema 5.41(1)]), obtenemos

$$\delta\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h\right) \leq \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{E}} \\ \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{curl},\Omega}=1}} \left\|\boldsymbol{v} - I_h^N \boldsymbol{v}\right\|_{\mathbf{curl},\Omega} \leq C h^{r_k} \left(\|\boldsymbol{v}\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\|_{s,\Omega}\right) \leq \frac{C}{\mu} h^{r_k}.$$

Asi, termina la demostración $\square$

Como consecuencia de los dos teoremas previos concluimos que los autovalores y autofunciones del Problema 6 convergen con orden óptimo a los del Problema 3.

Capítulo 5

Implementación

En esta sección discutimos como implementar computacionalmente las discretizaciones de ambas formulaciones. Comenzaremos con la de la formulación primal que involucra una dificultad común: la imposición de la condición de contorno.

5.1. Implementación de la formulación primal

Para la implementación del Problem 6, es necesario imponer la condición $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n} = 0$ en Γ. Para ello, seguimos un enfoque similar al usado en [17] y [3] para elementos finitos de Nédélec de orden más bajo.

En lo que sigue, por sencillez, supondremos que $\partial\Omega$ es conexa. Si fuera disconexa, deberíamos esencialmente repetir lo que a continuación se describe para cada componente conexa de $\partial\Omega$ que no fuera simplemente conexa.

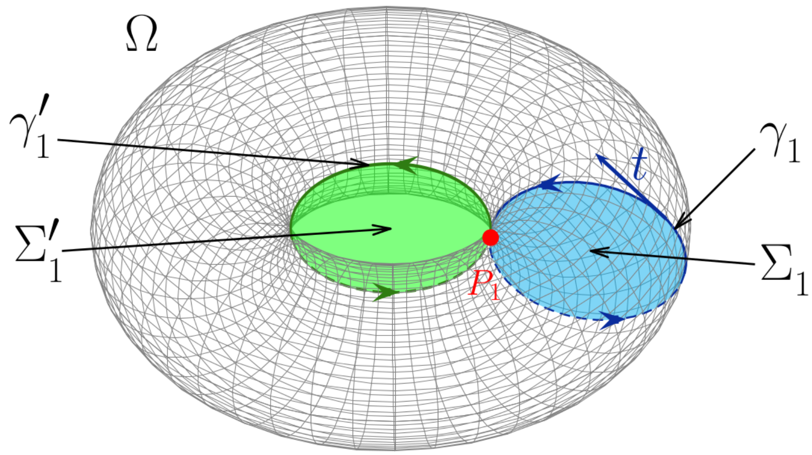

Figura 5.1: Dominio Toroidal con cortes.

Recordemos que ya hemos introducido las superficies de corte $\Sigma_j \subset \Omega$, $j = 1, \ldots, J$, que satisfacen (2.1)-(2.4). Supondremos que cada superficie de corte Σ_j es unión de caras de $\mathcal{T}_h$. Supondremos también que para cada j, $1 \leq j \leq J$, hay una superficie de corte Σ_j' del complemento de $\bar{\Omega}$. Esta familia satisface las mismas propiedades (2.1)-(2.4) en el dominio $\mathbb{R}^3 \backslash \bar{\Omega}$. Finalmente supondremos que $\partial\Sigma_j$ es unión de aristas de $\mathcal{T}_h$, además $\bar{\Sigma}_j$ y $\bar{\Sigma}_j'$ se intersectan en un único punto $P_j \in \partial\Sigma_j \cap \partial\Sigma_j'$ y que $\bar{\Sigma}_j \cap \bar{\Sigma}_k' = \emptyset$ si $j \neq k$.

Definimos $\gamma_j := \partial\Sigma_j$ y $\gamma_j' := \partial\Sigma_j'$ de manera que $\gamma_j \cap \gamma_j' = \{P_j\}$. Sea $\tilde{\tilde{\Gamma}} := \partial\Omega \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{J} \gamma_j \cup \bigcup_{j=1}^{J} \gamma_j' \right)$, que supondremos simplemente conexo. La orientación de las curvas γ_j se escoge de manera que valga el Teorema de Stokes en Σ_j (con el vector normal $\boldsymbol{n}_j$, escogido como en la Sección 2). Las dos caras de Σ_j' se denotan a su vez $\Sigma_j'^{-}$ y $\Sigma_j'^{+}$ de manera tal que la curva γ_j inicie en la primera (desde el punto P_j^-) y llegue a la segunda (hasta el punto P_j^+). En la Figura 5.1 se ilustran estas definiciones en el caso de un toro ($J = 1$).

En tal caso, $\mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n} = 0$ en Γ implica $\mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n} = 0$ en $\tilde{\tilde{\Gamma}}$. En [8, Sección 4] se demuestra que $\mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n} = \mathrm{curl}_\Gamma\, (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}_h \times \boldsymbol{n})$ en $\tilde{\tilde{\Gamma}}$, donde curl_Γ denota el operador rotacional superficial. Por lo tanto, por [8, Teorema 5.1], sabemos que existe $\widetilde{\varphi}_h \in \mathrm{H}^1(\tilde{\tilde{\Gamma}})$ tal que

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}_h \times \boldsymbol{n} = \widetilde{\nabla}_\Gamma \widetilde{\varphi}_h \quad \text{en } \tilde{\tilde{\Gamma}}. \tag{5.1}$$

donde ∇_Γ denota el gradiente superficial (ver definición en [8]). Por otro lado, usando [19, Observación 5.29], se deprende que $\widetilde{\varphi}_h \in \{\psi_h \in \mathcal{C}(\widetilde{\widetilde{\Gamma}}) : \psi_h|_F \in \mathbb{P}_k(F),$ para toda cara F de $\mathcal{T}_h,\ F \subset \widetilde{\widetilde{\Gamma}}\}$.

