



UNIVERSIDAD DE CONCEPCION  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA  
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

---

# Un Método de Galerkin Discontinuo para la ecuación del calor en dominios no necesariamente poligonales

(A discontinuous Galerkin method for the  
heat equation in non poligonal domains)

---

*Tesis para optar al grado de ingeniero civil matemático*

AUTOR

Fernando A. PEÑA

PROFESOR GUÍA

Dr. Manuel E. SOLANO

Departamento de Ingeniería Matemática & CI<sup>2</sup>MA  
Universidad de Concepción, Chile

2 de junio de 2020

**Un Método de Galerkin Discontinuo para la ecuación del calor  
en dominios no necesariamente poligonales**

Fernando A. Peña Villalobos

**Profesor Guía:** Manuel E. Solano

**COMISIÓN EVALUADORA**

Prof. Manuel E. Solano

Prof. Paulo Zuñiga

Prof. Tonatiuh Sanchez-Vizuet

**COMISIÓN EXAMINADORA**

Firma: \_\_\_\_\_  
Dr. Manuel E. Solano, Universidad de Concepción, Chile.

Firma: \_\_\_\_\_  
Dr. Paulo Zuñiga, Universidad de Concepción, Chile.

Firma: \_\_\_\_\_  
Dr. Tonatiuh Sanchez-Vizuet, Courant Institute of Mathematical Sciences, Estados Unidos.

Calificación: \_\_\_\_\_

# Agradecimientos

Agradezco al personal de la Biblioteca Central, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y el Departamento de Ingeniería Matemática por brindarme las herramientas y apoyo por estos 8 años, y a Conicyt-Chile por medio del proyecto FONDECYT 1160320 por financiar este trabajo.

A mi profesor guía Manuel Solano quien me ayudó y orientó desde el curso de elementos finitos hasta ahora. Agradezco la paciencia y tiempo que dedicó a mostrarme su valioso conocimiento. Agradezco a los integrantes de la comisión evaluadora, Tonatiuh Sanchez-Vizuet y Paulo Zuñiga por los comentarios y observaciones tanto en la defensa como revisión.

También a la vida y la suerte que me tocó por ponerme en el camino retos que fueron incrementando progresivamente en dificultad a través del tiempo.

A las personas especiales que conocí en Concepción.

A mi familia, en especial a mi Mamá, Papá y Hermano, a ellos les dedico este trabajo.



# Índice general

Agradecimientos	III
Abstract	1
<b>1. Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1. Espacios continuos y normas	7
1.2. Espacios continuos que dependen del tiempo	8
1.3. Polinomios y desigualdades	8
1.4. Operadores de Extensión	9
1.4.1. Operador extensión polinomial $E$	9
1.4.2. Extensión en espacios de Hilbert	9
1.5. Proposiciones auxiliares	9
1.6. Notación curvas parametrizadas en $\mathbb{R}^d$	9
<b>2. Construcción de la malla y notación</b>	<b>11</b>
2.1. Dominio computacional $D_h$	11
2.2. Caminos de tranferencia de la condición Dirichlet	12
2.3. Regiones de extrapolación	12
2.3.1. Definición de $\widetilde{K}_{ext}^e$	12
2.3.2. Definición de $K_{ext}^e$	12
2.3.3. Parámetros y constantes auxiliares	13
2.3.4. Hipótesis	14
2.3.5. Resultados previos	14
2.4. Espacio discretos y proyectores	15
2.4.1. Constantes auxiliares	15
<b>3. Método HDG</b>	<b>17</b>
3.1. Esquema HDG	17
3.2. Existencia y unicidad del esquema semidiscreto	17
<b>4. Análisis de error</b>	<b>21</b>
4.1. Ecuaciones del error de proyección	21
4.2. Análisis del error en el dominio computacional	22
<b>5. Análisis del error en <math>D_h^c</math></b>	<b>29</b>
5.1. Estimaciones para la derivada normal del error de proyección en $K_{ext}^e$	29
5.2. Error de aproximación en $D_h^c$	31
<b>6. Experimentos numéricos</b>	<b>33</b>
6.1. Ejemplo 1: Dominio Circular	33
6.2. Ejemplo 2: Dominio “Kidney”	34
6.3. Ejemplo 3: Animación del problema	35
A.1. Apéndice	40



# Índice de figuras

1.	Representación del camino de transferencia desde $\Gamma$ a $\Gamma_h$ y $l(\mathbf{x})$ es el largo del segmento que une a $\mathbf{x}$ con $\bar{\mathbf{x}}$ , cuyo vector unitario tangente es $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ . . . . .	4
2.1.	La unión de los elementos en gris conforman el dominio computacional $D_h$ , cuya frontera es $\Gamma_h$ . Esto se obtiene inscrutando $\Omega$ en $\mathcal{M}$ . . . . .	11
2.2.	Ejemplo de $\widetilde{K}_{ext}^e$ . . . . .	12
2.3.	La región sombreada representa de $K_{ext}^e$ . Notamos que el punto $\bar{\mathbf{x}} \in \Gamma_h$ es el que se alcanza en dirección normal a $e$ . . . . .	13
2.4.	Representación de $\widetilde{K}_{ext}^e$ y $K_{ext}^e$ . En esta gráfica se observa que $K_{ext}^e \subset \widetilde{K}_{ext}^e$ . . . . .	13
2.5.	Representación de $H_e^\perp$ y $h_e^\perp$ junto a su respectivo elemento $K^e$ . . . . .	13
6.1.	Gráfico comparativo $N_{elem} = 6952$ $k = 0$ y $t = 1$ . . . . .	34
6.2.	Gráfico comparativo $N_{elem} = 6952$ $k = 1$ y $T = 1$ . . . . .	35
6.3.	Gráfico comparativo $N_{elem} = 6952$ $k = 2$ y $T = 1$ . . . . .	35
6.4.	Gráfico comparativo $N_{elem} = 6508$ $k = 0$ y $t = 1$ . . . . .	37
6.5.	Gráfico comparativo $N_{elem} = 6508$ , $k = 1$ y $t = 1$ . . . . .	37
6.6.	Gráfico comparativo $N_{elem} = 6508$ , $k = 2$ y $t = 1$ . . . . .	38



# Índice de cuadros

6.1. Tabla de convergencia en el dominio Circular . . . . .	34
6.2. Tabla de convergencia en el dominio “Kidney” . . . . .	36



# Resumen

En esta tesis se propone y analiza un esquema de Galerkin discontinuo hibridizable (HDG) para la ecuación del calor en un dominio  $\Omega$  no necesariamente poligonal o poliédrico con frontera Lipschitz y de clase  $C^2$  salvo en un conjunto de medida nula. En particular, se utilizó una técnica de aproximación del dominio  $\Omega$  mediante un subdominio computacional que es poligonal ó poliédrico. Esta técnica, que consiste en transferir la condición de contorno definida en  $\Gamma$  a la frontera del dominio poligonal  $\Gamma_h := \partial D_h$  en forma apropiada, se ha estudiado en varios tipos de ecuaciones de problemas estacionarios. En ésta tesis trabajamos con la ecuación del calor en un dominio no poligonal o poliédrico y demostramos que esta técnica de transferencia produce un esquema bien puesto bajo ciertas suposiciones, que tienen que ver básicamente con la distancia entre  $\Gamma_h$  y  $\Gamma$  y también demostramos que bajo estas mismas hipótesis el esquema es óptimo. Finalmente validaremos los resultados obtenidos realizando experimentos numéricos en 2D.



# Introducción

La ecuación del calor es una ecuación diferencial en derivadas parciales que obedece a la ley de Fourier y el teorema de la divergencia de Gauss. En [24, Capítulo 7], se puede ver la deducción y análisis de ésta en espacios de Hilbert. Principalmente la ecuación del calor se utiliza para conocer la distribución de temperatura de un cuerpo en un instante  $t > 0$ . Específicamente consideremos la ecuación:

$$u_t(t, \mathbf{x}) - \Delta u(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (0.0.1a)$$

$$u(t, \mathbf{x}) = g(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma := \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (0.0.1b)$$

$$u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (0.0.1c)$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$   $d = 2, 3$  es un dominio fijo no necesariamente poligonal ó poliédrico. Acá  $u(\mathbf{x}, t)$  es la distribución de temperatura del cuerpo en el punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  e instante  $t > 0$ ,  $u_0$  es la distribución de temperatura inicial,  $f$  es un término fuente dado,  $g$  es la condición de frontera. Más adelante se especificará en que espacio están los datos. Introduciendo la variable auxiliar  $\mathbf{q} = -\nabla u$ , se trabaja con el problema:

$$\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = -\nabla u(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (0.0.2a)$$

$$u_t(t, \mathbf{x}) + \operatorname{div}(\mathbf{q}(t, \mathbf{x})) = f(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (0.0.2b)$$

$$u(t, \mathbf{x}) = g(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma := \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (0.0.2c)$$

$$u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (0.0.2d)$$

El objetivo de este trabajo es analizar un método de Galerkin Discontinuo Hibridizable HDG (hybridizable discontinuous Galerkin por sus siglas en inglés) para el problema (0.0.2) cuando  $\Omega$  es un dominio poligonal ó poliédrico. Este método fue introducido en [12] en el contexto de problemas elípticos de segundo orden. Desde entonces, una gran variedad de problemas han sido resueltos utilizando el método HDG en dominios poliédricos. Por ejemplo, el problema de difusión estacionario [1, 10, 12, 13, 22, 41]. Además el método ha sido propuesto y analizado para problemas de convección difusión [11, 32, 37, 40], ecuaciones de Stokes [14, 26, 35], Brinkman [2, 29], Oseen [3, 6], Navier-Stokes incompresible [33, 39], elasticidad [20, 44, 47] y ecuaciones de Maxwell [5, 8, 9, 28, 30, 34]. Por otra parte el método HDG se ha aplicado a problemas evolutivos, en particular el caso semidiscreto de la ecuación del calor [7] y la ecuación de la onda [19, 25, 27, 45].

En el caso de un dominio  $\Omega$  con frontera curva, una alternativa es aproximar  $\Omega$  por un dominio poligonal/poliédrico  $D_h$  y transferir la condición de contorno a la frontera del dominio computacional  $\Gamma_h := \partial D_h$  de manera de mantener el alto orden del esquema. Esta técnica de transferir la condición de contorno se presentó y analizó en [16, 18, 21]. Básicamente, dado un punto  $\bar{\mathbf{x}} \in \Gamma$ , queremos transferir la condición  $g(t, \bar{\mathbf{x}})$  a un punto de  $\mathbf{x} \in \Gamma_h$ . Para ello, consideramos  $t > 0$ ,  $\mathbf{q}$  y  $u$  restringidos a lo largo del segmento  $\sigma(\mathbf{x}) := [\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}]$ , que no es más que el segmento que conecta  $\mathbf{x}$  y  $\bar{\mathbf{x}}$  en forma lineal. Así definimos

$$w(\lambda) = u(t, \mathbf{x} + \lambda(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x})) \quad \lambda \in [0, 1].$$

Derivamos con respecto a  $\lambda$  y por (0.0.2a) obtenemos

$$\begin{aligned}
w(1) - w(0) &= u(t, \bar{\mathbf{x}}) - u(t, \mathbf{x}) \\
&= g(t, \bar{\mathbf{x}}) - u(t, \mathbf{x}) \\
&= \int_0^1 \nabla u(t, \mathbf{x} + \mu(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x})) \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) d\mu \\
&= \int_0^1 -\mathbf{q}(t, \mathbf{x} + \mu(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x})) \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) d\mu = - \int_0^{l(\mathbf{x})} \mathbf{q}(t, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{t}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\lambda \quad (0.0.3a)
\end{aligned}$$

En el último paso se usó la sustitución  $\lambda = \mu|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}| = \mu l(\mathbf{x})$ , donde  $l(\mathbf{x})$  indica el largo del segmento  $\sigma(\mathbf{x})$  y además  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  es el vector unitario que tiene la misma dirección que  $(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$ . En caso que  $u$  y  $\mathbf{q}$  no sean diferenciables en el sentido clásico, tomamos una sucesión de funciones suaves que convergan en sus respectivas normas y extendemos por densidad. Basándonos en (0.0.3a), obtenemos una expresión explícita para la condición de contorno  $\tilde{g}$  del dominio computacional:

$$\tilde{g}(t, \mathbf{x}) = g(t, \bar{\mathbf{x}}) + \int_0^{l(\mathbf{x})} \mathbf{q}_h(t, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} d\lambda, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_h, t \in [0, T] \quad (0.0.4)$$

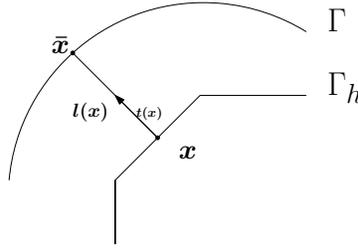


Figura 1: Representación del camino de transferencia desde  $\Gamma$  a  $\Gamma_h$  y  $l(\mathbf{x})$  es el largo del segmento que une a  $\mathbf{x}$  con  $\bar{\mathbf{x}}$ , cuyo vector unitario tangente es  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ .

En la Figura 1 se ve la representación geométrica de la transferencia de la condición de contorno a lo largo de  $\sigma(\mathbf{x})$ .

Para obtener un esquema numérico que aproxime  $u$ , como mencionamos anteriormente, primero se aproxima  $\Omega$  por un subdominio poligonal o poliédrico, denotado por  $D_h$ . Luego el problema se reduce a hallar  $\mathbf{q}, u$  tales que:

$$\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = -\nabla u(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in D_h, t > 0, \quad (0.0.5a)$$

$$u_t(t, \mathbf{x}) + \operatorname{div}(\mathbf{q}(t, \mathbf{x})) = f(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in D_h, t > 0, \quad (0.0.5b)$$

$$u(t, \mathbf{x}) = \tilde{g}(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_h := \partial D_h, t > 0, \quad (0.0.5c)$$

$$u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in D_h. \quad (0.0.5d)$$

El análisis de problemas con dominio curvo se ha estudiado en varios artículos. El primer método que introduce la técnica en dominios unidimensionales se puede revisar en [17], luego en [21] se extiende esta idea a  $\mathbb{R}^d$ . En este último trabajo se presentan regiones de extrapolación y caminos de transferencia de la condición de contorno. Los experimentos numéricos corroboran la teoría en ambos trabajos, más aún, en [18] se obtienen las estimaciones del error del esquema propuesto en [21]. Recientemente, esta técnica de transferencia de la condición de frontera se aplicó a un esquema HDG del problema de Stokes [43]. En [36] se utilizó en un esquema de elementos finitos mixtos para el problema de difusión, en donde se hace un análisis más riguroso del error en las regiones de extrapolación y se definen nuevas constantes en función de normas de funcionales. También en [38] se emplean técnicas de dominio curvo donde la novedad es cómo se transfiere la condición de Neumann a la frontera computacional. También se ha utilizado para resolver problemas no lineales [31] y la ecuación de Oseen [42].

El resto del trabajo seguirá la siguiente estructura: en el Capítulo 1, enunciaremos los resultados matemáticos que emplearemos; notación y definición de los espacios donde se buscará la solución. En el Capítulo 2 explicaremos como se construirán la malla para el dominio poligonal  $D_h \subset \Omega$ , los caminos  $\sigma(\mathbf{x})$  y las hipótesis necesarias para la existencia, unicidad y cotas del error. Luego en el Capítulo 3 especificaremos los espacios discretos donde se buscará la solución y la solubilidad del esquema discreto. En el Capítulo 4 se mostrará, bajo ciertas hipótesis que el esquema discreto está bien definido y se probarán las cotas del error correspondiente. En el Capítulo 5 mostraremos experimentos numéricos que validen la teoría. Finalmente concluimos el trabajo con los resultados principales y un apéndice de implementación.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo enunciaremos definiciones y proposiciones que nos servirán a lo largo del presente trabajo.

### 1.1. Espacios continuos y normas

A continuación, especificaremos la notación asociada a las normas y productos interiores. Sea  $U \subset \mathbb{R}^d$  un abierto y acotado con frontera Lipschitz  $C^2$  a trozos. Consideramos los productos interiores estandar  $L^2(U)$  y  $L^2(\partial U)$ , es decir si  $u, v \in L^2(U)$  y  $s, t \in L^2(\partial U)$

$$(u, v)_U := \int_U uv \quad \text{y} \quad \langle s, t \rangle_{\partial U} := \int_{\partial U} st.$$

Además consideramos las normas respectivas  $\|u\|_U = (u, u)_U^{1/2}$  y  $\|s\|_{\partial U} = (s, s)_{\partial U}^{1/2}$ , y la notación  $\|\cdot\|_{m,U}$  para la norma  $H^m(U)$  y  $|\cdot|_{m,U}$  para la semi norma donde  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , y  $H^0(U) = L^2(U)$ . Por otro lado, las funciones vectoriales las escribiremos en negrita y  $\mathbf{H}^m(U) := [H^m(U)]^d$ . Cabe destacar que para  $v \in H^m(U)$  y  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  multi-índice tal que  $|\alpha| \leq m$ , decimos que  $v$  posee derivada distribucional  $\alpha$ -ésima si  $\exists g \in L^2(U)$  que satisface

$$\int_U v\phi = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha \phi g \quad \forall C_c^\infty(U).$$

Si dicha  $g$  existe, entonces denotamos  $g = D^\alpha(v)$ . Los productos interiores asociados a la partición  $\mathcal{T}_h$  del dominio computacional y el esqueleto  $\partial\mathcal{T}_h$  se definen como sigue

$$(u, v)_{\mathcal{T}_h} := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K uv \quad \text{y} \quad \langle s, t \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} := \int_{\partial\mathcal{T}_h} st,$$

y las normas respectivas  $\|u\|_{\mathcal{T}_h} = (u, u)_{\mathcal{T}_h}^{1/2}$  y  $\|s\|_{\partial\mathcal{T}_h} = (s, s)_{\partial\mathcal{T}_h}^{1/2}$ .

Definimos los siguientes espacios de Hilbert a trozos:  $H^1(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\mathcal{T}_h) : v|_K \in H^1(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}$  y  $H(\text{div}, \mathcal{T}_h) = \{\mathbf{v} \in [L^2(\mathcal{T}_h)]^d : \mathbf{v}|_K \in H(\text{div}, K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}$ .

Además, definimos el producto interior con pesos  $w > 0$  en el esqueleto  $\partial\mathcal{T}_h$  y en la frontera  $\Gamma_h$  como

$$\|v\|_{\partial\mathcal{T}_h, w} := \left( \sum_{K \in \partial\mathcal{T}_h} \langle wv, v \rangle_{\partial K} \right)^{1/2} \quad \|v\|_{\Gamma, w} := \left( \sum_{e \in \Gamma_h} \langle wv, v \rangle_e \right)^{1/2}$$

Es claro que  $\|v\|_{\partial\mathcal{T}_h, 1} = \|v\|_{\partial\mathcal{T}_h}$ .

