

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
CONCEPCIÓN, CHILE



MÉTODOS DE GALERKIN DISCONTINUO PARA EL PROBLEMA DE STOKES Y
EL PROBLEMA DE HELMHOLTZ

Felipe Arnoldo Sánchez Troncoso

*Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de
Concepción para optar al Título profesional de Ingeniero Civil Matemático*

Profesores Guía: Rommel Bustinza Pariona, Tomas Barrios Faúndez

Enero 2018
Concepción, Chile

©2018, Felipe Arnoldo Sánchez Troncoso

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

Dedicado a Norma y Arnoldo

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a todas las personas e instituciones que, directa o indirectamente, hicieron posible la culminación de este proceso, en especial a mis padres Norma y Arnoldo, hermana Karina y tía Nora por su amor incondicional y apoyo durante toda mi vida, sin ustedes esto no hubiese sido posible.

Agradecer también a mi compañera de vida María Belen por apoyarme durante este largo camino, nunca dejar de confiar en mis capacidades y animarme en mis periodos mas difíciles.

A mis profesores guías Rommel Bustinza y Tomás Barrios por su dedicación, energía y consejos durante las jornadas de trabajo, como también por su paciencia en momentos difíciles, sin su apoyo no hubiese sido posible culminar este trabajo.

Agradecer también a los profesores del DIM por sus conocimientos entregados y funcionarios del DIM por hacer mas grato el tiempo de trabajo. A todos mi amigos que hicieron mas llevadero este ciclo, mención especial para Raúl, Hernan, Walter y Gabriel por esas conversaciones que ayudaban con la distracción.

Finalmente, agradecer al proyecto FONDECYT regular 1130158, cuyo investigador responsable es mi profesor guía Rommel Bustinza Pariona, y gracias al cual se financió parcialmente este trabajo.

Índice general

Agradecimientos	I
Lista de figuras	II
Lista de tablas	III
Resumen	1
Introducción	2
1. Preliminares	6
1.1. Definiciones y resultados previos	6
1.2. Dualidad, Riesz, Lax-Milgram y Babůska-Brezzi	9
1.3. Algunos espacios de Sobolev e identidades de trazas	11
1.4. El Problema de Stokes	14
1.4.1. Formulación mixta en velocidad-pseudoesfuerzo	14
1.4.2. Formulación variacional continua	15
2. Métodos Galerkin Discontinuo (DG) para el problema de Stokes	18
2.1. Definiciones y resultados previos	19
2.2. Esquema de Galerkin Discontinuo Local (LDG)	21
2.3. Un segundo esquema de Galerkin Discontinuo (DG)	27
2.3.1. Existencia y unicidad	29
2.3.2. Estimación de error a priori	33
2.4. Un esquema DG estabilizado	39
3. Implementación de un esquema LDG para el problema de Helmholtz	41
3.1. El problema de Helmholtz	41
3.2. Esquema LDG para el problema de Helmholtz	42
3.3. Un esquema DG estabilizado para el problema de Helmholtz	47
3.4. Sistema lineal de ecuaciones	48
3.5. Ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	51
3.6. Resultados numéricos	58
Conclusiones	64

Índice de figuras

3.1. Relación entre numeración local de los vértices y numeración local de los lados en el triángulo T_k	48
3.2. Gráfica solución exacta u (izquierda) y aproximada u_h (derecha) para una malla de 800 elementos (Ejemplo 1).	59
3.3. Gráfica solución exacta u (izquierda) y aproximada u_h (derecha) con $\omega = 1$ y una malla de 864 elementos (Ejemplo 2).	60
3.4. Gráfica solución exacta u (izquierda) y aproximada u_h (derecha) con $\omega = 5$ y una malla de 1350 elementos (Ejemplo 2).	61
3.5. Gráfica en escala logarítmica der error v/s Número de elementos para $w = 5$ (Ejemplo 2).	62
3.6. Gráfica en escala logarítmica der error v/s Número de elementos para $w = 10$ (Ejemplo 2).	63
3.7. Gráfica solución exacta u (izquierda) y aproximada u_h (derecha) con $\omega = 10$ y una malla de 5400 elementos (Ejemplo 2).	63

Índice de cuadros

3.1. Nodos (ξ_i, η_i) y pesos w_i de una regla de cuadratura para el elemento de referencia \hat{T} .	53
3.2. Datos para los dos ejemplos.	58
3.3. Errores y razones experimentales para el Ejemplo 1.	59
3.4. Errores y razones experimentales para el Ejemplo 2 con $\omega = 1$	60
3.5. Errores y razones experimentales para el Ejemplo 2 con $\omega = 5$	61
3.6. Errores y razones experimentales para el Ejemplo 2 con $\omega = 10$	62

Resumen

En este trabajo se presentan, analizan y/o implementan métodos de Galerkin Discontinuo para los problemas de Stokes y de Helmholtz. Comenzamos deduciendo un esquema de Galerkin Discontinuo Local (LDG) para el problema de Stokes con condiciones de contorno Dirichlet, demostrando que tiene única solución. Esto gracias a una versión de la alternativa de Fredholm en dimensión finita. Posteriormente, realizando una modificación en los flujos numéricos, se introduce un esquema de Galerkin Discontinuo (DG) para el mismo problema y se prueba que tiene única solución usando el mismo argumento antes mencionado. Adicionalmente se obtienen estimaciones de error a priori para el esquema. Luego, se introduce un término de cuadrados mínimos para así obtener un esquema DG estabilizado al cual se le garantiza existencia única de solución gracias a la teoría de Babūška-Brezzi, la cual también nos permite dar su respectiva estimación de error a priori. Finalmente, se introduce un esquema LDG para el problema de Helmholtz con condiciones de contorno mixtas y se comenta un resultado de existencia, unicidad y estimación de error a priori para el esquema LDG, obtenido en [5]. Además, introduciendo un término de cuadrados mínimos, se obtiene una formulación DG para el mismo problema, exhibiendo un resultado que garantiza la existencia única de solución como también una estimación de error a priori, el cual asegura ordenes de convergencia a partir de cierto tamaño de malla. Por este motivo, se implementa computacionalmente el esquema y se valida con dos ejemplos y varios valores de número de onda, mostrando que a medida que el número de onda crece es necesario refinar más la malla para alcanzar las estimaciones de error a priori.

Introducción

Un medio continuo (MC) es una porción de materia que puede ser un sólido, un líquido o un gas. Fijando un sistema de coordenadas en un espacio Euclideo, el MC se puede representar como un subconjunto de este espacio y describir su dinámica a través del tiempo sujeta a la acción de fuerzas de cuerpo o de superficie. Para ello, se asume la existencia de campos escalares, vectoriales y tensoriales de segundo y cuarto orden tales como densidad de masa, movimiento, fuerza, esfuerzo o tensión, velocidad, gradiente de deformación, entre otros. Por lo general estas fuerzas se relacionan entre sí mediante leyes de balances conocidas como: conservación de masa, balance de momento lineal y angular. Finalmente, considerando algunas leyes constitutivas específicas de cada MC, se deriva al estudio de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) para describir la dinámica de éste. Este análisis es conocido como Mecánica del Medio Continuo (MMC).

A modo de ejemplo, sin considerar los efectos térmicos, la descripción Euleriana de un MC relaciona comúnmente sus campos espaciales, velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$ y tensión $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ por medio de las siguientes leyes de balance:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, && \text{(Conservación de masa)} \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) &= \operatorname{div}(\mathbf{S}) + \rho \mathbf{b}, && \text{(Conservación de momentum lineal)} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}^T, && \text{(Conservación de momentum angular)}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ es el campo de fuerza externo por unidad de volumen actuando en el MC. De esta manera, se tienen trece incógnitas (componentes de los campos densidad, velocidad y tensión) y sólo siete ecuaciones que las relacionan. Para obtener las ecuaciones restantes se asumen hipótesis que definen a cada modelo constitutivo. Por ejemplo, en un fluido elástico se supone que el campo de tensión y densidad dependen de un campo escalar llamado presión $p(\mathbf{x}, t)$ tal que

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} \quad \text{y} \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \pi(p(\mathbf{x}, t)),$$

donde $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función estrictamente creciente. Estos supuestos implican que el campo de tensión está determinado por la presión y además es simétrico, cumpliéndose la ley de conservación del momentum angular de manera automática. Además, dado que π es estrictamente creciente, se puede interpretar que en un fluido elástico, bajo condiciones isotérmicas, la densidad incrementa con la presión concluyendo que los fluidos elásticos modelan fluidos compresibles. Considerando estos supuestos en las leyes de conservación restantes y considerando fuerzas que generan pequeños desplazamientos

en el fluido, que inicialmente tiene una densidad (y presión) uniforme $\bar{\rho} = \pi(\bar{p})$ (con $\bar{p} = p(x, 0)$), se tiene que los campos de presión p y velocidad \mathbf{v} del fluido deben satisfacer:

$$\begin{aligned}\bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \bar{\rho} \operatorname{div}(\mathbf{v}) &= 0,\end{aligned}$$

donde $c > 0$ es una constante que depende de $\pi'(\bar{p})$. Aplicando el operador divergencia a la primera ecuación y derivando con respecto al tiempo la segunda, se puede eliminar la velocidad, obteniendo la ecuación de ondas para la presión

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = -f,$$

con $f = c^2 \operatorname{div}(\mathbf{f})$. De lo anterior la constante c es interpretada como la velocidad del sonido en el medio a presión \bar{p} . Finalmente, buscando soluciones armónicas $p(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) \cos(\phi t)$, con ϕ frecuencia de la onda, se tiene la ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + \omega^2 u = f, \quad (1)$$

con $\omega = \frac{\phi}{c}$ llamado número de onda. Esta ecuación, también llamada ecuación de la acústica, describe la dinámica de una onda de sonido a través de un fluido compresible.

