

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

---

# Estudio de Modelos de Avalanchas Mediante Esquemas de Volúmenes Finitos Bien Balanceados

---

*Alumno:*  
Fernando CAMPOS GONZÁLEZ

*Profesores:*  
Mauricio SEPÚLVEDA  
Rodrigo ABARCA DEL RÍO

*Miembros del comité:*  
Raimund BÜRGER  
Dieter ISSLER

9 de agosto de 2022



## **Agradecimientos**

Agradezo a mi familia, a Fondecyt 1180868, las dependencias del CI<sup>2</sup>MA, a los profesores guía Mauricio Sepúlveda y Rodrigo Abarca del Río, a la colaboración del profesor Dieter Issler y a los miembros de la comisión que gentilmente aceptaron evaluar la defensa de tesis.

# 1. Introducción

El estudio de desastres naturales se ha convertido en un área de gran interés, especialmente por los efectos que el cambio climático puede tener en algunos eventos de este tipo. En particular, las avalanchas de nieve se ven bastante afectadas por los cambios en las condiciones climáticas, generando situaciones de mayor riesgo e impredecibilidad. Las avalanchas de nieve corresponden al descenso rápido de masas de nieve por pendientes empinadas debido a la gravedad, usualmente arrastrando suelo, rocas o vegetación. Ocurren en zonas montañosas alrededor del mundo y significan un gran riesgo a la infraestructura, los ecosistemas y las vidas humanas de esas regiones [16].

El número de fatalidades anuales estimadas debido a avalanchas de nieve es alrededor de 250 a nivel mundial [25]. Avalanchas provocaron la muerte de 1900 personas en Norte América y Europa en el período 2000-2010 [25]. En lugares de riesgo, se han tomado medidas de mitigación para evitar los efectos de estos desastres. Por ejemplo, en Suiza, después de la avalancha de 1950-1951 (que quitó la vida de 98 personas en Suiza y 135 en Austria), se han construido elementos de defensa de un costo cerca a \$1.5 billones. En Canada, el costo anual promedio se estima superior a \$5 mil millones [25]. Es evidente el gran costo humano y económico que representan estos eventos.

Chile es un país en donde, por su posición geográfica, condiciones climáticas y amplias zonas de gran altitud, se presentan grandes acumulaciones de nieve y nevazones todos los años, tanto en zonas cordilleras como precordilleras [14]. Por lo tanto, es frecuente que sucedan avalanchas. Varios eventos ocurren en lugares con poca presencia humana, aunque algunos han acontecido en lugares habitados o donde se desarrollan actividades turísticas, mineras o de generación eléctrica [17]. Según los datos disponibles de víctimas fatales en Chile central entre los años 1906 y 2001, de las 378 víctimas totales, 241 (63,8%) se relacionan con la actividad minera y 52 (13,8%) se relacionan con turismo. En la actualidad, solo el sector minero de la zona Centro-Norte posee sistemas de control de riesgos para avalanchas, empleando registros meteorológicos, análisis de datos y simulación de avalanchas [17]. En Chile, no existe un servicio oficial de alerta de avalanchas, tomándose medidas de prevención sólo por entidades privadas como algunos centros de ski o empresas mineras. Por otro lado, la ONEMI (Oficina Nacional de Emergencia) todavía no ha incorporado las avalanchas en la categoría de desastres naturales. No existe un programa de control y mitigación de avalanchas en carreteras, a pesar que estos eventos pueden traer graves consecuencias como el corte del flujo comercial o el aislamiento de una comunidad [39]. Es muy importante tener un sistema para responder a estos desastres y mantener el acceso a las zonas afectadas. Existe una gran necesidad de ampliar y diversificar la forma de enfrentar el riesgo que estos eventos representan en distintas partes del país.

En lugares con montañas cubiertas de nieve estacional, existen servicios de pronóstico basadas en la probabilidad de avalanchas según las condiciones meteorológicas. Por ejemplo, en varios países europeos se realizan pronósticos nacionales o regionales, usualmente en invierno [43]. El Servicio Europeo de Alerta de Avalanchas (EAWS) entrega información de los servicios de cada país y ha determinado los estándares oficiales para estos reportes en Europa, incluyendo la clasificación de los problemas de avalancha y la escala para las calificaciones de peligro de avalancha [43]. Sin embargo, un evento de avalancha no puede ser predecido con exactitud en un lugar y tiempo determinado. La interacción entre el clima, el terreno y la nieve es muy compleja, y la capa de nieve tiene características muy variables, por lo que muchos aspectos

del proceso de la avalancha son desconocidos [9].

Entre los peligros naturales impulsado por flujos de masa gravitacional (GMFs), las avalanchas de nieve son uno de los fenómenos que ocurren con más frecuencia y en mayor número de sitios en el mundo. Es por esto que el estudio de las dinámicas de avalanchas es tan importante. En [38], parte de una publicación especial del tema, se destacan preguntas fundamentales que todavía no tienen respuestas completas, principalmente sobre los regímenes de flujo y sobre el cambio de masa por deposición y erosión. Se muestra el estado del estudio de avalanchas de nieve actual y las distintas formas en que se encara esta tarea, mediante observaciones de campo y experimentos. En [37] se trata distintos tipos de avalanchas de nieve mezclada. En este artículo se indican inferencias que se pueden hacer de las observaciones en el sitio, estimándose cotas para velocidad, densidad y presión. También se conjetura el tipo de flujo y los mecanismos de fluidización. Este tipo de trabajos demuestra los desafíos del estudio en terreno, pero también el gran valor que estas observaciones tienen para entender las dinámicas de estos procesos.

Las avalanchas pueden modelarse mediante el sistema de ecuaciones diferenciales de Saint-Venant, incluyendo como término fuente el efecto de la fricción [16]. La reología es el modelo de fricción aplicado para el sistema y existen distintos modelos que pueden emplearse para estudiar estos fenómenos, dependiendo de las características del fluido [36]. Un modelo reológico ampliamente usado para avalanchas de nieve es el Voellmy-Salm, desarrollado en [5] y [1]. Este modelo será el tratado en este trabajo. En [35], se trabajó el sistema con fricción de Voellmy-Salm. Se realizaron simulaciones numéricas y se estudió el efecto de los parámetros de la fricción en la evolución de la avalancha. Se descubrió que el rango de los valores posibles para estos parámetros es bastante amplio y se interpretó el significado físico de los resultados.

En términos de modelos de avalanchas, existe amplia literatura. Las ecuaciones de Savage-Hutter se presentan en [4]. Este modelo predice el flujo de un material granulado sin cohesión inicialmente estacionario por un camino áspero y curvo. Se muestran experimentos de laboratorio y resultados numéricos basados en estas experiencias. En [13], se toman estas ecuaciones para modelar avalanchas de diverso tipo. Se presentan varios modelos numéricos para su resolución, incluyendo simulaciones y comparaciones entre los métodos. En [19] se presenta un nuevo modelo de dos capas de Savage-Hutter para avalanchas submarinas. Se propone un método numérico a dos pasos para discretizar el modelo, con pruebas numéricas del esquema. La teoría de Savage-Hutter unidimensional se expande en [6] para dos dimensiones, validándose con experimentos de laboratorio y comprándose con simulaciones numéricas. En [40] se trabaja en la derivación de los términos del modelo que surgen de la curvatura de la superficie y se usa un modelo numérico para cuantificar su influencia en la dinámica del fluido. También hay otros modelos de fluido para las avalanchas a parte de las ecuaciones de Saint-Venant, como las que se basan en las ecuaciones de Navier-Stokes [24].

Para el análisis de las avalanchas de nieve se han desarrollado distintos modelos numéricos e instrumentos de simulación. Como se considera el sistema de Saint-Venant, es posible trabajar estos modelos mediante el método de volúmenes finitos para leyes de conservación hiperbólicas. Como en este caso, el sistema de leyes de conservación incluye términos fuentes (la topografía del terreno y la reología), se debe emplear un esquema no conservativo. El desarrollo presente se basa fundamentalmente en [11]. En este libro se presentan varios esquemas no conservativos bien balanceados y se entregan demostraciones sobre su estabilidad y consistencia.

Otras fuentes complementaron este trabajo para el estudio y testeó del método numérico. En [10], se

usa la reconstrucción hidrostática para un esquema bien balanceado para el problema de Saint-Venant con topografía, presentado demostraciones y ejemplos numéricos, así como una extensión a segundo orden. En [15] se entrega un esquema de segundo orden mejorado que preserva los estados estacionarios y la positividad de la altura de fluido. Se demuestran estas propiedades y se muestran ejemplos. En [29] se emplea diferencias finitas en un esquema numérico con un paso de volúmenes finitos para incluir la acción de dilatación en flujos de reología compresible. Se adaptó ese método para incorporar en nuestro esquema la parte turbulenta del modelo de fricción de Voellmy-Salm. En [27] se trabaja con avalanchas piroclásticas y se discuten distintos casos. Además, se implementa un método numérico que usa la reología de Voellmy-Salm, con distintos ejemplos con resultados numéricos.

Para testear el método, el caso más importante analizado es la avalancha de Rigopiano, Italia, evento que ha sido ampliamente estudiado. En [30] se describe el lugar del evento y sus condiciones meteorológicas. Se entregan las conclusiones que se obtienen sobre la dinámica de la avalancha, basándose en observaciones del sitio. Se trató de una avalancha seca fluidizada que consistió de una mezcla de nieve, árboles y rocas. Se usa un modelo numérico para simular el fenómeno y reproducir los datos recabados en el lugar. También se tomó importante información de [32]: de las observaciones de campo se realizaron estimaciones sobre las distancias de salida, las velocidades y la conservación de masa, y se hicieron conjeturas de las características del proceso de la avalancha. La relación entre sismología y avalanchas en la región de Abruzzo de Italia (en donde Rigopiano se localiza) se estudia en [34]. Además, se realizó una modelación numérica 3D de la avalancha de Rigopiano para investigar su origen. Cabe notar que el estudio de avalanchas en zonas donde no hay información histórica y existe escaso monitoreo es un problema que se trata en [28], tomando como caso de estudio la avalancha de Rigopiano. Se entrega una metodología para trabajar con este tipo de casos.

También se encontró información sobre otros desastres de avalanchas. La avalancha de Les Fonts d'Arinsal en 1996, en la parte noroeste de Andorra en los Pirineos, se trata en [31]. Se describe la dinámica del evento, las condiciones climáticas previas a la avalancha, las acciones de advertencia y prevención llevadas a cabo durante el desastre y el sistema de defensa implementado posteriormente. El evento histórico de 1803 que destruyó la villa Àrreu, en los Pirineos Catalanes, se estudia en [33]. Para reconstruir el recorrido de la avalancha, se buscaron fuentes históricas y bases de datos, se estudió la geografía y vegetación del terreno, se observaron fotografías aéreas, se entrevistaron habitantes del lugar y se realizó una simulación numérica.

El estudio de avalanchas de nieve ha tenido grandes avances en el último tiempo, combinándose el trabajo experimental en laboratorio, el estudio en terreno de las zonas de desastre y el desarrollo de modelos numéricos para la simulación de estos fenómenos. Sin embargo, todavía quedan interrogantes sobre estos procesos y se continúa el refinamiento de las herramientas numéricas para tratar estos problemas [38]. Con los grandes efectos que el cambio climático tendrá en distintas partes del mundo, el desarrollo de mayor entendimiento de este tipo de eventos es muy importante y en esta tarea resulta muy relevante el uso de métodos numéricos para la modelación de los desastres [41].

Aunque los problemas en el combate contra avalanchas en Chile continúan, se ha empezado a trabajar en mejorar esta situación. El año 2016 surge el proyecto de la Fundación Chilena de Avalanchas con el fin de crear un espacio de trabajo para profesionales de avalanchas [39]. Entre sus objetivos se encuentra la implementación de Boletines de Avalanchas que estén a disponibilidad pública y que indiquen la probabilidad de un evento y su capacidad destructiva. Como no existe en Chile la cantidad suficiente de

profesionales preparados para este trabajo, se han realizado alianzas con instituciones en Estados Unidos y Canadá para dar cursos al respecto. El uso de distintos métodos para estudiar, predecir y prevenir las avalanchas es muy importante. El trabajo con simulaciones de modelos físicos mediante métodos numéricos puede ser muy útil, ya que permite estimar el peligro posible y decidir las mejores alternativas para prevenir daños. También ayuda complementar la información sobre los eventos cuando los datos son escasos y difíciles de obtener debido a las limitaciones técnicas.

Efectivamente, nuestro trabajo se centra en desarrollar este tipo de herramientas numéricas. Nuestros objetivos son estudiar un modelo numérico para la simulación de avalanchas, programar este esquema numérico y probarlo con una situación real. Esperamos que esta herramienta pueda ayudar en el pronóstico de avalancha y en la prevención de daños.

## 2. Modelo de avalanchas con reología de Voellmy-Salm

Los modelos más utilizados en simulación de avalanchas surgen de la resolución de ecuaciones de masa y momentum, similares a las ecuaciones de Saint-Venant en dos dimensiones [16]. Estas ecuaciones incluyen términos que describen la fricción según algún modelo reológico. Para la inclusión de las fuerzas de fricción se considerará la reología de Voellmy-Salm, el cual es un modelo ampliamente utilizado para las avalanchas de nieve [5], [1]. Las ecuaciones del modelo son

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + g\frac{h^2}{2}) + \partial_y(huv) + gh\partial_x z = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left( \mu hg + \frac{g}{\xi}(u^2 + v^2) \right), \\ \partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y(hv^2 + g\frac{h^2}{2}) + gh\partial_y z = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left( \mu hg + \frac{g}{\xi}(u^2 + v^2) \right), \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (1)$$

donde  $h = h(x, y, t)$  es la altura del fluido,  $u = u(x, y, t)$  y  $v = v(x, y, t)$  son las componentes de la velocidad,  $z = z(x, y)$  es la topografía,  $g$  es la constante gravitacional,  $\mu$  es el coeficiente de fricción de Coulomb [20] y  $\xi$  es el coeficiente de fricción turbulenta [8].

Si se define  $Z = gz$ , el sistema anterior puede escribirse de la siguiente forma

$$\partial_t U + \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + B_1 \partial_x Z + B_2 \partial_y Z = H, \quad (2)$$

con

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} \\ huv \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix}, \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left( \mu hg + \frac{g}{\xi}(u^2 + v^2) \right) \\ \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left( \mu hg + \frac{g}{\xi}(u^2 + v^2) \right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

con condiciones iniciales

$$U_0 = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_0 u_0 \\ h_0 v_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

con  $h_0 = h(x, y, 0)$ ,  $u_0 = u(x, y, 0)$  y  $v_0 = v(x, y, 0)$ .

## 3. Ecuaciones de Saint-Venant

Las ecuaciones de Saint-Venant se usan ampliamente en dinámica de fluidos. Se derivan de las ecuaciones de Navier-Stokes de conservación de masa y conservación de momentum. En [12], se trata el problema unidimensional, como se presenta a continuación. Para derivar estas ecuaciones, se considera un fluido incompresible (con densidad  $\rho$  constante), cuya velocidad vertical es negligible. De la ecuación de conservación de masa se tiene

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (5)$$

De la ecuación de conservación de momentum se obtiene

$$\partial_t(\rho hu) + \partial_x(\rho hu^2 + p) = 0 \quad (6)$$

donde  $p$  es la presión. La presión hidrostática en un punto  $(h - y)$  bajo la superficie del fluido está dada por  $\rho g(h - y)$ . Integrando desde  $y = 0$  hasta  $y = h(x, t)$ , se tiene que la presión total es

$$p = \frac{1}{2}\rho gh^2 \quad (7)$$

Así, se reemplaza la presión en la ecuación (6) y se tiene el sistema de ecuaciones de Saint-Venant unidimensional

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \end{cases} \quad (8)$$

el cual puede escribirse como

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \quad (9)$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Si  $U = (U^{(1)}, U^{(2)})$ , entonces se tiene que

$$F(U) = \begin{pmatrix} U^{(2)} \\ \frac{(U^{(2)})^2}{U^{(1)}} + g\frac{(U^{(1)})^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Escribiendo estas ecuaciones en forma cuasi-lineal se tiene

$$\partial_t U + F'(U)\partial_x U = 0 \quad (12)$$

con la matriz jacobiana

$$F'(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(U^{(2)})^2}{(U^{(1)})^2} + gU^{(1)} & \frac{2U^{(2)}}{U^{(1)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Sus valores propios y vectores propios son

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = u + \sqrt{gh}, \quad (14)$$

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - \sqrt{gh} \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + \sqrt{gh} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Ahora, consideramos el problema de Riemann, en donde el sistema de ecuaciones de Saint-Venant se le agrega un dato inicial de la forma

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_l & \text{si } x < 0, \\ U_r & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Un ejemplo es el caso de rotura de represa dado por

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_l & \text{si } x < 0 \\ h_r & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad (17)$$

con  $h_l > h_r$  y  $u(x, 0) = 0$ .

Como el modelo de Saint-Venant es un sistema de dos ecuaciones, la solución del problema de Riemann consiste en dos ondas, que pueden ser de rarefacción o choque dependiendo del dato inicial. La forma de solucionar este tipo de problemas está explicada en [12].

El sistema de ecuaciones debe considerarse en forma débil, lo que permite que la solución sea discontinua. Una función  $U \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty])$  es una solución débil de (9) si para todo  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty])$  se tiene

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (U\phi_t + F(U)\phi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0)U(x, 0) dx = 0. \quad (18)$$

Para obtener unicidad de la solución, se debe agregar un criterio de admisibilidad. Para ello, se considera la viscosidad mediante la ecuación

$$\partial_t U^\varepsilon + \partial_x F(U^\varepsilon) = \varepsilon \partial_x^2 U^\varepsilon \quad (19)$$

con  $\varepsilon > 0$ . Haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se obtiene una solución de (9) que es considerada la solución física relevante [3]. En términos prácticos, se puede considerar la entropía. El par de entropía consiste en una función convexa  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y una función  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$G_U(U) = \eta_U(U)F'(U) \quad (20)$$

para todo  $U \in \mathbb{R}^n$ . De (19), se obtiene la desigualdad de entropía

$$\eta(U)_t + G(U)_x \leq 0 \quad (21)$$

Se dice que una solución débil  $U$  de (9) satisface una condición de entropía para el par de entropía  $\eta$  y  $G$  si satisface (21). Esta desigualdad debe interpretarse en el sentido de distribuciones, esto es, se debe satisfacer

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\eta(U)\phi_t + G(U)\phi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(x, 0)\phi(x, 0) dx \geq 0 \quad (22)$$

para todo  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty])$ ,  $\phi \geq 0$ . El concepto de entropía es importante para la existencia y unicidad de la solución, como se muestra en [2], en donde se demuestra que una solución satisface la condición de entropía para una entropía estrictamente convexa donde es la solución físicamente relevante.

Para el caso de las ecuaciones de Saint-Venant, este par de entropía está dado por

$$\eta = \frac{hu^2}{2} + g\frac{h^2}{2} \quad (23)$$

$$G = \left( \frac{hu^2}{2} + gh^2 \right) u \quad (24)$$

La derivación de este par está dado en [11].

## 4. Modelo unidimensional sin fricción

Primero es necesario desarrollar el modelo numérico para el problema de avalanchas en una dimensión con topografía sin fuerzas de fricción. Posteriormente, se puede aplicar lo hecho en el modelo bidimensional e incluir los efectos de la fricción.

Así, consideremos el problema unidimensional de Saint Venant con topografía y sin fricción dado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + g\frac{h^2}{2}\right) + gh\partial_x z = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (25)$$

Sea  $Z = gz$ . El sistema anterior puede escribirse como

$$\partial_t U + \partial_x F(U, Z) + B(U, Z)\partial_x Z = 0, \quad (26)$$

con

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Los estados estacionarios son las soluciones  $U(x)$  independientes del tiempo, esto es, las soluciones de  $\partial_x F(U, Z) = -B(U, Z)\partial_x Z$ . Estos estados son relevantes porque generalmente representan la solución cuando el tiempo tiende a infinito. Para obtener estas soluciones, se multiplica la primera ecuación de (25) por  $u$ , se resta esto a la segunda ecuación y se divide el resultado por  $h$ . Así, tenemos

$$\partial_t u + \partial_x(u^2/2 + gh + Z) = 0. \quad (28)$$

Los estados estacionarios son las funciones  $h(x), u(x)$  que satisfacen

$$\begin{cases} hu = \text{cte.}, \\ \frac{u^2}{2} + gh + Z = \text{cte.}, \end{cases} \quad (29)$$

Así, el estado estacionario en reposo está dado por

$$\begin{cases} u = 0, \\ h + z = \text{cte.} \end{cases} \quad (30)$$

Algunas propiedades particulares del sistema de Saint Venant son: la altura  $h$  debe ser no negativa, la primera ecuación es conservativa (el total del fluido se mantiene constante) y el sistema es invariante bajo traslaciones en  $Z$ .

### 4.1. Esquema numérico no conservativo

Consideramos el sistema dado por (26). Se desea aproximar la solución  $U(x, t)$ , con  $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ , por valores discretos  $U_i^n$ , con  $i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ . Se considera una malla de puntos crecientes  $x_{i+1/2} \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z}$ . Se definen los

volumenes finitos  $C_i = ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$  de largo  $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  y con centro  $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2$ . Se tiene un salto temporal  $\Delta t_n > 0$  y tiempos discretos  $t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$ . Así,  $U_i^n$  aproxima la solución promedio de  $U$  en la celda  $C_i$  en el tiempo  $t_n$ . Esto es,

$$U_i^n \approx \frac{1}{\Delta x_i} \int_{C_i} U(t_n, x) dx. \quad (31)$$

Consideramos un esquema numérico de volúmenes finitos no conservativo de primer orden dado por

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (F_{i+1/2-} - F_{i-1/2}) = 0, \quad (32)$$

con

$$F_{i+1/2-} = F_l(\tilde{U}_i^n, \tilde{U}_{i+1}^n), \quad F_{i+1/2+} = F_r(\tilde{U}_i^n, \tilde{U}_{i+1}^n) \quad (33)$$

donde  $\tilde{U}_i^n = (U_i^n, Z_i)$ , y  $F_l$  y  $F_r$  son los flujos numéricos izquierdo y derecho, respectivamente.

En el caso del esquema de volúmenes finitos para las ecuaciones de Saint Venant sin fuente, se impone una condición CFL en el paso temporal para prevenir que los valores numéricos exploten. La forma que esta condición tiene es la siguiente

$$\Delta t a \leq \Delta x \quad (34)$$

donde  $a$  es una aproximación de la velocidad de propagación. Para el sistema de Saint Venant, tomamos  $a = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ , con  $\lambda_1, \lambda_2$  dados por (14). En [10] se demuestra que la condición CFL para el caso sin fuente puede aplicarse para el sistema con topografía.