## 1.2. Espacios continuos que dependen del tiempo

Al igual como sugiere el Capítulo 5, Sección 9 de [24], si  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach definimos el operador  $\underline{v}$  que va de  $[0, T]$  a  $X$ , con  $T > 0$  como

$$\begin{aligned} \underline{v} : [0, T] &\longrightarrow X \\ t &\longrightarrow \underline{v}(t) = v(t, \cdot) \in X. \end{aligned}$$

De esta manera definimos los siguientes espacios

$$\begin{aligned} L^2(0, T; H^m(U)) &:= \{\underline{v} : \int_0^T \|v(t, \cdot)\|_{m,U}^2 dt < \infty\} \\ L^2(0, T; H^{1/2}(\partial U)) &:= \{\underline{v} : \int_0^T \|v(t, \cdot)\|_{1/2, \partial U}^2 dt < \infty\} \\ L^\infty(0, T; H^m(U)) &:= \{\underline{v} : \max_{t \in [0, T]} \|v(t, \cdot)\|_{m,U} < \infty\} \\ C^m(0, T; H^m(U)) &:= \{\underline{v} : \|v(t, \cdot)\|_{m,U}^2 < \infty \text{ y } v(t, \cdot) \text{ es de clase } C^m([0, T])\} \end{aligned}$$

Los datos del problema (0.0.1) son tales que  $\underline{\mathbf{f}} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\underline{\mathbf{g}} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma))$  y  $u_0 \in H^1(\Omega)$ . En caso de no haber confusiones, escribiremos  $\underline{v}(t) = v(t, \cdot) = v(t) = v \forall t \geq 0$ . Con respecto a las derivadas temporales, para un  $v$  suficientemente regular usaremos la notación clásica  $\frac{\partial v}{\partial t} = \partial_t v = v_t$ .

## 1.3. Polinomios y desigualdades

Para  $U \subset \mathbb{R}^d$  acotado se define el conjunto  $\mathbb{P}_k(U)$  como todos los polinomios definidos en  $U$  de grado menor o igual a  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Análogamente definimos  $[\mathbb{P}_k(U)]^d$  como el conjunto donde cada componente de un elemento pertenece a  $\mathbb{P}_k(U)$ .

### Desigualdad de trazas discreta

**Lema 1.** *Sea  $K$  un triángulo no degenerado de diámetro  $h$  y  $v \in \mathbb{P}_k(K)$ . Entonces  $\exists C_{tr} > 0$  que solo depende de  $k$  y la regularidad de la malla tal que:*

$$h^{1/2} \|v\|_e \leq C_{tr} \|v\|_K, \quad (1.3.1)$$

donde  $e$  es una de las aristas o caras de  $K$ .

Dem: ver Lema 1.66 de [23].

### Proyección $L^2$

Considerando el elemento del Lema anterior se tiene lo siguiente.

**Lema 2.** *Sea  $0 \leq l \leq k$ . Si llamamos  $P_{L^2(K)}(v)$  a la proyección  $L^2$  de  $v$  en  $\mathbb{P}_k(K)$ , para  $v \in H^{l+1}(K)$  existen  $C_{L^2} > 0$  y  $C_{\partial L^2} > 0$ , independientes de  $h$  tales que:*

$$\|v - P_{L^2(K)}(v)\|_{m,K} \leq C_{L^2} h^{l+1-m} |v|_{l+1,K} \quad \forall m \in \{0, \dots, k\} \quad (1.3.2)$$

$$\|v - P_{L^2(K)}(v)\|_{0, \partial K} \leq C_{\partial L^2} h^{l+1/2} |v|_{l+1,K} \quad (1.3.3)$$

La demostración se puede revisar en el los Lemas 1.58 y 1.59 de [23].

### Lema de Bramble Hilbert

**Lema 3.** *Sea  $B$  una bola de diámetro  $\text{diam}(B)$ ,  $v \in W_p^{k+1}(B)$  y  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Entonces existe una constante  $C_{BH} = C(k, p) > 0$ , y un polinomio  $P(v) \in \mathbb{P}_k(B)$  tal que  $\forall l \in \{0, \dots, k\}$ .*

$$|v - P(v)|_{l,B} \leq C(k, p) (\text{diam}(B))^{k+1-l} |v|_{k+1,B}, \quad (1.3.4)$$

donde  $P(v)$  es el polinomio de Taylor ponderado de  $v$  en  $B$ .

Dem: ver Lema 4.3.8 de [4].

## 1.4. Operadores de Extensión

### 1.4.1. Operador extensión polinomial $E$

Para cada  $e \in \Gamma_h$  denotamos por  $K^e$  al elemento que tiene como cara o arista a  $e$ . De este modo definimos el operador de extrapolación local como

$$\begin{aligned} E : [\mathbb{P}_k(K^e)]^d &\longrightarrow [\mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d)]^d \\ \mathbf{p} &\longrightarrow E(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

tal que  $E(\mathbf{p})|_{K^e} = \mathbf{p}$  y  $E(\mathbf{p})$  no es más que la extensión natural (extrapolación) de  $\mathbf{p}$  a  $\mathbb{R}^d$ . En caso de no haber confusión escribiremos  $\mathbf{p}$  en vez de  $E(\mathbf{p})$ .

### 1.4.2. Extensión en espacios de Hilbert

**Lema 4.** *Sea  $U \subset \mathbb{R}^d$  acotado con frontera Lipschitz  $\mathcal{C}^1$  y  $v \in H^m(U)$ . Entonces  $\exists S(v) \in H^m(\mathbb{R}^d)$  tal que*

i)  $v = S(v)$  c.t.p. en  $U$ .

ii)  $\|S(v)\|_{m,\mathbb{R}^d} \leq C_S \|v\|_{m,U}$ , donde  $C_S > 0$  es independiente de  $v$ .

La demostración se puede revisar en [46, Capítulo 4, Sección 3].

## 1.5. Proposiciones auxiliares

**Proposición 1.** *Si para todo  $t \geq 0$  se tiene que*

$$\zeta^2(t) + \int_0^t Z(s) ds \leq A(t) + \int_0^t B(s) \zeta(s) ds,$$

con  $A, B \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$  y  $\zeta$  continua en  $\mathbb{R}^+$ . Entonces  $\forall T \geq 0$  se tiene que

$$\zeta^2(T) + \int_0^T Z(s) ds \leq \left[ \left( \max_{0 \leq t \leq T} A(t) \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \int_0^T B(s) ds \right]$$

Dem: [7, Prop 3.1].

## 1.6. Notación curvas parametrizadas en $\mathbb{R}^d$

Con respecto a la construcción de las regiones de extrapolación y caminos de transferencia, si  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  son puntos en  $\mathbb{R}^d$ , el segmento que va de  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$  lo denotaremos por  $[\mathbf{P}, \mathbf{Q}]$ . En caso que  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  se unan a través una parametrización  $\gamma$ , emplearemos la notación  $[\mathbf{P}, \mathbf{Q}]_\gamma$ .



## Capítulo 2

# Construcción de la malla y notación

### 2.1. Dominio computacional $D_h$

Al igual que en [21], para construir el dominio  $D_h$ , tomamos un polígono  $\mathcal{M} \supset \Omega$ , y consideremos la familia de particiones  $\{\mathcal{T}_h^{\mathcal{M}}\}_{h>0}$  compuestas por elementos que serán triángulos o tetrahédros sin nodos colgantes y además, asumiremos que es uniformemente regular, es decir  $\exists \rho > 0$  tal que para cualquier partición  $\mathcal{T}_h^{\mathcal{M}}$  se tiene que  $\text{diam}(B_K) \geq \rho h_K$ , donde  $K \in \mathcal{T}_h^{\mathcal{M}}$ ,  $B_K$  es la mayor bola inscrita en el elemento  $K$  y  $h_K$  es el diámetro de  $K$ . Para el resto del trabajo definimos  $h := \max_{K \in \mathcal{T}_h^{\mathcal{M}}} h_K$ . Luego, para cada partición  $\{\mathcal{T}_h^{\mathcal{M}}\}_{h>0}$ , nos quedamos con los elementos  $K \in \mathcal{T}_h^{\mathcal{M}}$  que estén completamente contenidos en  $\Omega$ . De esta manera llamaremos

$$\mathcal{T}_h := \left( \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h^{\mathcal{M}}, K \subset \Omega} K \right) \text{ y } D_h := \left( \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{K} \right)^{\circ}.$$

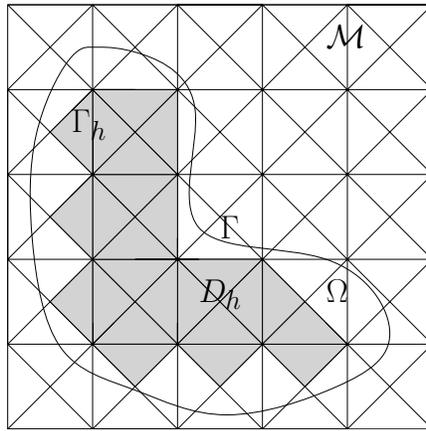


Figura 2.1: La unión de los elementos en gris conforman el dominio computacional  $D_h$ , cuya frontera es  $\Gamma_h$ . Esto se obtiene inscribiendo  $\Omega$  en  $\mathcal{M}$ .

En la Figura 2.1, se aprecia como se construye  $D_h$  a partir de una triangulación de  $\mathcal{M}$ .  $\Gamma_h$  representa la frontera del dominio computacional.

## 2.2. Caminos de tranferencia de la condición Dirichlet

Bajo esta construcción definimos  $\Gamma_h = \partial D_h$ . Llamamos  $\mathcal{E}_h$ , al conjunto de aristas o caras de los elementos de  $\mathcal{T}_h$ ,  $\mathcal{E}_h^i$  al conjunto de aristas o caras interiores y  $\mathcal{E}_h^\partial$  al conjunto de aristas o caras exteriores. Se sigue que  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^i \cup \mathcal{E}_h^\partial$ . Además sea  $\partial\mathcal{T}_h := \{\partial K : K \in \mathcal{T}_h\}$ . Por otro lado si  $K \in \mathcal{T}_h$ , denotaremos por  $\mathbf{n}_K$  a la normal exterior a  $K$ , escribiremos  $\mathbf{n}$  en el caso que no haya confusiones, también, para cada  $e$  arista de  $K^e$ , denotaremos  $h_e^\perp$  a la altura del elemento con respecto a ese lado o cara.

## 2.3. Regiones de extrapolación

En el capítulo del análisis del error, aparecen regiones exteriores al dominio  $D_h^c$ , estas regiones son las siguientes

### 2.3.1. Definición de $\widetilde{K}_{ext}^e$

Llamamos  $V_{D_h} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M\}$  a los vértices de  $\Gamma_h$  ordenados en sentido anti-horario y a

$R_{D_h} := \{\mathbf{r} : \mathbf{r} = \mathbf{v}_k + \mu \mathbf{d}_k, \text{ tal que } \mathbf{d}_k \text{ es una vector exterior que parte en } \mathbf{v}_k, \forall k = 1, \dots, M \mu \geq 0\}$ .

Las direcciones  $\mathbf{d}_k$  se construyen de tal manera que intersectan a  $\Gamma$  solo una vez, en los puntos ordenados  $\{\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_M\}$ . Basándonos en las ideas y algoritmos propuestos en [21] para el caso 2D, consideremos los segmentos  $[\mathbf{v}_1, \bar{\mathbf{v}}_1], \dots, [\mathbf{v}_M, \bar{\mathbf{v}}_M]$  con la condición que la intersección entre dos segmentos distintos es vacía. Ahora, dado  $e_i = [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}]$  una arista, con  $i \in \{1, \dots, M\}$ , definimos la región  $\widetilde{K}_{ext}^{e_i}$  como el interior de la región delimitada por  $[\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i], e_i, [\mathbf{v}_{i+1}, \bar{\mathbf{v}}_{i+1}]$  y  $[\bar{\mathbf{v}}_{i+1}, \bar{\mathbf{v}}_i]$ . Por construcción,  $\widetilde{K}_{ext}^{e_i} \cap \widetilde{K}_{ext}^{e_j} = \emptyset \forall i, j \in \{1, \dots, M\}$ . La Figura 2.2 representa una región  $\widetilde{K}_{ext}^e$  con sus respectivos límites. De esta manera definimos el complemento de  $D_h$  como:

$$D_h^c := \left( \bigcup_{e \in \Gamma_h} \widetilde{K}_{ext}^e \right)^o. \quad (2.3.1.1)$$

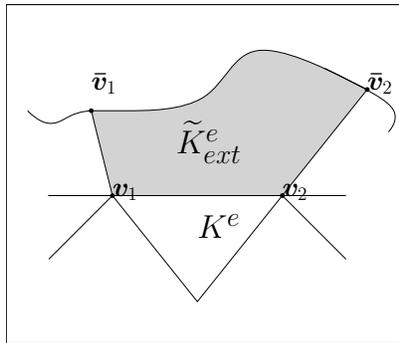


Figura 2.2: Ejemplo de  $\widetilde{K}_{ext}^e$

### 2.3.2. Definición de $K_{ext}^e$

Dado  $e \in \Gamma_h$  y  $\mathbf{n}$  su normal exterior, definimos  $K_{ext}^e$  como sigue

$$K_{ext}^e := \{\mathbf{x} + s\mathbf{n} : s \in [0, l(\mathbf{x})], \mathbf{x} \in e\}$$

Para una arista  $e \in \Gamma_h$  y su respectivo elemento  $K^e$ , en la Figura 2.3 se observa sombreado  $K_{ext}^e$ , mientras que en la Figura 2.4 vemos las regiones  $\widetilde{K}_{ext}^e$  y  $K_{ext}^e$  sobrelapadas.

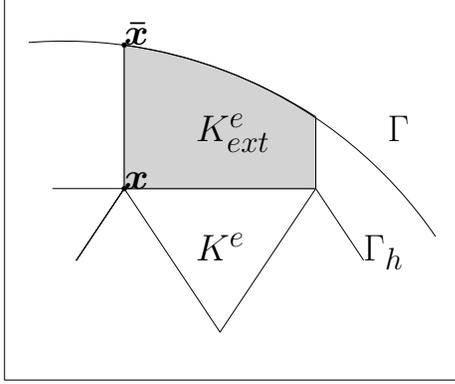


Figura 2.3: La región sombreada representa de  $K_{ext}^e$ . Notamos que el punto  $\bar{x} \in \Gamma_h$  es el que se alcanza en dirección normal a  $e$ .

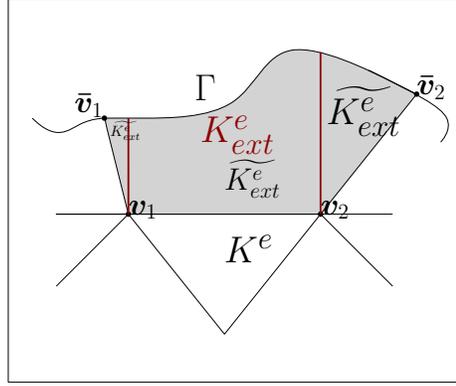


Figura 2.4: Representación de  $\widetilde{K}_{ext}^e$  y  $K_{ext}^e$ . En esta gráfica se observa que  $K_{ext}^e \subset \widetilde{K}_{ext}^e$ .

### 2.3.3. Parámetros y constantes auxiliares

Definimos  $H_e^\perp$  como la máxima distancia con dirección normal  $\mathbf{n}_e$  entre  $e$  y  $K_{ext}^e$  y  $h_e^\perp$  como la altura del elemento  $K^e$  que contiene a  $e$  como arista tal como se aprecia en la Figura 2.5. De esta manera definimos

$$r_e := \frac{H_e^\perp}{h_e^\perp}. \quad (2.3.3.1)$$

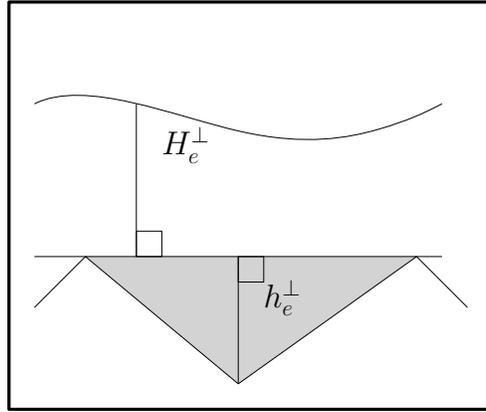


Figura 2.5: Representación de  $H_e^\perp$  y  $h_e^\perp$  junto a su respectivo elemento  $K^e$ .

Ahora procederemos a definir las siguientes constantes, las que nos serán útiles para demostrar la existencia y unicidad del esquema discreto, como las cotas del error.

$$C_{ext}^e := \frac{1}{\sqrt{r_e}} \sup_{\xi \in [P(K^e)]^{d, \mathbf{n}-\{\theta\}}} \frac{\|\xi\|_{K_{ext}^e}}{\|\xi\|_{K^e}}, \quad (2.3.3.2a)$$

$$C_{inv}^e := h_e \sup_{\xi \in \mathbb{P}_k(K^e) - \{\theta\}} \frac{\|\partial_{\mathbf{n}} \xi\|_{K^e}}{\|\xi\|_{K^e}}, \quad (2.3.3.2b)$$

$$C_\partial^e := h^{1/2} \sup_{\xi \in \mathbb{P}_k(K^e) - \{\theta\}} \frac{\|\xi\|_{\partial K^e}}{\|\xi\|_{K^e}} \quad (2.3.3.2c)$$

En en Apéndice A de [18] se demuestra que  $C_{ext}^e$ ,  $C_{inv}^e$  y  $C_\partial^e$ , específicamente estas constantes solo dependen del grado polinomial y la regularidad de la malla.

### 2.3.4. Hipótesis

Para la solubilidad del problema necesitaremos que se cumplan las siguientes hipótesis

$$\max_{x \in \Gamma_h} \tau l(\mathbf{x})^{1/2} \leq \frac{1}{4}, \quad (2.3.4.1a)$$

$$\max_{e \in \Gamma_h} r_e (C_{ext}^e)^{2/3} (C_{inv}^e)^{2/3} \leq \frac{1}{2}, \quad (2.3.4.1b)$$

$$\max_{e \in \Gamma_h} r_e \tau_e h_e^\perp \leq \frac{1}{2}, \quad (2.3.4.1c)$$

$$\max_{e \in \Gamma_h} r_e \leq C \quad C > 0. \quad (2.3.4.1d)$$

donde  $\tau > 0$  es un parámetro de estabilización del método. Con respecto a las hipótesis, notamos que (2.3.4.1a), (2.3.4.1c) y (2.3.4.1d) se cumplen siempre si  $r \in \mathcal{O}(1)$  y para  $h$  suficientemente pequeño. En el caso de que  $r \in \mathcal{O}(h^\alpha)$  con  $\alpha > 0$  la hipótesis (2.3.4.1b) también se cumplirá para mallas  $h$  suficientemente finas. En el caso donde  $r \in \mathcal{O}(1)$  no podemos asegurar que (2.3.4.1b) se cumplirá, sin embargo los experimentos numéricos muestran que, aunque quizás no se cumpla la hipótesis, la aproximación que entrega el esquema converge con el orden esperado.

Con respecto a las hipótesis sobre la frontera, supondremos que

$$\Gamma \text{ es Lipschitz continua,} \quad (2.3.4.2a)$$

$$\exists \tilde{\Gamma} \subset \Gamma \text{ tal que } |\Gamma| = |\tilde{\Gamma}| : \tilde{\Gamma} \text{ es } \mathcal{C}^2. \quad (2.3.4.2b)$$

### 2.3.5. Resultados previos

Bajo las hipótesis (2.3.4.2) se obtiene el siguiente resultado (ver [18, Lemas 4.1 y 4.2]).

**Lema 5.** *Se tiene las siguientes propiedades:*

i)  $l(\mathbf{x}) : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}$  es medible.

ii)  $K_{ext}^e$  y  $\widetilde{K}_{ext}^e$  son conjuntos medibles.

iii)  $\forall g \in H^{1/2}(\Gamma)$ , se tiene que  $\tilde{g} : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones medibles,.