Además, como $\mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n} = 0$ en Γ, entonces $[\![\widetilde{\varphi}_h]\!]_{\gamma_j} = c_j$, $[\![\widetilde{\varphi}_h]\!]_{\gamma'_j} = c'_j$. Por otro lado, la condición

$$\int_{\Sigma_j} \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n}_j = 0,$$

por el Teorema del Stokes, es equivalente a

$$\int_{\gamma_j} \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{t}_j = 0.$$

En consecuencia, por (5.1), tenemos que

$$\int_{\gamma_j} \frac{\partial \widetilde{\varphi}_h}{\partial \boldsymbol{t}_j} = 0,$$

donde la curva γ_j parte del punto P_j^- y llega al punto P_j^+. Por lo tanto

$$[\![\widetilde{\varphi}_h]\!]_{\Sigma'_j} = \widetilde{\varphi}(P_j^+) - \widetilde{\varphi}_h(P_j^-) = \int_{\gamma_j} \frac{\partial \widetilde{\varphi}_h}{\partial \boldsymbol{t}_j} = 0.$$

En consecuencia, las funciones $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$ satisfacen (5.1) con una función $\widetilde{\varphi}_h$ que no tiene salto en $\gamma'_j = \partial\Sigma'_j$ y por ende es continua en $\widetilde{\Gamma} := \Gamma \setminus \bigcup_{j=1}^{J} \gamma_j$. Por esta razón introducimos

$$\Theta_h := \left\{ \psi_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) :\ \psi_h|_T \in P_k(T)\ \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ y } [\![\widetilde{\psi}_h]\!]_{\Sigma_j} = c_j,\ j = 1, \ldots, J \right\},$$

$$\Theta_h^{\widetilde{\Gamma}} := \left\{ \psi_h|_{\widetilde{\Gamma}} :\ \psi_h \in \Theta_h \right\},$$

$$\mathcal{L}_h(\Omega) := \{\psi_h \in \mathcal{C}(\Omega) :\ \psi_h|_T \in \mathbb{P}_k(T),\ \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{N}}_h \quad \text{y} \quad \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}_h|_{\widetilde{\Gamma}} \times \boldsymbol{n} = \widetilde{\nabla}_\Gamma \left(\widetilde{\varphi}_h|_{\widetilde{\Gamma}} \right),\ \widetilde{\varphi}_h \in \Theta_h.$$

Nuestro siguiente paso es introducir una base conveniente para $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$. Para ello consideremos en primer lugar para cada superficie de corte $\Sigma_j,\ j = 1, \ldots, J$, la función $\widehat{\varphi}_j \in \Theta_h$ definida por

$$\widehat{\varphi}_j(P) = \begin{cases} 1, & P \in \Sigma_j^+, \\ 0, & P \notin \Sigma_j^+, \end{cases} \tag{5.2}$$

para cada vértice P de la malla $\mathcal{T}_h$. Además, sean $P_1, \dots, P_L$ todos los vértices de la malla $\mathcal{T}_h$ que caen en Γ. Sean $\varphi_k \in \mathcal{L}_h(\Omega)$, $k = 1, \dots, L$ definidas por $\varphi_k(P_j) = \delta_{k,j}$ para cada vértice P_j de la malla $\mathcal{T}_h$.

Es fácil verificar que $\{\varphi_k|_\Gamma\}_{k=1}^L \cup \{\widehat{\varphi}_j|_{\widetilde{\Gamma}}\}_{j=1}^J$ es una base de de $\Theta_h^{\widetilde{\Gamma}}$. Por lo tanto, $\{\nabla_\Gamma \varphi_k|_\Gamma\}_{k=1}^L \cup \{\widetilde{\nabla}_\Gamma \widehat{\varphi}_j|_{\widetilde{\Gamma}}\}_{j=1}^J$ es un conjunto de generadores de $\widetilde{\nabla}_\Gamma(\Theta_h^{\widetilde{\Gamma}})$, pero no es linealmente independiente. Para obtener una base de este espacio debemos tomar un vértice en $\widetilde{\Gamma}$ y sacar la función base correspondiente a ese vértice. Asumiremos por simplicidad que la función que sacamos es la última, por lo que $\{\nabla_\Gamma \varphi_k|_\Gamma\}_{k=1}^{L-1} \cup \{\widetilde{\nabla}_\Gamma \widehat{\varphi}_j|_{\widetilde{\Gamma}}\}_{j=1}^J$ es base de $\widetilde{\nabla}_\Gamma(\Theta_h^{\widetilde{\Gamma}})$.

Sea $\{\boldsymbol{\phi}_m\}_{m=1}^M$ la base nodal de $\boldsymbol{\mathcal{N}}_h$; sin pérdida de generalidad podemos suponer también que los últimos, $\{\boldsymbol{\phi}_m\}_{m=N+1}^M$, son los correspondientes a los grados de libertad relacionados a las caras o aristas en Γ. Notemos que todas las demás funciones base pertenecen a $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$. Así, tenemos la siguiente proposición que caracteriza a la base de este espacio.

Proposición 5. *El conjunto* $\{\boldsymbol{\phi}_m\}_{m=1}^N \cup \{\nabla\varphi_k\}_{k=1}^{L-1} \cup \{\widetilde{\nabla}\widehat{\varphi}_j\}_{j=1}^J$ *es base de* $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$.

Demostración. Es esencialmente idéntica a la de Proposición 4.2 en [17], donde se demuestra un resultado similar usando los elementos finitos de Nédélec de orden inferior y bajo supuestos adicionales.