Por otro lado, en un fluido incompresible el volumen es constante, implicando que la densidad es constante e igual a ρ_0 y la divergencia del campo de velocidades es cero, es decir

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 > 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0.$$

Si además el fluido es Newtoniano se asume que el tensor de esfuerzos depende del gradiente de velocidad y del campo de presión de la siguiente forma

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \nu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t),$$

donde ν es la constante de viscosidad del fluido. Nuevamente la tensión \mathbf{S} es simétrica por lo que la conservación de momentum angular se tiene automáticamente. Reemplazando \mathbf{S} en la ley de conservación de momentum lineal, se obtiene el sistema de EDP que modela un fluido incompresible Newtoniano:

$$\begin{aligned}\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} \right) &= \nu \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \rho_0 \mathbf{b}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}) &= 0,\end{aligned}$$

la cual es conocida como las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible Newtoniano. Finalmente, despreciando el término de aceleración espacial, las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = 0, \quad (3)$$

con $\boldsymbol{f} = \rho_0 \boldsymbol{b}$. Estas ecuaciones son comúnmente llamadas sistema de Stokes y proporcionan un buen modelo para fluidos incompresibles Newtonianos que tienen movimientos casi estacionarios y lentos, y que tienen gradientes de velocidad muy pequeños. Para más detalles respecto a los temas tratados anteriormente se pueden revisar los Capítulos 1 al 6 de [20].

Las ecuaciones de Helmholtz y Stokes son un ejemplo de EDP elípticas en régimen estacionario. Asumiendo que el fluido está confinado en una región acotada, es posible imponer ciertas condiciones en la frontera de esta región llamadas condiciones de contorno, que pueden ser condiciones de tipo Dirichlet, Neumann o mixtas, entre otras.

En muchas aplicaciones se modelan fluidos por medio de las ecuaciones de Helmholtz o Stokes. Por ejemplo:

- Encontrar la configuración espacial de la presión que genera una onda de sonido que se propaga en una región ocupada por aire
- Encontrar el campo de velocidades y presión de un líquido (con viscosidad constante) en régimen estacionario que ocupa cierta región.

Resolver estos problemas de valores en la frontera (PVC) de manera analítica resulta complicado, ya sea por las condiciones de contorno impuestas o bien por la geometría del dominio. Por estos motivos, en muchos casos el PVC se formula como un problema variacional continuo en donde las incógnitas y funciones test pertenecen a espacios de Sobolev, y usando herramientas del Análisis Funcional se asegura la existencia única de solución (en la Sección 1.4 del Capítulo 1 se puede ver un ejemplo para el Problema de Stokes). Posterior a ello, se aproxima la solución usando herramientas numéricas. En este contexto, uno de los métodos para aproximar soluciones de PVC es el Método de Elementos Finitos (MEF), que puede ser separado en dos grandes familias. Por un lado están los métodos conformes que consideran la misma formulación variacional definida ahora en subespacios de dimensión finita de los espacios de Sobolev sobre los cuales está definida la formulación variacional continua. Por ejemplo, en [23] se puede ver una formulación variacional para el problema de Helmholtz en una dimensión con condiciones de contorno mixtas como también la implementación de un método conforme para un número de onda alto, utilizando como espacio de aproximación funciones continuas y lineales a trozos. Por otro lado, en [12, 16, 17] se pueden encontrar formulaciones variacionales mixtas para el problema de Stokes, en donde se introduce una variable auxiliar llamada *pseudo-esfuerzo* y además esquemas conformes que utilizan como espacios de aproximación funciones continuas polinomiales a trozos.

Otra familia de métodos son los no conformes, los cuales aproximan la solución del PVC definiendo formulaciones variacionales en espacios de dimensión finita que no están contenidos en los espacios de Sobolev usados en la formulación continua, un ejemplo de éstos son los métodos de Galerkin Discontinuo (DG), los cuales consisten, a grandes rasgos, en descomponer el MC en varias regiones y en cada una de ellas aproximar la solución del PVC, definiendo problemas locales que se conectan entre sí por medio de las fronteras de cada región del MC (en [2] se puede encontrar una visión general de estos métodos). En esta dirección, en [14] se presenta y analiza un esquema LDG para el problema de Stokes considerando como incógnitas la velocidad y presión, mientras que en [7] se puede encontrar un

esquema DG para el problema de Helmholtz. En ambos casos se consideran, como espacios de aproximación, funciones discontinuas polinomiales a trozos y se deducen estimaciones de error a priori. Además, ya sea para facilitar el trabajo o bien para relajar ciertas condiciones en los espacios de aproximación, en ocasiones se introducen términos de cuadrados mínimos en las formulaciones discretas, generando formulaciones estabilizadas o aumentadas. En [3, 4] es posible encontrar este tipo de formulaciones para métodos conformes y métodos no conformes, respectivamente.

Teniendo en cuenta lo anterior, este manuscrito tiene como objetivos:

- 1) Obtener una formulación DG para el problema de Stokes con condiciones de contorno Dirichlet no homogénea para la velocidad, considerando como incógnitas velocidad y pseudo-esfuerzo. Asegurar existencia y unicidad de solución y obtener estimaciones de error a priori.
- 2) Considerando términos de cuadrados mínimos, obtener una formulación DG para el problema de Stokes en las variables velocidad y pseudo-esfuerzo, asegurando existencia y unicidad de solución y obteniendo su correspondiente estimación de error a priori.
- 3) Definir un problema DG para el problema de Helmholtz estabilizado con condiciones de contorno mixtas no homogéneas. Además, asegurar existencia y unicidad de solución.
- 4) Implementar computacionalmente el problema de Helmholtz y mostrar que los ordenes de convergencia del método son coherentes con la teoría descrita (resultados teóricos obtenidos).

Para tales efectos, en el primer Capítulo, llamado *Preliminares*, se darán los conceptos previos para los Capítulos posteriores. Luego, en el segundo Capítulo se formulará un esquema DG para el problema de Stokes. Se mostrará que tal esquema tiene única solución y se obtendrá una estimación de error a priori. Por último, vía términos de cuadrados mínimos, se formulará una versión estabilizada del problema DG. Finalmente en el tercer Capítulo se presentará un esquema DG para el problema de Helmholtz, con término de cuadrados mínimos, y se implementará computacionalmente usando MATLAB. El código obtenido se testeará con dos ejemplos y para varios valores de número de onda ω .

Capítulo 1

Preliminares

A fin de realizar una presentación autocontenida, en este capítulo, daremos la notación, definiciones y resultados (Teoremas, Lemas, etc.) necesarios para los capítulos posteriores. Comenzaremos definiendo los espacios de Hilbert. Para ello, de aquí en adelante, denotaremos por X un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

1.1. Definiciones y resultados previos

Definición 1.1.1 (*Norma*) Se dice que la aplicación $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma para X si satisface

- i) $\|u\| \geq 0 \quad \forall u \in X$.
- ii) $\|u\| = 0 \iff u = \theta$.
- iii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall u \in X$.
- iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in X$.

Definición 1.1.2 (*Producto Interior*) Se dice que la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es un producto interior sobre X si satisface

- i) $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in X$.
- ii) $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = \theta$.
- iii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in X$.
- iv) $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall u, v, w \in X$.

En vista que trabajamos sobre el cuerpo de los reales, puede probarse a partir de las propiedades ii), iii) y iv) de la definición de producto interior, que se cumplen

$$v) \langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad u, v, w \in X,$$

$$vi) \langle u, \theta_X \rangle = \langle \theta_X, u \rangle = 0 \quad \forall u \in X.$$

Observación 1.1.1 Dado un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ para X , este induce la norma $\|\cdot\|_X = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_X}$ para los vectores de X .

Observación 1.1.2 Un espacio vectorial X dotado de un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ se denomina **espacio pre-Hilbert** y se denota por $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$.

Uno de los resultados más importantes sobre los espacios pre-Hilbert está dado por la siguiente desigualdad

Teorema 1.1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ un espacio pre-Hilbert sobre el cuerpo \mathbb{R} . Entonces se cumple

$$|\langle u, v \rangle_X| \leq \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (1.1)$$

Demostración: Si $u = \theta_X$ o $v = \theta_X$ entonces la desigualdad se satisface trivialmente. Consideramos ahora $u, v \in X - \{\theta_X\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Las propiedades de producto interior implican

$$0 \leq \langle u + \alpha v, u + \alpha v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\alpha \langle u, v \rangle + \alpha^2 \langle v, v \rangle.$$

En particular, tomando $\alpha = -\langle u, v \rangle / \langle v, v \rangle$ se tiene

$$0 \leq \langle u, u \rangle - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\langle v, v \rangle},$$

así, multiplicando por $\langle v, v \rangle$ y considerando la norma inducida por el producto interior se concluye (1.1). \square

Definición 1.1.3 (Espacio de Hilbert) Un espacio pre-Hilbert X se dice **espacio de Hilbert** si es completo, es decir, si toda sucesión de Cauchy en X converge en X con respecto a la norma inducida.