Además, de [18, Lema 5.2] obtenemos lo siguiente:

**Lema 6.** *Para una función vectorial  $\mathbf{v}$  suficientemente suave definida en  $K_{ext}^e$  definimos  $\delta_{\mathbf{v}}$  como*

$$\delta_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) := \frac{1}{l(\mathbf{x})} \int_0^{l(\mathbf{x})} (\mathbf{v}(\mathbf{x} + s\mathbf{n}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (2.3.5.1)$$

Entonces para  $e \in \Gamma_h$  se tiene que:

$$\|\delta_{\mathbf{v}}\|_{e,l} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} r_e \|\partial_{\mathbf{n}}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\|_{K_{ext}^e, h_e^{\perp 2}}. \quad (2.3.5.2)$$

Además, si  $\mathbf{p} \in [\mathbb{P}_k(K^e)]^d$ , se tiene que:

$$\|\delta_{\mathbf{p}}\|_{\Gamma_h, l} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} r_e^{3/2} C_{ext}^e C_{int}^e \|\mathbf{p}\|_{K^e}. \quad (2.3.5.3)$$

## 2.4. Espacio discretos y proyectores

Para buscar la solución de la formulación discreta en el espacio, definimos los espacios discretos globales donde se buscará la aproximación:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h &:= \{\mathbf{v}_h \in [L^2(\mathcal{T}_h)]^2 : \mathbf{v}_h \in [\mathbb{P}_k(K)]^d \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ W_h &:= \{w_h \in L^2(\mathcal{T}_h) : w_h \in \mathbb{P}_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ M_h &:= \{\mu_h \in L^2(\partial\mathcal{T}_h) : \mu_h \in \mathbb{P}_k(e) \quad \forall e \in \partial\mathcal{T}_h\}. \end{aligned}$$

El proyector que consideraremos en nuestro trabajo será el proyector del método HDG:

$$\begin{aligned} \Pi : H(\text{div}, \mathcal{T}_h) \times H^1(\mathcal{T}_h) &\longrightarrow \mathbf{V}_h \times W_h \\ (\mathbf{q}, u) &\longrightarrow \Pi(\mathbf{q}, u) = (\Pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{q}), \Pi_W(u)) \end{aligned}$$

tal que:

$$(\mathbf{q}, \nabla w_h)_K = (\Pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{q}), \nabla w_h)_K \quad \forall w_h \in W_h \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (2.4.1a)$$

$$(u, \text{div}(\mathbf{v}_h))_K = (\Pi_W(u), \text{div}(\mathbf{v}_h))_K \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (2.4.1b)$$

$$\langle \Pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} + \tau \Pi_W(u), \mu_h \rangle = \langle \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} + \tau u, \mu_h \rangle \quad \forall \mu_h \in M(e) \quad \forall e \in \partial\mathcal{T}_h. \quad (2.4.1c)$$

Este proyector, como se muestra en el Teorema 2.1 de [15] está bien definido y además cumple con la siguiente cota.

**Teorema 1.** *Dado  $k \geq 0$  y  $K \in \mathcal{T}_h$ , entonces existe  $C > 0$  independiente de  $h_K$  tal que si  $\mathbf{q} \in \mathbf{H}^{l_q+1}(K)$  y  $u \in H^{l_u+1}(K)$*

$$\|\Pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}\|_K \leq C h_K^{l_q+1} |\mathbf{q}|_{\mathbf{H}^{l_q+1}(K)} + C \tau^* h_K^{l_u+1} |u|_{H^{l_u+1}(K)} \quad (2.4.2a)$$

$$\|\Pi_W(u) - u\|_K \leq C h_K^{l_u+1} |u|_{H^{l_u+1}(K)} + C h_K^{l_u+1} \frac{|\nabla \cdot \mathbf{q}|_{\mathbf{H}^{l_q}(K)}}{\tau^{\text{máx}}} \quad (2.4.2b)$$

Donde  $\tau^{\text{máx}}$  es el valor más grande de  $\tau$  en  $\partial K = e_1 \cup e_2 \cup e_3$  y  $\tau^*$  el segundo valor más grande.

El detalle de la demostración se puede ver en [15, Teorema 2.1]. Además, denotaremos por  $P_{M_h}$  a la proyección  $L^2$  sobre  $M_h$ .

### 2.4.1. Constantes auxiliares

A continuación definimos las siguientes constantes introducidas en [18]

$$R := \max_{e \in \Gamma_h} r_e, \quad (2.4.1.1) \quad R'_C := \max_{e \in \Gamma_h} r_e (C_{ext}^e C_{inv}^e)^2, \quad (2.4.1.2)$$

$$\hat{C}_{ext}^e := \sup_{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_k(K^e) - \theta} \frac{1}{\sqrt{r_e}} \frac{\|\mathbf{p}\|_{\widetilde{K}_{ext}^e}}{\|\mathbf{p}\|_{K^e}}, \quad (2.4.1.3) \quad \widetilde{C}_{\partial} := \max_{e \in \mathcal{E}_h^{\partial}} C_{\partial}^e, \quad (2.4.1.4)$$

$$\hat{C}_{ext} := \max_{e \in \mathcal{E}_h^{\partial}} \hat{C}_{ext}^e \quad (2.4.1.5) \quad \text{y} \quad \bar{R} := \max_{e \in \mathcal{E}_h^{\partial}} \sqrt{r_e} \hat{C}_{ext}^e. \quad (2.4.1.6)$$



# Capítulo 3

## Método HDG

En este capítulo mostraremos que bajo ciertas hipótesis el esquema HDG que aproxima a (0.0.2) está bien definido. También con herramientas y técnicas desarrolladas en [7, 15, 18], mostraremos las cotas del error a priori, tanto para los errores de  $u$  y  $\mathbf{q}$  en norma  $L^2(\Omega)$ . Para el análisis de solubilidad, al igual que en [18] supondremos que los segmentos  $\sigma(\mathbf{x})$  tienen dirección normal. Si esta suposición no se cumple, aparecen términos de la componente tangencial de  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  que pueden ser acotados si  $1 - \mathbf{n}_e \mathbf{t}(\mathbf{x})$  es positivo y suficientemente pequeño, para  $\mathbf{x} \in \Gamma_h$  y  $e \subset \Gamma_h$ . Esta suposición se hace solamente para simplificar el análisis .

### 3.1. Esquema HDG

Dado  $T > 0$ , el objetivo es encontrar  $(\mathbf{q}_h(t), u_h(t), \hat{u}_h(t)) \in \mathbf{V}_h \times W_h \times M_h$  tal que

$$(\mathbf{q}_h(t), \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (u_h(t), \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, \hat{u}_h(t) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0, \quad (3.1.1a)$$

$$(\partial_t u_h(t), w_h)_{\mathcal{T}_h} + (w_h, \operatorname{div}_h \mathbf{q}_h(t))_{\mathcal{T}_h} + \langle (\hat{\mathbf{q}}_h - \mathbf{q}_h)(t) \cdot \mathbf{n}, w_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = (f(t), w_h)_{\mathcal{T}_h}, \quad (3.1.1b)$$

$$\langle \hat{\mathbf{q}}_h(t) \cdot \mathbf{n}, \xi_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h \setminus \Gamma_h} = 0, \quad (3.1.1c)$$

$$\langle \hat{u}_h(t), \xi_h \rangle_{\Gamma_h} = \langle \tilde{g}_h(t), \xi_h \rangle_{\Gamma_h}, \quad (3.1.1d)$$

$$u_h(0) = \Pi_W(u_0). \quad (3.1.1e)$$

$\forall (\mathbf{v}_h, w_h, \xi_h) \in \mathbf{V}_h \times W_h \times M_h, \forall t \in ]0, T]$ . Notamos que (0.0.4) nos entrega la condición de contorno del problema continuo, pero no conocemos  $\mathbf{q}$ . Sin embargo (0.0.4) sugiere que definamos la condición de contorno discreta  $\tilde{g}_h$  como

$$\tilde{g}_h(t, \mathbf{x}) := g(t, \bar{\mathbf{x}}) + \int_0^{l(\mathbf{x})} \mathbf{q}_h(t, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{t}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\lambda \quad \mathbf{x} \in \Gamma_h, t \in ]0, T]. \quad (3.1.2)$$

Para  $t = 0$  fijamos  $\tilde{g}_h(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})$ , con  $\mathbf{x} \in \Gamma_h$ . Aquí enfatizamos que  $\mathbf{q}_h(t)$  en el segmento  $\sigma(\mathbf{x})$  no es más que la extrapolación de  $\mathbf{q}_h(t)$  en  $K_{ext}$  que nos entrega el método. Por otro lado definimos el flujo numérico en las aristas como

$$\hat{\mathbf{q}}_h(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q}_h(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} + \tau(u_h - \hat{u}_h)(t, \mathbf{x}) \quad t > 0 \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{T}_h \quad (3.1.3)$$

y  $\tau$  el parámetro de estabilización positivo que asumiremos constante en este trabajo.

### 3.2. Existencia y unicidad del esquema semidiscreto

Como para cada  $t \geq 0$  fijo el esquema (3.1.1) es un sistema cuadrado finito dimensional, si los datos  $f, g, u_0$  son nulos, el problema (3.1.1) tendrá solución única sí y solo sí  $(u_h, \mathbf{q}_h, \hat{u}_h) = (0, 0, 0)$ .

De esta manera supongamos que  $f = g = u_0 = 0$ . Testeamos (3.1.1a) con  $\mathbf{v}_h = \mathbf{q}_h(t)$ , (3.1.1b) con  $w_h = u_h(t)$  y (3.1.1c) (3.1.1d) con  $\xi_h = \begin{cases} -\hat{u}_h(t) & \text{en } \partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma_h \\ -\hat{\mathbf{q}}_h(t) \cdot \mathbf{n} & \text{en } \Gamma_h \end{cases}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{q}_h, \mathbf{q}_h)_{\mathcal{T}_h} - (u_h, \operatorname{div}_h(\mathbf{q}_h))_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{n}, \hat{u}_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= 0, \\ (\partial_t u_h, u_h)_{\mathcal{T}_h} + (\operatorname{div}_h(\mathbf{q}_h), u_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle (\hat{\mathbf{q}}_h - \mathbf{q}_h) \cdot \mathbf{n}, u_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= 0, \\ \langle \hat{\mathbf{q}}_h \cdot \mathbf{n}, -\hat{u}_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma_h} &= 0, \\ \langle \hat{u}_h, -\hat{\mathbf{q}}_h \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h} = \langle g_h, -\hat{\mathbf{q}}_h \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h}, & \\ u_h(0) &= 0. \end{aligned}$$

Sumamos las cuatro primeras ecuaciones y notamos que  $(\partial_t u_h, u_h)_{\mathcal{T}_h} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_h\|_{0, \mathcal{T}_h}^2$ . Luego por la definición de las trazas numéricas (3.1.3) y como el dato inicial  $u_0$  es el nulo, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_h(t)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\mathbf{q}_h(t)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|(u_h - \hat{u}_h)(t)\|_{\partial\mathcal{T}_h, \tau}^2 &= \langle \tilde{g}_h, -\hat{\mathbf{q}}_h \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h}, \\ u_h(0) &= 0. \end{aligned}$$

Además, por la definición de  $\tilde{g}_h(t, \mathbf{x})$  sumando y restando  $l(\mathbf{x})\mathbf{q}_h(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$  y recordando la definición de (2.3.5.1):

$$\begin{aligned} \tilde{g}_h(t, \mathbf{x}) &= g(t, \bar{\mathbf{x}}) + \int_0^{l(\mathbf{x})} \mathbf{q}_h(t, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} d\lambda \\ &= \int_0^{l(\mathbf{x})} \mathbf{q}_h(t, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} d\lambda - l(\mathbf{x})\mathbf{q}_h(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} + l(\mathbf{x})\mathbf{q}_h(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \\ &= \int_0^{l(\mathbf{x})} (\mathbf{q}_h(t, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{n}) - \mathbf{q}_h(t, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} d\lambda + l(\mathbf{x})\mathbf{q}_h(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \\ &= l(\mathbf{x})\delta_{\mathbf{q}_h}(t, \mathbf{x}) + l(\mathbf{x})\mathbf{q}_h(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Despejando  $\mathbf{q}_h$  obtenemos que  $\mathbf{q}_h(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{l(\mathbf{x})}\tilde{g}_h(t, \mathbf{x}) - \delta_{\mathbf{q}_h}(t, \mathbf{x})$ . Reemplazamos esto en la traza numérica (3.1.3) para obtener:

$$\hat{\mathbf{q}}_h(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{l(\mathbf{x})}\tilde{g}_h(t, \mathbf{x}) - \delta_{\mathbf{q}_h}(t, \mathbf{x}) + \tau(u_h - \hat{u}_h)(t, \mathbf{x}).$$

De esta manera se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_h(t)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\mathbf{q}_h(t)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|(u_h - \hat{u}_h)(t)\|_{\tau, \partial\mathcal{T}_h}^2 &= \langle \tilde{g}_h, -\hat{\mathbf{q}}_h \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h}, \\ &= -\langle \frac{1}{l}\tilde{g}_h, \tilde{g}_h \rangle_{\Gamma_h} + \langle \delta_{\mathbf{q}_h}, \tilde{g}_h \rangle_{\Gamma_h} + \langle \tau(u_h - \hat{u}_h), \tilde{g}_h \rangle_{\Gamma_h}, \\ &= -\|\tilde{g}_h\|_{\Gamma_h, l^{-1}}^2 + \langle \delta_{\mathbf{q}_h} l^{1/2}, \tilde{g}_h l^{-1/2} \rangle_{\Gamma_h} - \langle \tau(u_h - \hat{u}_h) l^{1/2}, \tilde{g}_h l^{-1/2} \rangle_{\Gamma_h}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\mathbf{q}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|(u_h - \hat{u}_h)\|_{\tau, \partial\mathcal{T}_h}^2 + \|\tilde{g}_h\|_{l^{-1}, \Gamma_h}^2 = -\langle \delta_{\mathbf{q}_h}, \tilde{g}_h \rangle_{\Gamma_h} - \langle l^{1/2}\tau(u_h - \hat{u}_h), l^{-1/2}\tilde{g}_h \rangle_{\Gamma_h}.$$

Acotamos el lado derecho con Cauchy Schwarz y usamos la desigualdad de Young con parámetro  $\epsilon > 0$  a determinar:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\mathbf{q}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\sqrt{\tau}(u_h - \hat{u}_h)\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \|\tilde{g}_h\|_{l^{-1/2}, \Gamma_h}^2 \\
&= -\langle l^{1/2} \delta_{\mathbf{q}_h}, l^{-1/2} \tilde{g}_h \rangle_{\Gamma_h} + \langle l^{-1/2} \tau(u_h - \hat{u}_h), l^{1/2} \tilde{g}_h \rangle_{\Gamma_h} \\
&\leq \frac{1}{2\epsilon} \|l^{1/2} \delta_{\mathbf{q}_h}\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|l^{-1/2} \tilde{g}_h\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|l^{1/2} \tau(u_h - \hat{u}_h)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|l^{-1/2} \tilde{g}_h\|_{\Gamma_h}^2 \\
&= \frac{1}{2\epsilon} \|\delta_{\mathbf{q}_h}\|_{\Gamma_{h,l}}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\tilde{g}_h\|_{\Gamma_{h,l^{-1}}}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|\tau(u_h - \hat{u}_h)\|_{\Gamma_{h,l}}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\tilde{g}_h\|_{\Gamma_{h,l^{-1}}}^2.
\end{aligned}$$

Tomando  $\epsilon = \frac{1}{2}$  podemos pasar  $\|\tilde{g}_h\|_{\Gamma_{h,l^{-1}}}^2$  y usamos (2.3.5.3) del Lema 6 para acotar el término  $\|\delta_{\mathbf{q}_h}\|_{\Gamma_{h,l}}^2$ , se deduce que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\mathbf{q}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\sqrt{\tau}(u_h - \hat{u}_h)\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{g}_h\|_{l^{-1/2}, \Gamma_h}^2 \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{3}} r_e^{3/2} C_{ext}^e C_{int}^e \|\mathbf{q}\|_{K^e}^2 + \|\tau(u_h - \hat{u}_h)\|_{\Gamma_{h,l}}^2.
\end{aligned}$$

Por la hipótesis (2.3.4.1b) podemos pasar  $\|\mathbf{q}\|_{K^e}^2$  al lado izquierdo y a la vez utilizando la hipótesis (2.3.4.1a) pasamos  $\|\tau(u_h - \hat{u}_h)\|_{\Gamma_{h,l}}^2$  al lado izquierdo. Luego acotamos la derivada temporal de la norma de  $u$ , para obtener:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 \leq -\left( \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{\tau}(u_h - \hat{u}_h)\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{g}_h\|_{l^{-1}, \Gamma_h} \right) \leq 0$$

Integrando entre  $[0, t]$ , y dado que  $\|u_h(0)\|_{\mathcal{T}_h} = 0$ , obtenemos  $0 \leq \|u_h(t)\|_{\mathcal{T}_h}^2 \leq 0$ . Así  $u_h(t) = 0$  y  $\|\mathbf{q}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\sqrt{\tau}(u_h - \hat{u}_h)\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \|\tilde{g}_h\|_{l^{-1}, \Gamma_h} = 0 \forall t \geq 0$ . Es decir  $\mathbf{q}_h = 0$  en  $D_h$  y  $u_h = \hat{u}_h$  en  $\partial\mathcal{T}_h \forall t \geq 0$ . Pero como  $u_h$  es el polinomio nulo  $\mathcal{T}_h$  entonces  $\hat{u}_h(t) = 0 \forall t \geq 0$ . Por lo tanto el sistema tiene única solución.

En resumen, hemos demostrado el siguiente resultado:

**Teorema 2.** *Bajo las hipótesis (2.3.4.1), el esquema semidiscreto (3.1.1) tiene única solución.*



# Capítulo 4

## Análisis de error

En este Capítulo analizaremos las ecuaciones de la proyección del error que nos ayudarán a obtener las estimaciones del error a priori en  $D_h$ . Luego en el Capítulo 5 analizamos el error en  $D_h^c$ , con el objetivo obtener el resultado principal de esta tesis, que enunciamos a continuación.

**Teorema 3.** *Bajo las hipótesis (2.3.4.1) sobre las constantes y las hipótesis (2.3.4.2) sobre la frontera  $\Gamma$ . Sea  $(\mathbf{q}, u)$  la solución de (0.0.2) y  $(\mathbf{q}_h, u_h)$  la solución aproximada que entrega el método HDG (3.1.1). Si para todo  $s \in [0, T]$ , se tiene que  $u(s) \in H^{l_u+1}(\Omega)$  y  $\mathbf{q}(s) \in \mathbf{H}^{l_q+1}(\Omega)$  entonces existe  $C = C_{(T, \rho, \Omega, \mathbf{q}, \mathbf{q}_s, u, u_s, u_{ss})} > 0$  independiente de  $h$  tal que:*

$$\sup_{s \in [0, T]} \|u(s) - u_h(s)\|_{\Omega} \leq Ch^{\min\{l_u, l_q\}+1}.$$

Más aún, si  $u \in C^2(0, T; H^{l_u+1}(\Omega))$ , entonces se tiene que

$$\sup_{s \in [0, T]} \|\mathbf{q}(s) - \mathbf{q}_h(s)\|_{\Omega} \leq Ch^{\min\{l_u, l_q\}+1}$$

### 4.1. Ecuaciones del error de proyección

Para  $t \in ]0, T[$  el error de proyección se define como  $I_u(t) := u(t) - \Pi_W(u(t))$  y  $I_q(t) := \mathbf{q}(t) - \Pi_V(\mathbf{q}(t))$ . Para en análisis del error definimos las siguientes la proyecciones del error:

$$\mathbf{e}_q(t) := \Pi_V(\mathbf{q}(t)) - \mathbf{q}_h(t), \quad e_u(t) := \Pi_W(u(t)) - u_h(t), \quad e_{\hat{u}}(t) := P_{M_h}(u(t)) - \hat{u}_h(t).$$

Para  $t = 0$ , asumiremos  $u_0 \in H^1(\mathcal{T}_h)$  y tomaremos  $\mathbf{q}_h(0) = \Pi_V(\nabla u_0)$  y  $\hat{u}_h(0) = P_{M_h}(u_0|_{\partial\mathcal{T}_h})$ , por lo que  $\mathbf{e}_q(0) = 0$  y  $e_{\hat{u}}(0) = 0$ . De esta manera se satisfacen las siguientes ecuaciones de la proyección del error.