Primero demostramos que $\{\boldsymbol{\phi}_m\}_{m=1}^N \cup \{\nabla\varphi_k\}_{k=1}^{L-1} \cup \{\widetilde{\nabla}\widehat{\varphi}_j\}_{j=1}^J$, que es claramente un subconjunto de $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$, genera a $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$. Sea $\boldsymbol{\phi}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$, por (5.1), $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\phi}_h|_{\widetilde{\Gamma}} \times \boldsymbol{n} \in \widetilde{\nabla}_\Gamma(\Theta_h^{\widetilde{\Gamma}})$ y, por lo tanto, existe β_k, $k = 1, \dots, L-1$, y $\widehat{\beta}_j$, $j = 1, \dots, J$, tales que

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\phi}_h|_{\widetilde{\Gamma}} \times \boldsymbol{n} = \sum_{k=1}^{L-1} \beta_k \nabla_\Gamma \varphi_k + \sum_{j=1}^{J} \widehat{\beta}_j \widetilde{\nabla}_\Gamma \widehat{\varphi}_j.$$

Entonces, los grados de libertad de $\boldsymbol{\phi}_h - \sum_{k=1}^{L-1} \beta_k \nabla\varphi_k + \sum_{j=1}^J \widehat{\beta}_j \widetilde{\nabla}\widehat{\varphi}_j \in \boldsymbol{\mathcal{N}}_h$, que corresponden a las aristas o caras sobre la frontera, se anulan. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\phi}_h - \sum_{k=1}^{L-1} \beta_k \nabla\varphi_k + \sum_{j=1}^{J} \widehat{\beta}_j \widetilde{\nabla}\widehat{\varphi}_j \in \langle \boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_N \rangle .$$

Solo resta demostrar que $\{\boldsymbol{\phi}_m\}_{m=1}^N \cup \{\nabla\varphi_k\}_{k=1}^{L-1} \cup \{\widetilde{\nabla}\widehat{\varphi}_j\}_{j=1}^J$ es un conjunto linealmente independiente. Supongamos que

$$\sum_{m=1}^{N} \alpha_m \boldsymbol{\phi}_m + \sum_{k=1}^{L-1} \beta_k \nabla\varphi_k + \sum_{j=1}^{J} \widehat{\beta}_j \widetilde{\nabla}\widehat{\varphi}_j = 0.$$

como $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\phi}_m|_\Gamma \times \boldsymbol{n}$ es cero para todo $m = 1, \dots, N$, $\boldsymbol{n} \times \nabla\varphi_k|_\Gamma \times \boldsymbol{n} = \nabla_\Gamma \varphi_k$, $\boldsymbol{n} \times \widetilde{\nabla}\widehat{\varphi}_j|_{\widetilde{\Gamma}} \times \boldsymbol{n} = \widetilde{\nabla}_\Gamma \widehat{\varphi}_j$ y como $\{\nabla_\Gamma \varphi_k\}_{k=1}^{L-1} \cup \{\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\Gamma}} \widehat{\varphi}_j\}_{j=1}^J$ es una base de $\widetilde{\nabla}_\Gamma(\Theta_h^{\widetilde{\Gamma}})$, tenemos que $\beta_1 = \cdots = \beta_{L-1} = \widehat{\beta}_1 = \cdots = \widehat{\beta}_J = 0$. Dado que el conjunto $\{\boldsymbol{\phi}_m\}_{m=1}^N$ es linealmente independiente, obtenemos el resultado. $\square$

En realidad, la restricción $\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n} = 0$ en Γ y $\int_{\Sigma_j} \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n}_j = 0$, $j = 1, \ldots, J$, en la definición de $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$ puede imponerse sin la necesidad de usar las funciones bases $\{\nabla\varphi_k\}_{k=1}^{L-1} \cup \{\widetilde{\nabla}\widehat{\varphi}_j\}_{j=1}^{J}$. Ilustramos esto en el caso de los elementos Nédélec del orden más bajo, que son los que se han implementado en el código utilizado para las pruebas numéricas presentadas en la siguiente sección.

Sea $\{e_1, \ldots, e_M\}$ es el conjunto de todas las aristas en $\mathcal{T}_h$ y $\{\boldsymbol{\phi}_m\}_{m=1}^M$ la base nodal de $\boldsymbol{\mathcal{N}}_h$, asociada a estas aristas. Entonces, para cualquier $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{\mathcal{N}}_h$,

$$\boldsymbol{u}_h = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \boldsymbol{\phi}_m,$$

donde $\alpha_m := \int_{e_m} \boldsymbol{u}_h \cdot \boldsymbol{t}_m$, con $\boldsymbol{t}_m$ un vector unitario tangente a e_m, $m = 1, \ldots, M$. Asumimos como antes que las aristas en Γ son las últimas: $e_{N+1}, \ldots, e_M$.

Por la Proposición 5, para $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$, existen números $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_N$, $\beta_1, \ldots, \beta_{L-1}$ y $\widehat{\beta}_1, \ldots, \widehat{\beta}_J$ tal que

$$\boldsymbol{u}_h = \sum_{m=1}^{N} \alpha'_m \boldsymbol{\phi}_m + \sum_{k=1}^{L} \beta_k \nabla\varphi_k + \sum_{j=1}^{J} \widehat{\beta}_j \widetilde{\nabla}\widehat{\varphi}_j,$$

donde $\beta_L = 0$ (el fijado a cero). Entonces, por la definición de α_m y la relación anterior, obtenemos:

$$\alpha_m = \alpha_m^* + \begin{cases} 0, & \text{si } e_m \cap \Sigma_j^+ = \emptyset \text{ o } e_m \subset \Sigma_j^+ \\ \pm\widehat{\beta}_j, & \text{si } e_m \cap \Sigma_j^+ = \{P\} \text{ (solo un vertice)}, \end{cases}$$

con

$$\alpha_m^* = \begin{cases} \alpha'_m, & \text{si } e_m \cap \Gamma = \emptyset, \\ \alpha'_m \pm \beta_j, & \text{si } e_m \cap \Gamma = \{P_j\}, \\ \alpha'_m \pm (\beta_j - \beta_k), & \text{si } e_m \cap \Gamma = \{P_j, P_k\} \ \ (e_m \not\subset \Gamma), \\ \pm(\beta_j - \beta_k), & \text{si } e_m \subset \Gamma, \text{, con puntos extremos, } P_j,\ P_k. \end{cases}$$

El signo anterior depende de como se tomen las orientaciones del vector tangente $\boldsymbol{t}_m$.