Observación 1.1.3 Dado un espacio de Hilbert $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, denotamos por

$$X^2 := X \times X = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_i \in X, i = 1, 2\},$$

el espacio producto de orden 2 con componentes en X y por

$$X^{2 \times 2} = \{\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} \in X, i, j = 1, 2\},$$

el espacio de tensores cuadrados de orden 2 con componentes en X . Ambos espacios son también de Hilbert, con el producto interior $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{X^2} = \sum_{i=1}^2 \langle v_i, w_i \rangle_X$ y $\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{X^{2 \times 2}} = \sum_{i,j=1}^2 \langle \tau_{ij}, \eta_{ij} \rangle_X$, respectivamente.

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con $n \in \mathbb{N}$, un ejemplo de espacio de Hilbert es

$$L^2(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ función medible} : \int_{\Omega} |f|^2 < +\infty\},$$

con el producto interior usual $\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} fg \quad \forall f, g \in L^2(\Omega)$. Luego, podemos definir

$$[L^2(\Omega)]^2 = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2) : v_1, v_2 \in L^2(\Omega)\},$$

el cual podemos dotar con el producto interior $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{[L^2(\Omega)]^2} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ para $\mathbf{f} = (f_i)$ y $\mathbf{g} = (g_i) \in [L^2(\Omega)]^2$, y \cdot denotando el producto escalar usual de \mathbb{R}^2 . Por otro lado, para los tensores de segundo orden $\boldsymbol{\tau} := (\tau_{ij})$, $\boldsymbol{\zeta} := (\zeta_{ij}) \in X^{2 \times 2}$, como es usual, el tensor transpuesto se escribe como $\boldsymbol{\tau}^t := (\tau_{ji})$, la traza de $\boldsymbol{\tau}$ por $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) := \tau_{11} + \tau_{22}$ y el producto escalar de tensores $\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\zeta} := \sum_{i,j=1}^2 \tau_{ij} \zeta_{ij}$. Así, podemos definir

$$[L^2(\Omega)]^{2 \times 2} := \{\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} \in L^2(\Omega) \forall i, j \in \{1, 2\}\},$$

provisto del producto interior $\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}} := \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\zeta}$, $\forall \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\zeta} \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2}$, que resulta ser espacio de Hilbert.

Definición 1.1.4 (*Producto Tensorial*) Se define la aplicación

$$\begin{aligned} \otimes : X^2 \times X^2 &\rightarrow X^{2 \times 2} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

con $\eta_{ij} = v_i w_j$, conocida como producto tensorial.

La siguiente es una propiedad de gran utilidad.

Lema 1.1.1 *Dados $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in X^2$ y $\boldsymbol{\tau} \in X^{2 \times 2}$ se tiene que*

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) : \boldsymbol{\tau} = \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\tau} \mathbf{w}). \tag{1.3}$$

Demostración: Usando la definición de producto tensorial tenemos que

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} : \boldsymbol{\tau} = \sum_{i,j=1}^2 (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{ij} \tau_{ij} = \sum_{i,j=1}^2 v_i w_j \tau_{ij} = \sum_{i=1}^2 v_i (\boldsymbol{\tau} \mathbf{w})_i = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{w}$$

□

Definición 1.1.5 *El gradiente de un campo escalar es un campo vectorial y el gradiente de un campo vectorial es un campo tensorial, es decir, dados $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo escalar y un campo vectorial, respectivamente, asumidas lo suficientemente suaves, se tiene que*

$$\nabla g := (\partial_i g)_{1 \leq i \leq n}, \quad \nabla \mathbf{f} := (\partial_j f_i)_{1 \leq i, j \leq n},$$

donde f_j son las funciones componentes de \mathbf{f} .

Definición 1.1.6 *La divergencia de un campo vectorial es un campo escalar y la divergencia de un campo tensorial es un campo vectorial, es decir, dados $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\eta} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ un campo vectorial y tensorial, respectivamente, supuestas lo suficientemente suaves, se tiene que*

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}) := \nabla \cdot \mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i, \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{\eta}) = (\operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_i)_{1 \leq i \leq n},$$

donde $\boldsymbol{\eta}_i$ representa la fila i -ésima del tensor $\boldsymbol{\eta} = (\eta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ y \cdot denota el producto interior usual de \mathbb{R}^n .

Finalmente, dado S un dominio de \mathbb{R}^n y κ un entero positivo, $P_\kappa(S)$ denota al conjunto de los polinomios de grado menor o igual a κ .

Los resultados descritos en las siguientes secciones han sido extraídos de [15]. Para las correspondientes demostraciones se pueden revisar los Capítulos 2 y 4 de la referencia antes mencionada.

1.2. Dualidad, Riesz, Lax-Milgram y Babŭska-Brezzi

Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ dos espacios de Hilbert sobre \mathbb{R} . Toda aplicación $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *funcional*. Además, se dice que un funcional F es lineal si cumple con

$$F(\alpha v + \beta w) = \alpha F(v) + \beta F(w) \quad \forall v, w \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte, un funcional F es acotado si existe $M > 0$ tal que

$$|F(v)| \leq M \|v\|_X \quad \forall v \in X.$$

Por otro lado, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ se llama forma bilineal si es lineal en ambas componentes. Se dirá que a es acotada si existe $M > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Dado $V \subseteq X$ un subespacio de X , una forma bilineal a es V -coerciva si existe $C > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq C \|v\|_X^2 \quad \forall v \in V.$$

El conjunto de todos los funcionales lineales y acotados definidos sobre X se llama *dual de X* y se denota por X' . Además, definiendo

$$\|F\|_{X'} := \sup_{v \in X \setminus \{\emptyset\}} \frac{|F(v)|}{\|v\|_X} \quad \forall F \in X',$$

se puede probar que $\|\cdot\|_{X'}$ es una norma y $(X', \|\cdot\|_{X'})$ es un espacio de Banach. El siguiente resultado relaciona los elementos de X' con los elementos de X .

Teorema 1.2.1 (*Teorema de Representación de Riesz*) Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sea $F \in X'$. Entonces, existe un único $x \in X$ tal que

$$F(v) = \langle v, x \rangle_X \quad \forall v \in X.$$

Además $\|F\|_{X'} = \|x\|_X$. Suele decirse que v es el representante de Riesz de F sobre X .

Demostración: Ver Teorema 2.4 en [15]. □

Dado $F \in X'$ y $v \in X$, es usual escribir $\langle F, v \rangle$, que se lee como producto de dualidad, para denotar la evaluación de F en v . Gracias a este resultado, es posible definir la aplicación \mathcal{R}_X , llamada aplicación u operador de Riesz, como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_X : X' &\rightarrow X \\ F &\rightarrow \mathcal{R}_X(F), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{R}_X(F)$ es el representante de Riesz de F sobre X , garantizado por el Teorema 1.2.1.

Adicionalmente, dada una forma bilineal $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ y $u \in X$, se tiene que el funcional F_u , definido por $F_u(v) := a(u, v)$ pertenece al espacio dual de Y . Esto induce la definición del operador $\mathbb{A} : X \rightarrow Y'$, que al componer con el operador de Riez $\mathcal{R}_Y : Y' \rightarrow Y$ genera la aplicación $\mathbf{A} : X \rightarrow Y$ definida como $\mathbf{A}(v) = \mathcal{R}_Y(\mathbb{A}(v))$, $\forall v \in X$.

Para finalizar esta sección daremos dos resultados que nos ayudarán, en algunos casos, a asegurar existencia única de solución de nuestras formulaciones variacionales.

Lema 1.2.1 (*Lax-Milgram*) Sean $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y X -coerciva. Dado $F \in X'$, existe un único $u \in X$ tal que

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in X.$$

Además, $\|u\|_X \leq \frac{1}{c} \|F\|_{X'}$, donde $c > 0$ corresponde a la constante de X -coercividad de a .

Demostración: Ver Teorema 4.1 en [15]. □

Teorema 1.2.2 (*Babuška-Brezzi*) Sean X, Y espacios de Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas con \mathbf{A} y \mathbf{B} sus correspondientes operadores inducidos y sea $V := \ker(\mathbf{B})$. Si se cumple que

$$\exists \alpha > 0 : \quad a(\tau, \tau) \geq \alpha \|\tau\|_X^2 \quad \forall \tau \in V, \quad (V\text{-coercividad})$$

y

$$\exists \beta > 0 : \quad \sup_{\tau \in X \setminus \{\theta\}} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_X} \geq \beta \|v\|_Y \quad \forall v \in Y, \quad (\text{condición inf-sup})$$

entonces, dados $F \in X'$, $G \in Y'$, existe un único $(\sigma, u) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, u) &= F(\tau) \quad \forall \tau \in X, \\ b(\sigma, v) &= G(v) \quad \forall v \in Y. \end{aligned}$$

Además, existe una constante $C > 0$, dependiente sólo de $\|\mathbf{A}\|$, α y β , tal que

$$\|(\sigma, u)\|_{X \times Y} \leq C (\|F\|_{X'} + \|G\|_{Y'}).$$

Demostración: Ver Teorema 4.9 en [15]. □

1.3. Algunos espacios de Sobolev e identidades de trazas

Dado el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$, es posible definir, introduciendo una generalización de la derivada, los llamados espacios de Sobolev, necesarios para obtener nuestras formulaciones variacionales (sólo definiremos los utilizados en este trabajo. Para una definición más completa se pueden ver [13, 19]). Dado un abierto Ω de \mathbb{R}^n , $C^\infty(\Omega)$ denota el espacio de funciones a valores reales infinitamente diferenciables. Además, dado $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, se define su soporte como

$$\text{sop}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Esto permite definir los espacios de funciones $C^\infty(\Omega)$ a soporte compacto

$$C_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop}(\varphi) \text{ es compacto y } \text{sop}(\varphi) \subseteq \Omega\},$$

y $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ el espacio de restricciones a Ω de funciones que son C_0^∞ sobre algún abierto que contiene a $\overline{\Omega}$.