**Lema 7.** *Para todo  $(\mathbf{v}_h, w_h, \xi_h) \in \mathbf{V}_h \times W_h \times M_h$  se satisfacen*

$$\langle \mathbf{e}_q(t), \mathbf{v}_h \rangle_{\mathcal{T}_h} - \langle e_u(t), \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h \rangle_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, e_{\hat{u}}(t) \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = \langle \Pi_V(\mathbf{q}(t)) - \mathbf{q}(t), \mathbf{v}_h \rangle_{\mathcal{T}_h}, \quad (4.1.1a)$$

$$\langle \partial_t e_u(t), w_h \rangle_{\mathcal{T}_h} - \langle \nabla w_h, \mathbf{e}_q(t) \rangle_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_{\hat{q}}(t) \cdot \mathbf{n}, w_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = \langle \Pi_W(u_t(t)) - u_t(t), w_h \rangle_{\mathcal{T}_h}, \quad (4.1.1b)$$

$$\langle \mathbf{e}_{\hat{q}}(t) \cdot \mathbf{n}, \xi_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma_h} = 0, \quad (4.1.1c)$$

$$\langle e_{\hat{u}}(t), \xi_h \rangle_{\Gamma_h} = \langle (\tilde{g} - \tilde{g}_h)(t), \xi_h \rangle_{\Gamma_h}, \quad (4.1.1d)$$

$$e_u(0) = 0, \quad (4.1.1e)$$

donde

$$\mathbf{e}_{\hat{q}}(t) \cdot \mathbf{n} := \mathbf{e}_q(t) \cdot \mathbf{n} + \tau(e_u - e_{\hat{u}})(t) \text{ en } \mathcal{T}_h. \quad (4.1.2)$$

*Demostración.* Para (4.1.1a) primero utilizamos la defición de los errores de proyección y consideramos la ecuación (3.1.1a). Luego utilizamos el hecho que  $-\nabla u = \mathbf{q}$  y concluimos utilizando las propiedades del proyector  $P_{M_h}$  y de la proyección  $\Pi_W$ :

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{e}_q, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (e_u, \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, e_{\hat{u}} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\
&= (\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (\Pi_W(u) - u_h, \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, P_{M_h}(u) - \hat{u}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\
&= (\Pi_V(\mathbf{q}), \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (\Pi_W(u), \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, P_{M_h}(u) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\
&\quad + [(-\mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (-u_h, \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, -\hat{u}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}] \\
&= (\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q} + \mathbf{q}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (\Pi_W(u), \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, P_{M_h}(u) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\
&= (\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + (-\nabla u, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (\Pi_W(u), \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, P_{M_h}(u) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\
&= -(I_{\mathbf{q}}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + (u - \Pi_W(u), \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - \langle u - P_{M_h}(u), \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rangle \\
&= -(I_{\mathbf{q}}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.
\end{aligned}$$

Para (4.1.1b), primero expandimos los errores de proyección del error y luego identificamos términos de (3.1.1b) en la ecuación. Así obtenemos

$$\begin{aligned}
& (\partial_t e_u, w_h)_{\mathcal{T}_h} - (\nabla_h w_h, \mathbf{e}_q)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n}, w_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\
&= (\partial_t (\Pi_W(u) - u_h), w_h)_{\mathcal{T}_h} - (\nabla_h w_h, (\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q}_h))_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \langle (\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q}_h) \cdot \mathbf{n} + \tau (\Pi_W(u) - u_h - P_{M_h}(u) + \hat{u}_h) \cdot \mathbf{n}, w_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\
&= -(f, w_h)_{\mathcal{T}_h} + (\operatorname{div}_h \mathbf{q}, w_h)_{\mathcal{T}_h} + (\partial_t (\Pi_W(u)), w_h)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \langle \Pi_V(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} + \tau (\Pi_W(u), w_h)_{\partial \mathcal{T}_h} - \langle \tau P_{M_h}(u), w_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}
\end{aligned}$$

Acá el término  $(\nabla_h w_h, (\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q}_h))_{\mathcal{T}_h}$  se integró por partes. Luego, sumando y restando  $(\partial_t u, w_h)_{\mathcal{T}_h}$  y observando que  $(\partial_t u + \operatorname{div}_h(\mathbf{q}), w_h)_{\mathcal{T}_h} = (f, w_h)_{\mathcal{T}_h}$ . Por (2.4.1c), se sigue que

$$\begin{aligned}
& (\partial_t e_u, w_h)_{\mathcal{T}_h} - (\nabla_h w_h, \mathbf{e}_q)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n}, w_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\
&= -(f, w_h)_{\mathcal{T}_h} + (\partial_t (\Pi_W(u) - u), w_h)_{\mathcal{T}_h} + (\partial_t u + \operatorname{div}_h(\mathbf{q}), w_h)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \langle -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} + \Pi_V(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} + \tau \Pi_W(u) - \tau P_{M_h}(u), w_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\
&= -(f, w_h)_{\mathcal{T}_h} + (\partial_t (\Pi_W(u) - u), w_h)_{\mathcal{T}_h} + (f, w_h)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \langle -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \tau P_{M_h}(u) + \Pi_V(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} + \tau \Pi_W(u) - \tau P_{M_h}(u), w_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\
&= (\partial_t (\Pi_W(u) - u), w_h)_{\mathcal{T}_h}.
\end{aligned}$$

La ecuación (4.1.1c) se obtiene por la continuidad de las trazas normales en  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ , la definición de  $\hat{\mathbf{q}}_h$  y (3.1.1c). Para (4.1.1d) se tiene que por la definición de proyección ortogonal y la ecuación (3.1.1d)

$$\begin{aligned}
\langle P_{M_h}(u), \mu_h \rangle_{\Gamma_h} &= \langle \tilde{g}, \mu_h \rangle_{\Gamma_h}, \\
\langle \hat{u}_h, \mu_h \rangle_{\Gamma_h} &= \langle \tilde{g}_h, \mu_h \rangle_{\Gamma_h}.
\end{aligned}$$

Restamos ambas ecuaciones y obtenemos (4.1.1d). Para (4.1.1e), por 3.1.1e obtenemos  $e_u(0) = \Pi_W(u(0)) - u_h(0) = u_h(0) - u_h(0) = 0$ .  $\square$

## 4.2. Análisis del error en el dominio computacional

En esta sección obtendremos cotas para las proyecciones del error en norma  $L^2(D_h)$ . Nuevamente por la compacidad de  $[0, T]$ , estas cotas son uniformes con respecto al tiempo. Para ello testaremos las ecuaciones del error de manera similar a como se hizo en [7]. Dicho esto se puede obtener lo siguiente

**Lema 8.** (Estimación para  $e_u(T)$  en norma  $L^2(\mathcal{T}_h)$ ). Sea  $T > 0$ , se tiene la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \|e_u(T)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \int_0^T \left( \|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\tau, \partial\mathcal{T}_h}^2 \right) ds \\ = \int_0^T [(\Pi_V(\mathbf{q}(s)) - \mathbf{q}(s), \mathbf{e}_q(s))_{\mathcal{T}_h} + (\Pi_W(u_s) - u_s, e_u(s))_{\mathcal{T}_h} \\ + (\tilde{g}(s) - \tilde{g}_h(s), -\mathbf{e}_{\hat{q}}(s) \cdot \mathbf{n})] ds. \end{aligned}$$

*Demostración.* Sea  $s \in [0, T]$ . Testeamos las ecuaciones en (4.1.1) con  $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_q(s)$ ,  $w_h = e_u(s)$  y

$$\xi_h = \begin{cases} -e_{\hat{u}}(s) & \text{en } \partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma_h \\ -\mathbf{e}_{\hat{q}}(s) \cdot \mathbf{n} & \text{en } \Gamma_h \end{cases}. \text{ Integrando por partes (4.1.1b) se tiene que:}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 - (e_u, \operatorname{div}_h \mathbf{e}_q)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_q \cdot \mathbf{n}, e_{\hat{u}} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= (\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q}, \mathbf{e}_q)_{\mathcal{T}_h}, \\ (\partial_s e_u, e_u)_{\mathcal{T}_h} + (\operatorname{div}(\mathbf{e}_q), e_u)_{\mathcal{T}_h} + \langle (\mathbf{e}_{\hat{q}} - \mathbf{e}_q) \cdot \mathbf{n}, e_u \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= (\Pi_W(u_s) - u_s, e_u)_{\mathcal{T}_h}, \\ \langle \mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n}, -e_{\hat{u}}(s) \rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma_h} &= 0, \\ \langle e_{\hat{u}}, -\mathbf{e}_{\hat{q}}(s) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h} &= \langle \tilde{g}(s) - \tilde{g}_h(s), -e_{\hat{u}}(s) \rangle_{\Gamma_h}. \end{aligned}$$

Luego, sumando las ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|e_u(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \langle \mathbf{e}_q \cdot \mathbf{n}, e_{\hat{u}} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \langle (\mathbf{e}_{\hat{q}} - \mathbf{e}_q) \cdot \mathbf{n}, e_u \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \langle \mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n}, e_{\hat{u}} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\ = (\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q}, \mathbf{e}_q)_{\mathcal{T}_h} + (\Pi_W(u_s) - u_s, e_u)_{\mathcal{T}_h} + \langle \tilde{g} - \tilde{g}_h, -\mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h}. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

En (4.2.1) armaremos las normas en el esqueleto como sigue:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_q \cdot \mathbf{n}, e_{\hat{u}} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \langle (\mathbf{e}_{\hat{q}} - \mathbf{e}_q) \cdot \mathbf{n}, e_u \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \langle \mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n}, e_{\hat{u}} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= \langle (\mathbf{e}_q - \mathbf{e}_{\hat{q}}) \cdot \mathbf{n}, e_{\hat{u}} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \langle (\mathbf{e}_{\hat{q}} - \mathbf{e}_q) \cdot \mathbf{n}, e_u \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &= \langle (\mathbf{e}_{\hat{q}} - \mathbf{e}_q) \cdot \mathbf{n}, e_u - e_{\hat{u}} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &= \langle \tau(e_u - e_{\hat{u}}), e_u - e_{\hat{u}} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &= \|\tau^{1/2}(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2. \end{aligned}$$

Así, si integramos (4.2.1) en  $[0, T]$  y aprovechando  $e_u(0) = 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|e_u(T)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \int_0^T [\|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\tau^{1/2}(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2] ds \\ = \int_0^T [(\Pi_V(\mathbf{q}(s)) - \mathbf{q}(s), \mathbf{e}_q(s))_{\mathcal{T}_h}] ds + \int_0^T [(\Pi_W(u_s) - u_s, e_u(s))_{\mathcal{T}_h} + \langle \tilde{g}(s) - \tilde{g}_h(s), -\mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h}] ds. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

□

Para el término del lado derecho  $\langle \tilde{g}(s) - \tilde{g}_h(s), -\mathbf{e}_{\hat{q}}(s) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h}$ , haremos la descomposición realizada en [18]. En el caso que  $\mathbf{x} \in \Gamma_h$  se tiene que:

$$\begin{aligned} (\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s, \mathbf{x}) &= \int_0^{l(\mathbf{x})} (\mathbf{q}(s, \mathbf{x} + s\mathbf{n}) - \mathbf{q}_h(s, \mathbf{x} + s\mathbf{n}) + \Pi_V(\mathbf{q}(t, \mathbf{x})) - \Pi_V(\mathbf{q}(t, \mathbf{x}))) ds \\ &= \int_0^{l(\mathbf{x})} (I_q + \mathbf{e}_q)(s, \mathbf{x} + s\mathbf{n}) ds \\ &= \int_0^{l(\mathbf{x})} (I_q(s, \mathbf{x} + s\mathbf{n}) - I_q(s, \mathbf{x})) ds + l(\mathbf{x}) I_q(s, \mathbf{x} + s\mathbf{n}) ds \\ &\quad + \int_0^{l(\mathbf{x})} (\mathbf{e}_q(s, \mathbf{x} + s\mathbf{n}) - \mathbf{e}_q(t, \mathbf{x})) ds + l(\mathbf{x}) \mathbf{e}_q(s, \mathbf{x} + s\mathbf{n}) \\ &= l(\mathbf{x}) (\delta_{I_q(s, \mathbf{x})} + I_q(s, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} + \delta_{\mathbf{e}_q} + \mathbf{e}_q(s, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n})(s, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Despejando  $\mathbf{e}_q(s)$  obtenemos que

$$\mathbf{e}_q(s) \cdot \mathbf{n} = \frac{\tilde{g} - \tilde{g}_h}{l(\mathbf{x})}(s) - \delta_{I_q}(s) - I_q(s) \cdot \mathbf{n} - \delta_{\mathbf{e}_q}(s).$$

Reemplazando ésto en (4.1.2) obtenemos que el error de la la proyección del flujo numérico en  $\Gamma_h$  se puede escribir como

$$\mathbf{e}_{\hat{q}}(s) \cdot \mathbf{n} = \frac{\tilde{g} - \tilde{g}_h}{l(\mathbf{x})}(s) - \delta_{I_q}(s) - I_q(s) \cdot \mathbf{n} - \delta_{\mathbf{e}_q} + \tau(e_u - e_{\hat{u}})(s). \quad (4.2.3)$$

De esta manera el término  $\langle \tilde{g}(s) - \tilde{g}_h(s), -\mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h}$  se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle \tilde{g} - \tilde{g}_h, -\mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h} &= - \langle (\tilde{g} - \tilde{g}_h)l(\mathbf{x}), \tilde{g} - \tilde{g}_h \rangle_{\Gamma_h} + \langle \tilde{g} - \tilde{g}_h, \delta_{I_q} \rangle_{\Gamma_h} \\ &\quad + \langle \tilde{g} - \tilde{g}_h, I_q \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h} + \langle \tilde{g} - \tilde{g}_h, \delta_{\mathbf{e}_q} \rangle_{\Gamma_h} - \langle \tilde{g} - \tilde{g}_h, \tau(e_u - e_{\hat{u}}) \rangle_{\Gamma_h} \\ &= - \|l^{-1/2}(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \langle l^{-1/2}(\tilde{g} - \tilde{g}_h), l^{1/2}\delta_{I_q} \rangle_{\Gamma_h} \\ &\quad + \langle l^{-1/2}(\tilde{g} - \tilde{g}_h), l^{1/2}I_q \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h} + \langle l^{-1/2}(\tilde{g} - \tilde{g}_h), l^{1/2}\delta_{\mathbf{e}_q} \rangle_{\Gamma_h} \\ &\quad - \langle l^{-1/2}(\tilde{g} - \tilde{g}_h), l^{1/2}\tau(e_u - e_{\hat{u}}) \rangle_{\Gamma_h}. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Young con parámetro  $\delta > 0$  a determinar, tenemos

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{g} - \tilde{g}_h, -\mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h} \\ &\leq - \|l^{-1/2}(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\delta}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\delta} \|l^{1/2}I_q \cdot \mathbf{n}(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\delta}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_h}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\delta} \|l^{1/2}\delta_{I_q}(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\delta}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\delta} \|l^{1/2}\delta_{\mathbf{e}_q}(s)\|_{\Gamma_h}^2 \\ &\quad + \frac{\delta}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\delta} \|\tau l^{1/2}(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\Gamma_h}^2. \end{aligned}$$

Tomando  $\delta = \frac{1}{4}$  podemos pasar  $\|l^{-1/2}(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_h}^2$  la lado izquierdo y como para cada  $e \in \Gamma_h$   $r_e = \frac{H_e^\perp}{h_e^\perp} \geq \frac{l(\mathbf{x})}{h_e^\perp}$  tenemos que

$$\|l^{1/2}I_q \cdot \mathbf{n}(s)\|_{\Gamma_h}^2 = \|I_q \cdot \mathbf{n}(s)\|_{\Gamma_h, l}^2 \leq \sum_{e \in \Gamma_h} r_e h_e^\perp \int_e (I_q \cdot \mathbf{n})^2 \leq R \sum_{e \in \Gamma_h} h_e^\perp \int_e (I_q \cdot \mathbf{n})^2 = R \|I_q \cdot \mathbf{n}(s)\|_{\Gamma_h, (h^\perp)}^2.$$

Por último notar que  $\tau_e r_e h_e^\perp \geq \tau_e l(\mathbf{x})$ , luego

$$\begin{aligned} \|\tau l^{1/2}(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\Gamma_h}^2 &= \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \tau_e \tau_e l(\mathbf{x}) (e_u - e_{\hat{u}})^2 \leq \max_{e \in \Gamma_h} (\tau_e r_e h_e^\perp) \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \tau_e (e_u - e_{\hat{u}})^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\partial \mathcal{T}_h, \tau}^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado la hipótesis (2.3.4.1c). De esta manera, insertando estas desigualdades en (4.2.2), usando la desigualdad (2.3.5.2) del Lema 6 y por la hipótesis (2.3.4.1b) podemos acotar el término

$\|\delta_{I_q}(s)\|_{\Gamma_{h,l}}$ . Para acotar  $\|\delta_{e_q}(s)\|_{\Gamma_{h,l}}$  utilizamos (2.3.5.3). Así,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\|e_u(T)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \int_0^T [\|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\partial\mathcal{T}_{h,\tau}}^2 + \|(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_{h,l-1/2}}^2] ds \\
& \leq \int_0^T \left[ \|I_q(s)\|_{\mathcal{T}_h} \|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h} + \|I_{u_s}(s)\|_{\mathcal{T}_h} \|e_u(s)\|_{\mathcal{T}_h} + \frac{1}{4}R^2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \|\partial_n(I_q \cdot \mathbf{n})(s)\|_{K_{ext}^e, h^2}^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4}R\|I_q(s)\|_{\Gamma_{h,h}}^2 + \frac{1}{4}r_e^3(C_{ext}^e C_{int}^e)^2 \|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 \frac{1}{4}\|(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\Gamma_{h,\tau}}^2 \right] ds \\
& \leq \int_0^T \left[ \frac{1}{2}\|I_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|I_{u_s}(s)\|_{\mathcal{T}_h} \|e_u(s)\|_{\mathcal{T}_h} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4}R^2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \|\partial_n(I_q \cdot \mathbf{n})(s)\|_{K_{ext}^e, h^{\perp 2}}^2 + \frac{1}{4}R\|I_q \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_{h,h}}^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} \max_{e \in \Gamma_h} r_e^3(C_{ext}^e C_{int}^e)^2 \|\mathbf{e}_q\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{4}\|e_u - e_{\hat{u}}\|_{\Gamma_{h,\tau}}^2 \right] ds.
\end{aligned}$$

Luego por las hipótesis (2.3.4.1b) podemos pasar el término  $\|\mathbf{e}_q\|_{\mathcal{T}_h}^2$  al lado izquierdo.

$$\begin{aligned}
& \|e_u(T)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \int_0^T [\|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2}\|(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\partial\mathcal{T}_{h,\tau}}^2 + 2\|(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_{h,l-1/2}}^2] ds \\
& \leq \int_0^T \left[ \|I_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + 2\|I_{u_s}(s)\|_{\mathcal{T}_h} \|e_u(s)\|_{\mathcal{T}_h} + \frac{1}{2}R^2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \|\partial_n(I_q \cdot \mathbf{n})(s)\|_{K_{ext}^e, h^{\perp 2}}^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}R\|I_q(s)\|_{\Gamma_{h,h}}^2 \right] ds
\end{aligned}$$

Para llegar a la cota de  $\|e_u(T)\|_{\mathcal{T}_h}$  utilizaremos la Proposición 1 con

$$\begin{aligned}
\zeta(t) &= \|e_u(t)\|_{\mathcal{T}_h}, \\
Z(s) &= [\|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2}\|(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\partial\mathcal{T}_{h,\tau}}^2 + 2\|(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_{h,l-1/2}}^2], \\
A(t) &= \int_0^t \left[ \|I_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2}R^2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \|\partial_n(I_q \cdot \mathbf{n})(s)\|_{K_{ext}^e, h^{\perp 2}}^2 + \frac{1}{2}R\|I_q(s)\|_{\Gamma_{h,h}}^2 \right] ds, \\
\int_0^t B(s)\zeta(s)ds &= \int_0^t \|I_{u_s}(s)\|_{\mathcal{T}_h} \|e_u(s)\|_{\mathcal{T}_h} ds.
\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que

$$\begin{aligned}
& \|e_u(T)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \int_0^T [\|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2}\|(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\partial\mathcal{T}_{h,\tau}}^2 + 2\|(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_{h,l-1/2}}^2] ds \\
& \leq \left( \left( \int_0^T \left[ \|I_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2}R\|\partial_n(I_q(s) \cdot \mathbf{n})\|_{D_h^c, h^2}^2 + \frac{1}{2}R\|I_q(s)\|_{\Gamma_{h,h}}^2 \right] ds \right)^{1/2} + \int_0^T \|I_{u_s}(s)\|_{\mathcal{T}_h} \right)^2.
\end{aligned}$$

Con los resultados de la sección hemos demostrado el siguiente lema.