Estas relaciones nos permiten definir una matriz $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{M\times(N+L+J)}$ tal que $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{C}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$, donde $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_M)^{\mathrm{t}}$ y $\widehat{\boldsymbol{\alpha}} := (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_N, \beta_1, \ldots, \beta_L, \widehat{\beta}_1, \ldots, \widehat{\beta}_J)^{\mathrm{t}}$. notemos que mayoría de la entradas de esta matriz son nulas y las otras son ± 1.

Sea $\boldsymbol{A} := (A_{ij})$ y $\boldsymbol{B} := (B_{ij})$ las matrices $M \times M$ definidas por

$$A_{ij} := \int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi}_j \cdot \mathbf{curl}\,\bar{\boldsymbol{\phi}}_i \qquad \text{y} \qquad B_{ij} := \int_\Omega \boldsymbol{\phi}_j \cdot \bar{\boldsymbol{\phi}}_i, \qquad i, j = 1, \ldots, M.$$

Entonces, usando la base de $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$ por la Proposición 5, la forma matricial del Problema 6 es la siguiente:

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \lambda_h^2 \widehat{\boldsymbol{B}}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}, \tag{5.3}$$

con $\widehat{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ es una matriz hermitiana, semi-definida positiva y $\widehat{\boldsymbol{B}} := \boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ matriz hermitiana definida positiva. Así, este problema matricial generalizado de autovalores está bien planteado.

5.2. Implementación de la formulación mixta

Para este enfoque, necesitamos imponer las restricciones del espacio $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_h$, esto se hace de manera análoga a la sección anterior. Por otro lado se utiliza como base del espacio Θ_h, la base nodal de los elementos finitos de Lagrange en Ω, más las funciones base $\widehat{\varphi}_j$ definidas en (5.2). Estas son las que nos permiten enriquecer el espacio con saltos constantes en las superficies de cada corte Σ_j. Notemos que esto último agrega, al problema matricial, sólo un grado de libertad más por cada superficie de corte. Luego de ensamblar las matrices correspondientes al Problema 5, bajo las consideraciones anteriores, se obtiene un esquema matricial mixto de valores propios estructurado de la siguiente forma.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{t}} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{\chi} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{\chi} \end{pmatrix}.$$

Como sabemos que $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{0}$, el esquema anterior es equivalente al siguiente:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{t}} \\ \boldsymbol{B} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{\chi} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{\chi} \end{pmatrix}.$$

Este a su vez lo podemos reescribir como sigue:

$$\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{C}\boldsymbol{w}. \tag{5.4}$$

Así, este nuevo esquema matricial de valores propios, se caracteriza porque la matriz del lado derecho es Hermitiana y definida positiva, además la matriz del lado izquierdo es hermitiana. Esto permite ahora aplicar herramientas computacionales clásicas para el cálculo de los autovalores del Problema 5.

Capítulo 6

Experimentos Numéricos

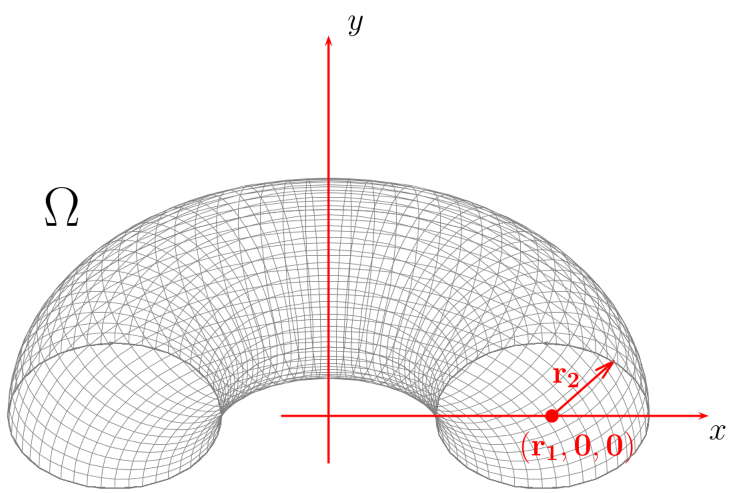

Figura 6.1: Dominio Toroidal.

Se han desarrollado códigos Matlab basados en elementos de Nédélec del orden más bajo ($k = 1$) para la solución de Problema 5 y del Problema 6. En esta sección presentamos experimentos numéricos que nos permiten confirmar los resultados teóricos demostrados.

Hemos considerado un ejemplo en un dominio toroidal centrado en el origen, con radio interior $r_2 = 0.5$ y radio exterior $r_1 = 1$, como el presentado en la Figura 6.1. Los códigos han sido utilizados en varias mallas $\mathcal{T}_h$ con diferentes niveles de refinamiento; identificamos cada malla con su respectivo número de tetraedros

N_h.

6.1. Ejemplos numéricos para el esquema mixto

Dado que no existe solución analítica del Problema 1, para un dominio Ω, cuando el dominio no es simplemente conexo, estudiaremos el orden de convergencia de los esquemas planteados comparando los resultados calculados en diferentes mallas con los obtenidos mediante extrapolación.

La Tabla 6.1 muestra los 4 autovalores positivos más pequeños del Problema 5, que aproximan a los dos más pequeños positivos del problema 2, calculados en diferentes mallas. Para cada autovalor calculado estimamos el orden de convergencia del método y un valor extrapolado (que esperamos sea una mejor aproximación del autovalor exacto) usando las 13 mallas mas finas, mediante un ajuste por mínimos cuadrados con el modelo

$$\lambda_{h,k} \approx \lambda_{\text{ex}} + Ch^t. \tag{6.1}$$

Tabla 6.1: Autovalores del Problema 5 para un dominio toroidal.