Definición 1.3.1 (*Lipschitz-Continuidad*) Se dice que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz-continua si existe $K > 0$ tal que

$$|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| \leq K \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega.$$

Definición 1.3.2 (*Notación indicial.*) Un multi-índice es una n -upla $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, con $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. El orden (o longitud) del multi-índice α se define como $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Además, dada $f \in C_0^\infty(\Omega)$ se define

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definición 1.3.3 (*Derivada distribucional.*) Sea $f \in L^2(\Omega)$ y β un multi-índice, se define la derivada débil o distribucional de f , denotada por $\partial^\beta f$, como la distribución que satisface

$$\langle \partial^\beta f, \varphi \rangle = (-1)^{|\beta|} \langle f, \partial^\beta \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definición 1.3.4 (*Divergencia distribucional.*) Sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. Se define la divergencia distribucional de \mathbf{f} , denotada por $\operatorname{div}(\mathbf{f})$, como la distribución que satisface

$$\langle \operatorname{div}(\mathbf{f}), \varphi \rangle = -\langle \mathbf{f}, \nabla \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definición 1.3.5 (*Espacios de Sobolev de orden l*) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, dado $l \in \mathbb{Z}^+$, definimos el espacio de Sobolev

$$H^l(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq l\}. \quad (1.4)$$

Donde ∂^α es en el sentido distribucional (ver Definición 1.3.3).

Dotando a este espacio del producto interior

$$\langle u, v \rangle_{H^l(\Omega)} := \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq l} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^l(\Omega), \quad (1.5)$$

se prueba que es un espacio de Hilbert con norma inducida

$$\|v\|_{H^l(\Omega)} := \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq l} \|\partial^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad \forall v \in H^l(\Omega).$$

En particular, si $l = 1$, se tiene el espacio

$$H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, 2\} = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in [L^2(\Omega)]^2\},$$

con norma inducida

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} := \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \right)^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Notar que el término $\|\nabla v\|_{[L^2(\Omega)]^2}$ es una seminorma en $H^1(\Omega)$ y se denota por $|v|_{H^1(\Omega)}$. Por otro lado, se define el (sub)espacio $H(\operatorname{div}; \Omega) \subseteq [L^2(\Omega)]^2$ de la siguiente manera

$$H(\operatorname{div}; \Omega) := \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \operatorname{div}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)\}, \quad (1.6)$$

donde div denota la divergencia en el sentido distribucional (ver Definición 1.3.4). Se define el siguiente producto interior sobre $H(\operatorname{div}; \Omega)$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H(\operatorname{div}; \Omega)} := \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{[L^2(\Omega)]^2} + \langle \operatorname{div}(\mathbf{u}), \operatorname{div}(\mathbf{v}) \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega), \quad (1.7)$$

y su correspondiente norma inducida

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} := \left(\|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + |\mathbf{v}|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad \forall \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega),$$

con la notación de la seminorma $|\mathbf{v}|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} := \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}$.

Si denotamos por $H(\mathbf{div}; \Omega) := [H(\operatorname{div}; \Omega)]^2 \subseteq [L^2(\Omega)]^{2 \times 2}$ se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.3.1 *Definiendo $H_0 := \{\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}; \Omega) : \int_{\Omega} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 0\}$, se tiene $H(\mathbf{div}; \Omega) = H_0 \oplus \mathbb{R}\mathbf{I}$. Es decir, dado $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}; \Omega)$, existen únicos $\boldsymbol{\tau}_0 \in H_0$ y $d \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + d\mathbf{I}$.*

Demostración: La demostración se sigue del hecho que H_0 es un subespacio cerrado de $H(\mathbf{div}; \Omega)$ y que $H_0^\perp = \mathbb{R}\mathbf{I}$. Omitimos más detalles. \square

Definimos el tensor desviador de $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}; \Omega)$ por $\boldsymbol{\tau}^d := \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{I}$. Note que $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}^d) = 0$ en Ω , y por tanto $\boldsymbol{\tau}^d \in H_0$.

Desde ahora en adelante, usaremos C o c , con o sin sub/superíndices, para denotar constantes genéricas, independientes de parámetros de discretización, que pueden tomar valores diferentes en diferentes casos.

Para finalizar esta sección daremos algunos resultados sobre trazas, integración por partes e identidades de Green para los espacios de Sobolev $H^1(\Omega)$ y $H(\mathbf{div}; \Omega)$. Para tales efectos, consideramos $\Gamma := \partial\Omega$ la que supondremos Lipschitz-continua.

Teorema 1.3.1 *(Trazas en $H^1(\Omega)$) Existe una aplicación $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$, lineal y acotada, tal que*

$$\gamma_0(v) = v|_{\Gamma} \quad \forall v \in C_0^\infty(\bar{\Omega}).$$

Demostración: Ver Teorema 4.14 en [15]. \square

Extendiendo la fórmula de integración por partes en $C_0^\infty(\bar{\Omega})$, la cual es consecuencia del Teorema de la divergencia de Gauss, a $H^1(\Omega)$ se tiene que, dados $v, w \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} w \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\Gamma} \gamma_0(v) \gamma_0(w) \nu_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

donde ν_i es la componente i -ésima del vector normal unitario exterior a Γ , denotado por $\boldsymbol{\nu}$. Una consecuencia directa de esta fórmula de integración por partes es el resultado dado a continuación.

Lema 1.3.2 *Para todo $u \in H^1(\Omega)$ y $v \in H^2(\Omega)$ se tiene*

$$\int_{\Omega} u \Delta v = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma} \gamma_0(u) \gamma_0(\nabla v) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad (1.8)$$

donde $\gamma_0(\nabla v)$ es el vector resultante de aplicar γ_0 a las componentes de ∇v .

Demostración: Ver Corolario 4.2 en [15]. \square

Por otro lado, definiendo $H^{1/2}(\Gamma)$ como el rango de γ_0 , es decir $H^{1/2}(\Gamma) := \gamma_0(H^1(\Omega))$, se puede probar que $H^{1/2}(\Gamma)$ es un espacio de Hilbert, lo que permite definir $H^{-1/2}(\Gamma) := H^{1/2}(\Gamma)'$ como el espacio dual de $H^{1/2}(\Gamma)$ y así tener el siguiente resultado.

Teorema 1.3.2 *(Trazas normales en $H(\mathbf{div}; \Omega)$) Existe una aplicación lineal, acotada y sobreyectiva $\gamma_{\boldsymbol{\nu}} : H(\mathbf{div}; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que*

$$\gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\tau}) = \gamma_0(\boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in [H^1(\Omega)]^n.$$

Demostración: Ver Teorema 4.6 en [15]. \square

Teorema 1.3.3 (*Integración por partes en $H(\operatorname{div}; \Omega)$*) Dados $w \in H^1(\Omega)$ y $\boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div}; \Omega)$, se tiene

$$\langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\tau}), \gamma_0(w) \rangle = \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla w + \int_{\Omega} w \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}, \quad (1.9)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$ con respecto al producto interior de $L^2(\Gamma)$.

Demostración: Ver Lema 4.8 en [15]. \square

A continuación aplicaremos los conceptos y resultados descritos hasta ahora para analizar la solubilidad del problema de Stokes, considerando formulación en velocidad-pseudoesfuerzo.

1.4. El Problema de Stokes

Sea Ω un dominio con frontera poligonal Γ , no vacío, acotado y simplemente conexo de \mathbb{R}^2 incompresible. El problema de Stokes consiste en determinar la velocidad \mathbf{u} y la presión p de un fluido en régimen estacionario que ocupa la región Ω bajo la acción de fuerzas externas. Más precisamente, se desea encontrar un campo vectorial \mathbf{u} y un campo escalar p tales que

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} & \text{en } \Gamma, \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde $\nu > 0$ es la constante de viscosidad cinemática del fluido, y los datos $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$, representan la fuerza volumétrica por unidad de masa y la velocidad del fluido en la frontera de Ω , respectivamente. Además, del Teorema de la divergencia y la condición de incompresibilidad, tenemos que \mathbf{g} debe satisfacer $\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$, siendo $\boldsymbol{\nu}$ el vector normal unitario exterior a Γ . Asimismo, para garantizar la unicidad de solución buscaremos $p \in L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q = 0\}$.