**Lema 9.** *Bajo las hipótesis (2.3.4.1)*

$$\|e_u(T)\|_{\mathcal{T}_h} \leq \left( \int_0^T \left[ \|I_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2}R^2\|\partial_n(I_q(s) \cdot \mathbf{n})\|_{D_h^c, h^2}^2 + \frac{1}{2}R\|I_q(s)\|_{\Gamma_{h,h}}^2 \right] ds \right)^{1/2} + \int_0^T \|I_{u_s}(s)\|_{\mathcal{T}_h}.$$

Ahora procedemos a calcular una estimación para  $\mathbf{e}_q(T)$ .

**Lema 10.** Sea  $u \in C^2(0, T; H^{l_u+1}(\Omega))$ . Para todo  $s > 0$  se tienen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\tau, \partial\mathcal{T}_h}^2 + \|\partial_s e_u(s)\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 \\ & = ((\Pi_V(\mathbf{q}_s) - \mathbf{q}_s)(s), \mathbf{e}_q(s))_{\mathcal{T}_h} + ((\Pi_W(u_s) - u_s)(s), \partial_s e_u(s))_{\mathcal{T}_h} + \langle (\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s), -\mathbf{e}_{\hat{q}}(s) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h} \\ y \quad & \|\partial_s \mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\partial_s(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\tau, \partial\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|\partial_s e_u(s)\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 \\ & = ((\Pi_V(\mathbf{q}_s) - \mathbf{q}_s)(s), \partial_s \mathbf{e}_q(s))_{\mathcal{T}_h} + ((\Pi_W(u_{ss}) - u_{ss})(s), \partial_s e_u(s))_{\mathcal{T}_h} \\ & \quad + \langle (\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s), -\partial_s \mathbf{e}_{\hat{q}}(s) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Si derivamos las ecuaciones del error (4.1.1a) y (4.1.1d) con respecto al  $s$  obtenemos

$$(\partial_s \mathbf{e}_q, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (\partial_s e_u, \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, \partial_s e_{\hat{u}} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = (\Pi_V(\mathbf{q}_s) - \mathbf{q}_s, \mathbf{v}_h), \quad (4.2.4a)$$

$$(\partial_s e_u, w_h)_{\mathcal{T}_h} - (\nabla w_h, \mathbf{e}_q)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n}, w_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = (\Pi_W(u_s) - u_s, w_h)_{\mathcal{T}_h}, \quad (4.2.4b)$$

$$\langle \mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n}, \xi_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma_h} = 0, \quad (4.2.4c)$$

$$\langle \partial_s e_{\hat{u}}, \mu_h \rangle_{\Gamma_h} = \langle \tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs}, \mu_h \rangle_{\Gamma_h}, \quad (4.2.4d)$$

$$e_u(0) = 0. \quad (4.2.4e)$$

Testeamos (4.2.4) con  $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_q(s)$ ,  $w_h = \partial_s e_u(s)$ ,  $\xi_h = \begin{cases} -\partial_s e_{\hat{u}}(s) & \text{en } \partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma_h \\ -\mathbf{e}_{\hat{q}}(s) \cdot \mathbf{n} & \text{en } \Gamma_h \end{cases}$ . Integrando

por partes y sumando las cuatro ecuaciones llegamos a la primera igualdad del Lema. Para obtener la segunda igualdad derivamos todas las ecuaciones de (4.1.1) con respecto al tiempo:

$$(\partial_s \mathbf{e}_q, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (\partial_s e_u, \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, \partial_s e_{\hat{u}} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = (\Pi_V(\mathbf{q}_s) - \mathbf{q}_s, \mathbf{v}_h), \quad (4.2.5a)$$

$$(\partial_{ss} e_u, w_h)_{\mathcal{T}_h} - (\nabla w_h, \partial_s \mathbf{e}_q)_{\mathcal{T}_h} + \langle \partial_s \mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n}, w_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = (\Pi_W(u_{ss}) - u_{ss}, w_h)_{\mathcal{T}_h}, \quad (4.2.5b)$$

$$\langle \partial_s \mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n}, \xi_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma_h} = 0, \quad (4.2.5c)$$

$$\langle \partial_s e_{\hat{u}}, \mu_h \rangle_{\Gamma_h} = \langle \tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs}, \mu_h \rangle_{\Gamma_h}. \quad (4.2.5d)$$

Testeamos las ecuaciones en (4.2.5a) con  $\mathbf{v}_h = \partial_s \mathbf{e}_q(s)$ , (4.2.5b)  $w_h = \partial_s e_u(s)$  y (4.2.5c), (4.2.5d) respectivamente con

$$\xi_h = \begin{cases} -\partial_s e_{\hat{u}}(s) & \text{en } \partial D_h \setminus \Gamma_h \\ -\partial_s \mathbf{e}_{\hat{q}}(s) \cdot \mathbf{n} & \text{en } \Gamma_h \end{cases}. \text{ Análogo al paso anterior, integramos por partes (4.2.5b),}$$

sumamos y obtenemos la segunda igualdad del Lema.  $\square$

El siguiente resultado es consecuencia de lo anterior.

**Lema 11.** (Estimación para  $\mathbf{e}_q(T)$  en norma  $L^2(D_h)$ ). Para todo  $T > 0$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{e}_q(T)\|_{\mathcal{T}_h} \\ & \leq 2 \left[ \int_0^T \left( \|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{3}{2} \|(\Pi_V(\mathbf{q}_s) - \mathbf{q}_s)(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + 4 \|(\Pi_W(u_s) - u_s)(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 \right) ds \right. \\ & \quad + 8 \int_0^T \left( \|I_{q_s}(s) \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_h, l}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \frac{1}{3} R \|\partial_n(I_{q_s} \cdot \mathbf{n})(s)\|_{K_{e_{xt}, h^2}^e}^2 \right) ds \\ & \quad + 8 \int_0^T \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \frac{1}{3} R \|\partial_n(I_q \cdot \mathbf{n})(s)\|_{K_{e_{xt}, h^{1+2}}^e}^2 + \|I_q \cdot \mathbf{n}(s)\|_{\Gamma_h, l}^2 + 4 \|(\Pi_W(u_{ss}) - u_{ss})(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 \right) ds \\ & \quad \left. + \|\Pi_W(u_s(0)) - u_s(0)\|_{\mathcal{T}_h}^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Si hacemos la misma descomposición realizada en (4.2.3) a  $-\mathbf{e}_{\hat{q}}(s) \cdot \mathbf{n}$  pero ahora a  $-\partial_s \mathbf{e}_{\hat{q}}(s) \cdot \mathbf{n}$ , obtenemos, por la desigualdad de Young con  $\delta > 0$  y  $\epsilon > 0$  a especificar, las siguientes dos desigualdades:

$$\begin{aligned}
& \langle (\tilde{g}_s(s) - \tilde{g}_{hs}(s)), -\mathbf{e}_{\hat{q}}(s) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h} \\
& \leq -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|l^{-1/2}(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\delta}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\delta} \|l^{1/2} I_{\mathbf{q}}(s) \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_h}^2 \\
& \quad + \frac{\delta}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\delta} \|l^{1/2} \delta_{I_{\mathbf{q}}}(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\delta}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 \\
& \quad + \frac{1}{2\delta} \|l^{1/2} \delta_{\mathbf{e}_{\mathbf{q}}}(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\delta}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\delta} \|\tau l^{1/2}(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\Gamma_h}^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \langle (\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s), -\partial_s(s) \mathbf{e}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h} \\
& \leq -\|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|l^{1/2} \partial_s I_{\mathbf{q}}(s) \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_h}^2 \\
& \quad + \frac{\epsilon}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|l^{1/2} \partial_s \delta_{I_{\mathbf{q}}}(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 \\
& \quad + \frac{1}{2\epsilon} \|l^{1/2} \partial_s \delta_{\mathbf{e}_{\mathbf{q}}}(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|\partial_s(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\Gamma_h, \tau l^{1/2}}^2.
\end{aligned}$$

Luego, reemplazamos en ambas ecuaciones del Lema 10 los términos que acabamos de acotar y sumamos ambas desigualdades:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|\mathbf{e}_{\mathbf{q}}(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\tau, \partial \mathcal{T}_h}^2 + \|\partial_s e_u(s)\|_{\partial \mathcal{T}_h}^2 \\
& \leq ((\Pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_s) - \mathbf{q}_s)(s), \mathbf{e}_{\mathbf{q}}(s))_{\mathcal{T}_h} + ((\Pi_W(u_s) - u_s)(s), \partial e_u(s))_{\mathcal{T}_h} \\
& \quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|l^{-1/2}(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\delta}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\delta} \|l^{1/2} I_{\mathbf{q}}(s) \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_h}^2 \\
& \quad + \frac{\delta}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\delta} \|l^{1/2} \delta_{I_{\mathbf{q}}}(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\delta}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 \\
& \quad + \frac{1}{2\delta} \|l^{1/2} \delta_{\mathbf{e}_{\mathbf{q}}}(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\delta}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\delta} \|\tau l^{1/2}(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\Gamma_h}^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \|\partial_s \mathbf{e}_{\mathbf{q}}(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\partial_s(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\tau, \partial \mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|\partial_s e_u(s)\|_{\partial \mathcal{T}_h}^2 \\
& \leq ((\Pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_s) - \mathbf{q}_s)(s), \partial_s \mathbf{e}_{\mathbf{q}}(s))_{\mathcal{T}_h} + ((\Pi_W(u_{ss}) - u_{ss})(s), \partial e_u(s))_{\mathcal{T}_h} \\
& \quad - \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|l^{1/2} \partial_s I_{\mathbf{q}}(s) \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_h}^2 \\
& \quad + \frac{\epsilon}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|l^{1/2} \partial_s \delta_{I_{\mathbf{q}}}(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 \\
& \quad + \frac{1}{2\epsilon} \|l^{1/2} \partial_s \delta_{\mathbf{e}_{\mathbf{q}}}(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|l^{-1/2}(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|\partial_s(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\Gamma_h, \tau l^{1/2}}^2.
\end{aligned}$$

Claramente si  $\delta = \epsilon = \frac{1}{4}$ , podemos pasar al lado izquierdo  $-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_h, l^{-1}}^2$  y  $\|(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_h, l^{-1}}^2$ . De la misma manera por la hipótesis (2.3.4.1a), también podemos pasar  $\|\partial_s(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\Gamma_h, \tau l^{1/2}}^2$  a la izquierda. Es claro que  $\partial_s I_{\mathbf{q}}(s) = I_{\mathbf{q}_s}(s)$  y que  $\partial_s \delta_{I_{\mathbf{q}}}(s) = \delta_{I_{\mathbf{q}_s}}(s)$ . Aplicando la desigualdad de Young al término  $((\Pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_s) - \mathbf{q}_s)(s), \mathbf{e}_{\mathbf{q}}(s))_{\mathcal{T}_h}$  por la desigualdad (2.3.5.2) del Lema 6 podemos acotar las normas  $\|\delta_{I_{\mathbf{q}}}\|_{\Gamma_h, l}^2$  y  $\|\delta_{I_{\mathbf{q}_s}}\|_{\Gamma_h, l}^2$  para luego analizarlas en la siguiente sección. Todos los argumentos presentados nos llevan a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left( \|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\tau, \partial\mathcal{T}_h}^2 + \|\partial_s e_u(s)\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \|(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(s)\|_{\Gamma_{h,l-1/2}}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \left( \|\partial_s \mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\partial_s(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\tau, \partial\mathcal{T}_h}^2 + \|\partial_s e_u(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_{h,l-1/2}}^2 \right) \\
& \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{3}{2} \|(\Pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_s) - \mathbf{q}_s)(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + 4 \|(\Pi_W(u_s) - u_s)(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + 4 \|(\Pi_W(u_{ss}) - u_{ss})(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 \\
& + 8 \left( \|\partial_s I_q(s) \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_{h,l}}^2 + \|\partial_s \delta I_q(s)\|_{\Gamma_{h,l}}^2 \right) + 8 \left( \|\delta I_q\|_{\Gamma_{h,l}}^2 + \|I_q \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_{h,l}}^2 \right) \\
& \leq \|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{3}{2} \|(\Pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_s) - \mathbf{q}_s)(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + 4 \|(\Pi_W(u_s) - u_s)(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + 4 \|(\Pi_W(u_{ss}) - u_{ss})(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 \\
& + 8 \left( \|I_{q_s}(s) \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_{h,l}}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \frac{1}{3} R \|\partial_{\mathbf{n}}(I_{q_s} \cdot \mathbf{n})(s)\|_{K_{ext}^e, h^2}^2 \right) \\
& + 8 \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \frac{1}{3} R \|\partial_{\mathbf{n}}(I_q \cdot \mathbf{n})(s)\|_{K_{ext}^e, h^2}^2 + \|I_q \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_{h,l}}^2 \right).
\end{aligned}$$

Integrando entre 0 y  $T$  obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left( \|\mathbf{e}_q(T)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|(e_u - e_{\hat{u}})(T)\|_{\tau, \partial\mathcal{T}_h}^2 + \|\partial_s e_u(T)\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \|(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(T)\|_{\Gamma_{h,l-1/2}}^2 \right) \\
& - \frac{1}{2} \left( \|\mathbf{e}_q(0)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|(e_u - e_{\hat{u}})(0)\|_{\tau, \partial\mathcal{T}_h}^2 + \|\partial_s e_u(0)\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \|(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(0)\|_{\Gamma_{h,l-1/2}}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \left( \|\partial_s \mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\partial_s(e_u - e_{\hat{u}})(s)\|_{\tau, \partial\mathcal{T}_h}^2 + \|\partial_s e_u(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|(\tilde{g}_s - \tilde{g}_{hs})(s)\|_{\Gamma_{h,l-1/2}}^2 \right) ds \\
& \leq \int_0^T \left( \|\mathbf{e}_q(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{3}{2} \|(\Pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_s) - \mathbf{q}_s)(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + 4 \|(\Pi_W(u_s) - u_s)(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 \right) ds \\
& + 8 \int_0^T \left( \|I_{q_s}(s) \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_{h,l}}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \frac{1}{3} R \|\partial_{\mathbf{n}}(I_{q_s} \cdot \mathbf{n})(s)\|_{K_{ext}^e, h^2}^2 \right) ds \\
& + 8 \int_0^T \left( \|I_q \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_{h,l}}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h} \frac{1}{3} R \|\partial_{\mathbf{n}}(I_q \cdot \mathbf{n})(s)\|_{K_{ext}^e, h^2}^2 \right) ds \\
& + \int_0^T 4 \|(\Pi_W(u_{ss}) - u_{ss})(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 ds
\end{aligned}$$

Donde nuevamente hemos usado  $\bar{R}$  (2.4.1.6) y el Lema 6. Para obtener la cota deseada recordamos que  $\mathbf{e}_q(0) = 0$ ,  $\mathbf{e}_{\tilde{q}}(0) = 0$ ,  $e_u = 0$ , y  $e_{\hat{u}}(0) = 0$  y además, por como impusimos la condición inicial discreta  $\tilde{g}(0) = \tilde{g}_h(0)$ . De la ecuación (4.1.1b), testeando con  $w_h = \partial_s e_u(s)$  e integrando por partes se tiene que:

$$(\partial_s e_u(s), \partial_s e_u(s))_{\mathcal{T}_h} - (\nabla \partial_s e_u(s), \mathbf{e}_q(s))_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_{\tilde{q}}(s) \cdot \mathbf{n}, \partial_s e_u(s) \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = (\Pi_W(u_s(s)) - u_s(s), \partial_s e_u(s))_{\mathcal{T}_h}$$

Si evaluamos en  $s = 0$ , obtenemos

$$\|\partial_s e_u(0)\|_{\mathcal{T}_h}^2 = (\Pi_W(u_s(0)) - u_s(0), \partial_s e_u(0))_{\mathcal{T}_h},$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos  $\|\partial_s e_u(0)\|_{\mathcal{T}_h} \leq \|(\Pi_W(u_s) - u_s)(0)\|_{\mathcal{T}_h}$ .  $\square$

## Capítulo 5

# Análisis del error en $D_h^C$

En el este capítulo abordaremos las cotas de algunos términos del lado derecho de estimaciones del error del capítulo anterior. Específicamente  $\|\partial_{\mathbf{n}}(I_{\partial_s \mathbf{q}}(s) \cdot \mathbf{n})(t)\|_{K_{ext}^e, h^2}$  y  $\|I_{\mathbf{q}}(s) \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_h, h}$ . También analizaremos  $\|(u - u_h)(s)\|_{\widetilde{K}_{ext}^e}$  y  $\|(\mathbf{q} - \mathbf{q}_h)(s)\|_{\widetilde{K}_{ext}^e}$ . Mostraremos que también están acotadas por términos de orden óptimo, de la misma manera que  $\|(u - u_h)(s)\|_{D_h}$  y  $\|(\mathbf{q} - \mathbf{q}_h)(s)\|_{D_h}$ , y así poder obtener una cota global en el dominio  $\Omega$ . Estas cotas son uniformes  $\forall s \in [0, T]$  por la compacidad del intervalo.

### 5.1. Estimaciones para la derivada normal del error de proyección en $K_{ext}^e$

En esta sección abordaremos las cotas para los términos asociados a los errores de la proyección que aparecieron en las cotas del error de  $\|e_u(T)\|_{\mathcal{T}_h}$  y  $\|e_{\mathbf{q}}(T)\|_{\mathcal{T}_h}$ , utilizando resultados del Capítulo 1 y el Capítulo 2.