## 4.2. Esquemas bien balanceados

Consideremos la ecuación

$$\partial_x (F(U, Z)) + B(U, Z) Z_x = 0 \quad (35)$$

Los estados estacionarios discretos son secuencias discretas  $(U_i, Z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  que satisfacen una aproximación de (35) como una relación  $\mathcal{D}$  no lineal en cada interface de la forma

$$\mathcal{D}(U_i, U_{i+1}, Z_i, Z_{i+1}) = 0 \quad (36)$$

En el caso de las ecuaciones de Saint-Venant se obtiene las relaciones

$$\begin{cases} h_l u_l = h_r u_r, \\ \frac{u_l^2}{2} + g h_l + Z_l = \frac{u_r^2}{2} + g h_r + Z_r. \end{cases} \quad (37)$$

Los estados estacionarios discretos en reposo son aquellos que satisfacen

$$\begin{cases} u_l = u_r = 0, \\ g h_l + Z_l = g h_r + Z_r. \end{cases} \quad (38)$$

Se dice que un esquema de la forma (32)-(33) es bien balanceado respecto a cierto estado estacionario discreto si para este estado se tiene [11]

$$\begin{aligned} F_l(U_l, U_r, Z_l, Z_r) &= F(U_l, Z_l), \\ F_r(U_l, U_r, Z_l, Z_r) &= F(U_r, Z_r) \end{aligned} \quad (39)$$

Aplicando esta relación en el caso de Saint Venant para estados discretos estacionarios en reposo, se tiene que el esquema es bien balanceado si satisface que para  $h_l, h_r \geq 0$

$$\begin{aligned} F_l((h_l, 0), (h_r, 0), gh_l - gh_r) &= (0, gh_l^2/2), \\ F_r((h_l, 0), (h_r, 0), gh_l - gh_r) &= (0, gh_r^2/2) \end{aligned} \quad (40)$$

### 4.3. Consistencia

Un esquema de la forma (32)-(33) es consistente con la ecuación (26) si

$$F_l(U, U, Z, Z) = F_r(U, U, Z, Z) = F(U, Z) \quad (41)$$

para todo  $(U, Z)$  y además

$$F_r(U_l, U_r, Z_l, Z_r) - F_l(U_l, U_r, Z_l, Z_r) = -B(U, Z)(Z_r - Z_l) + o(Z_r - Z_l) \quad (42)$$

si  $U_l, U_r \rightarrow U$  y  $Z_l, Z_r \rightarrow Z$ .

Ahora, tomemos en cuenta el caso de Saint-Venant que queremos analizar. Queremos satisfacer la conservación de la altura de agua. Esto es, si  $F_l = (F_l^0, F_l^1)$  y  $F_r = (F_r^0, F_r^1)$ , entonces  $F_l^0 = F_r^0 = F^0$ . De aquí, la consistencia queda como

$$\begin{cases} F^0(U, U, 0) &= hu, \\ F_l^1(U, U, 0) &= F_r^1(U, U, 0) = hu^2 + gh^2/2 \end{cases} \quad (43)$$

$$F_r^1(U_l, U_r, Z_l, Z_r) - F_l^1(U_l, U_r, Z_l, Z_r) = -h(Z_r - Z_l) + o(Z_r - Z_l) \quad (44)$$

si  $U_l, U_r \rightarrow U$  y  $Z_l, Z_r \rightarrow Z$ .

### 4.4. Estabilidad

La estabilidad del esquema se analiza a través la entropía. El sistema (26) puede escribirse como un sistema cuasilineal en  $\tilde{U} = (U, Z)$  de la forma

$$\begin{cases} \partial_t U + A(U, Z)\partial_x U = 0, \\ \partial_t Z = 0, \end{cases} \quad (45)$$

con

$$A(U, Z) = \begin{pmatrix} F_U & F_Z + B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

La entropía es una función  $\tilde{\eta}(U, Z)$  tal que existe otra función  $\tilde{G}(U, Z)$  (flujo de entropía) que satisface

$$\tilde{G}_U(U, Z) = \tilde{\eta}_U(U, Z)A(U, Z). \quad (47)$$

La entropía parcial  $\eta(U, Z)$  y el flujo de entropía parcial  $G(U, Z)$  son funciones que satisfacen  $G_U = \eta_U F_U$  y se tiene que

$$\partial_t(\eta(U, Z)) + \partial_x(G(U, Z)) + (\eta_U(F_Z + B) - G_Z)Z_x \leq 0 \quad (48)$$

Un esquema de la forma (32)-(33) satisface una digualdad de entropía asociada a la entropía  $\tilde{\eta}$  de (45) si existe un flujo de entropía numérico  $\tilde{G}(U_l, U_r, Z_l, Z_r)$  consistente con el flujo de entropía exacto, esto es  $\tilde{G}(U, U, Z, Z) = \tilde{G}(U, Z)$ , tal que bajo alguna condición CFL los valores discretos del esquema satisfacen

$$\tilde{\eta}(U_i^{n+1}, Z_i) - \tilde{\eta}(U_i^n, Z_i) + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (\tilde{G}_{i+1/2} - \tilde{G}_{i-1/2}) \leq 0 \quad (49)$$

con

$$\tilde{G}_{i+1/2} = \tilde{G}(U_i^n, U_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1}). \quad (50)$$

Para el caso de Saint Venant que necesitamos, de las ecuaciones se obtiene la entropía parcial

$$\partial_t \eta + \partial_x G + huZ_x \leq 0, \quad (51)$$

Luego, se tiene

$$\partial_t (\eta + hZ) + \partial_x (G + huZ) \leq 0. \quad (52)$$

Entonces, se tiene la entropía y flujo de entropía

$$\tilde{\eta} = \eta + hZ, \quad \tilde{G} = G + huZ. \quad (53)$$

Discretizando (51)

$$\eta(U_i^{n+1}) - \eta(U_i^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (G_{i+1/2-} + G_{i-1/2+}) \leq 0, \quad (54)$$

con

$$\begin{aligned} G_{i+1/2-} &= G_{i+1/2} + \frac{1}{2} F_{i+1/2}^0 (Z_{i+1} - Z_i), \\ G_{i+1/2+} &= G_{i+1/2} - \frac{1}{2} F_{i+1/2}^0 (Z_{i+1} - Z_i). \end{aligned} \quad (55)$$

Como  $G_{i+1/2}$  es consistente con el flujo de entropía exacto, se tiene

$$G(U, U, 0) = (hu^2/2 + gh^2)u. \quad (56)$$

Multiplicando la primera ecuación de (32) por  $Z_i$  y restando el resultado a (54) se tiene

$$\eta(U_i^{n+1}) + h_i^{n+1} Z_i - \eta(U_i^n) - h_i^n Z_i + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (\tilde{G}_{i+1/2} - \tilde{G}_{i-1/2}) \leq 0, \quad (57)$$

con

$$\tilde{G}_{i+1/2} = G_{i+1/2-} + F_{i+1/2}^0 Z_{i+1} = G_{i+1/2+} + F_{i+1/2}^0 Z_i = G_{i+1/2} + F_{i+1/2}^0 \left( \frac{Z_i + Z_{i+1}}{2} \right). \quad (58)$$

Con esto y (53) se tiene la definición de desigualdad de entropía discreta ya vista para el caso de Saint-Venant.

## 4.5. Esquema de reconstrucción hidrostática

Debido a la presencia de topografía, para calcular los flujos para el modelo numérico, es necesario reconstruir los estados de la solución izquierdo y derecho, denotados por  $U_l = (h_l, h_l u_l)$  y  $U_r = (h_r, h_r u_r)$ , respectivamente. En el esquema de reconstrucción hidrostática se reemplaza las relaciones de estados estacionarios por

$$\begin{cases} u = \text{cte.}, \\ gh + Z = \text{cte.}, \end{cases} \quad (59)$$

A través de estas relaciones se reconstruyen los estados de la solución en unos estados que definimos como  $U_l^* = (h_l^*, h_l^* u_l)$  y  $U_r^* = (h_r^*, h_r^* u_r)$ . Así, podemos calcular estos estados mediante

$$\begin{aligned} gh_l^* &= (gh_l - (\Delta Z)_+)_+, \\ gh_r^* &= (gh_r - (-\Delta Z)_+)_+, \end{aligned} \quad (60)$$

donde  $\Delta Z = Z_r - Z_l$ . El uso de la parte positiva en estas ecuaciones asegura que se obtengan valores no negativos de  $h_l^*$  y  $h_r^*$ . Luego, los flujos estarán dados por

$$\begin{aligned} F_l(U_l, U_r, Z_l, Z_r) &= \mathcal{F}(U_l^*, U_r^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{gh_l^2}{2} - \frac{g(h_l^*)^2}{2} \end{pmatrix}, \\ F_r(U_l, U_r, Z_l, Z_r) &= \mathcal{F}(U_l^*, U_r^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{gh_r^2}{2} - \frac{g(h_r^*)^2}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (61)$$

donde  $\mathcal{F}$  es un flujo numérico consistente para el problema de Saint-Venant sin fuente. Se utilizará el flujo de Lax-Friedrichs para los ejemplos analizados. Este flujo está dado por

$$\mathcal{F}(U_l, U_r) = \frac{1}{2}(F(U_l) + F(U_r)) - \frac{\Delta x_i}{2\Delta t_n}(U_r - U_l). \quad (62)$$

**Proposición:** *Sea  $\mathcal{F}$  un flujo numérico consistente para el problema de Saint-Venant homogéneo ( $Z$  constante) que preserve la no negatividad de  $h$  en las interfaces y satisface una desigualdad de entropía semi-discreta de la entropía  $\eta = hu^2/2 + gh^2/2$ . Entonces, el esquema de reconstrucción hidrostática detallado anteriormente*

- (I) *es conservativo en  $h$ ,*
- (II) *preserva la no negatividad de  $h$  en la interfaz,*
- (III) *es bien balanceado,*
- (IV) *es consistente con el sistema de Saint-Venant con topografía,*
- (V) *satisface una desigualdad de entropía semi-discreta asociada a la entropía  $\tilde{\eta}$ .*

**Demostración:** La demostración de esta proposición se encuentra en [11].

#### 4.6. Ejemplo unidimensional sin fricción

Para mostrar el esquema de reconstrucción hidrostática, se presenta un ejemplo extraído de [10]. Se considera un lago inicialmente en reposo con la topografía dada por

$$z(x) = 0.5(1 - 0.5(\cos(\pi(x - 0.5)/0.5) + 1)) \quad (63)$$

La altura inicial está dada por

$$h(0, x) = \max(0, 0.4 - z(x) + 0.04\sin(x - 0.5)/0.25 - \max(0, -0.4 + z(x))) \quad (64)$$

Se empleó el modelo numérico con el esquema de reconstrucción hidrostática, usando 200 puntos en una malla uniforme. Se consideró la constante gravitacional  $g = 1 \text{ m/s}^2$  en la simulación. La figura 1 muestra las soluciones obtenidas en distintos tiempos. El cálculo del paso temporal  $\Delta t$  se realiza usando la condición CFL dada en (34).

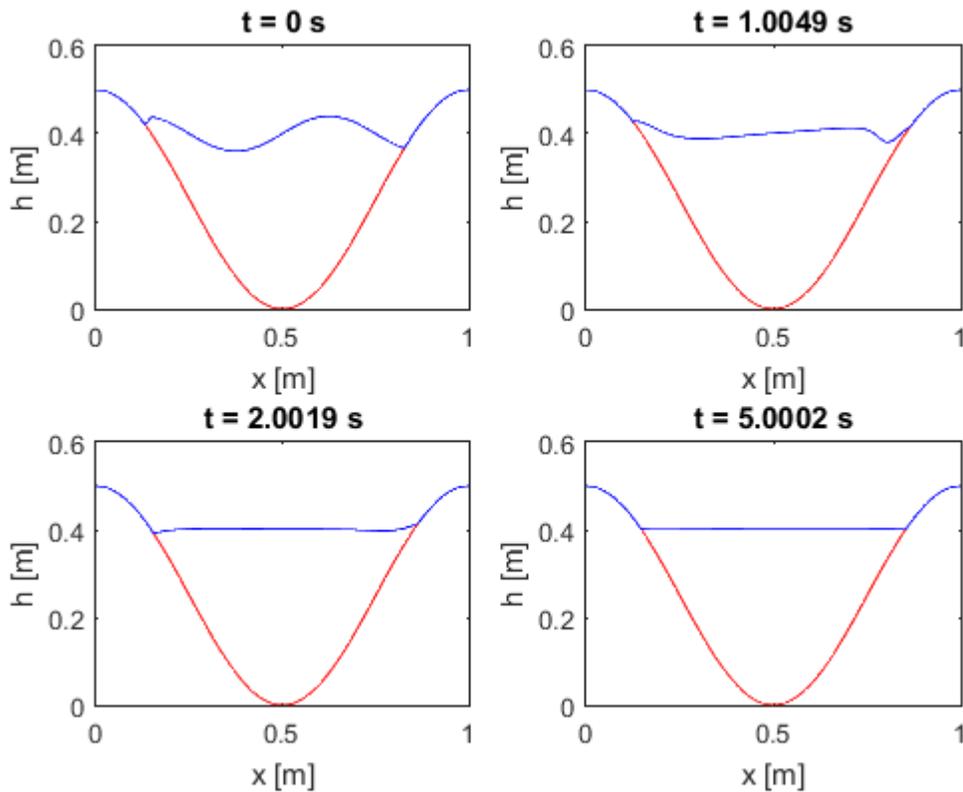


Figura 4.1: Simulación numérica en distintos tiempos.

A continuación se presenta otro ejemplo extraído de [11]. El dominio es  $x \in [0, 40]$  con una topografía

dada por

$$z(x) = \begin{cases} 0.48 \left(1 - \left(\frac{x-20}{40}\right)^2\right) & \text{si } |x - 20| \leq 4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (65)$$

La altura de agua inicial es  $h = 4$  m y la velocidad inicial es  $u = 10/4$  m/s. En la simulación se utilizó una malla de 3000 elementos. El tiempo final es  $t = 1$  s y la aceleración de gravedad empleada fue  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. En la figura, se presentan la altura inicial con la topografía, la altura final  $h$ , la velocidad final  $u$  y la descarga final  $hu$ .

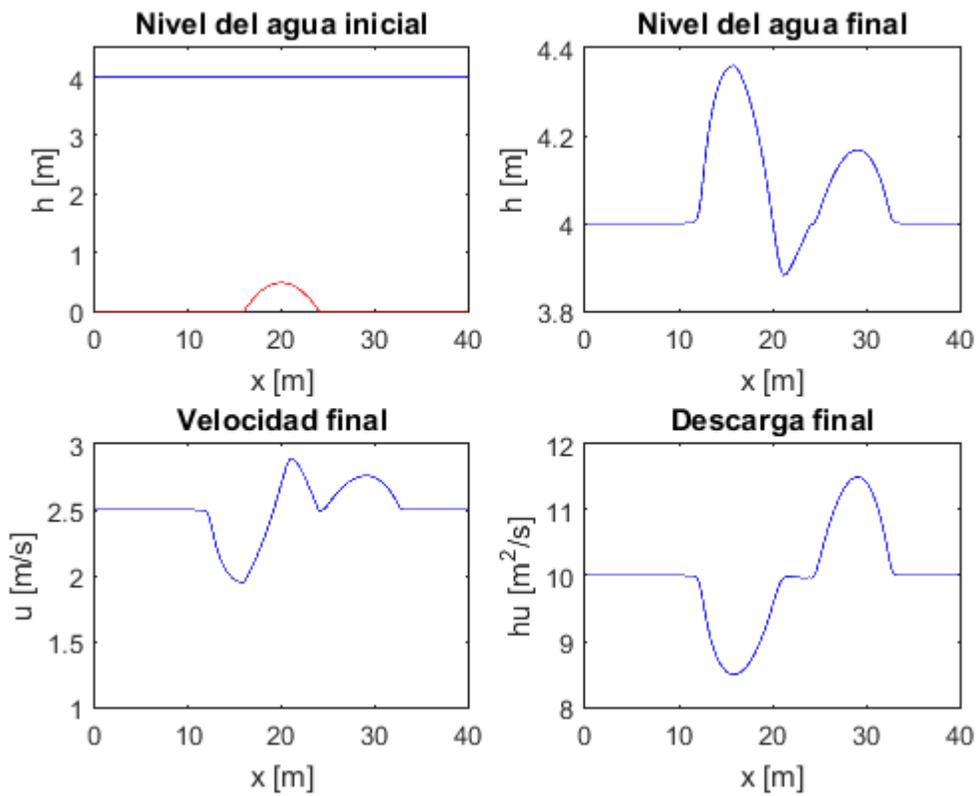


Figura 4.2: Gráficos de la simulación con tiempo final  $t = 1$  s.

## 5. Modelo bidimensional sin fricción

Ahora podemos proceder con el modelo de avalanchas en dos dimensiones sin fuerza de fricción. El sistema bidimensional de Saint Venant está dado por

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + g\frac{h^2}{2}\right) + \partial_y(huv) + gh\partial_x z = 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y\left(hv^2 + g\frac{h^2}{2}\right) + gh\partial_y z = 0, \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0. \quad (66)$$

Este sistema de ecuaciones puede escribirse como

$$\partial_t U + \partial_x F_1(U) + \partial_y F_2(U) + B_1(U)\partial_x Z + B_2(U)\partial_y Z = 0 \quad (67)$$

con  $Z = gz$  y con  $U$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  definidos en (10). Los estados estacionarios en reposo están dados por

$$\begin{cases} u = v = 0, \\ h + z = \text{cte.} \end{cases} \quad (68)$$

Las soluciones del sistema (66) pueden desarrollar discontinuidades, por lo que deben considerarse en forma débil. Estas soluciones están bien definidas bajo el supuesto de que la topografía  $z \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$  [7]. Estas soluciones débiles no necesariamente son únicas y para tratar esta situación se procede de forma similar a la ley de conservación vista anteriormente (Saint-Venant sin término fuente). Se usa una condición de entropía como criterio de admisibilidad adicional, como se muestra en [23]. Se considera una función de entropía convexa  $\eta(U)$  y flujos asociados  $H(U)$ ,  $K(U)$  y  $J = [J_1(x, y, U), J_2(x, y, U)]$  tales que

$$\partial_U H(U) = \partial_U \eta(U) \partial_U F_1(U) \quad (69)$$

$$\partial_U J(U) = \partial_U \eta(U) \partial_U F_2(U) \quad (70)$$

$$\partial_x J_1 + \partial_y J_2 = -\partial_U \eta(U) (gh \nabla z) \quad (71)$$

De aquí, se llega a una desigualdad distribucional de entropía

$$\eta(U)_t + (H(U) + J_1)_x + (K(U) + J_2)_y \leq 0 \quad (72)$$

Si el término fuente es nulo, se tiene la condición de entropía usual para leyes de conservación. Se observa que esta condición impone no sólo restricciones en el sistema y en  $F_1$  y  $F_2$ , sino que también en el término fuente, para que éste sea compatible con (71). En el caso de Saint Venant con topografía que estamos analizando, se tiene como función de entropía

$$\eta(U) = \frac{1}{2}(hu^2 + hv^2 + gh^2 + ghb). \quad (73)$$

De aquí, se tienen los flujos

$$H(U) = \frac{1}{2}(hu^3 + huv^2) + gh^2 u, \quad (74)$$

$$K(U) = \frac{1}{2}(hu^2 v + hv^3) + gh^2 v, \quad (75)$$

$$J_1 = ghzu, \quad J_2 = ghzv. \quad (76)$$

Así, la condición de entropía queda como

$$\eta(U)_t + \left( \frac{1}{2}(hu^3 + huv^2) + ghv(h+z) \right)_x + \left( \frac{1}{2}(hu^2v + hv^3) + ghv(h+z) \right)_y \leq 0. \quad (77)$$

### 5.1. Método de volúmenes finitos no conservativo

Considerese una malla de elementos  $C_i$ . Sea  $\Gamma_{ij}$  la arista entre los volúmenes  $C_i$  y  $C_j$  y  $n_{ij}$  el vector unitario normal con orientación de  $C_i$  a  $C_j$ . Sea  $U_i^n$  los valores de la solución en algún punto interior del elemento  $C_i$  al tiempo  $t_n$ . El método de volúmenes finitos está dado por

$$U_i^{n+1} - U_i + \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{j \in K_i} |\Gamma_{ij}| F_{ij} = 0, \quad (78)$$

donde  $|C_i|$  es el área del volumen de control  $C_i$ ,  $|\Gamma_{ij}|$  es el largo de la arista  $\Gamma_{ij}$ ,  $K_i$  es el conjunto de índices de celdas que comparten aristas con  $C_i$ , y  $F_{ij}$  es el flujo entre  $C_i$  y  $C_j$  con

$$F_{ij} = F(U_i, U_j, Z_i, Z_j, n_{ij}). \quad (79)$$

### 5.2. Esquema bien balanceado

El esquema dado por (78)-(79) es bien balanceado para una familia de estados estacionarios discretos dado por la relación

$$\mathcal{D}(U_l, U_r, Z_l, Z_r, n) = 0, \quad (80)$$

si para algunos valores se satisface que

$$F(U_l, U_r, Z_l, Z_r, n) = n^1 F_1(U_l, Z_l) + n^2 F_2(U_r, Z_r), \quad (81)$$

donde  $n = (n^1, n^2) \in \mathbb{R}^2$  es cualquier vector unitario.

### 5.3. Consistencia

El esquema (78)-(79) es consistente con (67) si el flujo numérico es consistente con el flujo exacto, esto es, para cualquier  $U, Z$  y  $n$ , se satisface

$$F(U, U, Z, Z, n) = n^1 F_1(U, Z) + n^2 F_2(U, Z) \quad (82)$$

y además se cumple la consistencia asintótica con la fuente,

$$F(U_l, U_r, Z_l, Z_r, n) + F(U_l, U_r, Z_l, Z_r, -n) = (n^1 B_1(U) + n^2 B_2(U))(Z_r - Z_l) + \mathcal{O}(Z_r - Z_l) \quad (83)$$

si  $U_l, U_r \rightarrow U$  y  $Z_l, Z_r \rightarrow Z$ .