1.4.1. Formulación mixta en velocidad-pseudoesfuerzo

Introducimos la incógnita auxiliar que llamaremos pseudoesfuerzo

$$\boldsymbol{\sigma} := \nu \nabla \mathbf{u} - p \mathbf{I} \quad \text{en } \Omega, \quad (1.11)$$

donde \mathbf{I} denota el tensor identidad en $[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}$ y ∇ el operador gradiente. Aplicando el operador divergencia a (1.11) obtenemos $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p$. Así la primera ecuación de (1.10) puede ser escrita como:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = -\mathbf{f}. \quad (1.12)$$

Por otro lado, aplicando el operador de traza a (1.11) se tiene $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \nu \operatorname{div}(\mathbf{u}) - 2p$, y dado que $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$, tenemos que $p = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ en Ω . Eliminando p en (1.11) y considerando (1.12) se obtiene

un sistema de primer orden en velocidad-pseudoesfuerzo: Encontrar un campo tensorial $\boldsymbol{\sigma}$ (esfuerzo) y un campo vectorial \mathbf{u} (velocidad) tales que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^d &= \nu \nabla \mathbf{u} \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= -\mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \text{en } \Gamma,\end{aligned}\tag{1.13}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^d := \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$.

1.4.2. Formulación variacional continua

Multiplicando la primera ecuación de (1.13) por $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}; \Omega)$, integrando sobre Ω y aplicando integración por partes se tiene

$$\frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\tau} = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} + \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu},$$

considerando que $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^d + \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{I}$ y que $\boldsymbol{\sigma}^d : \mathbf{I} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^d) = 0$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\tau}^d = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} + \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}.$$

Usando el hecho que $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ en Γ , se obtiene:

$$\frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\tau}^d + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} = \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}; \Omega).\tag{1.14}$$

Por otro lado, multiplicando la segunda ecuación de (1.13) por $\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2$ e integrando sobre Ω se tiene

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2.\tag{1.15}$$

Juntando las ecuaciones (1.14) y (1.15), se llega al siguiente problema: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in H_0 \times [L^2(\Omega)]^2$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\tau}^d + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) &= \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}; \Omega), \\ \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Además, dado que $H(\mathbf{div}; \Omega) := H_0 \oplus \mathbb{R}\mathbf{I}$, se tiene que, dado $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}; \Omega)$, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + c_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{I}$, con $\boldsymbol{\tau}_0 \in H_0$ y $c_{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{R}$, luego se verifica: $\boldsymbol{\tau}^d = \boldsymbol{\tau}_0^d$, $\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_0)$ y $\langle \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}, \mathbf{g} \rangle = \langle \boldsymbol{\tau}_0 \boldsymbol{\nu}, \mathbf{g} \rangle$.

De esta manera, el Problema (1.16) es equivalente a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in H_0 \times [L^2(\Omega)]^2$ tal que

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) &= G(\boldsymbol{\tau}), \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) &= F(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2,\end{aligned}\tag{1.17}$$

donde las formas bilineales $a : H(\mathbf{div}; \Omega) \times H(\mathbf{div}; \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : H(\mathbf{div}; \Omega) \times [L^2(\Omega)]^2$ son definidas por

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\tau}^d, \quad b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau},$$

y los funcionales lineales $G : H(\mathbf{div}; \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $F : [L^2(\Omega)]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vienen dados por

$$G(\boldsymbol{\tau}) := \langle \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}, \mathbf{g} \rangle_{\Gamma}, \quad F(\mathbf{v}) := - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

Lema 1.4.1 *Las formas bilineales a , b , y los funcionales lineales F , G son acotados.*

Demostración: Sean $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in H_0$ y $\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2$. Aplicando la desigualdad de *Cauchy-Schwarz* se tiene que

$$\begin{aligned} |a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})| &= |\langle \boldsymbol{\sigma}^d, \boldsymbol{\tau}^d \rangle_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}| \leq \|\boldsymbol{\sigma}^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}} \|\boldsymbol{\tau}^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}} \leq \|\boldsymbol{\sigma}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}} \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}} \\ &\leq \|\boldsymbol{\sigma}\|_{H(\mathbf{div}; \Omega)} \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathbf{div}; \Omega)}, \\ |b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})| &= |\langle \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{v} \rangle_{[L^2(\Omega)]^2}| \leq \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathbf{div}; \Omega)} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}, \\ |G(\boldsymbol{\tau})| &= |\langle \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}, \mathbf{g} \rangle_{\Gamma}| \leq \|\boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}\|_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^2} \|\mathbf{g}\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathbf{div}; \Omega)} \|\mathbf{g}\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2}, \\ |F(\mathbf{v})| &= |\langle \mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle_{[L^2(\Omega)]^2}| \leq \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega)]^2}. \end{aligned}$$

Así, se concluye la prueba. □

El siguiente resultado será de gran ayuda para concluir la solubilidad del problema (1.17).

Lema 1.4.2 *Existe $c_1 > 0$, dependiendo sólo de Ω , tal que*

$$c_1 \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 \leq \|\boldsymbol{\tau}^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\mathbf{div} \boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0. \quad (1.18)$$

Demostración: Para la demostración se puede ver la Proposición 3.1 del Capítulo IV en [9]. □

La existencia y unicidad de solución del Problema (1.17) viene garantizada por el siguiente teorema.

Teorema 1.4.1 *El problema (1.17) tiene única solución $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in H_0 \times [L^2(\Omega)]^2$. Además, existe una constante $C > 0$, independiente de la solución, tal que*

$$\|(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})\|_{H(\mathbf{div}; \Omega) \times [L^2(\Omega)]^2} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|\mathbf{g}\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \right). \quad (1.19)$$

Demostración: La conclusión de este teorema pasa por garantizar las condiciones que deben satisfacer las formas bilineales a , b de la teoría de Babuška-Brezzi (ver Teorema 1.2.2).

Para ello, ddo $\mathbf{B} : H_0 \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$ el operador inducido por la forma bilineal b , el kernel de este operador viene dado por el subespacio

$$\begin{aligned} V := Ker(\mathbf{B}) &= \{\boldsymbol{\tau} \in H_0 : \mathbf{B}(\boldsymbol{\tau}) = \theta_{[L^2(\Omega)]^2}\} = \{\boldsymbol{\tau} \in H_0 : b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2\} \\ &= \{\boldsymbol{\tau} \in H_0 : \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) = \theta_{[L^2(\Omega)]^2}\}. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\boldsymbol{\tau} \in V$. De la definición de a y de la definición de $\|\cdot\|_{H(\mathbf{div};\Omega)}$, tenemos luego de aplicar el Lema 1.4.2:

$$a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{\nu} \|\boldsymbol{\tau}^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 \geq \frac{c_1}{\nu} \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 = \frac{c_1}{\nu} \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathbf{div};\Omega)}^2.$$

Es decir, existe $c = \frac{c_1}{\nu} > 0$ tal que

$$a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) \geq c \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathbf{div};\Omega)}^2, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in V. \quad (1.20)$$

Ahora estableceremos la llamada condición *inf-sup* de b . Sea $\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2$. Consideremos el problema auxiliar: Encontrar $\mathbf{z} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ tal que

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{z} &= \mathbf{v}, & \text{en } \Omega \\ \mathbf{z} &= 0, & \text{en } \Gamma. \end{aligned} \Leftrightarrow \int_{\Omega} \nabla \mathbf{z} : \nabla \mathbf{w} = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2. \quad (1.21)$$

Gracias al Lema 1.2.1, es posible asegurar que existe única solución del problema auxiliar, es decir, existe un único $\mathbf{z} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ solución de (1.21). Además, existe $\bar{c} > 0$ tal que $\|\mathbf{z}\|_{[H(\Omega)^1]^2} \leq \bar{c} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}$. Notemos que $\nabla \mathbf{z} \in H(\mathbf{div};\Omega)$ ya que en el sentido distribucional se tiene $\mathbf{div}(\nabla \mathbf{z}) = \Delta \mathbf{z} = -\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2$. Descomponiendo $-\nabla \mathbf{z} = \boldsymbol{\tau}_0 + c_z \mathbf{I}$, con $\boldsymbol{\tau}_0 \in H_0$ y $c_z \in \mathbb{R}$, tenemos que $\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_0) = \mathbf{v}$.

Así resulta

$$\sup_{\boldsymbol{\tau} \in H_0 \setminus \{0\}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathbf{div};\Omega)}} \geq \frac{b(\boldsymbol{\tau}_0, \mathbf{v})}{\|\boldsymbol{\tau}_0\|_{H(\mathbf{div};\Omega)}} = \frac{\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_0)}{\|\boldsymbol{\tau}_0\|_{H(\mathbf{div};\Omega)}} = \frac{\|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2}{\|\boldsymbol{\tau}_0\|_{H(\mathbf{div};\Omega)}}. \quad (1.22)$$

Como $\|\boldsymbol{\tau}_0\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}} \leq \|\nabla \mathbf{z}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}} \leq \|\mathbf{z}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq \bar{c} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}$ tenemos que

$$\|\boldsymbol{\tau}_0\|_{H(\mathbf{div};\Omega)}^2 = \|\boldsymbol{\tau}_0\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \leq (1 + \bar{c}^2) \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2.$$

Aplicando esta última desigualdad en (1.22) tenemos que existe $\bar{C} > 0$ tal que

$$\sup_{\boldsymbol{\tau} \in H_0 \setminus \{0\}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathbf{div};\Omega)}} \geq \bar{C} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}, \quad (1.23)$$

donde $\bar{C} = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{c}^2}}$. El resto de la demostración pasa por el acotamiento de los funcionales G y F y aplicar el Teorema 1.2.2. \square

Queda así garantizada la existencia única de solución para el Problema (1.17). El siguiente paso es aproximar la solución por medio de algún método de elementos finitos, analizando la convergencia del método.