**Lema 12.** Para  $s \in ]0, T]$ , se tiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{e \in \Gamma_h} \|\partial_{\mathbf{n}}(I_{\mathbf{q}}(s) \cdot \mathbf{n})\|_{K_{ext}^e, h^{1+2}}^2 \\ & \leq 4 \left( C_{\Pi} \tilde{R}c' h^{2l_u+2} (\|u(s)\|_{H^{l_u+1}(\Omega)} + h^{2l_{\mathbf{q}}+2} \|\mathbf{q}(s)\|_{H^{l_{\mathbf{q}}+1}(\Omega)}) + 2\tilde{R}c' C_{BH}^2 C_S^2 \|\mathbf{q}(s)\|_{H^{l_{\mathbf{q}}+1}(\Omega)}^2 \right. \\ & \quad \left. + 4C_{BH}^2 C_S^2 h^{l_{\mathbf{q}}+1} \|\mathbf{q}(s)\|_{H^{l_{\mathbf{q}}+1}(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

donde recordamos que  $C_{BH}$  es la constante que acota la aproximación del polinomio de Taylor ponderado en el Lema 3,  $C_S$  es la constante que aparece en el Lema 4,  $C_{\Pi}$  es la constante que aparece en el Teorema 1 que usamos para acotar los términos que involucran los errores de proyección y  $\tilde{R}c'$  es la constante que introducimos en (2.4.1.2).

*Demostración.* Sean  $s \in [0, T]$  y  $\mathbf{p}(s) \in [\mathbb{P}_k(K^e)]^d$  arbitrarios. Utilizaremos las constantes  $r_e$ ,  $C_{inv}^e$  y  $C_{ext}^e$ , indicadas en (2.3.3.1) y (2.3.3.2). Así, procederemos acotando arista por arista. Sea  $e \in \tilde{\mathcal{E}}_h^{\partial}$ , luego

$$\begin{aligned} & \|\partial_{\mathbf{n}}(I_{\mathbf{q}}(s) \cdot \mathbf{n})\|_{K_{ext}^e, h^2} \\ & \leq \|\partial_{\mathbf{n}}(\mathbf{q} - \mathbf{p})(s) \cdot \mathbf{n}\|_{K_{ext}^e, h^2} + \|\partial_{\mathbf{n}}(\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{p})(s) \cdot \mathbf{n}\|_{K_{ext}^e, h^2} \\ & \leq h \left( \frac{\sqrt{T_e}}{h_e^{\perp}} C_{inv}^e C_{ext}^e \|(\mathbf{p} - \Pi_V(\mathbf{q}))(s) \cdot \mathbf{n}\|_{K^e} + \|\partial_{\mathbf{n}}(\mathbf{q} - \mathbf{p})(s) \cdot \mathbf{n}\|_{K_{ext}^e} \right) \\ & \leq \sqrt{\tilde{R}c'} \|(\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{p})(s)\|_{K^e} + h \|\partial_{\mathbf{n}}(\mathbf{q} - \mathbf{p})(s) \cdot \mathbf{n}\|_{K_{ext}^e}, \end{aligned}$$

donde en el paso previo utilizamos las definición de las constantes (2.3.3.2), (2.3.3.1) y la constante auxiliar (2.4.1.2). Seguimos acotando para obtener que

$$\begin{aligned} & \|\partial_{\mathbf{n}}(I_{\mathbf{q}(s)} \cdot \mathbf{n})\|_{K_{ext}^e, h^2} \\ & \leq \sqrt{\tilde{R}c'} \|(\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q})(s)\|_{K^e} + \sqrt{\tilde{R}c'} \|\mathbf{q} - \mathbf{p}(s)\|_{K^e} + h \|\partial_{\mathbf{n}}(\mathbf{q} - \mathbf{p})(s) \cdot \mathbf{n}\|_{K_{ext}^e} \\ & \leq \sqrt{\tilde{R}c'} \|(\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q})(s)\|_{K^e} + \sqrt{\tilde{R}c'} \|(\mathbf{q} - \mathbf{p})(s)\|_{K^e} \\ & \quad + 2h \|\nabla(\mathbf{q} - \mathbf{p})(s)\|_{K_{ext}^e}. \end{aligned}$$

Suponiendo que  $\mathbf{q}(s) \in [H^{l_q+1}(\Omega)]^d$ , aplicando el Lema 4 a las componenetes de  $\mathbf{q}(s)$  y por las hipótesis (2.3.4.2) sobre la frontera  $\Gamma$  consideremos una extensión  $S(\mathbf{q}(s))$  de  $\mathbf{q}(s)$  a todo  $\mathbb{R}^d$  tal que  $S(\mathbf{q}(s)) = \mathbf{q}(s)$  en  $\Omega$ ,  $S_{\mathbf{q}(s)} \in [H^{l_q+1}(\mathbb{R}^d)]^d$  y  $\|S(\mathbf{q}(s))\|_{\mathbb{R}^d} \leq C_S \|\mathbf{q}(s)\|_{\Omega}$ . Tomamos la bola  $\mathcal{B}_e$  de radio mínimo de tal manera que contengan a  $K_{ext}^e$  y  $K^e$ . Luego se tiene que

$$\begin{aligned} & \|\partial_{\mathbf{n}}(I_{\mathbf{q}(s)} \cdot \mathbf{n})\|_{K_{ext}^e, h^2} \\ & \leq \sqrt{\tilde{R}c'} \|(\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q})(s)\|_{K^e} + \sqrt{\tilde{R}c'} \|(\mathbf{q} - \mathbf{p})(s)\|_{K^e} + 2h \|\nabla(\mathbf{q} - \mathbf{p})(s)\|_{K_{ext}^e} \\ & \leq \sqrt{\tilde{R}c'} \|(\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q})(s)\|_{K^e} + \sqrt{\tilde{R}c'} \|S(\mathbf{q}) - \mathbf{p}(s)\|_{\mathcal{B}_e} + 2h \|\nabla(S(\mathbf{q}) - \mathbf{p})(s)\|_{\mathcal{B}_e}. \end{aligned}$$

Tomando  $\mathbf{p}(s)$  el polinomio de Taylor ponderado que aproxima a  $S(\mathbf{q}(s))$  en la bola, la cota será de la forma.

$$\begin{aligned} & \|\partial_{\mathbf{n}}(I_{\mathbf{q}(s)} \cdot \mathbf{n})\|_{K_{ext}^e, h^2} \\ & \leq \sqrt{\tilde{R}c'} \|(\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q})(s)\|_{K^e} + \sqrt{\tilde{R}c'} C_{BH} h^{l_q+1} \|S(\mathbf{q})(s)\|_{H^k(\mathcal{B}_e)} + 2h C_{BH} h^{l_q} \|S(\mathbf{q})(s)\|_{H^{l_q+1}(\mathcal{B}_e)} \\ & \leq \sqrt{\tilde{R}c'} \|(\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q})(s)\|_{K^e} + h^{l_q+1} \sqrt{\tilde{R}c'} C_{BH} \|S(\mathbf{q})(s)\|_{H^k(\mathcal{B}_e)} + 4h^{l_q+1} C_{BH} \|S(\mathbf{q})(s)\|_{H^l(\mathcal{B}_e)}. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado y sumando sobre las aristas exteriores

$$\begin{aligned} & \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \|\partial_{\mathbf{n}}(I_{\mathbf{q}(s)} \cdot \mathbf{n})\|_{K_{ext}^e, h^2}^2 \\ & \leq \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \tilde{R}c' \|(\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q})(s)\|_{K^e}^2 + \tilde{R}c' C_{BH}^2 \|S(\mathbf{q})(s)\|_{H^k(\mathcal{B}_e)}^2 + 4C_{BH}^2 \|S(\mathbf{q})(s)\|_{H^{k+1}(\mathcal{B}_e)}^2 \right) \\ & \leq \left( \tilde{R}c' \|(\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q})(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + 2\tilde{R}c' C_{BH}^2 \|S(\mathbf{q})(s)\|_{H^{l_q+1}(\mathbb{R}^d)}^2 + 4C_{BH}^2 \|S(\mathbf{q})(s)\|_{H^{l_q+1}(\mathbb{R}^d)}^2 \right). \end{aligned}$$

Donde aplicamos el Lema 3. Para volver a la variable  $\mathbf{q}$  utilizamos la cota del Lema 4. De esta manera

$$\begin{aligned} & \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \|\partial_{\mathbf{n}}(I_{\mathbf{q}(s)} \cdot \mathbf{n})\|_{K_{ext}^e, h^2}^2 \\ & \leq 4 \left( \tilde{R}c' \|(\Pi_V(\mathbf{q}) - \mathbf{q})(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + 2\tilde{R}c' C_{BH}^2 C_S^2 h^{2l_q+2} \|\mathbf{q}(s)\|_{H^{l_q+1}(\Omega)}^2 \right. \\ & \quad \left. + 4C_{BH}^2 C_S^2 h^{2l_q+2} \|\mathbf{q}(s)\|_{H^{l_q+1}(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq 4 \left( C_{\Pi}^2 \tilde{R}c' h^{2 \min\{l_u, l_q\}+2} (\|u(s)\|_{H^{l_u+1}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{q}(s)\|_{H^{l_q+1}(\Omega)}^2) + (1 + \bar{R}) 8C_{BH}^2 C_S^2 \|\mathbf{q}(s)\|_{H^{l_q+1}(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Aplicando raíz a la última desigualdad acotamos el término por el orden deseado. Es directo ver que  $\|\partial_{\mathbf{n}}(I_{\mathbf{q}(s)} \cdot \mathbf{n})\|_{K_{ext}^e, h^2}$  se acota de manera análoga.  $\square$

Para el término  $\|I_{\mathbf{q}(s)} \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_h, h^+}$  procederemos de manera similar. Sea  $\mathbf{p}(s)$  un polinomio,  $s \in [0, T]$  y  $e \in \mathcal{E}_h^\partial$ . Usando el Lema 1 de desigualdad inversa y el Lema 2 de la proyección  $L^2$  un elemento  $K^e$ , con  $e \subset \Gamma_h$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \|I_{\mathbf{q}(s)} \cdot \mathbf{n}\|_{e, h} &\leq \|(\Pi_V \mathbf{q}(s) - \mathbf{p}(s)) \cdot \mathbf{n}\|_{e, h} + \|(\mathbf{q}(s) - \mathbf{p}(s)) \cdot \mathbf{n}\|_{e, h} \\ &\leq \widetilde{C}_\partial (\|\Pi_V \mathbf{q}(s) - \mathbf{q}(s)\|_{K^e} + \|\mathbf{q}(s) - \mathbf{p}(s)\|_{K^e}) + \|\mathbf{q}(s) - \mathbf{p}(s)\|_{e, h} \\ &\leq \widetilde{C}_\partial (C_\Pi (h^{l_u+1} \|u\|_{H^{l_u+1}(K^e)} + h^{l_q+1} \|\mathbf{q}\|_{H^{l_q+1}(K^e)}) + C_{P_{L^2}} h h^{l_q+1/2} \|\mathbf{q}\|_{H^{l_q+1}(K^e)}). \end{aligned}$$

En el último paso tomamos  $\mathbf{p}(s) = P_{L^2(K^e)}(\mathbf{q}(s))$  y empleamos la desigualdad de trazas discreta donde aparece (2.4.1.4). Al igual que en el caso anterior elevamos al cuadrado y sumamos para obtener la cota. También es evidente que  $\|I_{\mathbf{q}_s(s)} \cdot \mathbf{n}\|_{e, h}$  se acota con los mismos pasos.

Utilizando los lemas 9 y 11 concluimos que las integrales que acotan la norma de  $e_u(s)$  y  $e_{\mathbf{q}}(s)$  están controladas uniformemente por términos de orden  $h^{\min\{l_u, l_q\}+1} \forall s \in [0, T]$ .

## 5.2. Error de aproximación en $D_h^c$

Para analizar el error en  $D_h^c$  consideraremos las regiones  $\widetilde{K}_{ext}^e$  y  $K_{ext}^e$  introducidas en la Sección 2.3.1. En efecto, dado un  $s \in [0, T]$  y  $e \in \mathcal{E}_h^\partial$ , una forma de calcular  $\|(u - u_h)(s)\|_{D_h^c}$  es la siguiente

$$\begin{aligned} &\|(u - u_h)(s)\|_{D_h^c} \\ &= \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \|(u - u_h)(s)\|_{\widetilde{K}_{ext}^e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \|(\Pi_W(u) - u_h)(s)\|_{\widetilde{K}_{ext}^e}^2 + \|(u - \Pi_W(u))(s)\|_{\widetilde{K}_{ext}^e}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Procederemos a acotar arista por arista. Sea  $e \in \mathcal{E}_h^\partial$  y  $p(s) \in \mathbb{P}_k(K^e)$  arbitrario, donde  $K^e$  es el elemento asociado a  $e \subset \Gamma_h$ . Se sigue que:

$$\begin{aligned} \|I_u(s)\|_{\widetilde{K}_{ext}^e} &= \|u(s) - \Pi_W(u(s))\|_{\widetilde{K}_{ext}^e} \\ &\leq \|(p - \Pi_W(u))(s)\|_{\widetilde{K}_{ext}^e} + \|(u - p)(s)\|_{\widetilde{K}_{ext}^e} \\ &\leq \bar{R} \|(p - \Pi_W(u))(s)\|_{K^e} + \|(u - p)(s)\|_{\widetilde{K}_{ext}^e} \\ &\leq \bar{R} \left[ \|(u - p)(s)\|_{K^e} + \|(u - \Pi_W(u))(s)\|_{K^e} \right] + \|(u - p)(s)\|_{\widetilde{K}_{ext}^e} \\ &\leq (1 + \bar{R}) \|u(s) - p(s)\|_{K^e \cup \widetilde{K}_{ext}^e} + \|I_u(s)\|_{K^e}. \end{aligned}$$

En el último paso hemos usado la definición de  $\bar{R}$  (2.4.1.6). Luego, expandimos el conjunto sobre donde integramos  $\|u(s) - p(s)\|_{K^e}$  para integrar en la bola  $\mathcal{B}$  como hicimos en la demostración del Lema anterior. Por las hipótesis (2.3.4.2) sobre la frontera  $\Gamma$ , y por el Lema 4 si la función  $u(s) \in H^{l_u+1}(\Omega)$ , entonces  $u(s)$  se puede extender a una función  $S(u(s)) \in H^{l_u+1}(\mathbb{R}^d)$ , donde  $u(s) = S(u(s))$  en  $\Omega$ . Trabajando con la extensión, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|I_u(s)\|_{\widetilde{K}_{ext}^e} &\leq (1 + \bar{R}) \|S(u(s)) - p(s)\|_{K^e \cup \widetilde{K}_{ext}^e} + \|I_u(s)\|_{K^e} \\ &\leq (1 + \bar{R}) \|S(u(s)) - p(s)\|_{\mathcal{B}^e} + \|I_u(s)\|_{K^e}. \end{aligned}$$

En último paso, para cada  $K^e$ , se toma la bola  $\mathcal{B}^e$  de radio mínimo tal que  $K^e \cup \widetilde{K}_{ext}^e \subset \mathcal{B}^e$ . Se sigue que

$$\|I_u(s)\|_{\widetilde{K}_{ext}^e} \leq (1 + \bar{R}) C_{BH} h^{l_u+1} |S(u(s))|_{\mathcal{B}^e} + \|I_u(s)\|_{K^e}.$$

En el paso previo se usa el polinomio de Taylor ponderado  $p(s)$  del Lema 3 que aproxima a  $S(u(s))$  en la bola  $\mathcal{B}^e$ . Como  $e_u(s) \in \mathbb{P}_k(K^e)$ , es directo ver que  $\|e_u(s)\|_{\widetilde{K}_{ext}^e} \leq \bar{R}\|e_u(s)\|_{K_{ext}^e}$ , donde  $\bar{R}$  es la constante (2.4.1.6), por otra parte, por el Lema 9 y la primera sección de éste Capítulo está, el término  $\|e_u(s)\|_{K_{ext}^e}$  está acotado. De esta manera, para obtener la cota de orden óptimo elevamos al cuadrado, sumamos sobre todas las aristas y utilizamos el Teorema 1 para acotar el término que contiene el error de proyección. Se sigue que

$$\begin{aligned}
& \|(u - u_h)(s)\|_{D_h^c}^2 \\
& \leq 2 \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} (1 + \bar{R}) C_{BH} h^{l_u+1} |S(u(s))|_{\mathcal{B}^e}^2 + \|I_{u(s)}\|_{K^e}^2 \right) \\
& \leq 6((1 + \bar{R}) C_{BH})^2 h^{2k+2} |S(u(s))|_{\mathbb{R}^d}^2 + \|I_u(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 \\
& \leq 6 \left( ((1 + \bar{R}) C_{BH} C_S)^2 h^{2 \min\{l_u, l_q\} + 2} \|u(s)\|_{l_{u+1}, \Omega}^2 \right. \\
& \quad \left. + \bar{R}^2 \|e_u(s)\|_{\mathcal{T}_h}^2 + C_\Pi^2 h^{2 \min\{l_u, l_q\} + 2} (\|u(s)\|_{l_{u+1}, \Omega}^2 + \|\mathbf{q}(s)\|_{l_{q+1}, \Omega}^2) \right).
\end{aligned}$$

Notar que el radio de las bolas  $\mathcal{B}_e$  es del orden de  $h$  y multiplicamos por un factor en el caso que las bolas se sobrelapen. Luego extraemos raíz y obtenemos la cota. Para obtener la cota  $\|(\mathbf{q} - \mathbf{q}_h)(s)\|_{D_h^c}$  se procede de manera análoga. De esta manera, por la compacidad de  $[0, T]$  tomamos los máximos de las constantes e integrales concluimos la demostración del Teorema 3.

## Capítulo 6

# Experimentos numéricos

En este capítulo mostraremos los experimentos numéricos correspondientes para el esquema continuo en el tiempo (3.1.1). Al implementar el método, para cada  $t \in [0, 1]$  se buscarán las soluciones discretas en los espacios definidos en el Capítulo 2. Para el esquema totalmente discreto, particionamos el intervalo de manera uniforme y de tamaño de paso  $\Delta t$ . En nuestro caso utilizaremos el método de Euler implícito y gracias a eso tenemos estabilidad ya que no necesitamos cumplir la condición *CFL*. Como el error de éste método es de orden  $\Delta t$ , si utilizamos una malla de tamaño  $h$  y polinomios de grado  $k$  para conservar los ordenes de convergencia debemos tomar  $\Delta t \sim h^{k+1} \sim \frac{1}{(\sqrt{N_{elem}})^{k+1}}$ , donde  $N_{elem}$  es la cantidad de elementos. Esta condición hace que el costo computacional sea alto para  $k \geq 3$  y mallas finas, por esto, cuando implementamos el esquema con grado polinomial  $k = 2$  y la malla de  $D_h$  tiene 6925 elementos, el ciclo temporal realiza alrededor de 58000 iteraciones. En todos los casos simplemente tomamos  $\Delta t = \frac{1}{(\sqrt{N_{elem}})^{k+1}}$ , salvo en éste último que tomamos  $\Delta t = \frac{10}{(\sqrt{N_{elem}})^{k+1}}$ , con esto, el tiempo de ejecución se reduce un 90 por ciento. En las estimaciones del error previas, consideramos  $\tau \in \mathcal{O}(1)$ , en la implementación lo tomamos como  $\tau = 1$ . Por otra parte, construiremos las mallas como mencionamos en (2.1). Al utilizar mallas uniformemente regulares, como mencionamos en el párrafo introductorio a éste Capítulo el tamaño de la malla es proporcional a la raíz número de elementos. Tomaremos  $T = 1$  y calcularemos los ordenes de convergencia en este tiempo final. Luego los órdenes de convergencia experimentales son:

$$r(\mathbf{q}) = -2 \frac{\log \left( \|\mathbf{q}(1) - \mathbf{q}_{h_2}(1)\|_{\mathcal{T}_{h_2}} / \|\mathbf{q}(1) - \mathbf{q}_{h_1}(1)\|_{\mathcal{T}_{h_1}} \right)}{\log(N_2/N_1)}$$
$$r(u) = -2 \frac{\log \left( \|u(1) - u_{h_2}(1)\|_{\mathcal{T}_{h_2}} / \|u(1) - u_{h_1}(1)\|_{\mathcal{T}_{h_1}} \right)}{\log(N_2/N_1)}$$

Donde  $0 < h_2 < h_1$ ,  $N_i$  es la cantidad de elementos de  $\mathcal{T}_{h_i}$  y  $\|u(1) - u_{h_i}(1)\|_{\mathcal{T}_{h_i}}$  con  $\|\mathbf{q}(1) - \mathbf{q}_{h_i}(1)\|_{\mathcal{T}_{h_i}}$ , son los errores de aproximación del método para la malla de tamaño  $h_i$ , con  $i = 1, 2$ . Para obtener los órdenes de convergencia experimentales las mallas de tamaño  $h_2$  y  $h_1$  deben ser consecutivas.