## 5.4. Esquema numérico bidimensional

El sistema (66) es invariante bajo rotación. Sea  $n = (n_1, n_2)$  el vector unitario con su matriz de rotación dada por

$$R_n = \begin{pmatrix} n_1 & -n_2 \\ n_2 & n_1 \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Sea  $x' = R_n x$  y  $(u', v') = R_n^{-1}(u, v)$ . Entonces,  $U' = (h, hu', hv')$  es solución del problema. Así, podemos calcular los flujos a través del cálculo de los flujos asociados al siguiente problema unidimensional

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + g\frac{h^2}{2}) + gh\partial_x z = 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_x(huv) = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (85)$$

Sea  $F_l(U'_l, U'_r, \Delta Z) = (F_l^0, F_l^1, F_l^2)$  el flujo obtenido del problema (85) con  $U'$ . Entonces, el flujo izquierdo bidimensional del problema original está dado por

$$F_l(U_l, U_r, \Delta Z, n) = \begin{pmatrix} F_l^0(U'_l, U'_r, \Delta Z) \\ R_n \begin{pmatrix} F_l^1(U'_l, U'_r, \Delta Z) \\ F_l^2(U'_l, U'_r, \Delta Z) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Ahora, sea  $(h, hu, hv)^* = (h, -hu, -hv)$ . Entonces por simetría se tiene

$$F_r(U_l, U_r, \Delta Z) = -F_l(U_r^*, U_l^*, -\Delta Z)^*. \quad (87)$$

Luego, el flujo derecho del problema bidimensional original está dado por

$$-F_r(U_r, U_l, -\Delta Z, n) = \begin{pmatrix} F_r^0(U'_l, U'_r, \Delta Z) \\ R_n \begin{pmatrix} F_r^1(U'_l, U'_r, \Delta Z) \\ F_r^2(U'_l, U'_r, \Delta Z) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (88)$$

Estos flujos se usan en el modelo de volúmenes finitos dado por (78).

Se cumplen las siguientes proposiciones:

- **Proposición 1 [11]:** Si  $F_l$  y  $F_r$  son flujos numéricos consistentes para (85) que satisfacen (87), entonces el flujo numérico (86) es consistente con (66).
- **Proposición 2 [11]:** Si  $F_l$  y  $F_r$  son flujos balanceados con respecto los estados estacionarios discretos en reposo, entonces el flujo dado por (86) también lo es.

**Demostración:** Las demostraciones de estas proposiciones se encuentran en [11].

## 6. Ejemplo bidimensional sin fricción

A continuación se presenta un ejemplo numérico para el modelo bidimensional sin fricción, extraído de [18]. El dominio es  $[0, 2] \times [0, 1]$ . La topografía está dada por

$$z(x, y) = 0.5 \exp(-25(x-1)^2 - 50(y-1)^2). \quad (89)$$

Las condiciones iniciales son

$$w(x, y, 0) = 1, \quad u(x, y, 0) = 0.3, \quad v(x, y, 0) = 0, \quad (90)$$

donde  $w = z + h$ . Se considera  $g = 1 \text{ m/s}^2$ . En la imagen se muestra la solución  $h$  en  $t = 0.07 \text{ s}$ . Se usó una malla uniforme de 80000 elementos.

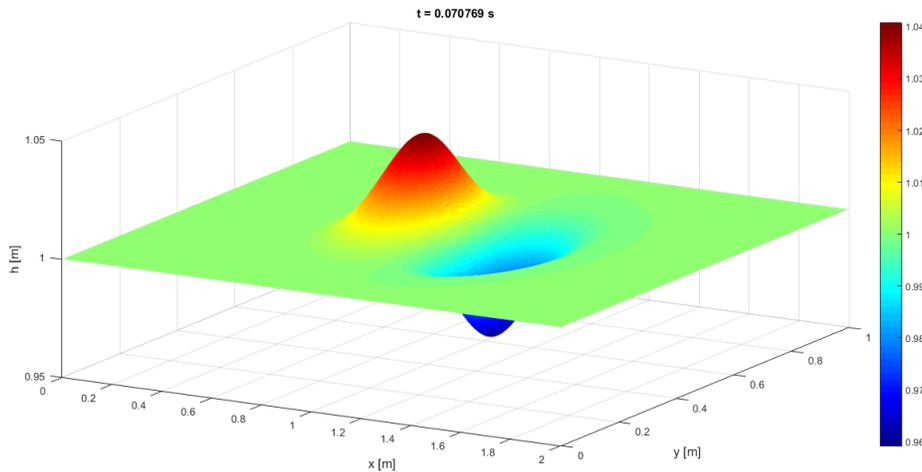


Figura 6.1: Simulación numérica en  $t = 0.07 \text{ s}$ . La escala está en m.

El esquema también puede emplearse para mallas no uniformes, como se muestra a continuación con una nueva malla para el mismo ejemplo numérico. En la figura se presenta la malla utilizada, que tiene 624 triángulos.

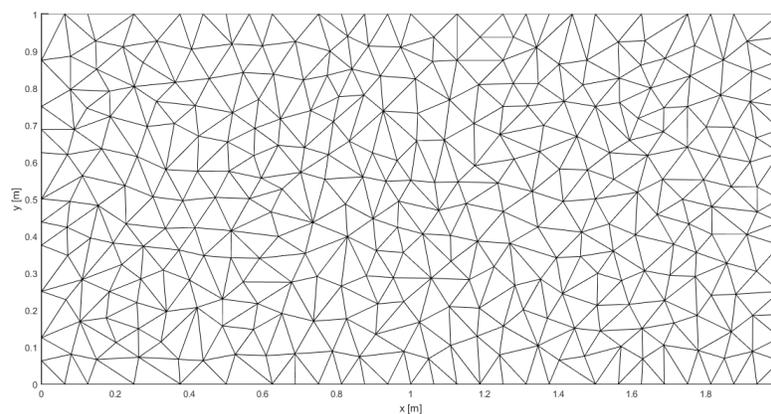


Figura 6.2: Malla no uniforme.

En la figura siguiente se muestra el gráfico de la solución  $h$  para  $t = 0.07$  s con esta malla.

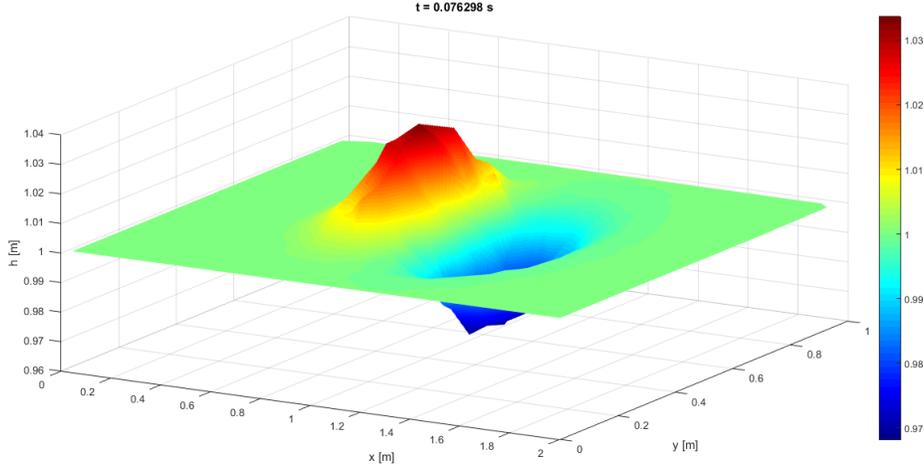


Figura 6.3: Simulación numérica en  $t = 0.07$  s. La escala está en m.

## 7. Modelo bidimensional con fricción

Consideremos ahora el modelo completo que incluye las fuerzas de fricción, dado por las ecuaciones en (1). El término de fricción está dado por

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left( \mu h g + \frac{g}{\xi} (u^2 + v^2) \right) \\ \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left( \mu h g + \frac{g}{\xi} (u^2 + v^2) \right) \end{pmatrix}. \quad (91)$$

La fricción en el modelo reológico de Voellmy-Salm incluye dos partes:

a. Fricción de Coulomb dada por [20]:

$$F_c = \frac{(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} (\mu h g) \quad (92)$$

b. Fricción turbulenta dada por [8]:

$$F_t = \frac{(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left( \frac{g}{\xi} (u^2 + v^2) \right) \quad (93)$$

Cada parte de la fricción será tratada de manera diferente, usando un esquema de splitting con el fin de asegurar estabilidad.

## 7.1. Fricción de Coulomb

Hasta ahora, hemos considerado el problema sin fricción, cuya forma es

$$\partial_t U + \partial_x F_1(U) + \partial_y F_2(U) + B_1(U)\partial_x Z + B_2(U)\partial_y Z = 0 \quad (94)$$

con  $U, F_1, F_2, B_1, B_2$  dados por (10). Para este problema, podemos calcular el flujo numérico  $F_{ij} = F(U_i, U_j, \Delta Z, n_{ij})$ . El problema que incluye la fricción de Coulomb tiene la forma

$$\partial_t U + \partial_x F_1(U) + \partial_y F_2(U) + B_1(U)\partial_x Z + B_2(U)\partial_y Z = B_1(U)f_1(t, x) + B_2(U)f_2(t, x) \quad (95)$$

con

$$f_1(t, x) = g\mu \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad f_2(t, x) = g\mu \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (96)$$

Para este nuevo problema, se emplea el modelo de volúmenes finitos dado por (67). Para calcular los flujos  $F_{ij}$  entre los elementos de la malla se usa

$$F_{ij} = F(U_i, U_j, \Delta Z_{ij} - f_1^{ij}(x_j - x_i)_1 - f_2^{ij}(x_j - x_i)_2, n_{ij}) \quad (97)$$

Esto es, se usa el flujo numérico del problema (94) usando  $\Delta Z_{ij} - f_1^{ij}(x_j - x_i)_1 - f_2^{ij}(x_j - x_i)_2$  en lugar de  $\Delta Z$ . En esta fórmula,  $\Delta Z_{ij} = Z_j - Z_i$ ,  $x_i$  y  $x_j$  son puntos arbitrarios en el interior de los elementos  $C_i$  y  $C_j$ , respectivamente, y  $f_1^{ij}$  y  $f_2^{ij}$  son valores aproximados de  $f_1$  y  $f_2$  en la arista  $\Gamma_{ij}$ , con  $f^{ji} = f^{ij}$ . El valor aproximado en este caso está dado por

$$f^{ij} = -\varphi_{g\mu} \left( (gh_i - gh_j - \Delta Z_{ij}) \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^2}, \frac{(u^{ij}, v^{ij})}{\Delta t} \right) \quad (98)$$

con

$$\varphi_{g\mu}(X, Y) = \text{proj}_{g\mu} \left( \text{proj}_{g\mu}(X) + \frac{2}{1 + \max(1, -X \cdot Y/g\mu|Y|)} Y \right), \quad (99)$$

$$\text{proj}_{g\mu}(X) = \begin{cases} X & \text{si } |X| \leq g\mu, \\ g\mu \frac{X}{|X|} & \text{si } |X| > g\mu, \end{cases} \quad (100)$$

$$u^{ij} = \frac{h_i u_i + h_j u_j}{h_i + h_j}, \quad v^{ij} = \frac{h_i v_i + h_j v_j}{h_i + h_j}. \quad (101)$$

## 7.2. Fricción turbulenta

Una vez que se obtiene la solución  $h^n$ ,  $u^n$  y  $v^n$  del método de volúmenes finitos para el tiempo  $t_n$ , que denotaremos como  $h^*, u^*, v^*$ , se procede a incluir la fricción turbulenta mediante diferencias finitas. Lo hecho a continuación se basa en lo desarrollado en [29]. Consideramos el siguiente problema

$$\begin{cases} \partial_t h & = 0 & (102.1) \\ \partial_t(hu) & = -\frac{g}{\xi} u \sqrt{u^2 + v^2} & (102.2) \\ \partial_t(hv) & = -\frac{g}{\xi} v \sqrt{u^2 + v^2} & (102.3) \end{cases} \quad (102)$$

Debemos resolver este sistema de forma exacta, tomando como datos iniciales  $h^*$ ,  $h^*u^*$  y  $h^*v^*$ . De (102.1) se tiene

$$h = h^*. \quad (103)$$

Multiplicando (102.2) por  $u$  y (102.3) por  $v$ , se tiene

$$h^*(u\partial_t u + v\partial_t v) = -\frac{g}{\xi}(u^2 + v^2)^{3/2}. \quad (104)$$

Se hace el cambio de variable  $w = u^2 + v^2$ . Luego, se tiene  $\partial_t w = 2u\partial_t u + 2v\partial_t v$ . Sea, además,  $w^* = (u^*)^2 + (v^*)^2$ . De aquí, se tiene

$$\begin{aligned} h^*\partial_t w &= -\frac{2g}{\xi}w^{3/2}, \\ h^*\int_{w^*}^w \frac{dw}{w^{3/2}} &= -\frac{2g}{\xi}\int_0^t dt, \\ -2h^*(w^{-1/2} - (w^*)^{-1/2}) &= -\frac{2g}{\xi}t, \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} w &= \left( \frac{1}{1/\sqrt{w^*} + gt/h^*\xi} \right)^2, \\ w &= \frac{(h^*\xi)^2 w^*}{(g\sqrt{w^*}t + h^*\xi)^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene

$$h^*\partial_t u = -\frac{g}{\xi}\sqrt{wu}. \quad (106)$$

Luego,

$$u = u^* \exp\left(-\frac{g}{\xi h^*} \int_0^{\Delta t} \sqrt{w(t)} dt\right). \quad (107)$$

Ahora, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} \sqrt{w} &= \int_0^{\Delta t} \frac{h^*\xi\sqrt{w^*}}{g\sqrt{w^*}t + h^*\xi} \\ &= \frac{h^*\xi}{g} (\ln(g\sqrt{w^*}t + h^*\xi) - \ln(h^*\xi)). \end{aligned} \quad (108)$$

Por lo tanto, la solución para el tiempo  $t_{n+1}$  está dada por

$$\begin{aligned} h^{n+1} &= h^*, \\ u^{n+1} &= \frac{u^* h^* \xi}{g\sqrt{w^*} \Delta t + h^* \xi}, \\ v^{n+1} &= \frac{v^* h^* \xi}{g\sqrt{w^*} \Delta t + h^* \xi}. \end{aligned} \quad (109)$$

Este método de splitting [29] asegura la estabilidad y consistencia del método.

### 7.3. Ejemplo numérico unidimensional con fricción de Voellmy-Salm

Primero, se presenta una simulación numérica para un ejemplo en una dimensión con topografía y fricción de Voellmy-Salm. Este test se obtuvo de [27]. El dominio es el intervalo  $[0,500]$ . La topografía es una pendiente constante de  $13^\circ$ . La condición inicial corresponde a una pila de material inicialmente en reposo que tienen una pendiente relativa a la topografía de  $20^\circ$  y cuyo centro coincide con el centro del dominio. Los parámetros empleados son  $g = 9.81$ ,  $\mu = 0.3$  y  $\xi = 300$ . Se usaron 400 elementos. Las imágenes muestran los resultados de la altura y velocidad en  $t = 0$ ,  $t = 5$  y  $t = 40$ . El paso temporal  $\Delta t$  está dado por la condición CFL.

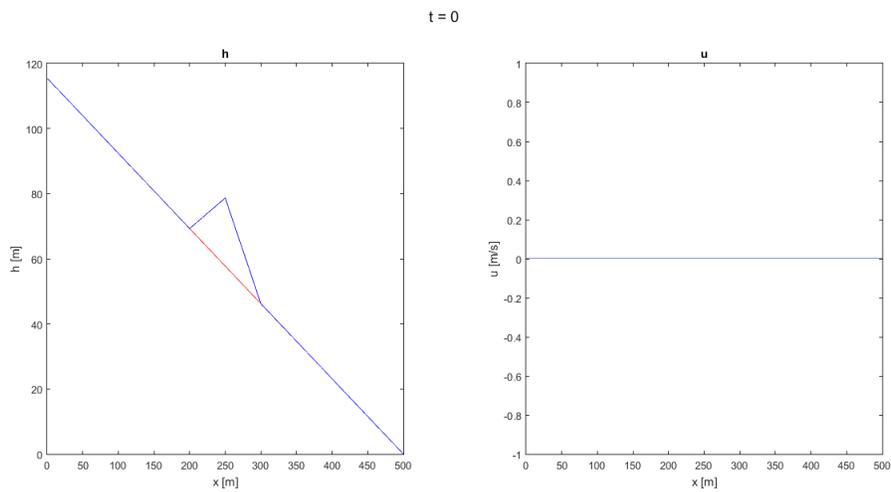


Figura 7.1: Simulación numérica en  $t = 0$  s. En el diagrama de la izquierda se muestra la topografía  $z$  (en rojo) y la altura del material  $h + z$  (en azul). En el gráfico de la derecha se muestra la velocidad  $u$  del fluido (en azul).

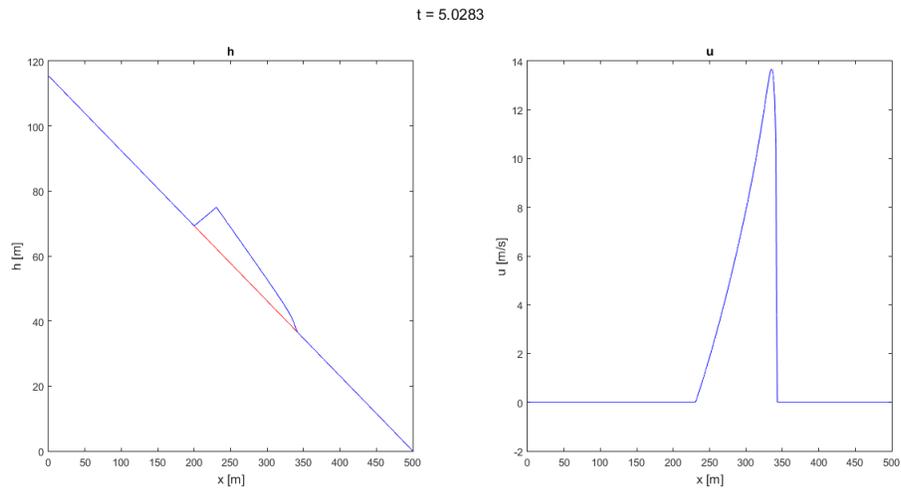


Figura 7.2: Simulación numérica en  $t = 5$  s. En el diagrama de la izquierda se muestra la topografía  $z$  (en rojo) y la altura del material  $h + z$  (en azul). En el gráfico de la derecha se muestra la velocidad  $u$  del fluido (en azul).

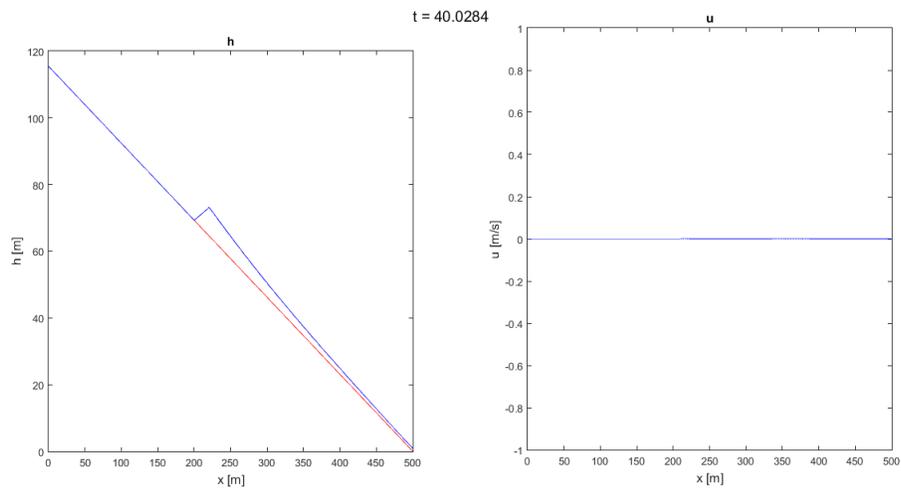


Figura 7.3: Simulación numérica en  $t = 40$  s. En el diagrama de la izquierda se muestra la topografía  $z$  (en rojo) y la altura del material  $h + z$  (en azul). En el gráfico de la derecha se muestra la velocidad  $u$  del fluido (en azul)

#### 7.4. Ejemplo numérico bidimensional con fricción de Voellmy-Salm

A continuación se presentan los resultados obtenidos con el esquema de volúmenes finitos para un caso sencillo bidimensional que incluye topografía y reología de Voellmy-Salm. El ejemplo fue extraído de [13], el cual fue testeado en [27]. El dominio está en un rectángulo con  $x \in [0, 30]$  e  $y \in [-15, 15]$ , con una sección inclinada en  $x \in [0, 17.5]$ , una región horizontal en  $x \geq 21.5$  y en la zona de transición  $x \in [17.5, 21.5]$  se tiene una inclinación suave entre las dos secciones de la topografía. El ángulo de inclinación de la topografía está dado por

$$\theta(x) = \begin{cases} \theta_0, & \text{si } 0 \leq x \leq 17.5, \\ \theta_0(1 - (x - 17.5)/4), & \text{si } 17.5 \leq x \leq 21.5, \\ 0, & \text{si } x \geq 21.5. \end{cases} \quad (110)$$

Con  $\theta_0 = 35^\circ$ . El material es inicialmente una semi-esfera con radio  $r_0 = 1.85$  y centro localizado en  $(x_0, y_0) = (4, 0)$ . Con respecto a los parámetros físicos, se consideró constante gravitacional  $g = 1$ , coeficiente de Coulomb  $\mu = 0.3$  y coeficiente de fricción turbulenta  $\xi = 300$ . Se consideró una malla uniforme de 3600 elementos rectangulares. Se muestra en la figura la simulación numérica con el método de volúmenes finitos en distintos tiempos.

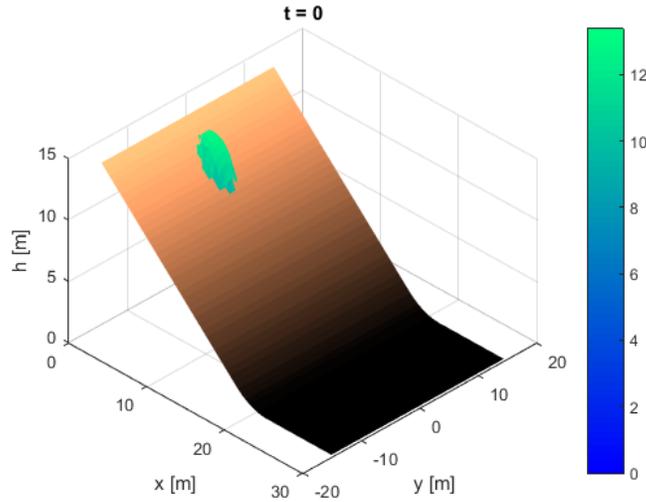


Figura 7.4: Simulación numérica en  $t = 0$  s. En la imagen se muestra la topografía  $z$  (de color café) y la altura del material  $h + z$  (en tonos de azul de la escala a la derecha). La escala de la figura está dada en m.