Capítulo 2

Métodos Galerkin Discontinuo (DG) para el problema de Stokes

Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones del dominio $\overline{\Omega}$ (con posibles nodos colgantes), compuesta por triángulos T (llamados elementos) de diámetro h_T y vector normal exterior unitario $\boldsymbol{\nu}_T$. Es usual denotar por $h := \max\{h_T : T \in \mathcal{T}_h\}$ al tamaño de la malla.

Dado \mathcal{T}_h , sus lados se definen como sigue: un *lado interior* de \mathcal{T}_h es el interior (no vacío) de $\partial T \cap \partial T'$, donde T y T' son dos elementos adyacentes de \mathcal{T}_h . Un *lado de frontera* de \mathcal{T}_h es el interior (no vacío) de $\partial T \cap \partial\Omega$ donde T es un elemento de frontera de \mathcal{T}_h . Denotaremos por \mathcal{E}_I el conjunto de todos los lados interiores (contado sólo una vez) sobre Ω , y por \mathcal{E}_Γ el conjunto de todos los lados de frontera. Finalmente, $\mathcal{E} := \mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_\Gamma$ es el conjunto de todos los lados inducidos por la triangulación \mathcal{T}_h , llamado también esqueleto de la malla. Además, para cada lado $e \in \mathcal{E}$, h_e representa su longitud (medida).

Los métodos de Galerkin Discontinuo (DG) son un tipo de elementos finitos no conformes y consisten en, dada una malla \mathcal{T}_h , aproximar la solución $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in H(\mathbf{div}; \Omega) \times [L^2(\Omega)]^2$ de (1.13) por funciones $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)$ definidas sobre un espacio de elementos finitos apropiado $\boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \times \mathbf{W}_h \not\subseteq H(\mathbf{div}; \Omega) \times [L^2(\Omega)]^2$. Para ello, dado $T \in \mathcal{T}_h$, se debe encontrar $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \times \mathbf{W}_h$ tal que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_h^d &= \nu \nabla \mathbf{u}_h & \text{en } T, \\ \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h) &= -\mathbf{f} & \text{en } T. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Procediendo de manera similar a [25] (o [10]), multiplicamos las ecuaciones de (2.1) por $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h$ respectivamente, integramos sobre T y aplicamos integración por partes, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \int_T \boldsymbol{\sigma}_h^d : \boldsymbol{\tau}^d + \int_T \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) - \int_{\partial T} \hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}_T &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}, \\ \int_T \nabla \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma}_h - \int_{\partial T} \mathbf{v} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\nu}_T &= \int_T \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Aquí $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\hat{\mathbf{u}}$ son aproximaciones de $\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{u} respectivamente, y suelen ser llamados *flujos numéricos* o *trazas numéricas*. Estas trazas suelen depender de $\boldsymbol{\sigma}_h$, \mathbf{u}_h y del dato de frontera \mathbf{g} . La manera de definir estos flujos es diversa y da lugar a distintos tipos de métodos DG (ver [2]).

2.1. Definiciones y resultados previos

Comenzaremos introduciendo algunos conceptos que serán necesarios en el resto del escrito.

Definición 2.1.1 (*Variación Acotada*) Dada \mathcal{T}_h una partición por triángulos de Ω . Se dice que \mathcal{T}_h es de variación acotada si existe $l > 1$, independiente de h , tal que

$$l^{-1} \leq \frac{h_T}{h_{T'}} \leq l \quad (2.3)$$

para cada par $T, T' \in \mathcal{T}_h$ compartiendo un lado interior.

En lo que sigue asumiremos que la triangulación \mathcal{T}_h es de variación acotada.

A continuación definiremos los operadores salto y promedio, usados en los esquemas de Galerkin discontinuos. Para ello es necesario introducir los espacios de Sobolev por tramos/trozos.

Definición 2.1.2 (*“Broken Sobolev”*) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio poligonal, \mathcal{T}_h una triangulación de $\bar{\Omega}$ y $l \in \mathbb{Z}^+$. Se definen los espacios de Sobolev por tramos $H^l(\mathcal{T}_h)$ y $H(\mathbf{div}, \mathcal{T}_h)$ como

$$H^l(\mathcal{T}_h) := \{v \in L^2(\Omega) : v|_T \in H^l(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad (2.4)$$

$$H(\mathbf{div}, \mathcal{T}_h) := \{\boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2} : \boldsymbol{\tau}|_T \in H(\mathbf{div}, T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}. \quad (2.5)$$

Observación 2.1.1 Dada la definición de estos espacios, las restricciones de $q \in H^1(\mathcal{T}_h)$, $\mathbf{v} \in [H^1(\mathcal{T}_h)]^2$ y $\boldsymbol{\tau} \in [H^1(\mathcal{T}_h)]^{2 \times 2}$ al esqueleto de la triangulación, resultan ser funciones multivaluadas. Así, dado $e = \partial T \cap \partial T' \in \mathcal{E}_I$, $q|_e = (q_{T,e}, q_{T',e})$, $\mathbf{v}|_e = (\mathbf{v}_{T,e}, \mathbf{v}_{T',e})$ y $\boldsymbol{\tau}|_e = (\boldsymbol{\tau}_{T,e}, \boldsymbol{\tau}_{T',e})$. Mientras que si $e \in \mathcal{E}_\Gamma$, $q|_e = q_{T,e}$, $\mathbf{v}|_e = \mathbf{v}_{T,e}$ y $\boldsymbol{\tau}|_e = \boldsymbol{\tau}_{T,e}$, donde $q_{T,e}$, $\mathbf{v}_{T,e}$, $\boldsymbol{\tau}_{T,e}$, $q_{T',e}$, $\mathbf{v}_{T',e}$ y $\boldsymbol{\tau}_{T',e}$ son las trazas de q , \mathbf{v} y $\boldsymbol{\tau}$ sobre e desde T y T' respectivamente.

Definición 2.1.3 (*Operadores a trozos*) Se definen los operadores $\mathbf{div}_h : H(\mathbf{div}, \mathcal{T}_h) \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$ y $\nabla_h : [H^1(\mathcal{T}_h)]^2 \rightarrow [L^2(\Omega)]^{2 \times 2}$ como los operadores divergencia y gradiente por tramos, es decir $\mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau})|_T = \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}|_T)$ y $\nabla_h(\mathbf{v})|_T = \nabla(\mathbf{v}|_T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \forall \boldsymbol{\tau} \in [H^1(\mathcal{T}_h)]^{2 \times 2}, \forall \mathbf{v} \in [H^1(\mathcal{T}_h)]^2$.

Es importante tener en cuenta que los espacios de elementos finitos $\boldsymbol{\Sigma}_{h,0}$ y \mathbf{W}_h , que son usados en (2.2) y que definiremos más adelante, son subespacios de dimensión finita de algunos de los espacios (2.4) y usualmente se definen en función de espacios de polinomios.

Si en (2.2) sumamos sobre todos los $T \in \mathcal{T}_h$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h^d : \boldsymbol{\tau}^d + \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau}) - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}_T &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}, \\ \int_{\Omega} \nabla_h \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma}_h - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \mathbf{v} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\nu}_T &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para definir los flujos $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\hat{\mathbf{u}}$, necesitamos introducir los operadores “de salto” y “promedio”.

Definición 2.1.4 (Saltos y promedios) Sean T y $T' \in \mathcal{T}_h$ tales que $\partial T \cap \partial T' = e$, y $\boldsymbol{\nu}_T, \boldsymbol{\nu}_{T'}$ es el vector normal unitario exterior a T y T' respectivamente. Dados $q \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} L^2(\partial T)$, $\mathbf{v} \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} [L^2(\partial T)]^2$, $\boldsymbol{\tau} \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} [L^2(\partial T)]^{2 \times 2}$ se define el salto $[[\cdot]]$ y promedio $\{\cdot\}$ a través de $e \in \mathcal{E}$ como

$$\{q\} := \begin{cases} \frac{1}{2}(q_{T,e} + q_{T',e}) & \text{si } e \in \mathcal{E}_I \\ q & \text{si } e \in \mathcal{E}_\Gamma \end{cases}, \quad [[q]] := \begin{cases} q_{T,e}\boldsymbol{\nu}_T + q_{T',e}\boldsymbol{\nu}_{T'} & \text{si } e \in \mathcal{E}_I \\ q\boldsymbol{\nu}_T & \text{si } e \in \mathcal{E}_\Gamma \end{cases} \quad (2.7a)$$

$$\{\mathbf{v}\} := \begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{T,e} + \mathbf{v}_{T',e}) & \text{si } e \in \mathcal{E}_I \\ \mathbf{v} & \text{si } e \in \mathcal{E}_\Gamma \end{cases}, \quad [[\mathbf{v}]] := \begin{cases} \mathbf{v}_{T,e} \cdot \boldsymbol{\nu}_T + \mathbf{v}_{T',e} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T'} & \text{si } e \in \mathcal{E}_I \\ \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}_T & \text{si } e \in \mathcal{E}_\Gamma \end{cases} \quad (2.7b)$$

$$\{\boldsymbol{\tau}\} := \begin{cases} \frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}_{T,e} + \boldsymbol{\tau}_{T',e}) & \text{si } e \in \mathcal{E}_I \\ \boldsymbol{\tau} & \text{si } e \in \mathcal{E}_\Gamma \end{cases}, \quad [[\boldsymbol{\tau}]] := \begin{cases} \boldsymbol{\tau}_{T,e}\boldsymbol{\nu}_T + \boldsymbol{\tau}_{T',e}\boldsymbol{\nu}_{T'} & \text{si } e \in \mathcal{E}_I \\ \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}_T & \text{si } e \in \mathcal{E}_\Gamma \end{cases} \quad (2.7c)$$