N_h	λ_1^M	λ_2^M	λ_3^M	λ_4^M
1259	13.7352	14.2419	14.7751	15.5001
2656	8.4648	8.6325	8.7671	8.9228
3822	7.9359	8.0224	8.1618	8.2056
7812	7.2752	7.2941	7.4303	7.4328
20384	6.6320	6.6353	6.7104	6.7118
28321	6.5199	6.5252	6.5888	6.5903
43667	6.4406	6.4444	6.5105	6.5121
58732	6.4096	6.4129	6.4723	6.4746
75999	6.3824	6.3871	6.4439	6.4448
97886	6.3565	6.3590	6.4155	6.4161
131222	6.3276	6.3285	6.3840	6.3842
154592	6.3156	6.3162	6.3726	6.3734
171127	6.3093	6.3098	6.3657	6.3662
182885	6.3075	6.3080	6.3642	6.3644
241429	6.2829	6.2833	6.3370	6.3370
264623	6.2781	6.2787	6.3323	6.3324
301862	6.2737	6.2741	6.3275	6.3277
λ_{ex}	6.2233	6.2174	6.2714	6.2690
orden	2.2000	2.1200	2.1700	2.1400

De los resultados presentados en el Cuadro 6.1, observamos que el orden de convergencia obtenido, para cada autovalor, es el esperado según los resultados teóricos de la Sección 4.1.

Como evidencia de la calidad del ajuste vemos en la Figura 6.2 a la Figura 6.5 gráficos, para cada uno de los autovalores, de los errores del modelo y de la recta ajustada en escala logarítmica.

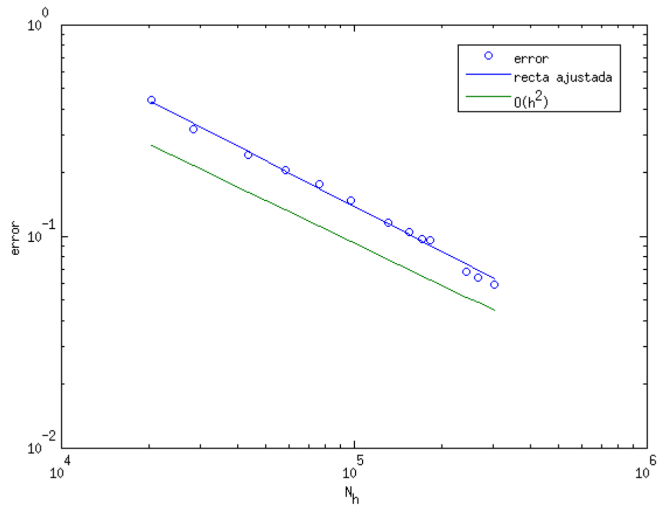

Figura 6.2: Error $|\lambda_{\text{ex},1} - \lambda_{h,1}|$ versus número de tetraedros N_h (escala log-log).

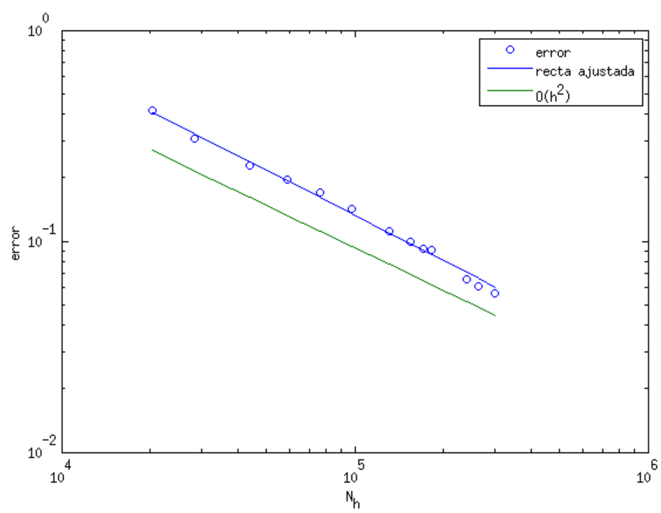

Figura 6.3: Error $|\lambda_{\text{ex},2} - \lambda_{h,2}|$ versus número de tetraedros N_h (escala log-log).

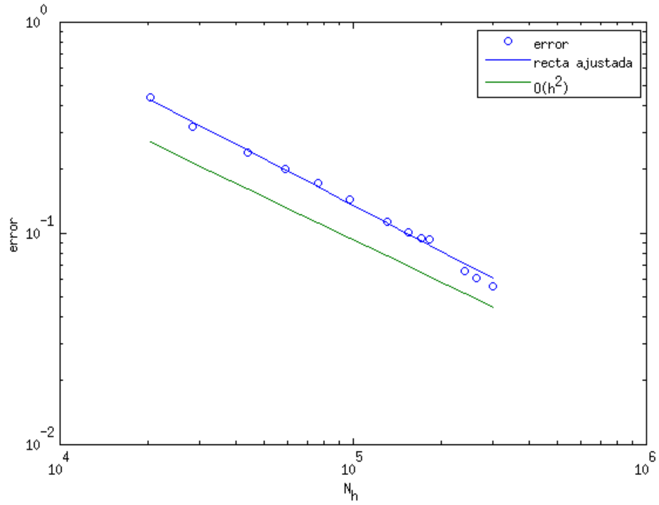

Figura 6.4: Error $|\lambda_{\text{ex},3} - \lambda_{h,3}|$ versus número de tetraedros N_h (escala log-log).

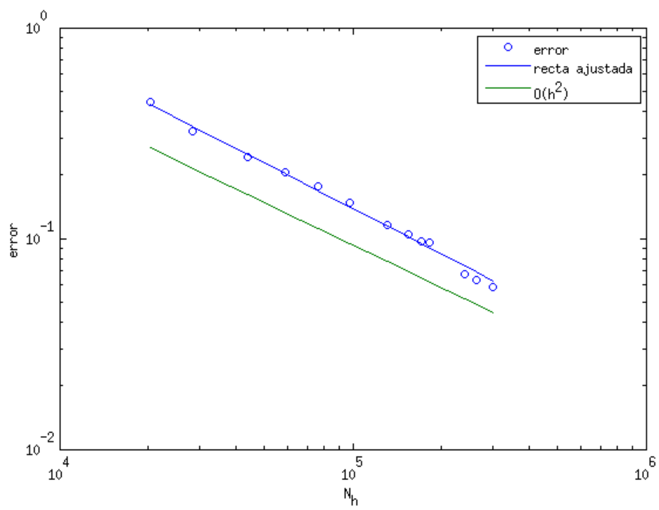

Figura 6.5: Error $|\lambda_{\text{ex},4} - \lambda_{h,4}|$ versus número de tetraedros N_h (escala log-log).