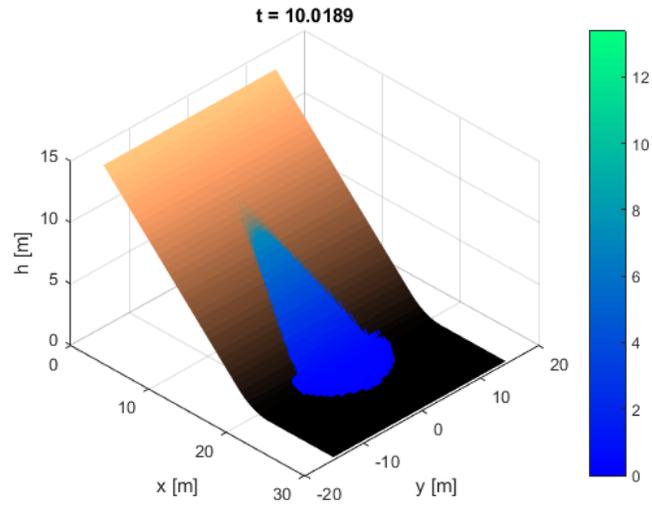


Figura 7.5: Simulación numérica en  $t = 10$  s. En la imagen se muestra la topografía  $z$  (de color café) y la altura del material  $h + z$  (en tonos de azul de la escala a la derecha). La escala de la figura está dada en m.

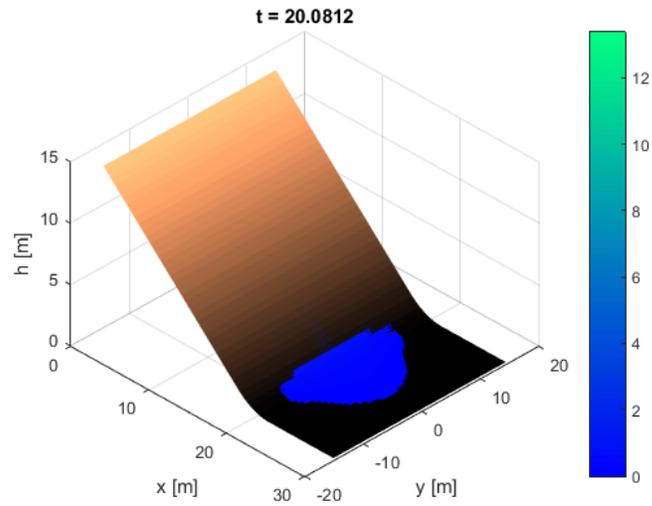


Figura 7.6: Simulación numérica en  $t = 20$  s. En la imagen se muestra la topografía  $z$  (de color café) y la altura del material  $h + z$  (en tonos de azul de la escala a la derecha). La escala de la figura está dada en m.

## 7.5. Avalancha en Rigopiano

Ahora se analizará el caso de la avalancha de nieve ocurrida el 18 de enero de 2017 en Rigopiano, parque nacional del Gran Sasso, Italia, empleando información extraída de [30]: se obtuvo la información del relieve de la zona, las características y efectos de la avalancha, y los datos de los parámetros físicos de la fricción. Se eligió este ejemplo por la cantidad de datos e información que se tiene al respecto.

Este desastre natural destruyó el hotel Rigopiano, resultando en la muerte de 29 personas [30]. Los estudios realizados después de la catástrofe indicaron que la avalancha fue una mezcla de nieve y madera, desplazando rocas y árboles en su recorrido. El daño generado en el evento demuestra que la avalancha fue de gran intensidad [30]. Se realizaron estudios forenses para reconstruir las circunstancias de la avalancha y sus causas, recabando datos de la zona afectada. Se construyó un modelo numérico para reconstruir las dinámicas de la avalancha y complementar la información que se obtuvo al inspeccionar el sitio [30]. El objetivo presente es usar el modelo empleado hasta ahora en esta situación real y comparar con los resultados publicados.

En la imagen se muestra una vista aérea del recorrido de la avalancha antes y después del evento.

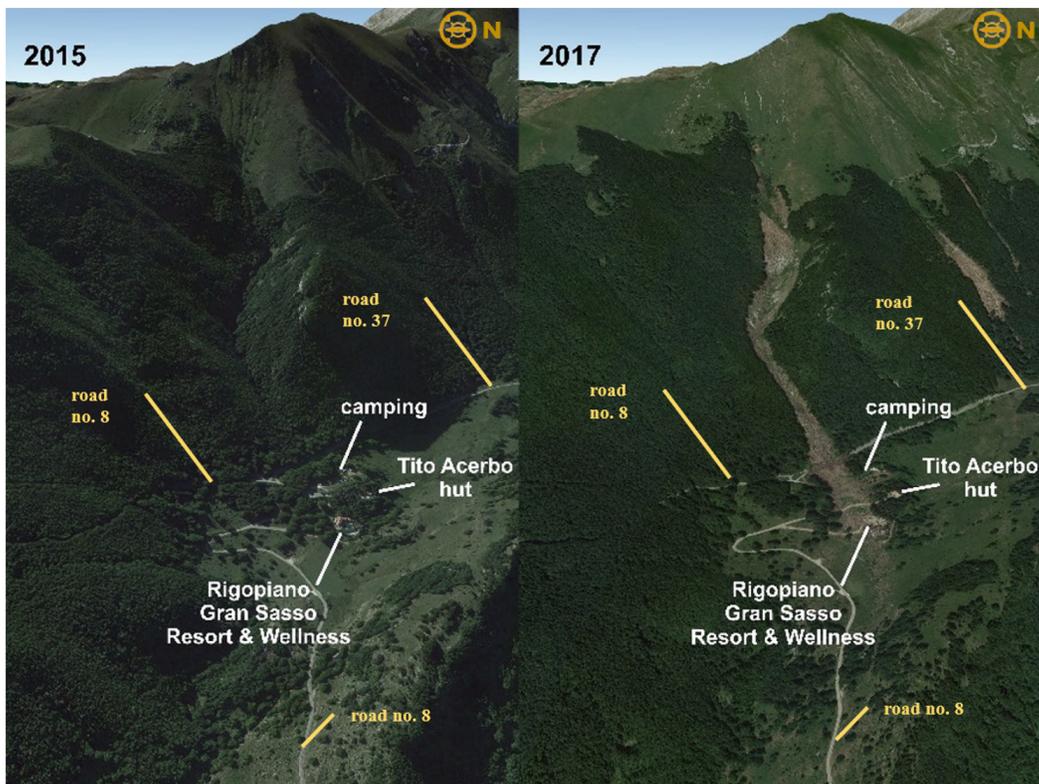


Figura 7.7: Vista aérea del recorrido de la avalancha sobre el Hotel Rigopiano, antes (2015) y después (2017) del evento catastrófico. Imagen extraída de [30].

En la siguiente figura se muestra un mapa de la región de Abruzzo, donde ocurrió la avalancha. Se indica la posición del Hotel Rigopiano, así como la ubicación de puntos de medición de nieve en la zona. También se presenta un mapa de Italia con la posición de la región de Abruzzo.

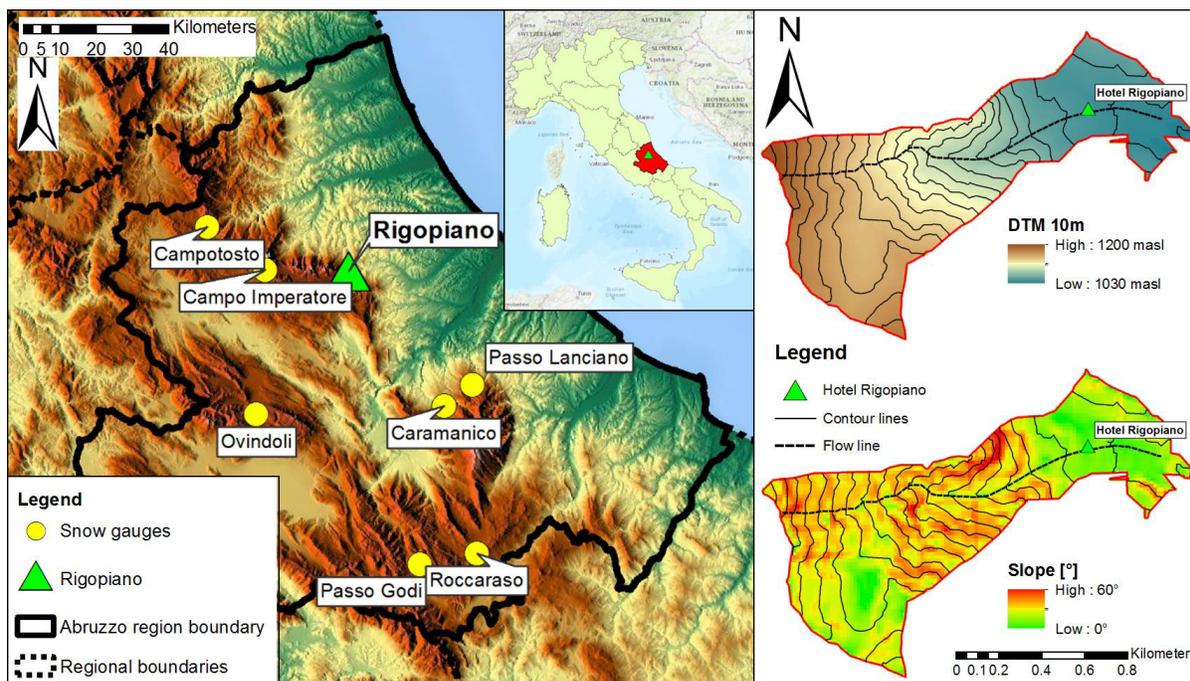


Figura 7.8: Área geográfica de región Abruzzo con posición del Hotel Rigopiano (triángulo verde). También se muestran medidores de nieve en la zona (círculos amarillos). Mapa de Italia en la parte superior con región de Abruzzo marcada en rojo. En los diagramas de la derecha se muestra la altura y la pendiente del relieve, indicando el flujo principal de la avalancha. Imagen extraída de [28]

A continuación se presenta una imagen con la topografía de la zona de Rigopiano que se estudia, cuya altura se denominará  $z$ .

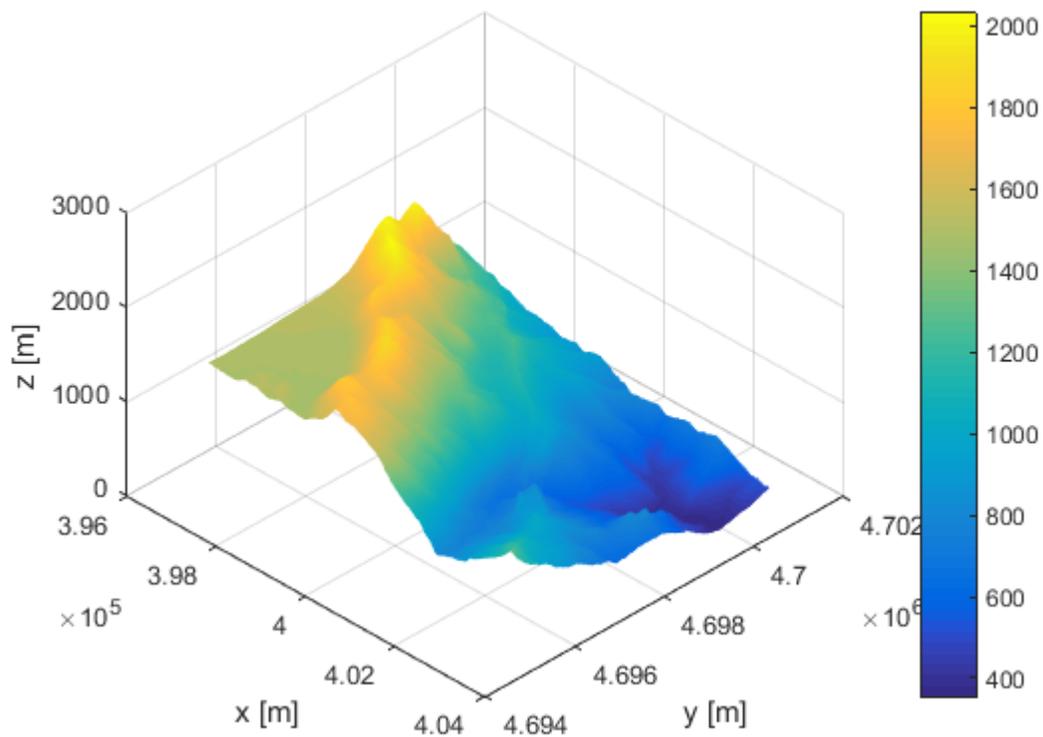


Figura 7.9: Topografía de Rigopiano de altura  $z$ . Esta superficie se considera como el relieve sin nieve de la zona. Escala de la derecha está dada en m. Eje  $x$  está en dirección Este-Oeste y eje  $y$  en dirección Sur-Norte (ver figura 7.8).

En las figuras 7.10 y 7.11 se muestra la topografía en diferentes vistas.

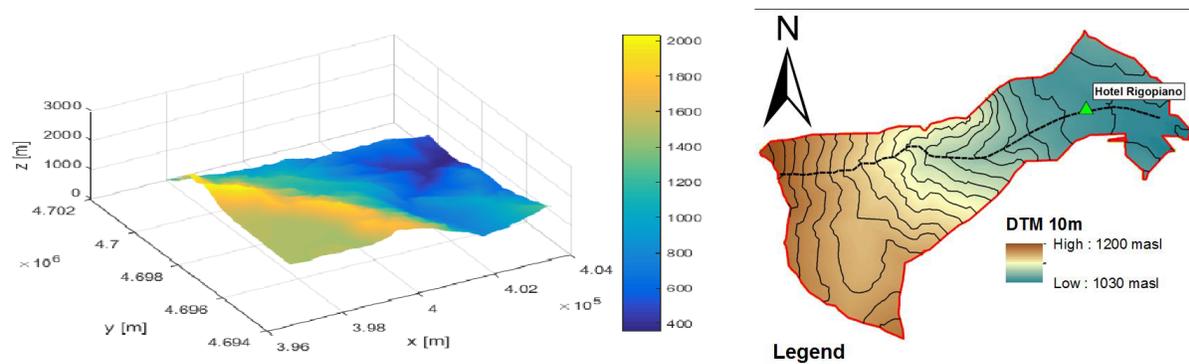


Figura 7.10: Topografía de Rigopiano con escalas en m. Izquierda: Altura  $z$  usada para la simulación numérica. Derecha: Altura del relieve de la imagen en [30].

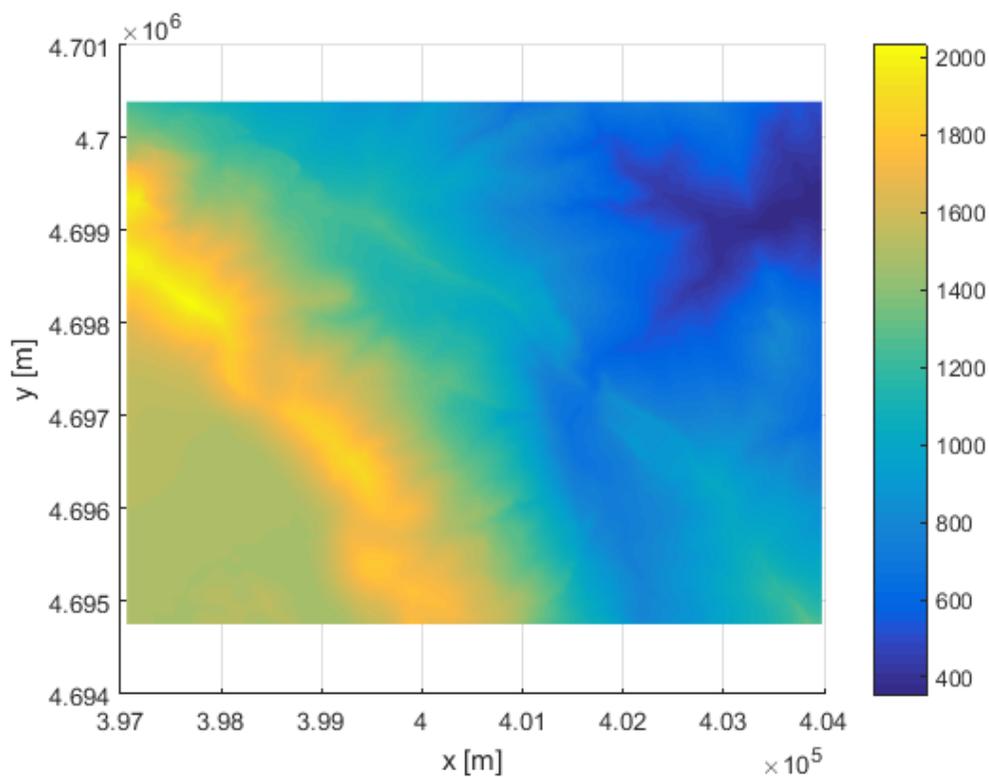


Figura 7.11: Vista superior de topografía de Rigopiano. Escala en m.

Primero se va considerar una parte del dominio. Se usará un dominio cuadrado de 500 m de largo en cada lado cuyo centro está en el centro del dominio original, como se muestra en la figura.

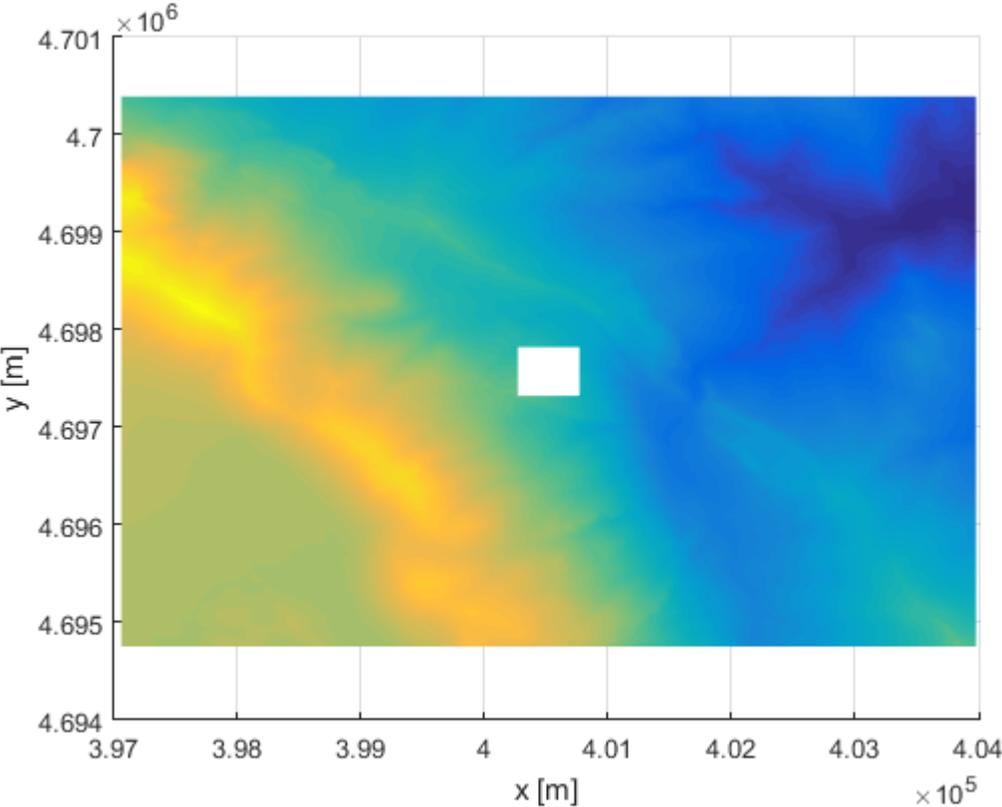


Figura 7.12: Topografía en el dominio completo con sub-dominio de 500 m por lado en el centro (en blanco).

En las figuras se muestran la vista superior del relieve en este sub-dominio y los isoniveles de  $z$  en el cuadrado.

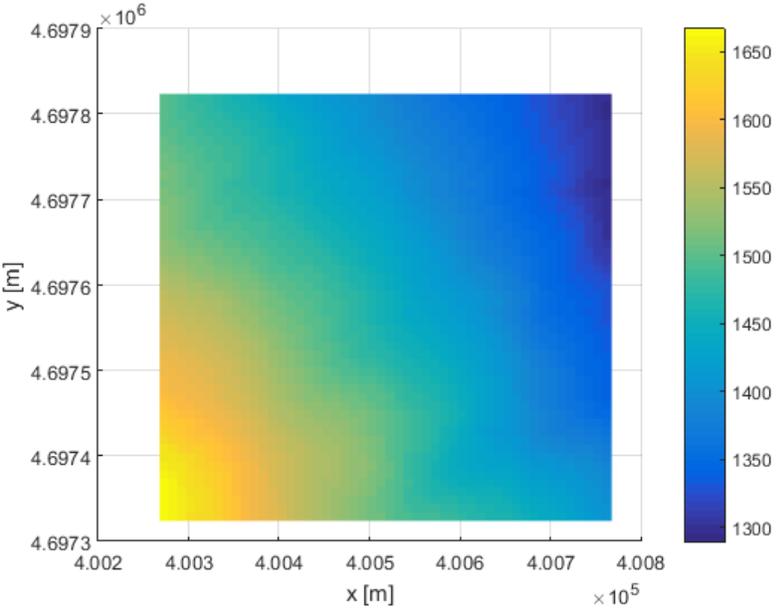


Figura 7.13: Topografía en sub-dominio en vista superior. La posición aproximada del sub-dominio es  $x \in [400267, 400767]$ ,  $y \in [4697323, 4697823]$ .

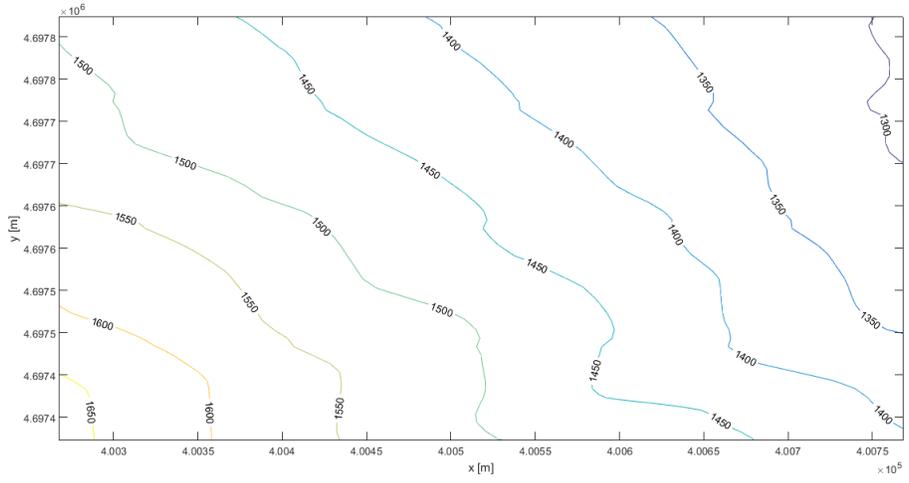


Figura 7.14: Isoniveles de la topografía en el sub-dominio. Los valores en los isoniveles se presentan en m.