### 6.1. Ejemplo 1: Dominio Circular

Para la construcción el polígono  $D_h$  primero construimos  $\mathcal{T}_h$  de la forma que dijimos en el Capítulo 3. Luego para obtener los caminos de transferencia usamos el algoritmo introducido en [21, Sección, 2.4].

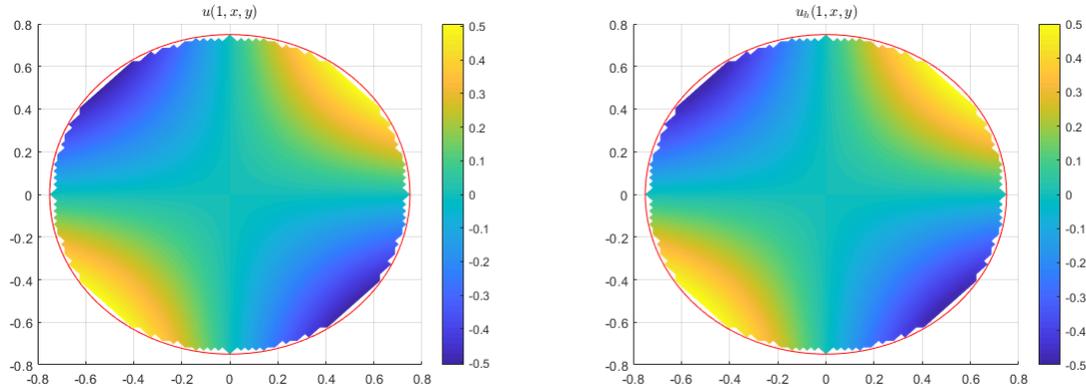
Consideraremos la solución exacta de (0.0.1) como:

$$u(t, x, y) = \sin((t + 1)xy),$$

defido  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq (0,75)^2\}$ . Resolveremos el problema con los  $f$  y  $g$  inducidos por  $u$  utilizando polinomios de grado  $k \in \{0, 1, 2\}$ . A continuación mostramos la Tabla 6.1 de la convergencia, donde se observa que el error decae a 0, más aún lo hace con el orden teórico que obtuvimos en el Teorema 3. En las Figuras 6.2 y 6.3 se observa que para el tiempo final  $t = 1$  y , las gráficas de  $u(1)$  y  $u_h(1)$  son casi iguales. Notar que la hipótesis (2.3.4.1b), no tenemos certeza si se cumple.

Cuadro 6.1: Tabla de convergencia en el dominio Circular

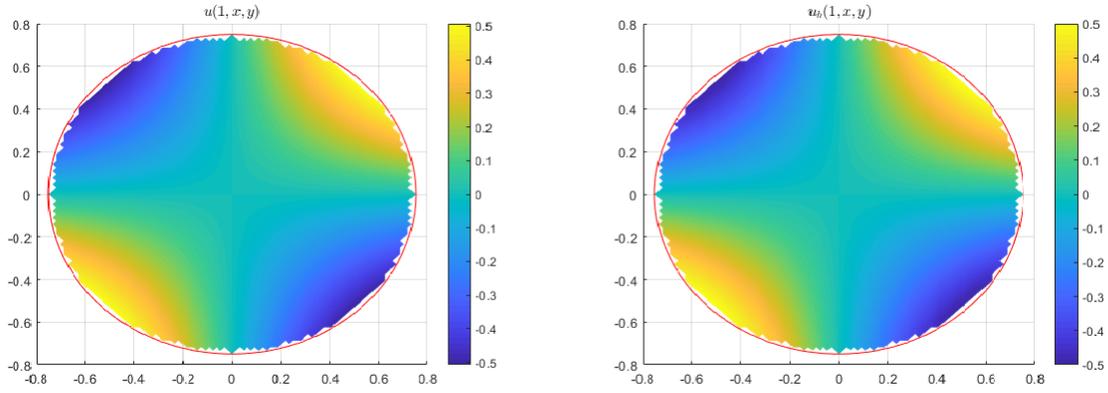
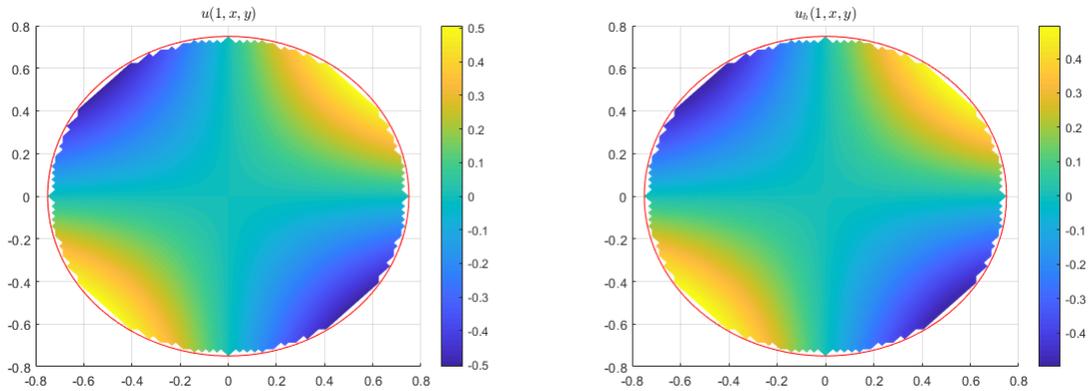
$k$	$N_{elem}$	$\ u - u_h\ _{L^2(D_h)}$	$r(u)$	$\ q - q_h\ _{L^2(D_h)}$	$r(q)$
$k = 0$	16	7.1303e-02	-	3.9607e-01	-
	88	3.3007e-02	0.90	1.6751e-01	1.01
	392	1.6523e-02	0.92	7.9394e-02	0.99
	1656	8.2631e-03	0.96	3.8409e-02	1.01
	6952	4.1235e-03	0.96	1.8558e-02	1.01
$k = 1$	16	9.2464e-03	-	1.4537e-02	-
	88	1.9659e-03	1.81	3.9228e-03	1.53
	392	4.8574e-04	1.87	1.2937e-03	1.48
	1656	1.2140e-04	1.92	3.1091e-04	1.98
	6952	2.9445e-05	1.97	6.5151e-05	2.17
$k = 2$	16	4.4861e-04	-	3.1569e-03	-
	88	2.6334e-04	0.62	2.1099e-03	0.47
	392	1.1582e-05	4.18	1.1487e-04	3.89
	1656	2.3243e-06	2.22	2.4493e-05	2.14
	6952	1.8286e-07	3.54	2.1881e-06	3.36

Figura 6.1: Gráfico comparativo  $N_{elem} = 6952$   $k = 0$  y  $t = 1$ 

## 6.2. Ejemplo 2: Dominio “Kidney”

Consideremos la misma solución exacta del caso anterior, pero en el dominio riñón, definido como  $\Omega = \{(x, y) : 1,5((x + 0,5)^2 + y^2) - x - 0,5)^2 - ((x + 0,5)^2 + y^2) + 0,1 = 0\}$ . En la Tabla 6.2 notamos que pasa exactamente lo mismo que en la Tabla 6.1, los errores decaen a 0 y nuevamente los ordenes de convergencia son óptimos tanto para  $u$  como  $q$ , además, las Figuras 6.5 y 6.6 muestran que la solución exacta y la aproximada en el tiempo final  $t = 1$  son casi idénticas

Las tablas ratifican la teoría obtenida, a pesar de que  $r_e \in \mathcal{O}(1)$  y como mencionamos anteriormente, la hipótesis de solubilidad 2.3.4.1b no tienen por que cumplirse.

Figura 6.2: Gráfico comparativo  $N_{elem} = 6952$   $k = 1$  y  $T = 1$ Figura 6.3: Gráfico comparativo  $N_{elem} = 6952$   $k = 2$  y  $T = 1$ 

### 6.3. Ejemplo 3: Animación del problema

Para efectos de visualización, consideremos ahora, las soluciones exactas 1-periódicas de 0.01 que mostraremos a continuación, definidas en  $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ , donde  $\Omega$  es el mismo dominio del Ejemplo 1. Las soluciones las aproximaremos con  $k = 0$  y 1656 elementos.

$$u(t, x, y) = \exp \left[ -8 \left( x - 0,75 \cos(2\pi t) \right)^2 - 8 \left( y - 0,75 \sin(2\pi t) \right)^2 \right].$$

En el siguiente enlace se puede ver la solución para este caso.

[Enlace externo](#)

$$u(t, x, y) = \exp \left( -20x^2 - 20y^2 \right) + \exp \left[ -8 \left( x - 0,75 \cos(2\pi t) \right)^2 - 8 \left( y - 0,75 \sin(2\pi t) \right)^2 \right].$$

En el siguiente enlace se puede ver la solución para este caso.

[Enlace externo](#)

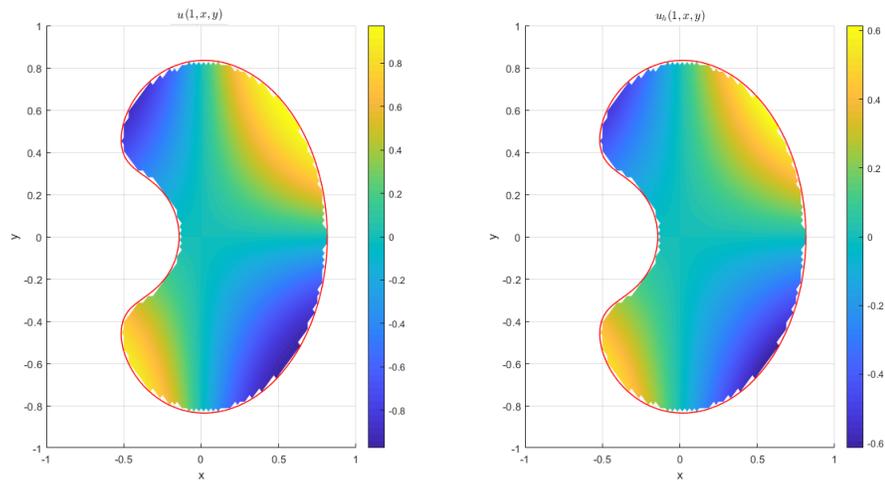
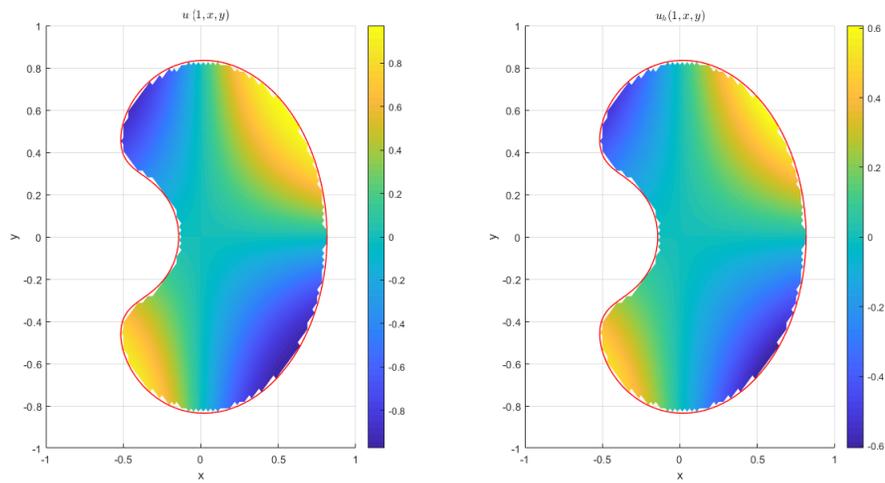
$$u(t, x, y) = \exp \left[ -8 \left( x - 0,75 \cos(4 \cos(2\pi t)) \right)^2 - 8 \left( y - 0,75 \sin(4 \cos(2\pi t)) \right)^2 \right].$$

Cuadro 6.2: Tabla de convergencia en el dominio “Kidney”

$k$	$N_{elem}$	$\ u - u_h\ _{L^2(D_h)}$	$r(u)$	$\ \mathbf{q} - \mathbf{q}_h\ _{L^2(D_h)}$	$r(\mathbf{q})$
$k = 0$	18	8.1922e-02	-	3.4653e-01	-
	84	3.7512e-02	0.66	1.6546e-01	0.62
	362	1.8883e-02	0.93	8.0336e-02	0.98
	1560	9.3353e-03	0.966	3.8508e-02	1.00
	6508	4.6327e-03	0.98	1.8749e-02	1.01
$k = 1$	18	9.1004e-03	-	2.1336e-02	-
	84	2.1909e-03	1.84	5.2180e-03	1.82
	362	5.4156e-04	1.91	1.4295e-03	1.77
	1560	1.3254e-04	1.92	3.3798e-04	1.97
	6508	3.2596e-05	1.96	7.6835e-05	2.07
$k = 2$	18	1.1863e-03	-	6.1248e-03	-
	84	1.5562e-04	2.63	7.5516e-04	2.71
	362	2.5450e-05	2.47	2.2431e-04	1.66
	1560	1.9542e-06	3.51	2.1663e-05	3.20
	6508	2.1738e-07	3.07	2.0662e-06	3.29

En el siguiente enlace se puede ver la solución para este caso.

[Enlace externo](#)

Figura 6.4: Gráfico comparativo  $N_{elem} = 6508$   $k = 0$  y  $t = 1$ Figura 6.5: Gráfico comparativo  $N_{elem} = 6508$ ,  $k = 1$  y  $t = 1$

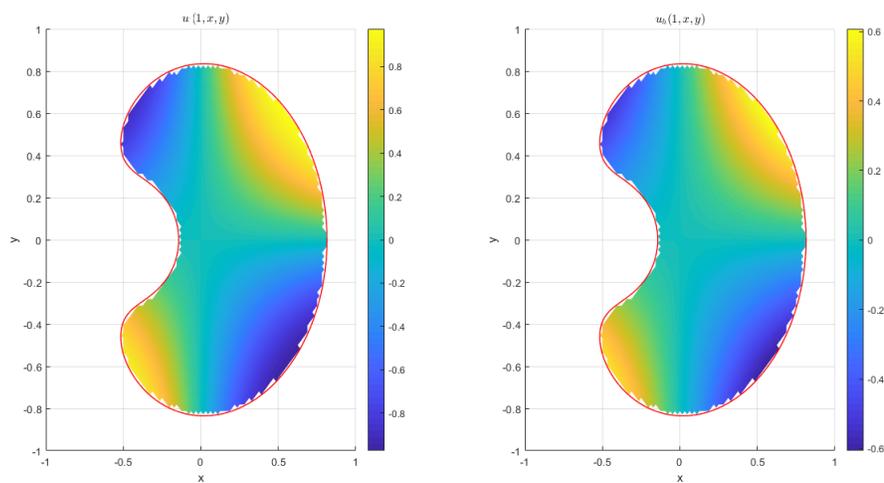


Figura 6.6: Gráfico comparativo  $N_{elem} = 6508$ ,  $k = 2$  y  $t = 1$

# Conclusiones

En primer lugar, utilizamos las técnicas de transmisión de la condición de contorno introducidas en [17, 21] y las herramientas entregadas en [18], ambos en problemas estacionarios. Propusimos y analizamos un esquema HDG para la ecuación del calor y mostramos que en particular, bajo ciertas hipótesis sobre la frontera (2.3.4.2) y sobre las constantes y la distancia entre  $\Gamma_h$  y  $\Gamma$  (2.3.4.1) el esquema está bien definido, y además, en el Teorema 3 mostramos el que efectivamente que si  $u(t) \in H^{k+1}(\Omega)$  y  $\mathbf{q}(t) \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega) \forall t \in [0, T]$ , entonces la solución  $(\mathbf{q}_h(t), u_h(t))$  que entrega el esquema HDG (3.1.1) satisface que:

$$\|(u - u_h)(t)\|_{\Omega} + \|(\mathbf{q} - \mathbf{q}_h)(t)\|_{\Omega} \leq Ch^{k+1}$$

De la misma manera, también la condición de frontera junto a su derivada temporal convergen en orden óptimo, es decir:

$$\|(\tilde{g} - \tilde{g}_h)(t)\|_{\Gamma_h, l-1} + \|(\tilde{g}_t - \tilde{g}_{ht})(t)\|_{\Gamma_h, l-1} \leq Ch^{k+1},$$

donde, recordando el Teorema 3, que nos indica que  $C > 0$  depende de la regularidad de  $\mathbf{q}$ ,  $u$  y del tiempo final  $T > 0$ .

Lo que se verificó teóricamente en [7] donde  $\Omega$  es poligonal, nosotros lo extendimos para un dominio no necesariamente poligonal

Finalmente nuestros experimentos numéricos indican que, a pesar de que las hipótesis (2.3.4.1) no se puedan garantizar, el método es óptimo.

## Trabajo Futuro

Como línea de trabajo futuro a esta Tesis, se puede analizar el mismo problema, pero en un dominio  $\Omega$  que dependa del tiempo, es decir que se mueva o cambie su forma. Por otra parte, las técnicas de éste trabajo puede servir como referencia para futuros trabajos de métodos HDG en dominios curvos evolutivos.