Las Figuras 6.6-6.9 muestran la función propia correspondiente al valor propio positivo más pequeño, calculada mediante el Problema 5.

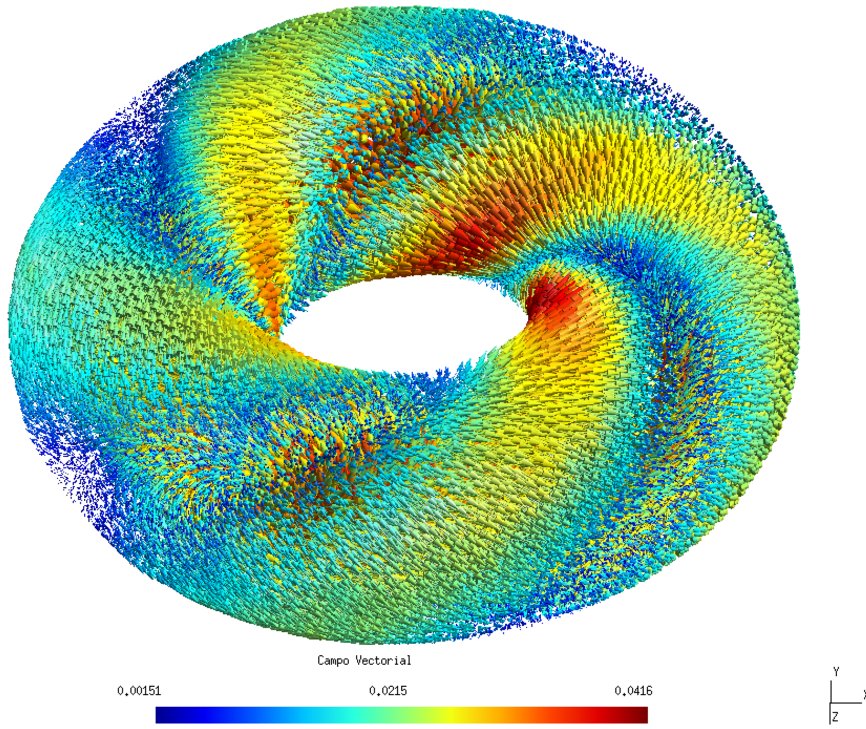

Figura 6.6: Autofunción para un dominio toroidal, asociada al valor propio más pequeño.

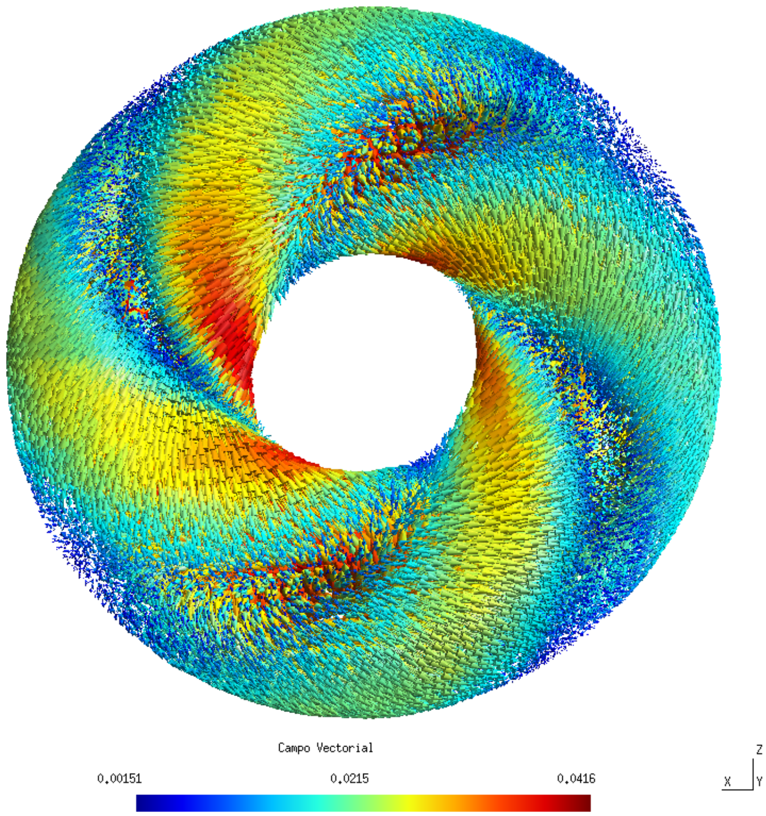

Figura 6.7: Autofunción para un dominio toroidal, asociada al valor propio más pequeño. Vista Frontal, plano xz.

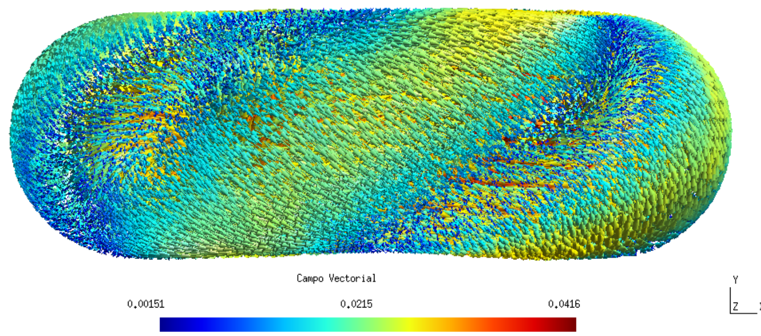

Figura 6.8: Autofunción para un dominio toroidal, asociada al valor propio más pequeño. Vista perfil, plano xy.