Como altura de nieve inicial se tomará una pendiente constante con una altura máxima de 8 m en el borde del dominio y que llega a 0 m en el isonivel  $z = 1600$  m, como se puede ver en la figura.

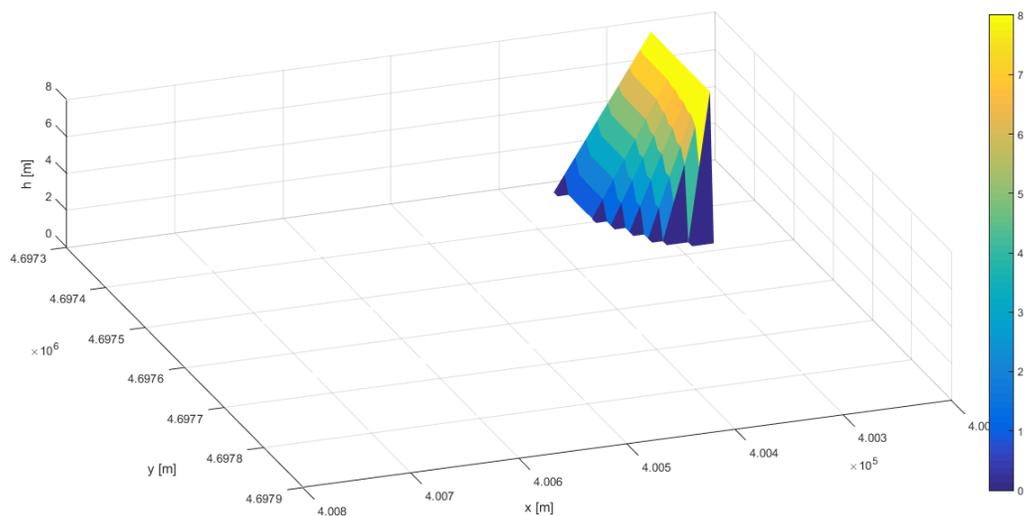


Figura 7.15: Altura de nieve inicial. La escala a la derecha está dada en m.

Para la simulación se utilizó una malla uniforme de 2600 celdas cuadradas de 10 m por lado. Se tomó como datos físicos  $\mu = 0.55$ ,  $\xi = 2000$  y  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>. Primero se presenta unas figuras de la simulación sin incorporar la fricción, para observar el efecto de la fricción en los resultados.

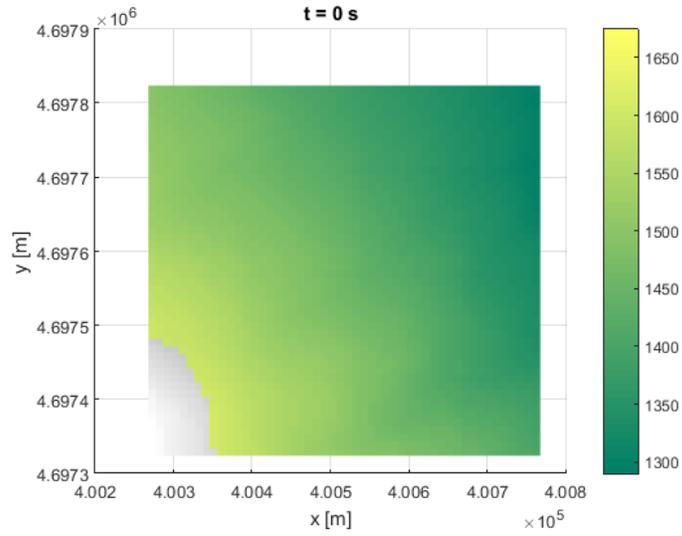


Figura 7.16: Simulación sin fricción en  $t = 0$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

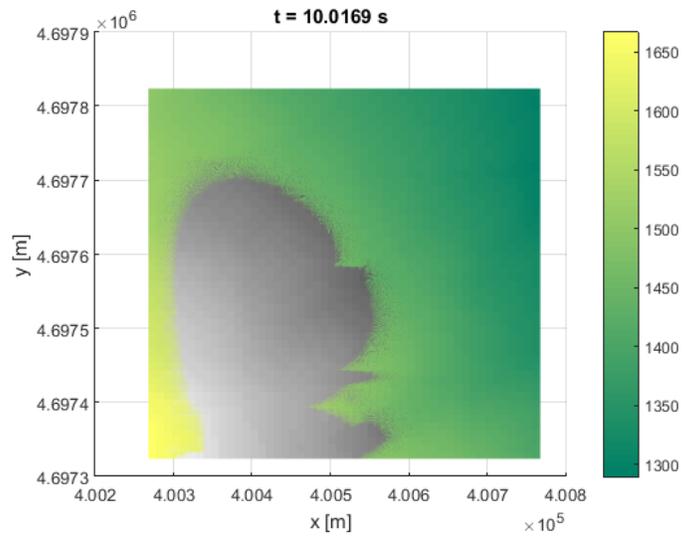


Figura 7.17: Simulación sin fricción en  $t = 10$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

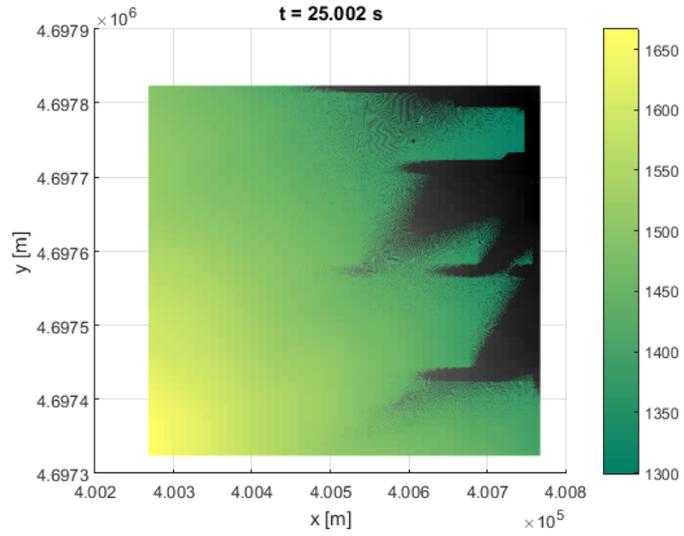


Figura 7.18: Simulación sin fricción en  $t = 25$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

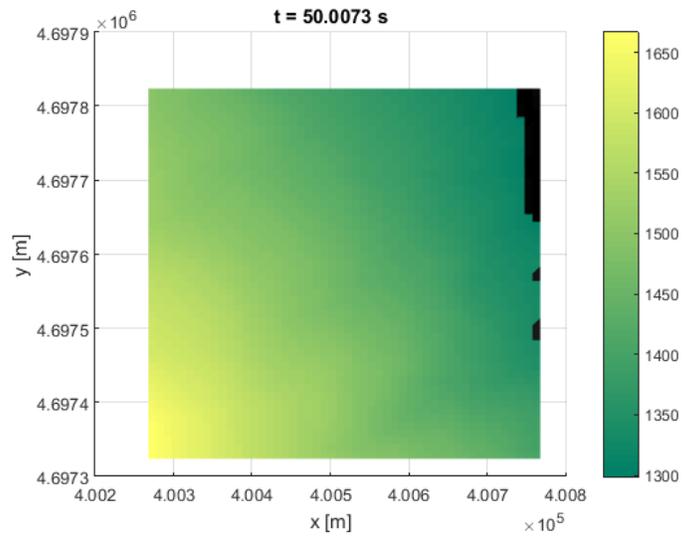


Figura 7.19: Simulación sin fricción en  $t = 50$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

Ahora se presenta la simulación incluyendo la fricción de Coulomb ( $\mu = 0.55$ ), pero no la fricción turbulenta.

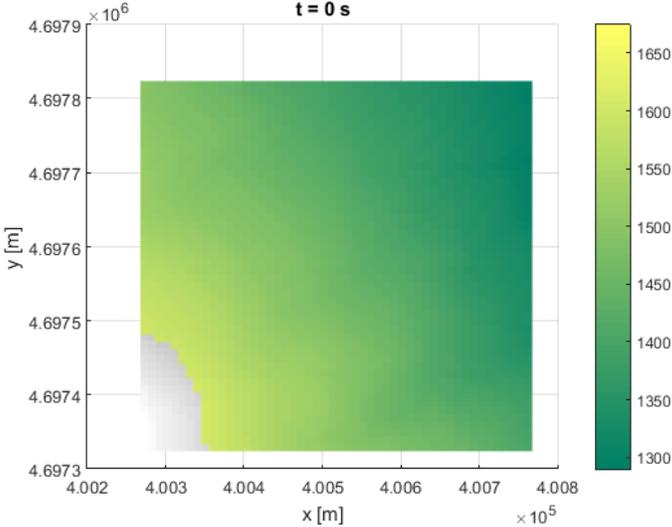


Figura 7.20: Simulación con fricción de Coulomb en  $t = 0$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

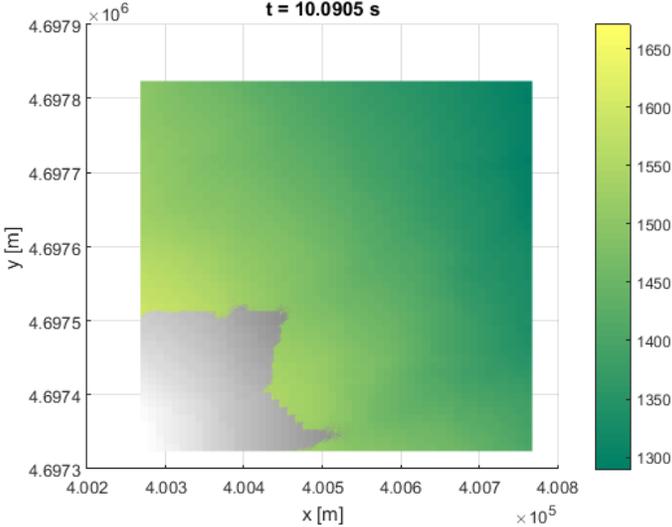


Figura 7.21: Simulación con fricción de Coulomb en  $t = 10$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

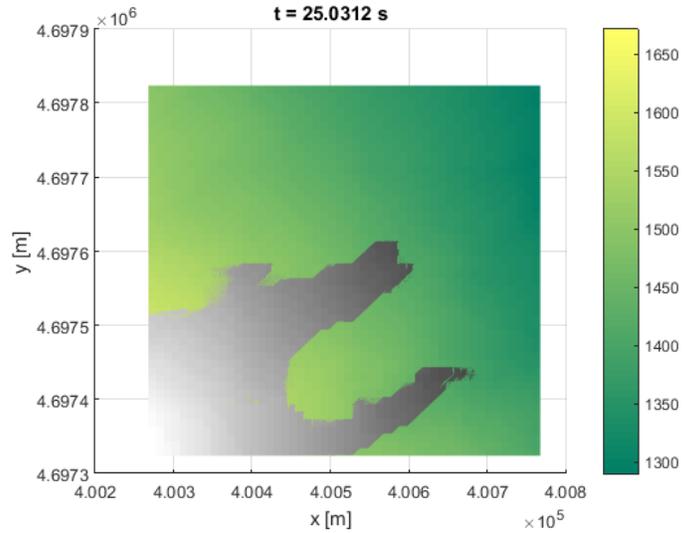


Figura 7.22: Simulación con fricción de Coulomb en  $t = 25$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en  $m$ .

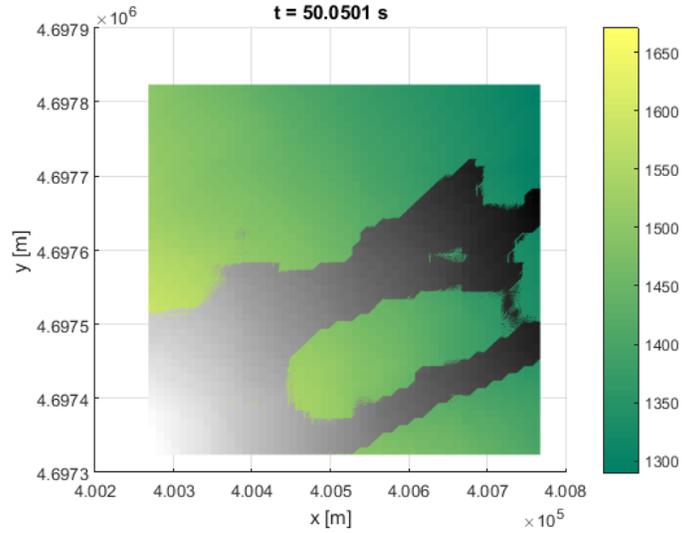


Figura 7.23: Simulación con fricción de Coulomb en  $t = 50$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en  $m$ .

Se realizó la simulación con parámetro para la fricción turbulenta  $\xi = 2000$ . Los gráficos de la altura de nieve en ese caso son iguales a los gráficos sin turbulencia. A continuación se muestra una simulación con

fricción turbulenta con  $\xi = 20$ , en donde sí es posible ver diferencias en los gráficos y observar el efecto de la turbulencia.

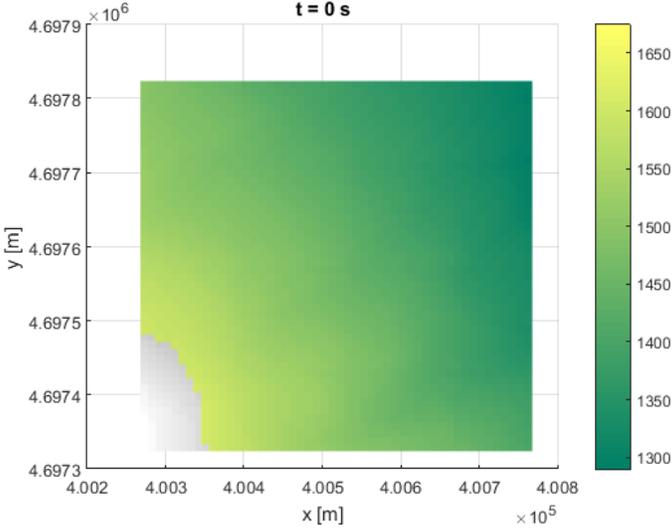


Figura 7.24: Simulación con fricción en  $t = 0$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

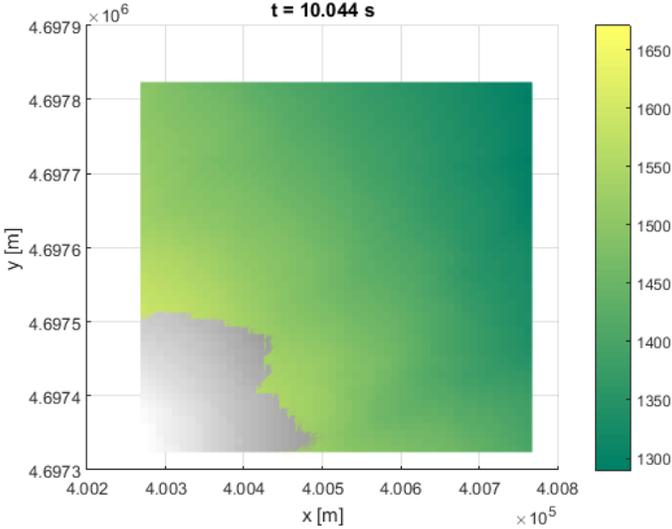


Figura 7.25: Simulación con fricción en  $t = 10$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

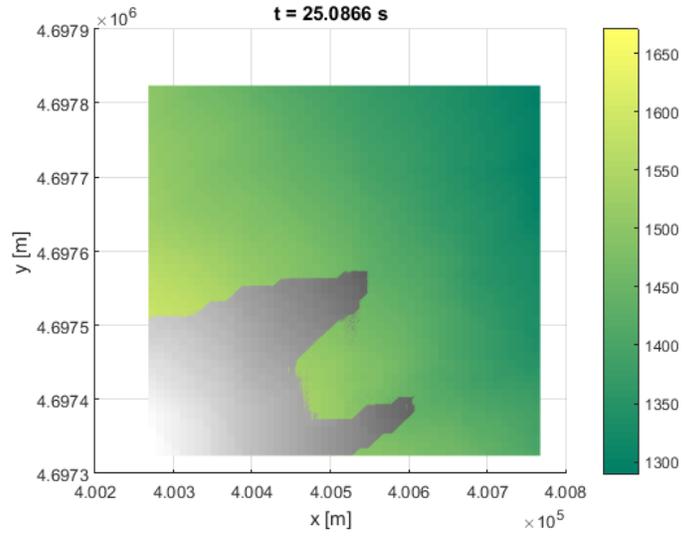


Figura 7.26: Simulación con fricción en  $t = 25$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

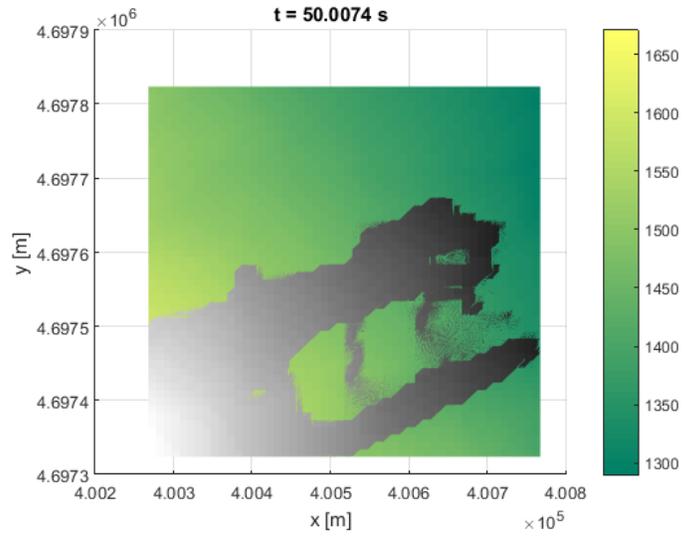


Figura 7.27: Simulación con fricción en  $t = 50$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

Finalmente, se muestra la simulación de la norma de la velocidad de la avalancha, considerando  $\mu = 0.55$  y  $\xi = 2000$ .

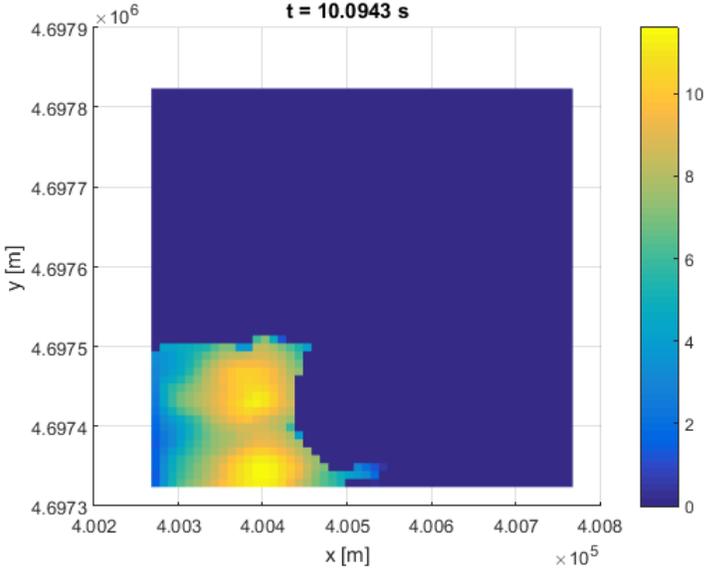


Figura 7.28: Simulación velocidad  $t = 10$  s. Escala dada en  $m/s^2$

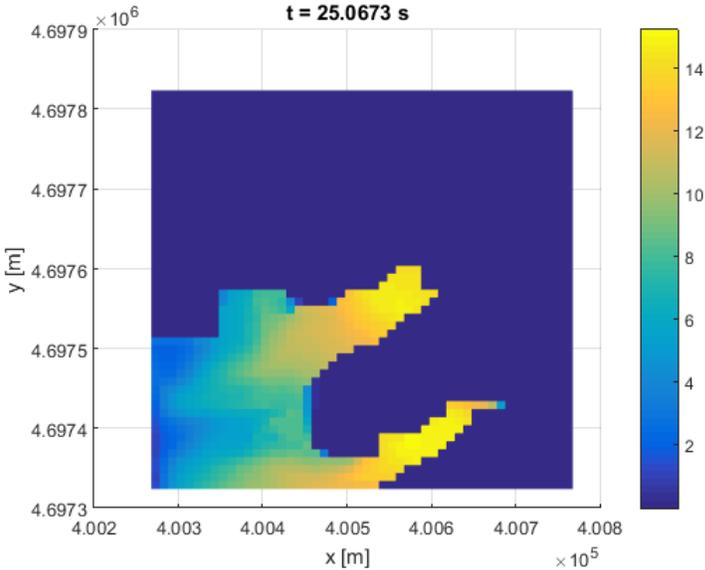


Figura 7.29: Simulación velocidad en  $t = 25$  s. Escala dada en  $m/s^2$

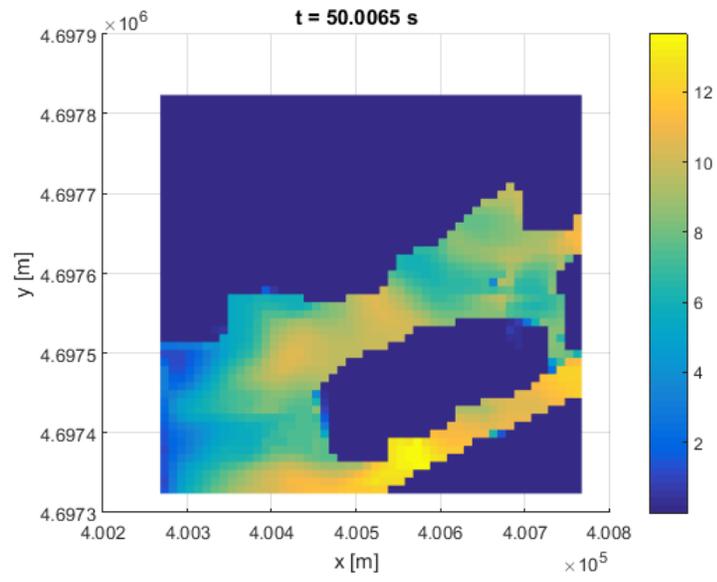


Figura 7.30: Simulación velocidad en  $t = 50$  s. Escala dada en  $\text{m/s}^2$

## 8. Simulación de avalanchas en coordenadas globales

Los modelos unidimensionales para avalanchas usuales se derivan de un modelo físico con una pendiente constante. Para estos casos, comúnmente se usa como sistema de referencia un eje normal a la superficie y uno paralelo a éste, con la misma dirección del flujo. Este método es el más sencillo cuando el ángulo de la pendiente es grande. Este mismo sistema de coordenadas se puede aplicar localmente con los ejes normales y tangente en cada punto de la superficie (sistema de coordenadas local o LCS). Sin embargo, este enfoque puede causar problemas en algunas situaciones, como en el caso de paredes laterales o cuando la dirección es vertical. Para evitar este tipo de problemas, se puede usar un sistema de coordenadas global (GCS), con eje vertical (y opuesto a la dirección de la aceleración de gravedad) y un eje ortogonal en una dirección horizontal arbitraria.