Adicionalmente, para \mathbf{v} , definimos el salto tensorial $[[\cdot]]$ como

$$[[\mathbf{v}]] := \begin{cases} \mathbf{v}_{T,e} \otimes \boldsymbol{\nu}_T + \mathbf{v}_{T',e} \otimes \boldsymbol{\nu}_{T'} & \text{si } e \in \mathcal{E}_I \\ \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nu}_T & \text{si } e \in \mathcal{E}_\Gamma. \end{cases} \quad (2.8)$$

Usando estas definiciones de saltos y promedios tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.1.1 Sean $\mathbf{v} \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} [L^2(\partial T)]^2$ y $\boldsymbol{\tau} \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} [L^2(\partial T)]^{2 \times 2}$ entonces

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}_T = \int_{\mathcal{E}} [[\mathbf{v}]] : \{\boldsymbol{\tau}\} + \int_{\mathcal{E}_I} \{\mathbf{v}\} \cdot [[\boldsymbol{\tau}]]. \quad (2.9)$$

Aquí $\int_{\mathcal{E}}$ denota $\sum_{e \in \mathcal{E}} \int_e$.

Demostración: Es suficiente tener en cuenta las definiciones de saltos y promedios dados en (2.7), la identidad $\mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{\tau} = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}$ y que $\boldsymbol{\nu}_{T'} = -\boldsymbol{\nu}_T$. Se omiten mayores detalles. \square

Gracias a (2.9), tenemos la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int_{\Omega} \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla_h \mathbf{v} : \boldsymbol{\tau} = \int_{\mathcal{E}} [[\mathbf{v}]] : \{\boldsymbol{\tau}\} + \int_{\mathcal{E}_I} \{\mathbf{v}\} \cdot [[\boldsymbol{\tau}]], \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in [H^1(\mathcal{T}_h)]^{2 \times 2} \times [H^1(\mathcal{T}_h)]^2. \quad (2.10)$$

Luego, aplicando (2.9) en (2.6) obtenemos la Formulación Variacional Discreta: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \times \mathbf{W}_h$ tal que

$$\frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h^d : \boldsymbol{\tau}^d + \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau}) - \int_{\mathcal{E}} [[\hat{\mathbf{u}}]] : \{\boldsymbol{\tau}\} - \int_{\mathcal{E}_I} \{\hat{\mathbf{u}}\} \cdot [[\boldsymbol{\tau}]] = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}, \quad (2.11)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h : \nabla_h \mathbf{v} - \int_{\mathcal{E}} [[\mathbf{v}]] : \{\hat{\boldsymbol{\sigma}}\} - \int_{\mathcal{E}_I} \{\mathbf{v}\} \cdot [[\hat{\boldsymbol{\sigma}}]] = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h,$$

A continuación describiremos algunos esquemas DG, que son obtenidos según como se definen los flujos numéricos asociados. Discutiremos además sobre la existencia única de solución y estimaciones de error a priori.

2.2. Esquema de Galerkin Discontinuo Local (LDG)

En esta sección definiremos un esquema de Galerkin Discontinuo Local (LDG), en donde el flujo $\hat{\sigma}$ dependerá de σ_h y \mathbf{u}_h mientras que $\hat{\mathbf{u}}$ dependerá sólo de \mathbf{u}_h y del dato de frontera. El objetivo de definir de esta manera los flujos es para eliminar σ_h de la primera ecuación en (2.2) y obtener así una *formulación primal* equivalente a (2.2) (el método tradicional para estudiar estos esquemas, mirar por ejemplo [2, 10, 25]).

Aplicando la fórmula de integración por partes (2.10) en la primera ecuación del problema (2.11) obtenemos la formulación: *Hallar* $(\sigma_h, \mathbf{u}_h) \in \Sigma_{h,0} \times \mathbf{W}_h$ tal que

$$\frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \sigma_h^d : \tau^d - \int_{\Omega} \nabla_h \mathbf{u}_h : \tau + \int_{\mathcal{E}} \llbracket \mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}} \rrbracket : \{\tau\} + \int_{\mathcal{E}_I} \{\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}\} \cdot \llbracket \tau \rrbracket = 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{h,0}, \quad (2.12)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_h : \nabla_h \mathbf{v} - \int_{\mathcal{E}} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket : \{\hat{\sigma}\} - \int_{\mathcal{E}_I} \{\mathbf{v}\} \cdot \llbracket \hat{\sigma} \rrbracket = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h,$$

Tomando como referencia [2], [10], [11] y [25], definimos los flujos numéricos $\hat{\mathbf{u}} := \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{g})$ y $\hat{\sigma} := \hat{\sigma}(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{g})$ para cada $T \in \mathcal{T}_h$ como sigue

$$\hat{\mathbf{u}}_{T,e} := \begin{cases} \{\mathbf{u}_h\} + \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket \beta & \text{si } e \in \mathcal{E}_I, \\ \mathbf{g} & \text{si } e \in \mathcal{E}_{\Gamma}, \end{cases} \quad (2.13)$$

y

$$\hat{\sigma}_{T,e} := \begin{cases} \{\sigma_h\} - \llbracket \sigma_h \rrbracket \otimes \beta - \alpha \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket & \text{si } e \in \mathcal{E}_I, \\ \sigma_h - \alpha(\mathbf{u}_h - \mathbf{g}) \otimes \nu & \text{si } e \in \mathcal{E}_{\Gamma}, \end{cases} \quad (2.14)$$

donde las funciones auxiliares α (escalar) y β (vector) son univaluadas en cada lado $e \in \mathcal{E}$ y son definidas apropiadamente para que nos permitan probar la solubilidad y obtener las razones de convergencia óptimas de nuestra aproximación. Con este fin, definimos $\alpha|_e := \frac{\hat{\alpha}}{h}$, y $\beta \in [L^\infty(\mathcal{E}_I)]^2$ un vector arbitrario de \mathbb{R}^2 , donde $\hat{\alpha} > 0$ es arbitrario, mientras que h es definido por

$$h := \begin{cases} \max\{h_T, h_{T'}\} & \text{si } e \in \mathcal{E}_I, \\ h_T & \text{si } e \in \mathcal{E}_{\Gamma}, \end{cases} \quad (2.15)$$

siendo T y $T' \in \mathcal{T}_h$ elementos compartiendo una arista interior e .

Reemplazando (2.13) y (2.14) en (2.12), y notando que $\llbracket \hat{\mathbf{u}} \rrbracket = 0$ en \mathcal{E}_I , $\llbracket \hat{\mathbf{u}} \rrbracket = \mathbf{g} \otimes \nu$ en \mathcal{E}_{Γ} ,

$\{\hat{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{u}_h\} + \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket \beta$ en \mathcal{E}_I , $\{\hat{\sigma}\} = \{\sigma_h\} - \llbracket \sigma_h \rrbracket \otimes \beta - \alpha \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket$ en \mathcal{E}_I , y

$\{\hat{\sigma}\} = \sigma_h - \alpha(\mathbf{u}_h - \mathbf{g}) \otimes \nu$ en \mathcal{E}_{Γ} ; obtenemos la formulación global LDG: *Hallar* $(\sigma_h, \mathbf{u}_h) \in \Sigma_{h,0} \times \mathbf{W}_h$

tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h^d : \boldsymbol{\tau}^d - \int_{\Omega} \nabla_h \mathbf{u}_h : \boldsymbol{\tau} + \int_{\mathcal{E}} \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket : \{\boldsymbol{\tau}\} - \int_{\mathcal{E}_I} \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket \boldsymbol{\beta} \cdot \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket &= \int_{\mathcal{E}_\Gamma} \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{\tau}, \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h : \nabla_h \mathbf{v} - \int_{\mathcal{E}} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket : \{\boldsymbol{\sigma}_h\} + \int_{\mathcal{E}_I} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket : \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket \otimes \boldsymbol{\beta} + \int_{\mathcal{E}} \alpha \llbracket \mathbf{v} \rrbracket : \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\mathcal{E}_\Gamma} \alpha \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\forall (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \times \mathbf{W}_h.$$