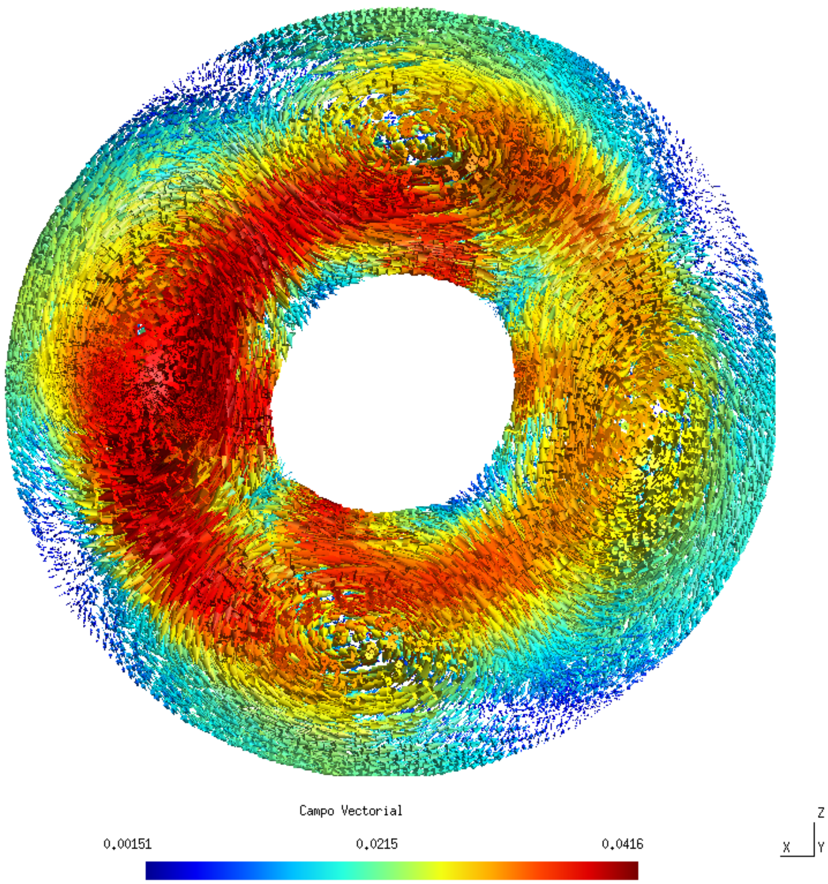

Figura 6.9: Autofunción para un dominio toroidal, asociada al valor propio más pequeño. Vista del corte a la altura $y = 0.5$, plano xz.

6.2. Ejemplos numéricos para el esquema primal

El mismo ejemplo se resolvió mediante la implementación del Problema 6, que es la discretización de la formulación primal presentada en el Problema 3. Dada la simetría del dominio, es fácil verificar que $(\lambda, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ es una solución del Problema 1 si y sólo si $(-\lambda, \boldsymbol{u}(-\boldsymbol{x}))$ también es una solución, por lo tanto, λ^2 es un autovalor del Problema 3 con multiplicidad de al menos dos. En este caso, por lo tanto, los cuatro valores propios más pequeños, soluciones del problema 6, convergen a un mismo valor y lo mismo ocurre con los cuatro siguientes.

De acuerdo con los resultados teóricos, el espacio invariante generado por las funciones propias del Problema 6 son una aproximación del espacio propio de λ^2 en Problema 3. Sin embargo, el último es la suma directa de dos espacios propios del Problema 1, los correspondientes a λ y $-\lambda$. Por lo tanto, las autofunciones de Problema 6 no son generalmente autofunciones del Problema 1 (y por lo tanto campos de Beltrami), sino combinaciones lineales de funciones propias correspondientes a ambos valores propios, λ y $-\lambda$.

La Tabla 6.2 muestra los valores calculados con las mismas mallas del test anterior. En este caso, los valores calculados no dependen monótonamente del paso h y no es posible estimar ningún orden de convergencia, por mínimos cuadrados. Sin embargo, pese a ello en cada malla los valores obtenidos con la formulación primal son mucho más precisos que los de la formulación mixta. Para permitir una mejor comparación se presentan en la Tabla 6.3 los valores calculados con cada método para un par de autovalores del Problema 5 y Problema 6.

Tabla 6.2: Autovalores del Problema 6 para un dominio toroidal.

N_h	λ_1^P	λ_2^P	λ_3^P	λ_4^P	λ_5^P	λ_6^P	λ_7^P	λ_8^P
1259	5.6529	5.9555	5.9853	6.0842	6.2320	6.2830	6.3666	6.3850
2656	5.9366	6.0836	6.1563	6.1952	6.2194	6.2604	6.3392	6.4339
3822	6.1680	6.2143	6.2301	6.2519	6.2701	6.3036	6.3886	6.4794
7812	6.2100	6.2316	6.2420	6.2541	6.2662	6.3033	6.3818	6.4043
20384	6.1931	6.2189	6.2310	6.2394	6.2608	6.2656	6.2970	6.3124
28321	6.2251	6.2381	6.2392	6.2481	6.2785	6.2862	6.2972	6.3008
43667	6.2156	6.2308	6.2326	6.2394	6.2732	6.2798	6.2861	6.2901
58732	6.2087	6.2258	6.2262	6.2331	6.2624	6.2715	6.2806	6.2878
75999	6.2079	6.2211	6.2216	6.2268	6.2631	6.2690	6.2717	6.2775
97886	6.2083	6.2166	6.2180	6.2208	6.2578	6.2629	6.2734	6.2769
131222	6.2143	6.2209	6.2216	6.2237	6.2679	6.2711	6.2734	6.2768
154592	6.2145	6.2190	6.2202	6.2211	6.2658	6.2680	6.2722	6.2768
171127	6.2165	6.2204	6.2214	6.2222	6.2683	6.2706	6.2731	6.2772
182885	6.2155	6.2191	6.2213	6.2225	6.2662	6.2707	6.2728	6.2776
241429	6.2209	6.2230	6.2236	6.2252	6.2722	6.2738	6.2747	6.2764
264623	6.2214	6.2239	6.2244	6.2257	6.2736	6.2750	6.2753	6.2768
301862	6.2208	6.2233	6.2242	6.2253	6.2730	6.2744	6.2752	6.2764

Tabla 6.3: Comparación de los autovalores del Problema 6 y Problema 5.