En lo hecho hasta este punto se ha usado este sistema de coordenadas global, empleando las ecuaciones de Navier-Stokes para derivar las ecuaciones del modelo. Ello implica tomar como supuesto que la pendiente es muy suave. Esta suposición no es correcta en terrenos empinados como los presentes en los casos de avalanchas. Por eso en estudio de avalanchas, muchos modelos emplean el sistema de coordenadas local. Sin embargo, es posible continuar con el sistema de coordenadas global empleando un esquema que considera el efecto en la velocidad vertical dado por el terreno escarpado. El esquema derivado de este análisis del flujo se explica detalladamente en [42]. Lo que se presentará a continuación se basa principalmente en lo desarrollado en este paper, el cual emplea la reología de Voellmy-Salm, como se ha usado en lo realizado hasta esta parte.

### 8.1. Sistema de ecuaciones diferenciales del modelo

Se considera un flujo unidimensional con una topografía con una pendiente  $\theta$ . El sistema de coordenadas global con ejes  $x$  y  $z$  usado para el modelo se muestra en la figura.  $h_v$  es la altura del fluido,  $z_b$  es la altura de la topografía del terreno y  $u_x$  es la componente en  $x$  de la velocidad. En la imagen se observa el volumen de control (CV) empleado en la derivación de las ecuaciones.

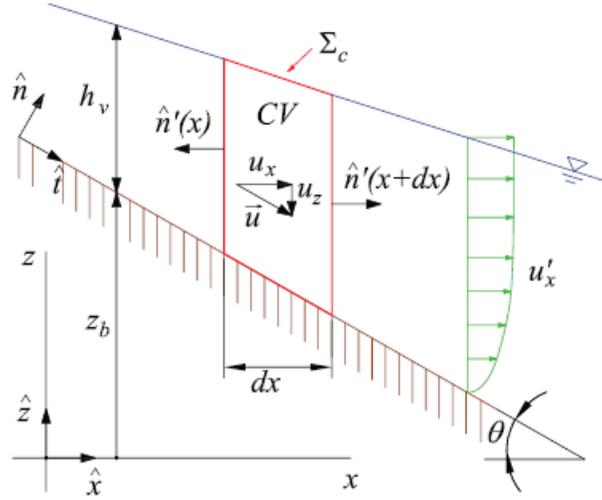


Figura 8.1: Volumen de control ( $x$  es eje horizontal y  $z$  es eje vertical).  $h_v$  es la altura del fluido,  $z_b$  es la altura de la topografía del terreno y  $u_x$  es la componente en  $x$  de la velocidad.

Las ecuaciones bajo este sistema de coordenadas es el siguiente

$$\begin{cases} \partial_t h_v + \partial_x (h_v u_x) = 0, \\ \partial_t (h_v u_x) + \partial_x \left( h_v u_x^2 + g \cos^2 \theta \frac{h_v^2}{2} \right) + g \cos^2 \theta h_v \partial_x z_b = -\frac{\tau_0}{\rho} \frac{s_x^\tau}{\cos \theta}, \end{cases} \quad (111)$$

donde el término derecho en la segunda ecuación representa la fricción de Voellmy-Salm y donde  $\theta$  es el ángulo de la pendiente de la topografía. En el caso dinámico la fricción tiene dos partes, una que depende de la altura  $h_v$  del fluido y otra que depende de la velocidad  $u_x$  de éste. Se tiene [42]

$$\tau_c = \mu \rho g h_v \cos^2 \theta, \quad (112)$$

$$\tau_u = \rho g \frac{u_x^2}{\xi \cos^2 \theta}, \quad (113)$$

$$\tau_0 = \tau_c + \tau_u, \quad (114)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\mu$  es el parámetro de fricción de Coulomb y  $\xi$  es el parámetro de la fricción de turbulenta. Entonces, se tiene

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \mu g h_v \cos^2 \theta + g \frac{u_x^2}{\xi \cos^2 \theta} \quad (115)$$

Ahora,  $s_x^\tau$  representa la dirección y está dada por

$$s_x^\tau = \frac{u_x}{|u_x|} \cos \theta \quad (116)$$

La derivación de estas ecuaciones se encuentra en [42]. Para el modelo numérico se usará el método de volúmenes finitos. Se utilizará el enfoque de MUSCL-Hancock con limitador minmod y se empleará como solucionador de Riemann el de Osher-Solomon.

## 8.2. Solucionador de Osher-Solomon

Lo que se presenta a continuación se basa primordialmente en [26]. Consideremos un sistema unidimensional hiperbólico de leyes conservativas dada por

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \quad (117)$$

con  $U = U(x, t)$  y  $F$  es una función de flujo. Se busca una solución numérica mediante el método de volúmenes finitos con la siguiente forma

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n), \quad (118)$$

con una discretización como la hecha en la sección 4.1. El esquema de Osher-Solomon [22] es un solucionador de Riemann que considera como flujo

$$F_{i+1/2} = \frac{F(U_i) + F(U_{i+1})}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 |A(\Phi(s))| \Phi'(s) ds, \quad (119)$$

donde  $A = \frac{\partial F}{\partial U}$  es el Jacobiano de  $F$  y  $\Phi$  es un camino que une  $U_i$  y  $U_{i+1}$ . Se tiene

$$|A(U)| = \mathcal{R}(U) |\Lambda(U)| \mathcal{R}^{-1}(U), \quad (120)$$

donde  $\mathcal{R}$  es la matriz cuyas columnas son los vectores propios de  $A$ ,  $\mathcal{R}^{-1}$  es su inversa y  $\Lambda$  es la matriz diagonal con los valores propios. Para reducir la complejidad del cálculo de la integral del flujo, que depende del camino, Dumbster y Toro propusieron una forma de simplificar este esquema, conocido como el solucionador Dumbster-Osher-Toro (DOT). En este método, se usa como camino  $\Phi$  el segmento recto que une  $U_i$  y  $U_{i+1}$  dado por

$$\Phi(U_i, U_{i+1}; s) = U_i + s(U_{i+1} - U_i). \quad (121)$$

Luego, se puede usar una fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre para aproximar la integral. El flujo queda dado por

$$F_{i+1/2} = \frac{F(U_i) + F(U_{i+1})}{2} - \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^3 w_k |A(U_i + s_k(U_{i+1} - U_i))| \right) (U_{i+1} - U_i), \quad (122)$$

donde para la cuadratura de tres puntos de Gauss-Legendre para  $s \in [0, 1]$ , las posiciones y pesos son

$$s_{1,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{10}, \quad s_2 = \frac{1}{2}, \quad (123)$$

$$w_{1,3} = \frac{5}{18}, \quad w_2 = \frac{8}{18}. \quad (124)$$

Para el caso de las ecuaciones de Saint Venant se tiene, como se explicó en la sección 3, que

$$A = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{pmatrix}. \quad (125)$$

### 8.3. Ejemplo con esquema DOT

A continuación se presenta un ejemplo con el método DOT. Se considera el dominio  $[-5,5]$  con altura inicial

$$h(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (126)$$

y velocidad inicial  $u = 0$  m/s. Se considera  $g = 1$  m/s<sup>2</sup>. En la imagen se muestra la solución numérica en  $t = 2$  s con el esquema de Lax-Friedrichs (LF) con 450 elementos, y con el esquema de DOT con 150 elementos.

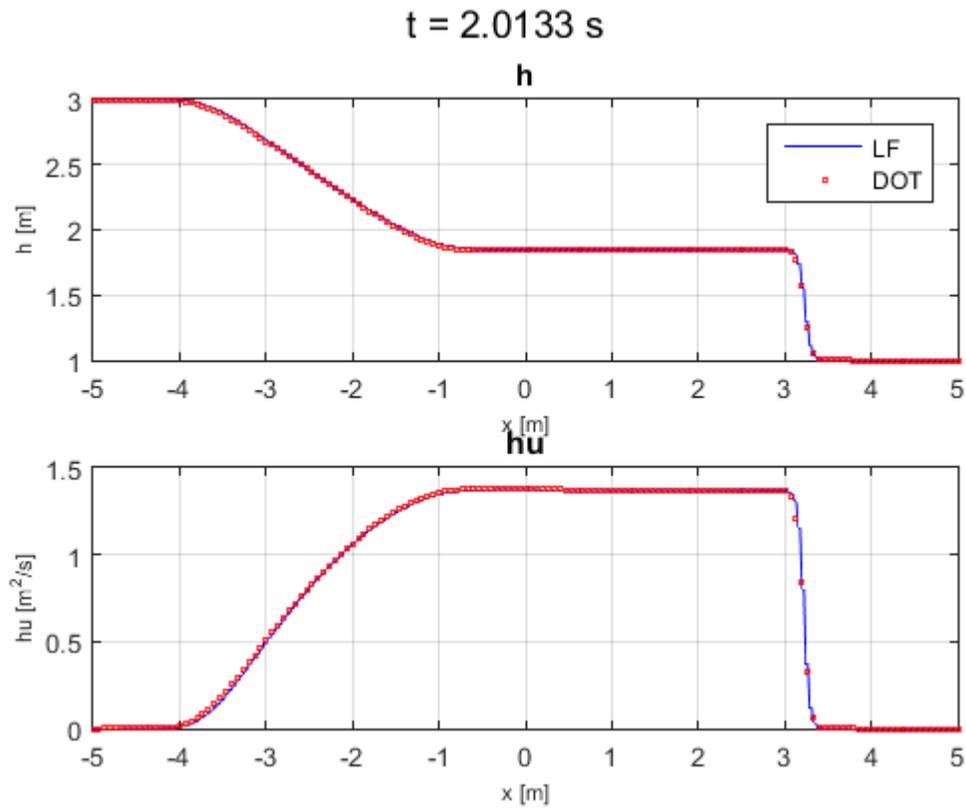


Figura 8.2: Gráficos de  $h$  y  $hu$  en  $t = 2$  s para esquema de Lax-Friedrichs y DOT.

## 8.4. Esquema de Osher no conservativo

Ahora consideraremos el esquema de Osher no conservativo para el caso con topografía. Para ello, el sistema de Saint-Venant debe ser escrito como un sistema cuasi-lineal agregando la ecuación  $\partial_t z = 0$ . Se tiene el sistema

$$\partial_t U + A(U)\partial_x U = 0, \quad (127)$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ z \end{pmatrix}, \quad (128)$$

$$A(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & gh \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (129)$$

La extensión del esquema de Osher a sistemas hiperbólicos no conservativos se muestra en [22]. El modelo numérico no conservativo de volúmenes finitos está dado por

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{D}_{i+1/2}^- - \mathcal{D}_{i-1/2}^+) \quad (130)$$

Para el caso del solucionador de Osher se tiene

$$D_{i+1/2}^\pm = \frac{1}{2} \int_0^1 (A(\Phi(s)) \pm |A(\Phi(s))|) \Phi'(s) ds \quad (131)$$

Como lo hecho en el esquema conservativo, se usa un segmento recto para el camino y se evalúa la integral mediante la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre. Así, tenemos

$$D_{i+1/2}^\pm = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^3 w_k (A(\Phi(s_k)) \pm |A(\Phi(s_k))|) \right) (U_{i+1} - U_i), \quad (132)$$

donde

$$\Phi(s_k) = U_i + s_k(U_{i+1} - U_i), \quad (133)$$

y las posiciones  $s_k$  y pesos  $w_k$  están dados en (123) y (124), respectivamente.

## 8.5. Ejemplo con esquema de Osher no conservativo

En [26] se presenta como un ejemplo un problema de Riemann donde el estado derecho es  $h_L = 3$ ,  $u_L = 0.5$  y  $z_L = 0$ , y el estado izquierdo es  $h_R = 2$ ,  $u_R = 2.07$  y  $z_R = 0.5$ , con el dominio  $x \in [-10, 10]$  y con la posición inicial de la discontinuidad en  $x_c = 0$ . Se toma  $g = 9.81$  y se realizó una simulación con 250 elementos hasta el tiempo  $t = 1$  s. En la imagen se muestra la solución con el esquema de Osher no conservativo.

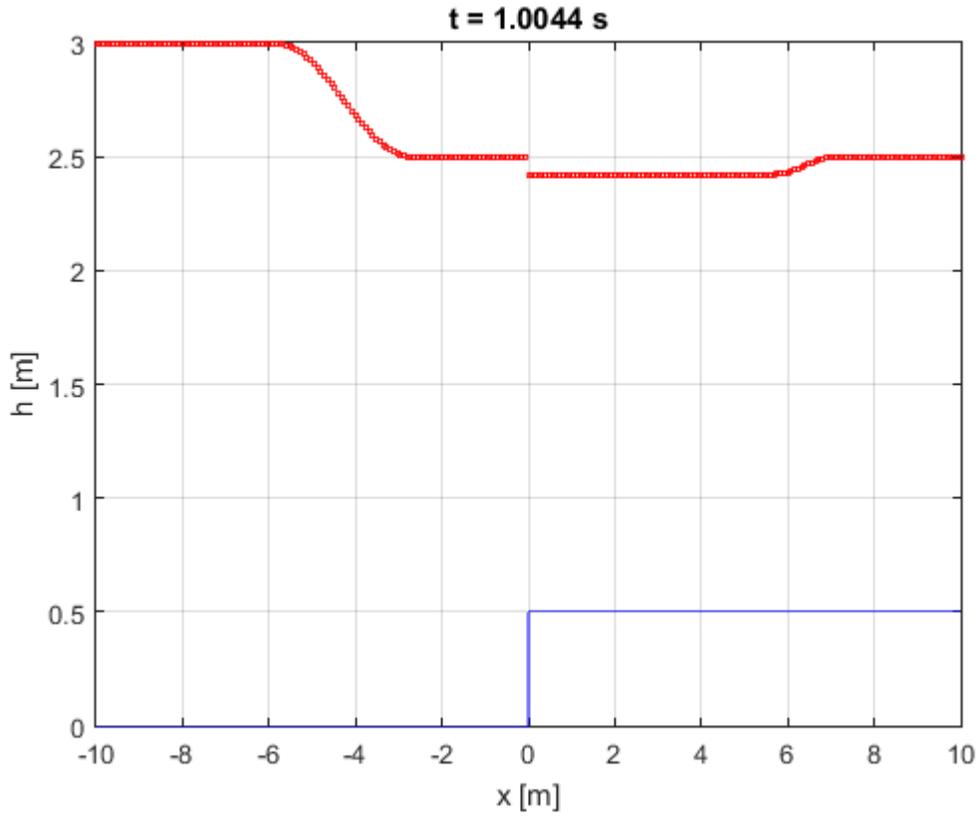


Figura 8.3: Gráfico de  $h + z$  en  $t = 1$  s con esquema de Osher no conservativo. Topografía en azul y altura de fluido en rojo.

### 8.6. Esquema no conservativo en coordenadas globales

Se considera el sistema en coordenadas globales visto antes con la ecuación diferencial  $\partial_t z_b = 0$ , para incluir la topografía en el modelo numérico. Se tiene

$$\begin{cases} \partial_t h_v + \partial_x(h_v u_x) = 0, \\ \partial_t(h_v u_x) + \partial_x\left(h_v u_x^2 + g \cos^2 \theta \frac{h_v^2}{2}\right) + g \cos^2 \theta h_v \partial_x z_b = -\frac{\tau_0}{\rho} \frac{s_x^\tau}{\cos \theta}, \\ \partial_t z_b = 0. \end{cases} \quad (134)$$

Este sistema puede reescribirse como

$$\partial_t U + \partial_x F + \Gamma \partial_t z_b = S, \quad (135)$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} h_v \\ h_v u_x \\ z_b \end{pmatrix}, \quad (136)$$

$$F = \begin{pmatrix} h_v u_x \\ h_v u_x^2 + g \cos^2 \theta \frac{h_v^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (137)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ g \cos^2 \theta h_v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (138)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\tau_0}{\rho} \frac{s_x^\tau}{\cos \theta} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (139)$$

La parte homogénea de este sistema es hiperbólica. Se tiene la matriz Jacobiana  $A$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + g h \cos^2 \theta & 2u & g h \cos^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (140)$$

Se aplica entonces el método de Osher no conservativo usando esta matriz para el cálculo del flujo.

## 8.7. El término fuente de la fricción

Una vez que se obtiene la solución numérica del sistema sin fricción, que denotaremos como  $\hat{U} = (\hat{h}_v, \hat{h}_v \hat{u}_x, \hat{z}_b)$ , se corrige aplicando el término fuente  $S$  para el paso temporal. Se considera el problema de valor inicial en el paso  $\Delta t$  dado por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U_i = S_i, \\ U_i(0) = \hat{U}_i. \end{cases} \quad (141)$$

Se usa el método de Euler implícito, y se tiene

$$U_i^{n+1} = \hat{U}_i + \Delta t S_i^{n+1}, \quad (142)$$

donde  $U_i^{n+1}$  es el valor que buscamos para el siguiente paso temporal. La fricción de Voellmy-Salm tiene dos partes: la parte de Coulomb  $(S_i^{n+1})_\mu$  y la parte turbulenta  $(S_i^{n+1})_\xi$ , que depende de la velocidad. Se puede escribir el sistema como

$$U_i^{n+1} - \Delta t (S_i^{n+1})_\xi = \hat{U}_i + \Delta t (S_i^{n+1})_\mu. \quad (143)$$

La primera componente del vector fuente  $S$  es cero, por lo tanto, se tiene que  $(h_v)_i^{n+1} = \hat{h}_v$ . Así, conocemos  $(S_i^{n+1})_\mu$ . Por otro lado,  $(S_i^{n+1})_\xi$  es desconocida, pues no sabemos el valor de  $(u_x)_i$  en el tiempo  $n + 1$ . Así, en la ecuación anterior, el lado izquierdo tiene la velocidad desconocida y el lado derecho contiene

valores conocidos. Obviemos los índices espaciales y temporales, y sea  $u_x$  la velocidad que buscamos (en el tiempo  $n + 1$  para el elemento  $i$ ). Se tiene

$$(S_i^{n+1})_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu g \hat{h}_v \cos^2 \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (144)$$

$$(S_i^{n+1})_\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \frac{u_x^2}{\xi \cos^2 \theta} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (145)$$

Como el resto de las componentes son cero, sólo se debe considerar la segunda ecuación. Se tiene

$$\hat{h}_v u_x + \Delta t \frac{g u_x^2}{\xi \cos^2 \theta} = \hat{h}_v \hat{u}_x - \Delta t \mu g \hat{h}_v \cos^2 \theta. \quad (146)$$

Se tiene una ecuación no lineal cuya incógnita es  $u_x$ . Para resolverlo se debe distinguir el caso en que el flujo se detiene y el caso en que no.

- Si  $|\hat{h}_v \hat{u}_x| \leq \Delta t \mu g \hat{h}_v \cos^2 \theta$ , entonces la velocidad en el tiempo  $n + 1$  es cero.
- En otro caso, se resuelve la ecuación con el método de Newton-Raphson usando como valor inicial la velocidad en el tiempo anterior  $u_x^n$ .

## 8.8. Ejemplo en coordenadas globales

A continuación se trabaja con un ejemplo extraído de [42]. Se testea el método con esquema de reconstrucción hidrostática usando las ecuaciones en coordenadas globales del sistema (112). El test realizado consiste en un canal derecho con una pendiente constante y un prisma de nieve con altura constante. El canal es de 400 m con una pendiente constante de  $15^\circ$ . La nieve ocupa un largo horizontal de 180 m con una altura normal  $h_0 = 1$  m y su borde superior se encuentra 40 m bajando el punto superior del canal. Los parámetros físicos son  $\mu = 0.23$  y  $\xi = 2000$ . En la primera imagen se observa la topografía y el perfil de nieve (graficando  $z + 10h$  para que sea visible). En la otra imagen se ve la simulación en  $t = 20$  s con el esquema de reconstrucción hidrostática con las ecuaciones en coordenadas globales.

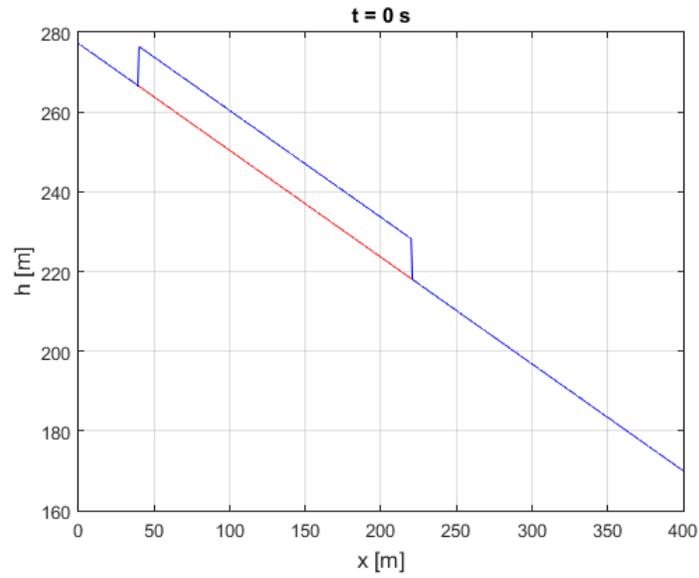


Figura 8.4: Altura inicial. Topografía  $z$  en rojo. Altura de fluido en azul ( $z + 10h$  para que sea visible).

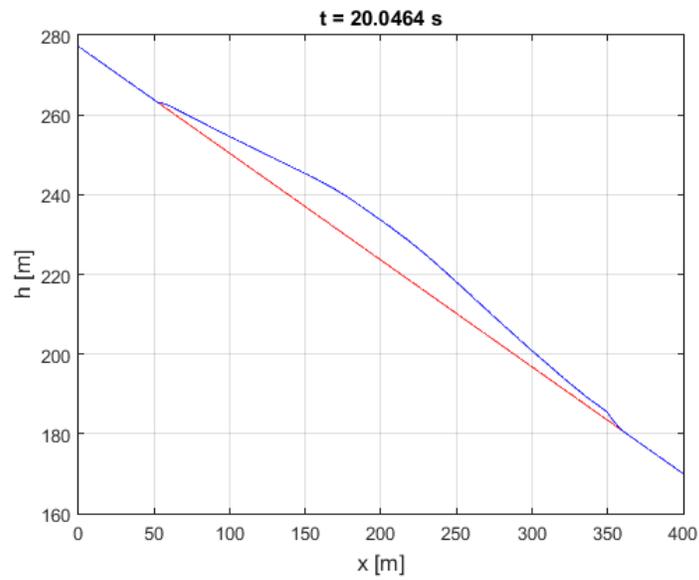


Figura 8.5: Simulación en  $t = 20$  s. Topografía  $z$  en rojo. Altura de fluido en azul ( $z + 10h$  para que sea visible).