## A.1. Apéndice

En este apéndice mostraremos los aspectos principales de como implementar el esquema matricial asociado a (3.1.1) en dos dimensiones. Sea  $K \in \mathcal{T}_h$ ,  $\partial K = \cup_{i=1}^3 e_i$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $N = \dim(\mathbb{P}_k(K))$ . Definimos

$$\begin{aligned} \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\} & \text{ una base ortogonal para } \mathbb{P}_k(K), \\ \{(\varphi_1, 0), (\varphi_2, 0), \dots, (\varphi_N, 0), (0, \varphi_1), \dots, (0, \varphi_N)\} & \text{ una base ortogonal para } [\mathbb{P}_k(K)]^2, \\ \{\xi_1^l, \dots, \xi_{k+1}^l\} & \text{ una base ortogonal para } \mathbb{P}_k(e^l), \quad l \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Así en cada elemento  $K$ , las soluciones que entregará el método HDG serán de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_h(t, \mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) (\varphi_j(\mathbf{x}), 0) + \sum_{j=N+1}^{2N} \alpha_j(t) (0, \varphi_j(\mathbf{x})), \\ u_h(t, \mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^N \beta_j(t) \varphi_j(\mathbf{x}), \\ \hat{u}_h^l(t, \mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{k+1} \gamma_j^l(t) \xi_j^l(\mathbf{x}) \quad l \in \{1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

Donde  $\alpha_j(t), \beta_j(t), \gamma_j(t)$  son los coeficientes en un instante  $t$  que debemos determinar. Luego, utilizando las ecuaciones de (3.1.1) obtenemos

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j(t) (\varphi_j, \varphi_i)_K - \sum_{j=1}^N \beta_j(t) (\varphi_j, \partial_x \varphi_i)_K + \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{k+1} \gamma_j^l(t) \langle \varphi_i \mathbf{n}_1, \xi_j^l \rangle_{e^l} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (\text{A.1.1a})$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{j+N}(t) (\varphi_j, \varphi_i)_K - \sum_{j=1}^N \beta_j(t) (\varphi_j, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y})_K + \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{k+1} \gamma_j^l(t) \langle \varphi_i \mathbf{n}_2, \xi_j^l \rangle_{e^l} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (\text{A.1.1b})$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \beta_j^l(t) (\varphi_j, \varphi_i)_K + \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) (\varphi_i, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x})_K + \sum_{j=1}^N \alpha_{j+N}(t) (\varphi_i, \frac{\partial \varphi_j}{\partial y})_K + \\ \sum_{j=1}^N \beta_j(t) \tau \langle \varphi_i \varphi_j \rangle_{\partial K} - \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^N \gamma_j^l(t) \langle \xi_i, \xi_j \rangle_{e^l} \\ \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{k+1} \gamma_j^l(t) \langle \varphi_i, \tau \xi_j^l \rangle_{e^l} = (f, \varphi_i)_K, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.1c})$$

$$\sum_{j=1}^N \beta_j(0) \varphi_j = \Pi_W(u_0|_K) \quad (\text{A.1.1d})$$

Por otra parte tenemos la condición sobre las aristas

$$\langle \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{n} + \tau(u_h - \hat{u}_h), \xi_i^l \rangle_{e^l} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k+1\}, \quad \forall l = 1, 2, 3$$

O equivalentemente

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \langle \varphi_j \mathbf{n}_1, \xi_i^l \rangle_{e^l} + \sum_{j=N+1}^{2N} \alpha_j(t) \langle \varphi_j \mathbf{n}_2, \xi_i^l \rangle_{e^l} \\ & + \sum_{j=1}^N \beta_j(t) \langle \tau \varphi_j, \xi_i^l \rangle_{e^l} - \sum_{j=1}^{k+1} \gamma_j^l(t) \langle \tau \xi_j, \xi_i^l \rangle_{e^l} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k+1\} \end{aligned}$$

Luego el sistema de ecuaciones diferenciales lineales en cada elemento  $K$  se puede ver como

$$\begin{aligned} M\vec{\alpha}(t) - C\vec{\beta}(t) + E_1\vec{\gamma}^1(t) + E_2\vec{\gamma}^2(t) + E_3\vec{\gamma}^3(t) &= 0, \\ A\vec{\beta}^t(t) + S\vec{\beta}(t) + C^t\vec{\beta}(t) - F_1\vec{\gamma}^1(t) - F_2\vec{\gamma}^2(t) - F_3\vec{\gamma}^3(t) &= b(\vec{f})(t), \\ E_1^t\vec{\alpha}(t) + F_1^t\vec{\beta}(t) - H_1\vec{\gamma}^1(t) &= 0, \\ E_2^t\vec{\alpha}(t) + F_2^t\vec{\beta}(t) - H_2\vec{\gamma}^2(t) &= 0, \\ E_3^t\vec{\alpha}(t) + F_3^t\vec{\beta}(t) - H_3\vec{\gamma}^3(t) &= 0, \end{aligned} \tag{A.1.2a}$$

Donde  $A(i, j) = (\varphi_j, \varphi_i)_K$ ,  $C(i, j) = (\varphi_j, \partial_x \varphi_i)_K$ ,  $C(i + N, j) = (\varphi_j, \partial_y \varphi_i)_K$ ,  $S(i, j) = \tau \langle \varphi_i \varphi_j \rangle_{\partial K}$ ,  $b(i)(f)(t) = (f(t), \varphi_i)_K$   $i, j \in \{1, \dots, N\}$ ;  $E_l(i, j) = \langle \varphi_i \mathbf{n}_1, \xi_j^l \rangle_{e^l}$ ,  $E_l(i + N, j) = \langle \varphi_i \mathbf{n}_2, \xi_j^l \rangle_{e^l}$ ,  $F_l(i, j) = \langle \tau \varphi_i, \xi_j^l \rangle_{e^l}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $j \in \{1, \dots, k+1\}$ ;  $H_l(i, j) = \langle \xi_i, \xi_j \rangle_{e^l}$   $i, j \in \{1, \dots, k+1\}$   $l = 1, 2, 3$ .

Discretizamos el intervalo  $[0, T]$  en  $N_T$  subintervalos equiespaciados  $[t_n, t_{n+1}]$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_T$ , de longitud  $\Delta t := \frac{T}{N_T}$ . Al aplicar el esquema de Euler implícito a la ecuación (A.1.2a) obtenemos para cada  $n \in \{1, \dots, N_T\}$

$$A\vec{\beta}(t_{n+1}) = A\vec{\beta}(t_n)\Delta t(b(\vec{f})(t_n) - S\vec{\beta}(t_n) - C^t\vec{\beta}(t_n) + F_1\vec{\gamma}^1(t_n) + F_2\vec{\gamma}^2(t_n) + F_3\vec{\gamma}^3(t_n)).$$

De esta manera obtenemos los siguientes sistemas lineales

$$\begin{pmatrix} M & -C \\ \Delta t C^t & A + \Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t_{n+1}) \\ \beta(t_{n+1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ -\Delta F_1 & -\Delta F_2 & -\Delta F_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^1(t_{n+1}) \\ \gamma^2(t_{n+1}) \\ \gamma^3(t_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\beta(t_n) + b(f(t_n)) \end{pmatrix}, \tag{A.1.3a}$$

$$\begin{pmatrix} E_1^t & F_1^t \\ E_2^t & F_2^t \\ E_3^t & F_3^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t_{n+1}) \\ \beta(t_{n+1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_1^t & 0 & 0 \\ 0 & H_2^t & 0 \\ 0 & 0 & H_3^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^1(t_{n+1}) \\ \gamma^2(t_{n+1}) \\ \gamma^3(t_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{A.1.3b}$$

Despejando  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$  de (A.1.3a) obtenemos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha(t_{n+1}) \\ \beta(t_{n+1}) \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} M & -C \\ \Delta t C^t & A + \Delta t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ -\Delta F_1 & -\Delta F_2 & -\Delta F_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^1(t_{n+1}) \\ \gamma^2(t_{n+1}) \\ \gamma^3(t_{n+1}) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} M & -C \\ \Delta t C^t & A + \Delta t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ A\beta(t_n) + b(f(t_n)) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.1.4a}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha(t_{n+1}) \\ \beta(t_{n+1}) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \gamma^1(t_{n+1}) \\ \gamma^2(t_{n+1}) \\ \gamma^3(t_{n+1}) \end{pmatrix} + \vec{B} \tag{A.1.4b}$$

Reemplazamos  $\begin{pmatrix} \alpha(t_{n+1}) \\ \beta(t_{n+1}) \end{pmatrix}$  en (A.1.3b) y obtenemos

$$\begin{aligned} F \left( K \begin{pmatrix} \gamma^1(t_{n+1}) \\ \gamma^2(t_{n+1}) \\ \gamma^3(t_{n+1}) \end{pmatrix} + B \right) - \tilde{E} \begin{pmatrix} \gamma^1(t_{n+1}) \\ \gamma^2(t_{n+1}) \\ \gamma^3(t_{n+1}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \iff (FK - \tilde{E}) \begin{pmatrix} \gamma^1(t_{n+1}) \\ \gamma^2(t_{n+1}) \\ \gamma^3(t_{n+1}) \end{pmatrix} &= -FB \iff A^K \vec{\gamma} = b^K \end{aligned}$$

Donde  $A^K = FK - \tilde{E}$  y  $b^K = -FB$  son la matriz y lado derecho local en el elemento  $K \in \mathcal{T}_h$ . Ensamblamos la matriz global y luego imponemos la condición de contorno. Para ello suponemos que para  $e \in \Gamma_h$  en realidad es  $e^1 = e$  para explicar la imposición de la condición de contorno en el dominio computacional (3.1.1d).

$$A_{bedg} \gamma(t_{n+1})^1 - R\alpha(t_{n+1}) = \vec{G},$$

donde  $\forall i \in \{1, \dots, k+1\} \ j \in \{1, \dots, N\}$

$$A_{bedg}(i, j) = \langle \xi_j^1, \xi_i \rangle_e, \quad G(i) = \langle g(\bar{x}), \xi_i \rangle_e$$

$$R(i, j) = \left\langle \int_0^{l(\mathbf{x})} \varphi_j \cdot \mathbf{t}_1, \xi_i \right\rangle_e \quad \text{y} \quad R(i, j+N) = \left\langle \int_0^{l(\mathbf{x})} \varphi_j \cdot \mathbf{t}_2, \xi_i \right\rangle_e.$$

De (A.1.4a) nos quedamos con las filas del sistema que corresponden  $\alpha(t_{n+1})$  y obtenemos

$$A_{bedg} \gamma(t_{n+1})^1 - R \left( K^\alpha \begin{pmatrix} \gamma^1(t_{n+1}) \\ \gamma^2(t_{n+1}) \\ \gamma^3(t_{n+1}) \end{pmatrix} + \vec{B}^\alpha \right) = \vec{G}$$

El producto matricial lo escribimos como  $RK^\alpha = [RK^1 \ RK^2 \ RK^3]$  y como suponemos que la arista exterior  $e$  es la primera obtenemos la condición

$$\left( (A_{bedg} - RK^1) \ RK^2 \ RK^3 \right) \begin{pmatrix} \gamma^1(t_{n+1}) \\ \gamma^2(t_{n+1}) \\ \gamma^3(t_{n+1}) \end{pmatrix} = G + RB^\alpha. \quad (\text{A.1.5})$$

Finalmente imponemos la condición de contorno en la matriz global en (A.1.5) y resolvemos el sistema para obtener  $\gamma(t_{n+1})$  y lo reemplazamos en (A.1.4a).

# Bibliografía

- [1] M. AINSWORTH, *Dispersive and dissipative behaviour of high order Discontinuous Galerkin finite element methods*, J. Comput. Phys., 198 (2004), pp. 106–130.
- [2] R. ARAYA, M. SOLANO, AND P. VEGA, *Analysis of an adaptive HDG method for the Brinkman problem*, IMA Journal of Numerical Analysis, 39 (2019), pp. 1502–1528.
- [3] ———, *A posteriori error analysis of an HDG method for the Oseen problem*, Applied Numerical Mathematics, 146 (2019), pp. 291–308.
- [4] S. BRENNER AND L. SCOTT, *The Mathematical Theory of Finite Elements*, 01 1994.
- [5] R. BUSTINZA, B. LOPEZ-RODRIGUEZ, AND M. OSORIO, *An a priori error analysis of an HDG method for an eddy current problem*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41 (2018).
- [6] A. CEMELIOGLU, B. COCKBURN, N. NGUYEN, AND J. PERAIRE, *Analysis of HDG methods for Oseen equations*, Journal of Scientific Computing, 55 (2013).
- [7] B. CHABAUD AND B. COCKBURN, *Uniform-in-time superconvergence of HDG methods for the heat equation.*, Math. Comput., 81 (2012).
- [8] H. CHEN AND W. QIU, *An absolutely stable hp-HDG method for the time-harmonic Maxwell equations with high wave number*, Mathematics of Computation, 86 (2015).
- [9] H. CHEN, W. QIU, AND K. SHI, *A superconvergent HDG method for the Maxwell equations*, Journal of Scientific Computing, 70 (2016).
- [10] B. COCKBURN, B. DONG, AND J. GUZMÁN, *A superconvergent LDG-Hybridizable Galerkin method for second-order elliptic problems*, Mathematics of Computation, 77 (2008), pp. 1887–1916.
- [11] B. COCKBURN, B. DONG, J. GUZMN, M. RESTELLI, AND R. SACCO, *A Hybridizable Discontinuous Galerkin method for steady-state convection-diffusion-reaction problems*, SIAM J. Scientific Computing, 31 (2009), pp. 3827–3846.
- [12] B. COCKBURN, J. GOPALAKRISHNAN, AND R. LAZAROV, *Unified hybridization of Discontinuous Galerkin, mixed, and continuous Galerkin methods for second order elliptic problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 47 (2009), pp. 1319–1365.
- [13] B. COCKBURN, J. GOPALAKRISHNAN, AND R. LAZAROV, *Unified hybridization of Discontinuous Galerkin, mixed, and continuous Galerkin methods for second order elliptic problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 47 (2009), pp. 1319–1365.
- [14] B. COCKBURN, J. GOPALAKRISHNAN, N. C. NGUYEN, J. PERAIRE, AND F.-J. SAYAS, *Analysis of HDG methods for Navier flow*, Mathematics of Computation, 80 (2011), pp. 723–760.
- [15] B. COCKBURN, J. GOPALAKRISHNAN, AND F.-J. SAYAS, *A projection-based error analysis of HDG methods*, Mathematics of Computation, 79 (2010), pp. 1351–1367.

- [16] B. COCKBURN, D. GUPTA, AND F. REITICH, *Boundary-conforming Discontinuous Galerkin methods via extensions from subdomains*, Journal of Scientific Computing, 42 (2009), pp. 144–184.
- [17] ———, *Boundary-conforming Discontinuous Galerkin methods via extensions from subdomains*, Journal of Scientific Computing, 42 (2009), p. 144.
- [18] B. COCKBURN, W. QIU, AND M. SOLANO, *A priori error analysis for HDG methods using extensions from subdomains to achieve boundary conformity*, Mathematics of Computation, 83 (2014), pp. 665–699.
- [19] B. COCKBURN AND V. QUENNEVILLE-BELAIR, *Uniform-in-time superconvergence of the HDG methods for the acoustic wave equation*, Mathematics of Computation, 83 (2014).
- [20] B. COCKBURN AND K. SHI, *Superconvergent HDG methods for linear elasticity with weakly symmetric stresses*, IMA Journal of Numerical Analysis, 33 (2013).
- [21] B. COCKBURN AND M. SOLANO, *Solving dirichlet boundary-value problems on curved domains by extensions from subdomains*, SIAM J. Sci. Comput., 34 (2012), pp. 497–519.
- [22] B. COCKBURN AND W. ZHANG, *A posteriori error analysis for Hybridizable Discontinuous Galerkin methods for second order elliptic problems*, SIAM J. Numerical Analysis, 51 (2013), pp. 676–693.
- [23] D. A. DI PIETRO AND A. ERN, *Mathematical aspects of Discontinuous Galerkin methods*, vol. 69 of Mathématiques & Applications, Springer–Verlag, Berlin–Heilderber, 2012.
- [24] L. C. EVANS, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010.
- [25] X. FENG AND Y. XING, *Absolutely stable local Discontinuous Galerkin methods for the Helmholtz equation with large wave number*, Mathematics of Computation, 82 (2010).
- [26] G. GATICA AND F. SEQUEIRA, *Analysis of an augmented HDG method for a class of quasi-newtonian Navier flows*, Journal of Scientific Computing, 65 (2015).
- [27] R. GRIESMAIER AND P. MONK, *Error analysis for a Hybridizable Discontinuous Galerkin method for the Helmholtz equation*, J. Sci. Comput., 49 (2011), pp. 291–310.
- [28] K. S. HUANGXIN CHEN, WEIFENG QIU AND M. SOLANO, *A superconvergent HDG method for the Maxwell equations*, Journal of Scientific Computing,, 70 (2016), p. 1010–1029.
- [29] G. LI AND K. SHI, *Upscaled HDG methods for Brinkman equations with high-contrast heterogeneous coefficient*, Journal of Scientific Computing, (2017).
- [30] M. O. LILIANA CAMARGO, BIBIANA LÓPEZ-RODRÍGUEZ AND M. SOLANO, *An HDG method for Maxwell equations in heterogeneous media*. <https://www.ci2ma.udec.cl/pdf/prepublicaciones/2019/pp19-30.pdf>, 2019.
- [31] T. S.-V. NESTOR SÁNCHEZ AND M. SOLANO, *A priori and a posteriori error analysis of an unfitted HDG method for semi-linear elliptic problems*. <https://www.ci2ma.udec.cl/publicaciones/prepublicaciones>, 2019.
- [32] C. NGUYEN, J. PERAIRE, AND B. COCKBURN, *An implicit high-order Hybridizable Discontinuous Galerkin method for linear convection-diffusion equations*, J. Comput. Phys., 228 (2009), pp. 3232–3254.
- [33] N. NGUYEN, J. PERAIRE, AND B. COCKBURN, *A Hybridizable Discontinuous Galerkin method for the incompressible Navier-Navier equations*, Journal of Computational Physics, 230 (2011), pp. 1147–1170.

- [34] ———, *Hybridizable Discontinuous Galerkin methods for the time-harmonic Maxwell's equations*, Journal of Computational Physics - J COMPUT PHYS, 230 (2011), pp. 7151–7175.
- [35] N. C. NGUYEN, J. PERAIRE, AND B. COCKBURN, *A Hybridizable Discontinuous Galerkin method for Navier flow*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199 (2010), pp. 582 – 597.
- [36] R. OYARZÚA, M. SOLANO, AND P. Z. NIGA, *A high order mixed-FEM for diffusion problems on curved domains*, Journal of Scientific Computing, 79 (2019), pp. 49–78.
- [37] W. QIU AND K. SHI, *An HDG method for convection diffusion equation*, J. Sci. Comput., 66 (2016), p. 346–357.
- [38] W. QIU, M. SOLANO, AND P. VEGA, *A high order HDG method for curved-interface problems via approximations from straight triangulations*, Journal of Scientific Computing, 69 (2016), pp. 1384–1407.
- [39] S. RHEBERGEN, B. COCKBURN, AND J. VEGT, *A space-time Discontinuous Galerkin method for the incompressible Navier–Navier equations*, Journal of Computational Physics, 233 (2013), p. 339–358.
- [40] B. ROMMEL, L. ARIEL, AND S. MANUEL, *An anisotropic a priori error analysis for a convection-dominated diffusion problem using the HDG method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 345 (2018).
- [41] S. SHERWIN, *Dispersion Analysis of the Continuous and Discontinuous Galerkin Formulations*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2000, pp. 425–431.
- [42] M. SOLANO AND F. VARGAS, *Analysis of an HDG method for Oseen equations in curved domains*. <https://www.ci2ma.udec.cl/publicaciones/prepublicaciones>, 2018.
- [43] ———, *A high order HDG method for Stokes flow in curved domains*, Journal of Scientific Computing, 79 (2019), pp. 1505–1533.
- [44] S.-C. SOON, B. COCKBURN, AND H. STOLARSKI, *A Hybridizable Discontinuous Galerkin method for linear elasticity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 80 (2009), pp. 1058 – 1092.
- [45] M. STANGLMEIER, N. NGUYEN, J. PERAIRE, AND B. COCKBURN, *An explicit Hybridizable Discontinuous Galerkin method for the acoustic wave equation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 300 (2016), pp. 748–769.
- [46] E. STEIN AND P. U. PRESS, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Monographs in harmonic analysis, Princeton University Press, 1970.
- [47] S. TERRANA, N. NGUYEN, J. BONET, AND J. PERAIRE, *A Hybridizable Discontinuous Galerkin method for both thin and 3d nonlinear elastic structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 352 (2019).