N_h	λ_1^M	λ_1^p	λ_3^M	λ_5^P
1259	13.7352	5.6529	14.7751	6.2320
2656	8.4648	5.9366	8.7671	6.2194
3822	7.9359	6.1680	8.1618	6.2701
7812	7.2752	6.2100	7.4303	6.2662
20384	6.632	6.1931	6.7104	6.2608
28321	6.5199	6.2251	6.5888	6.2785
43667	6.4406	6.2156	6.5105	6.2732
58732	6.4096	6.2087	6.4723	6.2624
75999	6.3824	6.2079	6.4439	6.2631
97886	6.3565	6.2083	6.4155	6.2578
131222	6.3276	6.2143	6.384	6.2679
154592	6.3156	6.2145	6.3726	6.2658
171127	6.3093	6.2165	6.3657	6.2683
182885	6.3075	6.2155	6.3642	6.2662
241429	6.2829	6.2209	6.3370	6.2722
264623	6.2781	6.2214	6.3323	6.2736
301862	6.2737	6.2208	6.3275	6.2730
λ_{ex}	6.2233	-	6.2714	-

6.3. Conclusión

- Los resultados numéricos obtenidos en ambos métodos avalan los resultados teóricos de las secciones anteriores.

- De los resultados obtenidos con ambos métodos, podemos decir que si bien en el esquema mixto se observa un buen orden de convergencia, para obtener una precisión aceptable, es necesario un gran esfuerzo computacional, esto medido en tiempo de cálculo y en memoria. El esquema (5.4), involucra un matriz menos dispersa que la correspondiente al esquema (5.3), debido a la presencia de la matriz $\boldsymbol{B}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}$.

- Si bien el esquema primal no permite establecer claramente un orden de convergencia, se necesitan muchos menos grados de libertad ($N_h = 28321$) para obtener resultados más precisos, que con la malla más fina ($N_h = 301862$) en el esquema mixto.

Bibliografía

[1] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault, *Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains*, Math. Methods Appl. Sci., **21** (1998) 823–864.

[2] E. Beltrami, *Considerazioni idrodinamiche*, Rend. Inst. Lombardo Acad. Sci. Let., **22** (1889) 122–131. (English translation: *Considerations on hydrodynamics*, Int. J. Fusion Energy, **3** (1985) 53–57.)

[3] A. Bermúdez, R. Rodríguez, and P. Salgado, *Numerical analysis of electric field formulations of the eddy current model*, Numer. Math., **102** (2005) 181–201.

[4] D. Boffi, *Finite element approximation of eigenvalue problems*, Acta Numer., **19** (2010) 1–120.

[5] T.Z. Boulmezaud and T. Amari, *Approximation of linear force-free fields in bounded 3-D domains*, Math. Comp. Model., **31** (2000) 109–129.

[6] ______, *A finite-element method for computing nonlinear force-free fields*, Math. Comput. Model., **34** (2001) 903–920.

[7] T.Z. Boulmezaud, Y. Maday, and T. Amari, *On the linear force-free fields in bounded and unbounded three-dimensional domains*, M^2AN Math. Model. Numer. Anal., **33** (1999) 359–393.

[8] A. Buffa, M. Costabel, and D. Sheen, *On traces for* $\mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)$ *in Lipschitz domains*, J. Math. Anal. Appl., **276** (2002) 845–867.

[9] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer.

[10] J. Cantarella, D. De Turck, H. Gluck, and M. Teytel, *The spectrum of the curl operator on spherically symmetric domains*, Phys. Plasmas, **7** (2000) 2766–2775.

[11] S. Chandrasekhar and L. Woltjer, *On force-free magnetic fields*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **44** (1958) 842–847.

[12] S. Chandrasekhar and P.C. Kendall, *On force-free magnetic fields*, Astrophys. J., **126** (1957) 457–460.

[13] J. Descloux, N. Nassif, and J. Rappaz, *On spectral approximation. I. The problem of convergence*, RAIRO Anal. Numér., **12** (1978) 97–112.

[14] _____, *On spectral approximation. II. Error estimates for the Galerkin method*, RAIRO Anal. Numér., **12** (1978) 113–119.

[15] V. Girault and P.-A Raviart, *Finite Element Approximations of the Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms.* Springer, Berlin, 1986.

[16] Ralf Hiptmair, Peter Robert Kotiuga and Sébastien Tordeux *Self-adjoint curl operators*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **191** (2012), 431-457.

[17] S. Meddahi and V. Selgas, *A mixed-FEM and BEM coupling for a three-dimensional eddy current problem*, M^2AN Math. Model. Numer. Anal., **37** (2003) 291–318.

[18] B. Mercier, J. Osborn, J. Rappaz, and P.-A. Raviart, *Eigenvalue approximation by mixed and hybrid methods*, Math. Comp., **36** (1981) 427–453.

[19] P. Monk, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations.* Oxford University Press, New York, 2003.

[20] E.C. Morse, *Eigenfunctions of the curl in cylindrical geometry*, J. Math. Phys., **46** (2005) 113511, 13pp.

[21] J.C. Nédélec, *Mixed finite elements in* $\mathbb{R}^3$, Numer. Math., **35** (1980) 315–341.

[22] Rodolfo Rodríguez and Pablo Venegas, *Numerical aproximation of the spectrum of the curl operator*, Math. Comp. (online: S 0025-5718(2013)02745-7).

[23] J.B. Taylor, *Relaxation of toroidal and generation of reverse magnetic fields*, **33** (1974) 1139–1141.

[24] L. Woltjer, *A theorem on force-free magnetic fields*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **44** (1958) 489–491.

[25] _____,*The crab nebula*, Bull. Astron. Inst. Neth., **14** (1958) 39–80.

[26] Z. Yoshida and Y. Giga, *Remarks on spectra of operator rot*, Math. Z., **204** (1990) 235–245.