## 9. Modelo bidimensional en coordenadas globales

El sistema de ecuaciones diferenciales para el modelo bidimensional está dado por

$$\begin{cases} \partial_t h_v + \partial_x(h_v u_x) + \partial_y(h_v u_y) = 0, \\ \partial_t(h_v u_x) + \partial_x\left(h_v u_x^2 + g \cos^2 \theta \frac{h_v^2}{2}\right) + \partial_y(h_v u_x u_y) + g \cos^2 \theta h_v \partial_x z_b = -\frac{\tau_0}{\rho} \frac{s_x^\tau}{\cos \theta}, \\ \partial_t(h_v u_y) + \partial_x(h_v u_x u_y) + \partial_y\left(h_v u_y^2 + g \cos^2 \theta \frac{h_v^2}{2}\right) + g \cos^2 \theta h_v \partial_x z_b = -\frac{\tau_0}{\rho} \frac{s_y^\tau}{\cos \theta}. \end{cases} \quad (147)$$

La derivación de estas ecuaciones se presenta en [42]. De (115) y (116), el sistema queda como

$$\begin{cases} \partial_t h_v + \partial_x(h_v u_x) + \partial_y(h_v u_y) = 0, \\ \partial_t(h_v u_x) + \partial_x\left(h_v u_x^2 + g \cos^2 \theta \frac{h_v^2}{2}\right) + \partial_y(h_v u_x u_y) + g \cos^2 \theta h_v \partial_x z_b = \frac{u_x}{|u|} \left( \mu g h_v \cos^2 \theta + g \left( \frac{u_x^2 + u_y^2}{\xi \cos^2(\theta)} \right) \right), \\ \partial_t(h_v u_y) + \partial_x(h_v u_x u_y) + \partial_y\left(h_v u_y^2 + g \cos^2 \theta \frac{h_v^2}{2}\right) + g \cos^2 \theta h_v \partial_x z_b = \frac{u_y}{|u|} \left( \mu g h_v \cos^2 \theta + g \left( \frac{u_x^2 + u_y^2}{\xi \cos^2(\theta)} \right) \right). \end{cases} \quad (148)$$

Podemos reescribir este sistema en la forma del modelo de avalanchas (1) de la siguiente manera

$$\begin{cases} \partial_t h_v + \partial_x(h_v u_x) + \partial_y(h_v u_y) = 0, \\ \partial_t(h_v u_x) + \partial_x\left(h_v u_x^2 + \tilde{g} \frac{h_v^2}{2}\right) + \partial_y(h_v u_x u_y) + \tilde{g} h_v \partial_x z_b = \frac{u_x}{|u|} \left( \mu \tilde{g} h_v + \frac{g}{\xi} (u_x^2 + u_y^2) \right), \\ \partial_t(h_v u_y) + \partial_x(h_v u_x u_y) + \partial_y\left(h_v u_y^2 + \tilde{g} \frac{h_v^2}{2}\right) + \tilde{g} h_v \partial_x z_b = \frac{u_y}{|u|} \left( \mu \tilde{g} h_v + \frac{g}{\xi} (u_x^2 + u_y^2) \right). \end{cases} \quad (149)$$

en donde  $\tilde{g} = g \cos^2 \theta$  y  $\tilde{\xi} = \xi \cos^2 \theta$ . De esta forma podemos emplear el método de reconstrucción hidrostática para este sistema con los nuevos parámetros  $\tilde{g}$  y  $\tilde{\xi}$ . Recordemos que este método permite incorporar la fricción de Coulomb. Para el caso de la fricción turbulenta, ésta se agrega por medio de splitting, y para hacerlo se usa el parámetro original  $g$ , como se puede observar del sistema de ecuaciones.

### 9.1. Avalancha Rigopiano con modelo en coordenadas globales

Ahora se presenta una simulación de la avalancha de Rigopiano empleando el sistema de ecuaciones en coordenadas globales (sistema en (147)). El método numérico es volúmenes finitos con esquema de reconstrucción hidrostática, modificando los parámetros para el nuevo modelo físico, como se explica en la sección anterior. Se trabajó con el dominio completo de la región de la avalancha, topografía que se muestra en la figura 7.9. Como condición inicial se considera una pendiente constante con una altura máxima de 2 m que va a 0 m en el isonivel  $z = 1600$  m. Como datos se usó  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>,  $\mu = 0.15$ ,  $k = g/\xi = 0.002$  y un ángulo de pendiente  $\theta = 30^\circ$ .

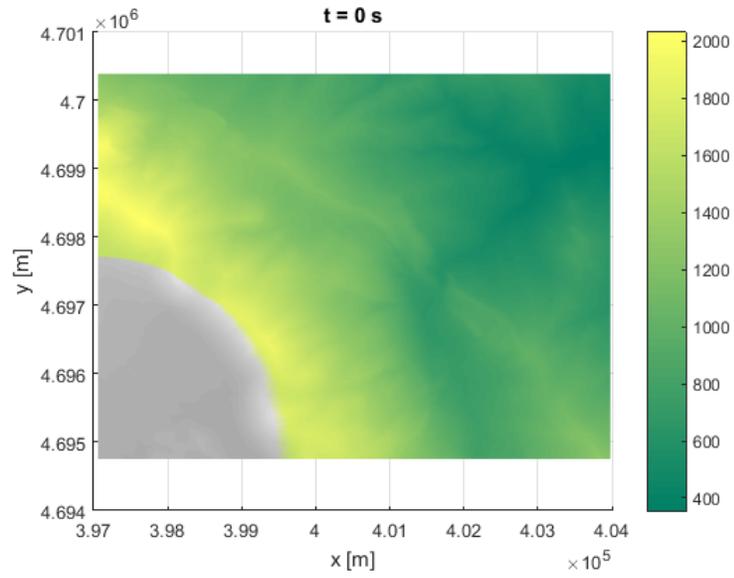


Figura 9.1: Simulación en  $t = 0$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

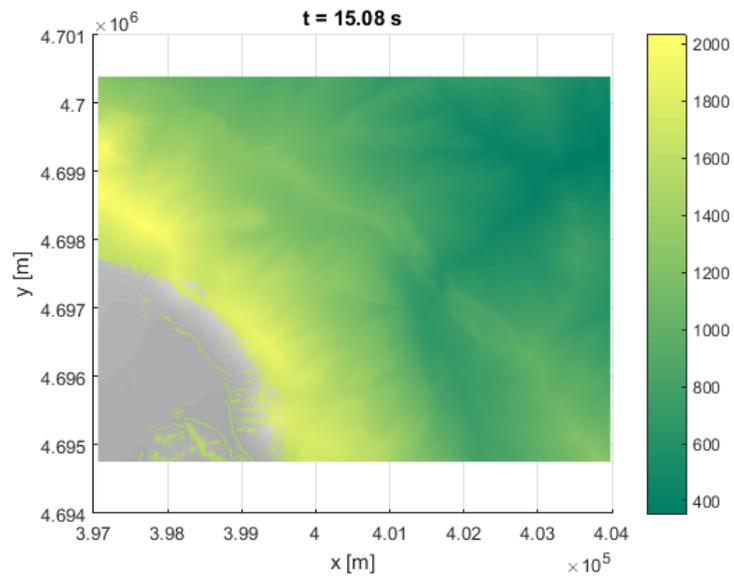


Figura 9.2: Simulación en  $t = 15$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

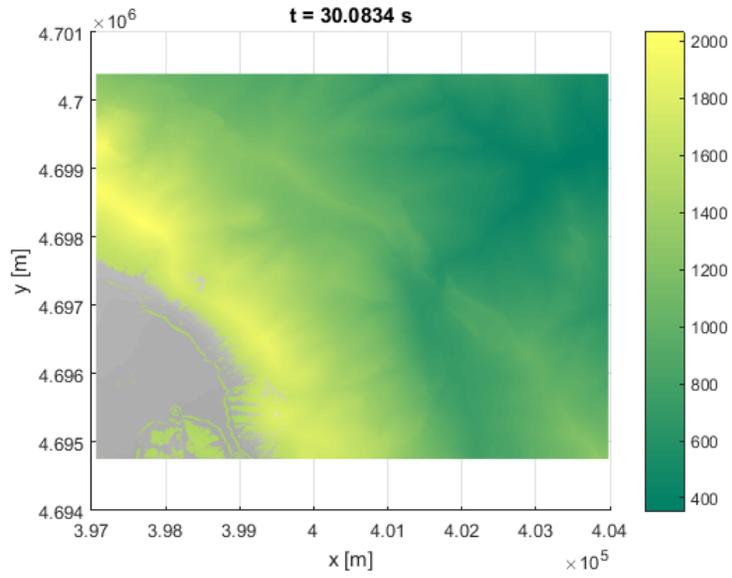


Figura 9.3: Simulación en  $t = 30$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

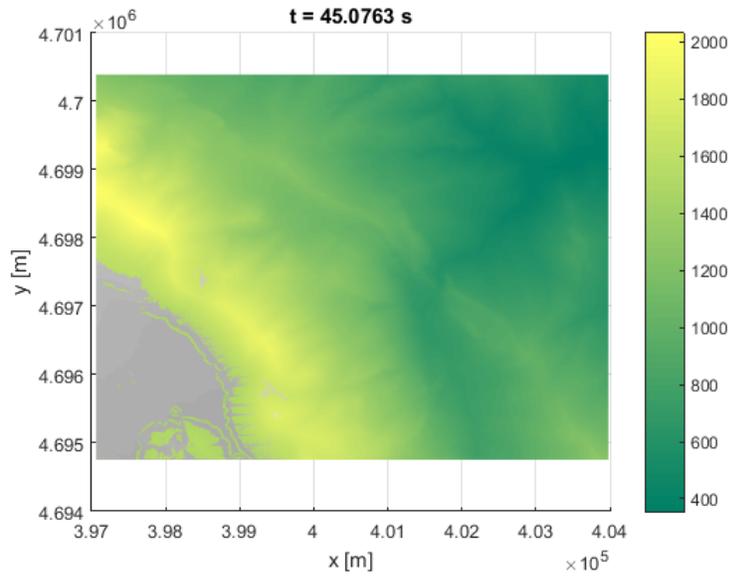


Figura 9.4: Simulación en  $t = 45$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

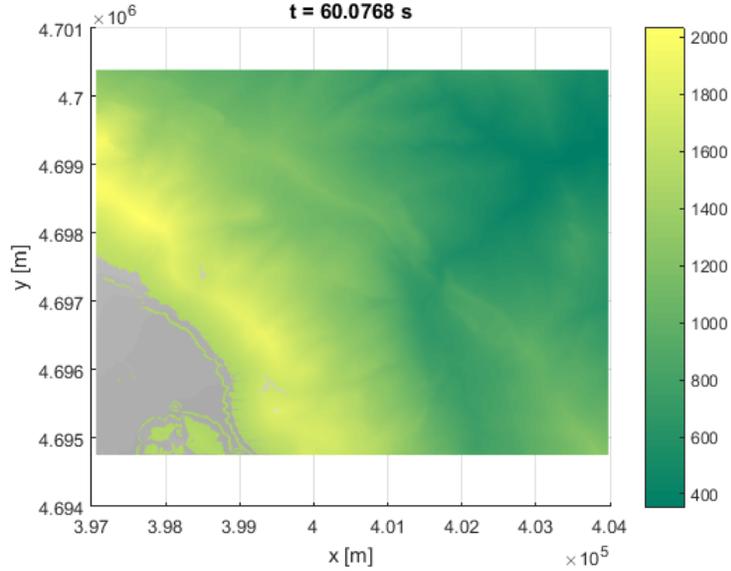


Figura 9.5: Simulación en  $t = 60$  s. La nieve se muestra en escala de grises y la topografía en la escala de la derecha. La escala se encuentra en m.

En esta sección, vimos que el modelo físico con un sistema de coordenadas globales es más cercano a la situación real. También mostramos el método de Osher como un esquema alternativo para tratar el problema. En las siguientes secciones veremos formas en que mejorar el modelo numérico, considerando dos opciones: emplear el flujo upwind HLLC, y hacer una extensión de segundo orden.

## 10. Flujo HLLC

En los ejemplos empleados hasta ahora se ha usado el flujo de Lax-Friedrichs en el esquema de reconstrucción hidrostática. Para mejorar las simulaciones hechas se puede trabajar con otra forma de calcular el flujo bajo el mismo esquema. Veremos ahora el solucionador de Riemann HLLC, que puede entregar mejores resultados para el método. Lo que se muestra a continuación se basa en lo presentado en [21]. El flujo de este esquema es upwind. Recordemos que estamos trabajando con el siguiente esquema

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n). \quad (150)$$

El flujo con HLLC está dado por

$$F^{HLLC} = \begin{cases} F_l, & \text{si } 0 \leq S_l, \\ F_l^*, & \text{si } S_l \leq 0 \leq S_*, \\ F_r^*, & \text{si } S_* \leq 0 \leq S_r, \\ F_r, & \text{si } S_r \leq 0, \end{cases} \quad (151)$$

donde  $S_l$ ,  $S_r$  y  $S_*$  son estimaciones de las velocidades de onda,  $F_l$  y  $F_r$  son los flujos a izquierda y derecha, respectivamente, y

$$F_l^* = F_l + S_l(U_l^* - U_l), \quad (152)$$

$$F_r^* = F_r + S_r(U_r^* - U_r). \quad (153)$$

Para el caso de Saint-Venant que nos interesa, se usa para los estados  $U_l^*$  y  $U_r^*$

$$U_l^* = h_l \begin{pmatrix} \frac{S_l - u_l}{S_l - S_*} \\ 1 \\ v_k \end{pmatrix}, \quad (154)$$

$$U_r^* = h_r \begin{pmatrix} \frac{S_r - u_r}{S_r - S_*} \\ 1 \\ v_k \end{pmatrix}. \quad (155)$$

Se necesitan estimaciones de las velocidades de onda. No es recomendable usar los valores propios del sistema para estas estimaciones. Se puede usar información de otros solucionadores de Riemann. Definimos

$$a_l = \sqrt{gh_l}, \quad a_r = \sqrt{gh_r}. \quad (156)$$

Entonces, fijamos

$$S_l = u_l - a_l q_l, \quad S_* = u_*, \quad S_r = u_r - a_r q_r, \quad (157)$$

$$q_k = \begin{cases} 1, & \text{si } h_* \leq h_k, \\ \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{h_* + h_k}{h_k^2} \right)}, & \text{si } h_* \geq h_k, \end{cases} \quad (158)$$

con  $k = l, r$ . Para valores de  $h_*$  y  $u_*$  se puede usar

$$h_s = \frac{1}{2}(h_l + h_r) - \frac{1}{4}(u_r - u_l) \left( \frac{h_l + h_r}{a_l + a_r} \right), \quad (159)$$

$$u_s = \frac{1}{2}(u_l + u_r) - \frac{1}{4}(h_r - h_l) \left( \frac{a_l + a_r}{h_l + h_r} \right). \quad (160)$$

## 10.1. Ejemplos para solucionador de Riemann HLLC

A continuación se presenta el segundo ejemplo de la sección 4.6, que fue extraído de [11]. Recordemos que el intervalo del dominio es  $[0,40]$  y se usó  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . La condición inicial es  $h = 4 \text{ m}$  y  $u = 10/4 \text{ m/s}$ . La topografía  $z$  está dada por

$$z(x) = \begin{cases} 0.48 \left(1 - \left(\frac{x-20}{40}\right)^2\right) & \text{si } |x - 20| \leq 4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (161)$$

Se presenta el nivel del fluido a  $t = 1 \text{ s}$  con el flujo de Lax-Friedrichs y con HLLC, usando para ambos casos 50 elementos. Se presenta como solución de referencia el resultado numérico con el flujo de Lax-Friedrichs con 3000 elementos.

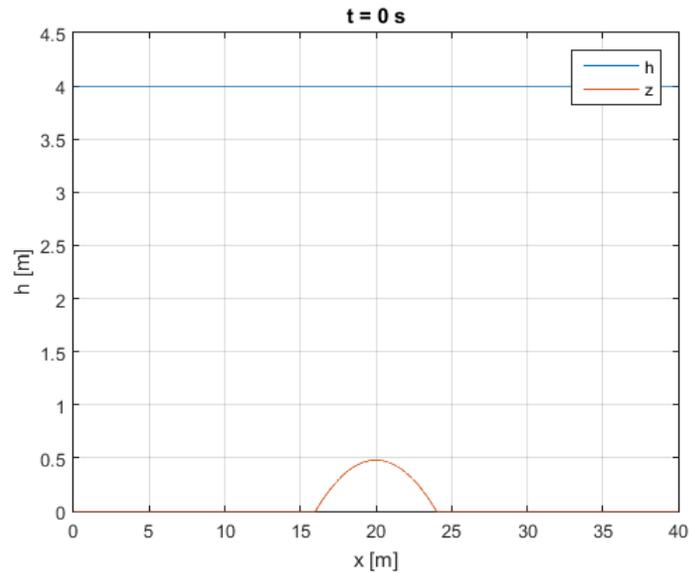


Figura 10.1: Altura de fluido inicial  $h$  y topografía  $z$ .

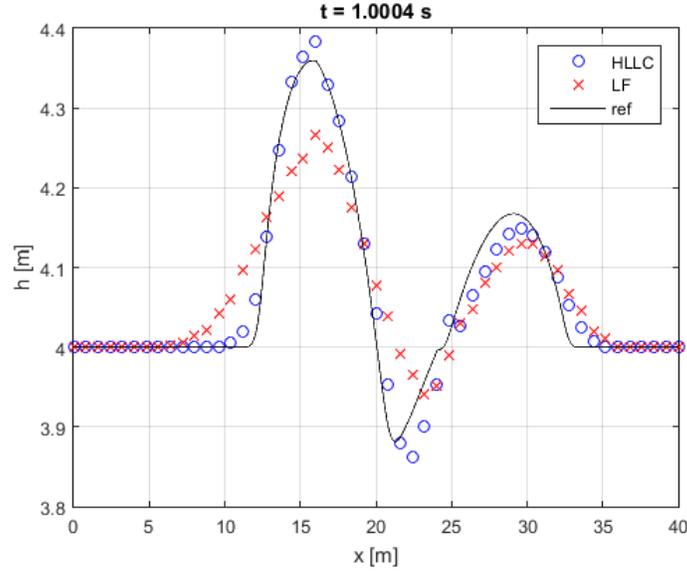


Figura 10.2: Nivel del fluido a  $t = 1$  s. Solución de referencia con 3000 elementos, solución de comparación Lax-Friedrich y HLLC hecha con 50 elementos.

También se presentat el caso bidimensional sin fricción de la sección 6 con el flujo HLLC, empleando 80000 elementos. Este ejemplo se encuentra en [18]. El dominio es  $[0, 2] \times [0, 1]$  y se usó  $g = 1 \text{ m/s}^2$ . Las condiciones iniciales son

$$w(x, y, 0) = 1, \quad u(x, y, 0) = 0.3, \quad v(x, y, 0) = 0, \quad (162)$$

con  $w = z + h$ . La topografía  $z$  es

$$z(x, y) = 0.5 \exp(-25(x - 1)^2 - 50(y - 1)^2). \quad (163)$$

En la primera imagen se muestra la topografía y el nivel de fluido inicial. En la segunda imagen se muestra la simulación del nivel del fluido en  $t = 0.07$  s.

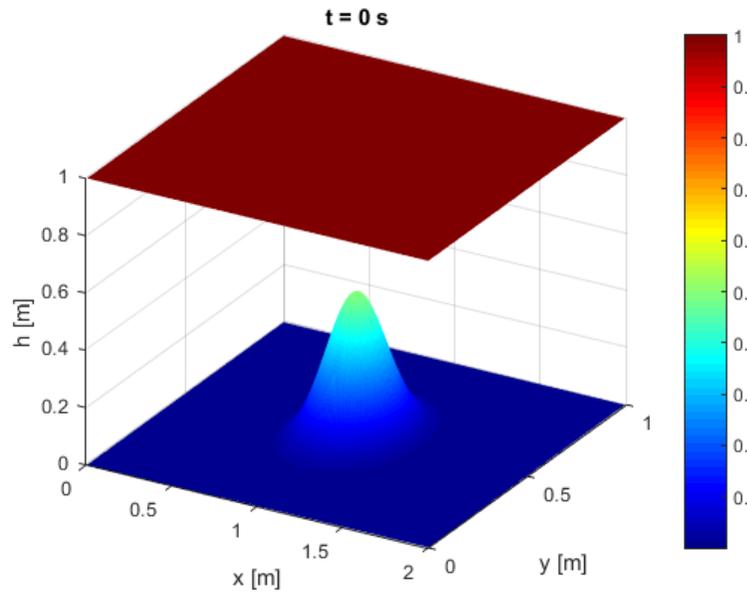


Figura 10.3: Condición inicial de la altura y topografía. Escala en  $m$ .

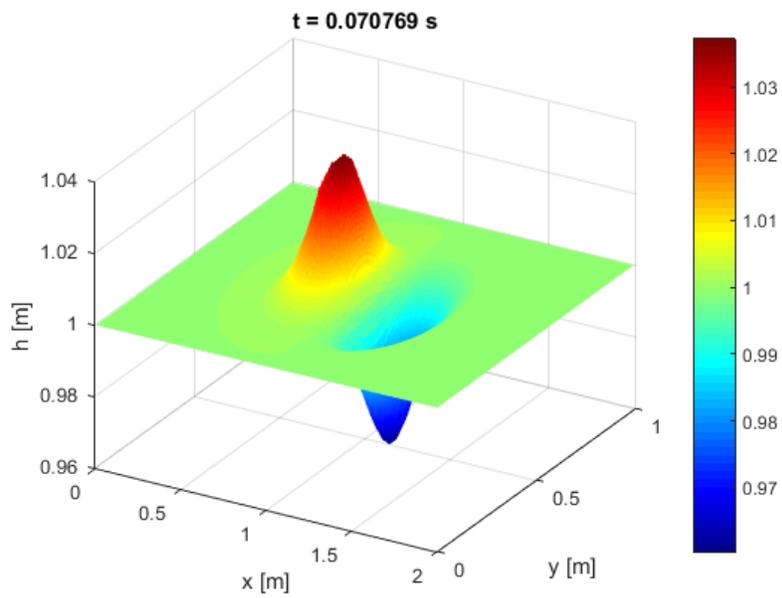


Figura 10.4: Simulación altura con HLLC para  $t = 0.07$  s. Escala en  $m$ .

## 11. Extensión a segundo orden

Otra forma de obtener mejores resultados en las soluciones numéricas es usar un esquema bien balanceado de segundo orden. El método general para una dimensión entregado a continuación se deriva de [11]. Se define una reconstrucción de segundo orden como un operador que a cada valor  $(U_i, Z_i) = (h_i, h_i u_i, Z_i)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , le asocia los valores  $(U_{i+1/2-}, Z_{i+1/2-})$  y  $(U_{i+1/2+}, Z_{i+1/2+})$  y cumple que

$$U_i = \frac{U_{i-1/2+} + U_{i+1/2-}}{2}, \quad (164)$$

y si para una función suave  $U(x)$  se tiene

$$U_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{C_i} U(x) dx, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (165)$$

entonces se tiene que

$$U_{i+1/2-} = U(x_{i+1/2}) + \mathcal{O}(H^2), \quad (166)$$

$$U_{i+1/2+} = U(x_{i+1/2}) + \mathcal{O}(H^2), \quad (167)$$

donde  $H = \sup_i \Delta x_i$ . Así, se puede definir un modelo de segundo orden de la siguiente forma

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (F_{i+1/2-} - F_{i-1/2+} - \delta F_i), \quad (168)$$

con

$$F_{i+1/2-} = F_l(U_{i+1/2-}^n, U_{i+1/2+}^n, Z_{i+1/2-}^n, Z_{i+1/2+}^n), \quad (169)$$

$$F_{i+1/2+} = F_r(U_{i+1/2-}^n, U_{i+1/2+}^n, Z_{i+1/2-}^n, Z_{i+1/2+}^n), \quad (170)$$

$$\delta F_i = F_c(U_{i-1/2+}^n, U_{i+1/2-}^n, Z_{i-1/2+}^n, Z_{i+1/2-}^n), \quad (171)$$

donde  $F_c$  es el flujo centrado. Para las ecuaciones de Saint-Venant se puede usar la siguiente reconstrucción de segundo orden. Se denotan los valores reconstruidos como  $U_{i+1/2\pm} = (h_{i+1/2\pm}, h_{i+1/2\pm} u_{i+1/2\pm})$ . Entonces, se tiene

$$h_{i-1/2+} = h_i - \frac{\Delta x_i}{2} Dh_i, \quad (172)$$

$$h_{i+1/2-} = h_i + \frac{\Delta x_i}{2} Dh_i, \quad (173)$$

$$u_{i-1/2+} = u_i - \frac{h_{i+1/2-} - h_i}{h_i} \frac{\Delta x_i}{2} Du_i, \quad (174)$$

$$u_{i+1/2-} = u_i - \frac{h_{i-1/2+} - h_i}{h_i} \frac{\Delta x_i}{2} Du_i, \quad (175)$$

donde las pendientes  $Dh_i$  y  $Du_i$  son la reconstrucción minmod dada por

$$DU_i = \text{minmod} \left( \frac{U_i - U_{i-1}}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)/2}, \frac{U_{i+1} - U_i}{(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})/2} \right), \quad (176)$$

donde

$$\text{minmod}(x, y) = \begin{cases} \min(x, y), & \text{si } x, y \geq 0, \\ \max(x, y), & \text{si } x, y \leq 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (177)$$

Para  $Z_i$  se realiza reconstrucción minmod sobre  $\zeta_i = gh_i + Z_i$ , obteniéndose  $\zeta_{i+1/2\pm}$ . Luego, se tiene

$$Z_{i+1/2\pm} = \zeta_{i+1/2\pm} - gh_{i+1/2\pm}. \quad (178)$$

Ahora, veamos la definición del flujo centrado  $F_c$ . Se puede usar

$$F_c(F_l, F_r, \Delta Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -h^* \Delta Z \end{pmatrix}, \quad (179)$$

donde

$$h^* = \frac{h_l + h_r}{2}. \quad (180)$$

Para mantener la aproximación de segundo orden en el tiempo, se puede usar el método de Heun [11]. Podemos reescribir el sistema de (168) de la siguiente forma

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \Phi(U^n). \quad (181)$$

El esquema de segundo orden en el tiempo estará dado por

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{n+1} &= U^n + \Delta t \Phi(U^n) \\ \tilde{U}^{n+2} &= \tilde{U}^{n+1} + \Delta t \Phi(\tilde{U}^{n+1}) \\ \tilde{U}^{n+2} &= \frac{U^n + \tilde{U}^{n+2}}{2} \end{aligned} \quad (182)$$

Para que el esquema sea de segundo orden tanto en espacio como tiempo, el flujo numérico no debe depender en  $\Delta t$ . Para los ejemplos de la siguiente sección, emplearemos el flujo numérico de Rusanov, dado por

$$F^{\text{Rus}}(U_l, U_r) = \frac{1}{2}(F(U_l) + F(U_r) - s(U_r - U_l)), \quad (183)$$

donde  $s = \max(|u_l| + \sqrt{gh_l}, |u_r| + \sqrt{gh_r})$  [21].

## 11.1. Ejemplo numérico

Tratamos el ejemplo unidimensional de la sección 9.1 para comparar el esquema de primer orden con el de segundo orden. Para ambos casos se muestra la solución numérica con 50 elementos para  $t = 1$  s. Se presenta como solución de referencia el resultado con el esquema de primer orden hecho con 3000 elementos.

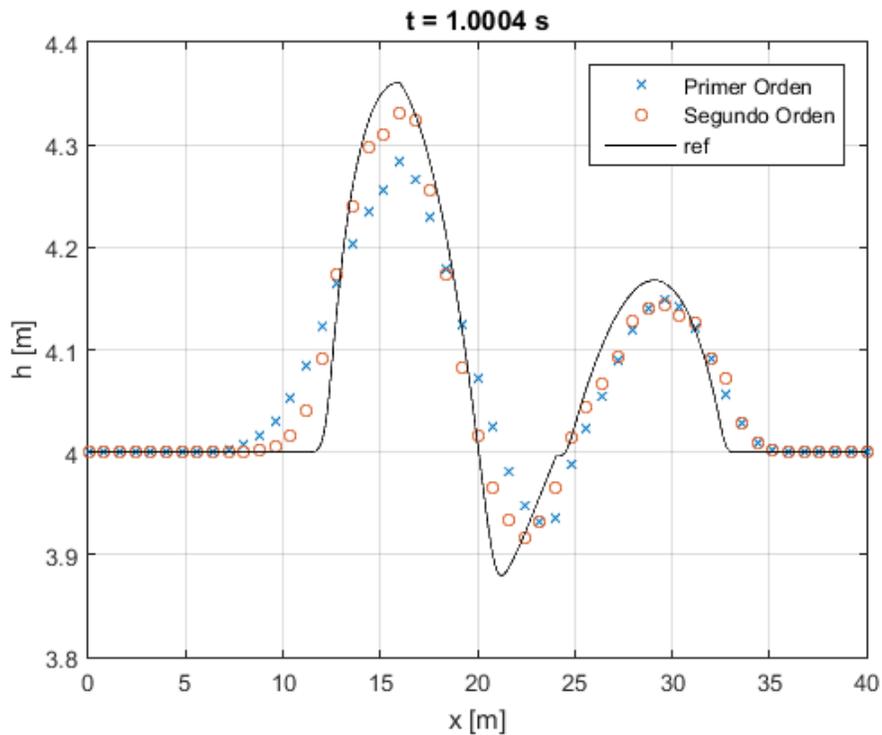


Figura 11.1: Nivel de fluido en  $t = 1$  s. La solución de referencia se realizó con 3000 elementos. Soluciones numéricas de primer y segundo orden fueron hechas con 50 elementos.

A continuación se presenta otro ejemplo de [11]. El dominio es  $[0,25]$  y  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. Los datos iniciales son  $h = 0.33$  m y  $u = 0.18/0.33$  m/s. La topografía es

$$z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(1 - (x - 10)^2) & \text{si } 8 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (184)$$

El tiempo final  $t = 200$  s. Para la solución de referencia se usaron 500 elementos. Para las soluciones numéricas del esquema de primer orden y de segundo orden se usaron 50 elementos.

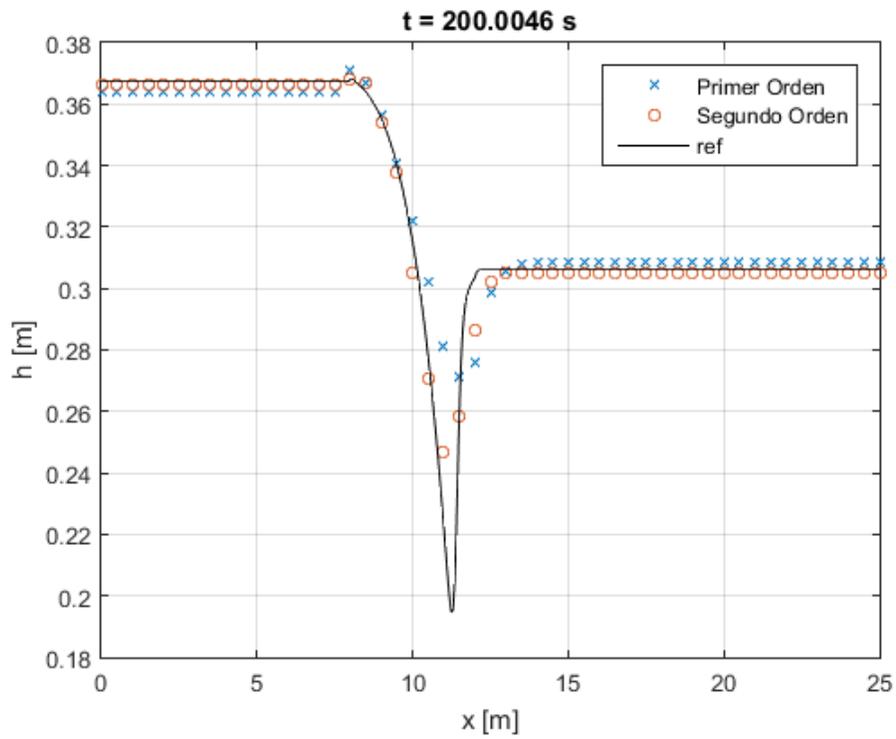


Figura 11.2: Nivel de fluido en  $t = 200$  s. La solución de referencia se realizó con 500 elementos. Soluciones numéricas de primer y segundo orden fueron hechas con 50 elementos.

## 12. Conclusión

Chile es un país montañoso y por lo tanto se enfrenta a desastres de avalanchas. Sin embargo, no existe un programa oficial que se encargue de entregar alertas de avalanchas y existen vacíos en la prevención de los efectos de estos eventos [17]. Es por esto que creemos que es muy importante construir herramientas numéricas para simular el flujo de avalanchas. Gracias a este tipo de instrumentos, se puede determinar el riesgo de ciertas zonas expuestas y tomar decisiones preventivas para disminuir los daños.

En este trabajo se estudiaron modelos de avalanchas por medio del método de volúmenes finitos con esquemas bien balanceados. Se trabajó con las ecuaciones de Saint-Venant con reología de Voelmy-Salm, que incluye como términos fuente la topografía del terreno y la fricción. Se utilizó un esquema numérico no conservativo con reconstrucción hidrostática.

Primero se estudió este modelo numérico en una dimensión y en dos dimensiones, sin considerar la fricción. El esquema es bien balanceado, consistente y estable. Se probó este método para distintos ejemplos y se mostraron los resultados, tanto para el caso unidimensional como el bidimensional.

Para la fricción, se tuvo que considerar su efecto en dos partes. La fricción de Coulomb puede incorporarse al esquema no conservativo. Para la fricción turbulenta, se desarrolló un esquema de splitting para asegurar la estabilidad del modelo. El método fue testeado con los ejemplos desarrollados en [27], con un caso unidimensional con pendiente constante y un caso bidimensional con topografía de pendiente suave.

Finalmente, se analizó el caso de la avalancha de Rigopiano, Italia, ocurrida el 2017. Con los datos de la topografía, supuestos de las condiciones iniciales y estimaciones de los parámetros físicos se realizaron simulaciones de la avalancha en una área reducida de la región. Se observó el efecto de la fricción en el modelo, testeando el método numérico para tres casos: sin fricción, con fricción de Coulomb pero sin fricción turbulenta, y con la fricción total. Se descubrió que para el esquema numérico el efecto de la turbulencia no era perceptible, a menos que se modificará el valor del parámetro de fricción turbulenta.

En casos de avalanchas el ángulo de pendiente es muy grande, por lo que otro tipo modelo es necesario para encontrar resultados más precisos. Para explorar otra alternativa, se trabajó con un modelo en coordenadas globales. Se trabajó con un esquema de Osher en una dimensión para este sistema. También se adaptó el esquema de reconstrucción hidrostática para las ecuaciones en coordenadas globales. Este nuevo esquema fue aplicado para la avalancha de Rigopiano. En esta simulación se empleó todo el dominio y se trabajó con estimaciones más razonables para los parámetros de fricción y para la altura de nieve inicial.

Con estos cambios, se ha mejorado la precisión los resultados anteriores. Sin embargo, todavía se pueden hacer mejoras. Se puede buscar otros modelos físicos más complejos que describan de manera más realista las características del flujo de la avalancha. También, se puede trabajar con modelos numéricos más exactos, sobre todo para la inclusión de la fricción y del efecto en la velocidad por el ángulo de la pendiente.

En lo que respecta al trabajo a futuro, existen varias alternativas para continuar con lo hecho en este trabajo. Se puede extender el método de Osher en coordenadas globales para el modelo bidimensional y aplicarlo para el caso de la avalancha de Rigopiano. Se puede mejorar el orden de convergencia del esquema numérico empleado. También, se pueden hacer estimaciones de parámetros físicos y validar el modelo.

Finalmente, pueden buscarse aplicaciones para avalanchas en Chile. El cambio climático tiene un importante efecto en las condiciones de los lugares con acumulaciones de nieve. Algunas zonas pueden volverse más inseguras y pueden producirse caídas de nieve de manera más impredecible. Chile tiene que enfrentarse a este tipo de problemas. Para combatir estas situaciones, se debe trabajar con distintos métodos que ayuden a construir planes de prevención. Se debe invertir en sitios para monitorear y analizar avalanchas, así como entrenar a profesionales para el estudio de este tipo de eventos.

Creemos que el trabajo en modelos numéricos para complementar este tipo de actividades es muy importante. Si se puede construir una herramienta numérica que sea exacta y rápida en la creación de simulaciones, se podría disponer de una fuente sencilla y barata de información para posibles avalanchas. Puede ayudar en la creación de alertas de avalanchas y en la toma de medidas de prevención de daños. Aunque el trabajo en programación computacional puede tener limitaciones (tanto en el modelo físico como en el esquema numérico), creemos que es posible avanzar hacia una herramienta que pueda realizar estos objetivos. Validar este tipo de modelos con situaciones reales (en laboratorio o datos en terreno) es muy importante. También es relevante observar lo que se ha hecho en otros países que se enfrentan a desafíos similares y buscar colaboraciones en lo que sea posible. Queda mucho por lo que trabajar en esta área. Este trabajo ha sido un primer acercamiento en crear instrumentos de este tipo y estudiar simulaciones numéricas de avalanchas. Esperamos que en el futuro se avance más con estas ideas y se puedan aplicar a situaciones prácticas.

## Referencias

- [1] A. Voelmy. “On the destructive force of avalanches”. En: *Ueber die Zerstoerungskraft von Lawinen, Schweizerische Bauzeitung* (1955).
- [2] Peter D. Lax. *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*. Philadelphia: Society for Industrial y Applied Mathematics, 1973.
- [3] E. Godlewski y P. A. Raviart. *Hyperbolic systems of conservation laws*. Paris: Mathematiques y Applications, 1991.
- [4] S. B. Savage y K. Hutter. “The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. Part I: Analysis”. En: *Acta Mechanica* (1991), págs. 201-223.
- [5] B. Salm. “Flow, flow transition and runout distances of flowing avalanches”. En: *Annals of Glaciology* (1993).
- [6] J. M. N. T. Gray, M. Wieland y K. Hutter. “Gravity-driven free surface flow of granular avalanches over complex basal topography”. En: *Proc. R. Soc. Lond. A* (1999), págs. 1841-1874.
- [7] C. Dafermos. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. Berlin: Springer, 2000.
- [8] Joel H. Ferziger y Milovan Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2002.
- [9] Jurg Schweizer, J. Bruce Jamieson y Martin Schneebeili. “Snow avalanche formation”. En: *Reviews of Geophysics* (2003).
- [10] Emmanuel Audusse. “A fast and estable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows”. En: *Society for Industrial and Applied Mathematics* (2004), págs. 13-14.
- [11] Francois Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*. 1.<sup>a</sup> ed. Basel: Birkhauser Verlag, 2004.
- [12] Randall LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [13] Y. Wang, K. Hutter y S. P. Pudasaini. “The Savage-Hutter theory: A system of partial differential equations for avalanche flows of snow, debris, and mud”. En: *Plenary lecture presented at the 81st Annual GAMM Conference, March 24–28, 2003* (2004), págs. 10-15.
- [14] Departamento de Geofísica. Facultad de Ciencias. Físicas y Matemáticas Universidad de Chile. “Estudio de la variabilidad climática en Chile para el siglo XXI”. En: *dgf* (2006).
- [15] Alexander Kurganov y G. Petrova. “A Second-Order Well-Balanced Positivity Preserving Central-Upwind Scheme for the Saint-Venant System”. En: *Commun. Math. Sci.* (2007), págs. 133-160.
- [16] S. P. Pudasaini y K. Hutter. *Avalanche dynamics: dynamics of rapid flows of dense granular avalanches*. Springer Science y Business Media, 2007.
- [17] L. Ramírez y J. Mery. “Las avalanchas en Chile: efectos y sistemas de control”. En: *Revista de la Construcción* (2007).
- [18] Steve Bryson y col. “Well-Balanced Positivity Preserving Central-Upwind Scheme on Triangular Grids for the Saint-Venant System”. En: *ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis* (2008).
- [19] E.D. Fernandez-Nieto y col. “A new Savage–Hutter type model for submarine avalanches and generated tsunami”. En: *Journal of Computational Physics* (2008), págs. 7720-7754.

- [20] Valentin L. Popov. *Contact Mechanics and Friction*. Springer, 2010.
- [21] E. F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. 3.<sup>a</sup> ed. Springer, 2010.
- [22] Michael Dumbser y Eleuterio F. Toro. “A Simple Extension of the Osher Riemann Solver to Non-conservative Hyperbolic Systems”. En: *J Sci Comput.* (2011), págs. 70-88.
- [23] Ulrik S. Fjordholm, Siddhartha Mishra y Eitan Tadmor. “Well-balanced and energy stable schemes for the shallow water equations with discontinuous topography”. En: *Journal of Computational Physics* (2011).
- [24] Zhankui Liu, Jianbo Fei y Yuxin Jie. “Including rheology in three-dimensional Navier–stokes-governed dynamic model for natural avalanches”. En: *Powder Technology* (2012), págs. 406-432.
- [25] Jurg Schweizer, Perry Bartelt y Alec van Herwijnen. “Snow Avalanches”. En: *Haeberli W, Whiteman C (eds) Snow and ice-related hazards, risks, and disasters.* (2015), págs. 346-395.
- [26] Daniel Zugliani y Giorgio Rosatti. “A new Osher Riemann solver for shallow water flow over fixed or mobile bed”. En: *Sustainable Hydraulics in the Era of Global Change - Proceedings of the 4th European Congress of the IAHR, Liege, Belgium, 27-29 July.* (2016), págs. 707-713.
- [27] Mattia de’Michieli Vitturi y col. “A depth-averaged numerical flow model for pyroclastic avalanches”. En: *Geosci. Model Dev.* (2018), págs. 13-16.
- [28] Daniele Bocchiola y col. “Mapping snow avalanches hazard in poorly monitored areas. The case of Rigopiano avalanche, Apennines of Italy.” En: *Natural Hazards and Earth System Sciences* (2020).
- [29] Francois Bouchut y col. “Dilatancy in dry granular flows with a compressible  $\mu(I)$  rheology”. En: *Journal of Computational Physics* 429.2 (2020), pág. 7.
- [30] Barbara Frigo y col. “A Reverse Dynamical Investigation of the Catastrophic Wood- Snow Avalanche of 18 January 2017 at Rigopiano, Gran Sasso National Park, Italy”. En: *Int J Disaster Risk Sci* (2020).
- [31] Gloria Furdada y col. “The Avalanche of Les Fonts d’Arinsal (Andorra): An Example of a Pure Powder, Dry Snow Avalanche”. En: *Geosciences* (2020).
- [32] Dieter Issler. “The 2017 Rigopiano Avalanche—Dynamics Inferred from Field Observations”. En: *Geosciences* (2020).
- [33] Pere Oller, Jan-Thomas Fischer y Elena Muntán. “The Historic Avalanche that Destroyed the Village of Àrreu in 1803, Catalan Pyrenees”. En: *Geosciences* (2020).
- [34] Tommaso Piacentini y col. “Seismically Induced Snow Avalanches: The Central Italy Case”. En: *Frontiers in Earth Science* (2020).
- [35] Marcos Sanz-Ramos y col. “Role of friction terms in two-dimensional modelling of dense snow avalanche”. En: *Water Engineering* (2020), págs. 65-79.
- [36] Marcos Sanz-Ramos y col. “Saint Venant’s equations for dense-snow avalanche modelling”. En: *Water Engineering* (2020), págs. 65-79.
- [37] Dieter Issler y col. “Inferences on Mixed Snow Avalanches from Field Observations”. En: *Geosciences* (2021).
- [38] Kouichi Nishimura, Fabrizio Barpi y Dieter Issler. “Perspectives on Snow Avalanche Dynamics Research”. En: *Geosciences* (2021).
- [39] Manuel Olivares. *Conoce la Fundación Chilena de Avalanchas*. <https://avalanchas.org/>. 2021.

- [40] Marc Peruzzetto y col. “Topography curvature effects in thin-layer models for gravity-driven flows without bed erosion”. En: *Earth Surface, American Geophysical Union/Wiley* (2021).
- [41] Giacomo Strapazon y col. “Effects of Climate Change on Avalanche Accidents and Survival”. En: *Frontiers in Physiology* (2021).
- [42] Daniel Zugliani y Giorgio Rosatti. “TRENT2D: An accurate numerical approach to the simulation of two-dimensional dense snow avalanches in global coordinate systems”. En: *Cold Regions Science and Technology* 190 (2021).
- [43] Philippe Moreau. *Understanding avalanche forecasts*. <https://www.intersportrent.com/en/rentertainer-blog/understanding-avalanche-forecasts-and-warning-levels-14271527>. 2022.