Finalmente, definiendo las formas bilineales

$$\begin{aligned} a_h : [H^1(\mathcal{T}_h)]^{2 \times 2} \times [H^1(\mathcal{T}_h)]^{2 \times 2} &\rightarrow \mathbb{R}, & b_h : [H^1(\mathcal{T}_h)]^{2 \times 2} \times [H^1(\mathcal{T}_h)]^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ a_h(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) &:= \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^d : \boldsymbol{\eta}^d & b_h(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \nabla_h \mathbf{v} : \boldsymbol{\tau} \\ c_h : [H^1(\mathcal{T}_h)]^2 \times [H^1(\mathcal{T}_h)]^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & s_h : [H^1(\mathcal{T}_h)]^{2 \times 2} \times [H^1(\mathcal{T}_h)]^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ c_h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &:= \int_{\mathcal{E}} \alpha \llbracket \mathbf{v} \rrbracket : \llbracket \mathbf{w} \rrbracket & s_h(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) &= \int_{\mathcal{E}_I} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket : (\{\boldsymbol{\tau}\} - \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \otimes \boldsymbol{\beta}) + \int_{\mathcal{E}_\Gamma} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu} \end{aligned} \quad (2.17)$$

y los funcionales

$$\begin{aligned} G_h : [H^1(\mathcal{T}_h)]^{2 \times 2} &\rightarrow \mathbb{R}, & F_h : [H^1(\mathcal{T}_h)]^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ G_h(\boldsymbol{\tau}) &:= \int_{\mathcal{E}_\Gamma} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu} & F_h(\mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\mathcal{E}_\Gamma} \alpha \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

podemos escribir (2.16) como: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \times \mathbf{W}_h$ tal que

$$\begin{aligned} a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) - b_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\tau}) + s_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\tau}) &= G_h(\boldsymbol{\tau}) & \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}, \\ b_h(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}_h) - s_h(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}_h) + c_h(\mathbf{v}, \mathbf{u}_h) &= F_h(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h, \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ahora, siguiendo la metodología clásica (ver por ejemplo [2]) procedemos a eliminar $\boldsymbol{\sigma}_h$ del sistema (2.19) con el objetivo de definir una formulación primal del tipo: *Hallar* $\mathbf{u}_h \in \mathbf{W}_h$ tal que

$$A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h. \quad (2.20)$$

Siguiendo este razonamiento, debemos probar que s_h , definido en (2.17), es una forma bilineal acotada y que G_h es un funcional lineal y acotado. Para estos fines daremos los siguientes resultados.

Lema 2.2.1 *Existen constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$, independientes de h , tal que para todo $\boldsymbol{\tau} := (\boldsymbol{\tau}_T)_{T \in \mathcal{T}_h} \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} [L^2(\partial\Omega)]^{2 \times 2}$, se tiene*

$$i) \quad \|\mathbf{h}^{1/2} \{\boldsymbol{\tau}\}\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}}^2 \leq C_1 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\boldsymbol{\tau}_T\|_{[L^2(\partial T)]^{2 \times 2}}^2.$$

$$ii) \quad \|\mathbf{h}^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2 \leq C_2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\boldsymbol{\tau}_T\|_{[L^2(\partial T)]^{2 \times 2}}^2.$$

$$\text{iii) } \|\mathbf{h}^{1/2}\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\partial\Omega)]^{2\times 2}}^2 \leq C_3 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\boldsymbol{\tau}_T\|_{[L^2(\partial T)]^{2\times 2}}^2.$$

Demostración: Sea $\boldsymbol{\tau} := (\boldsymbol{\tau}_T)_{T \in \mathcal{T}_h} \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} [L^2(\partial\Omega)]^{2\times 2}$. De acuerdo con la definición de $\{\boldsymbol{\tau}\}$, \mathbf{h} y usando el hecho que \mathcal{T}_h satisface (2.3), tenemos para i)

$$\begin{aligned} \text{i) } \|\mathbf{h}^{1/2}\{\boldsymbol{\tau}\}\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2\times 2}}^2 &= \int_{\mathcal{E}_I} |\mathbf{h}^{1/2}\{\boldsymbol{\tau}\}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{e \in \mathcal{E}_I} \int_e \mathbf{h} |\boldsymbol{\tau}_{T,e} + \boldsymbol{\tau}_{T',e}|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_I} \int_e \mathbf{h} (|\boldsymbol{\tau}_{T,e}|^2 + |\boldsymbol{\tau}_{T',e}|^2) \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \mathbf{h} |\boldsymbol{\tau}_T|^2 \leq C_1 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} h_T |\boldsymbol{\tau}_T|^2 \\ &= C_1 \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T \|\boldsymbol{\tau}_T\|_{[L^2(\partial T)]^{2\times 2}}^2. \end{aligned}$$

Donde C_1 depende de l dado en la Definición 2.1.1.

Procediendo de manera similar en ii) y iii) obtenemos respectivamente,

$$\begin{aligned} \text{ii) } \|\mathbf{h}^{1/2}[\boldsymbol{\tau}]\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2 &= \sum_{e \in \mathcal{E}_I} \int_e \mathbf{h} |\boldsymbol{\tau}_{T,e} \boldsymbol{\nu}_T + \boldsymbol{\tau}_{T',e} \boldsymbol{\nu}_{T'}|^2 \leq 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_I} \int_e \mathbf{h} (|\boldsymbol{\tau}_{T,e} \boldsymbol{\nu}_T|^2 + |\boldsymbol{\tau}_{T',e} \boldsymbol{\nu}_{T'}|^2) \\ &\leq 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_I} \int_e \mathbf{h} (|\boldsymbol{\tau}_{T,e}|^2 + |\boldsymbol{\tau}_{T',e}|^2) \leq 4C_1 \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T \|\boldsymbol{\tau}_T\|_{[L^2(\partial T)]^{2\times 2}}^2. \\ \text{iii) } \|\mathbf{h}^{1/2}[\boldsymbol{\tau}]\|_{[L^2(\mathcal{E}_\Gamma)]^2}^2 &= \sum_{e \in \mathcal{E}_\Gamma} \int_e \mathbf{h} |\boldsymbol{\tau}_{T,e}|^2 \leq \sum_{e \in \mathcal{E}} \int_e \mathbf{h} |\boldsymbol{\tau}_{T,e}|^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\boldsymbol{\tau}_T\|_{[L^2(\partial T)]^{2\times 2}}^2 \end{aligned}$$

En la última inecuación usamos el hecho que $\mathbf{h} = h_T$ en \mathcal{E}_Γ . □

Lema 2.2.2 *Existe $C_{INV} > 0$, dependiendo sólo de k y la regularidad de la malla, tal que*

$$\|q\|_{[L^2(\partial T)]^{2\times 2}}^2 \leq C_{INV} h_T^{-1} \|q\|_{[L^2(T)]^{2\times 2}}^2 \quad \forall q \in [P_k(T)]^{2\times 2}, \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (2.21)$$

Demostración: La demostración se sigue del Teorema 4.7.6, ecuación (4.6.4), en [26]. □

A continuación introduciremos los espacios de elementos finitos usados en este esquema:

$$\mathbf{W}_h := \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v}|_T \in [P_k(T)]^2, \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad (2.22)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_h = \{\boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \boldsymbol{\tau}|_T \in [P_s(T)]^{2\times 2}, \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} = \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h : \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} = 0 \right\}, \quad (2.23)$$

provistos de las siguientes normas: Para $\boldsymbol{\Sigma}_h$ consideramos la norma $\|\cdot\|_{\boldsymbol{\Sigma}} : [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}} := \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}. \quad (2.24)$$

Respecto de \mathbf{W}_h , primero definimos la seminorma $|\cdot|_h : [H^1(\mathcal{T}_h)]^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$|\mathbf{v}|_h := \left(\|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}}^2 + \|\alpha^{1/2} \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_\Gamma)]^{2 \times 2}}^2 \right)^{1/2} \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(\mathcal{T}_h)]^2. \quad (2.25)$$

y la norma $\|\cdot\|_h : [H^1(\mathcal{T}_h)]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|\mathbf{v}\|_h := \left(\|\nabla_h \mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + |\mathbf{v}|_h^2 \right)^{1/2} \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(\mathcal{T}_h)]^2. \quad (2.26)$$

Adicionalmente, definimos la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_{LDG} : [L^2(\Omega)]^{2 \times 2} \times [H^1(\mathcal{T}_h)]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\|(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\|_{LDG} := \left(\|\boldsymbol{\tau}\|_{\Sigma}^2 + \|\mathbf{v}\|_h^2 \right)^{1/2} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2} \times [H^1(\mathcal{T}_h)]^2. \quad (2.27)$$

Lema 2.2.3 *La forma bilineal s_h , definida en (2.17), es acotada. Además, existe un operador lineal y acotado $\mathbf{S} : \mathbf{W}_h \rightarrow \Sigma_{h,0}$ tal que, dado $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h$ se tiene*

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\tau} = s_h(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{h,0}. \quad (2.28)$$

Demostración: Se observa que los operadores de saltos y promedios definidos en (2.7) son lineales. Por otro lado, aplicando las desigualdad triangular, de Cauchy-Schwarz, y considerando que $\boldsymbol{\beta} \in [L^\infty(\mathcal{E}_I)]^2$, tenemos que

$$\begin{aligned} |s_h(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})| &\leq \int_{\mathcal{E}_I} |\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket| |\alpha^{-1/2} \{\boldsymbol{\tau}\}| + \|\boldsymbol{\beta}\|_{[L^\infty(\mathcal{E}_I)]^2} \int_{\mathcal{E}_I} |\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket| |\alpha^{-1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket| + \int_{\mathcal{E}_\Gamma} |\alpha^{1/2} \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nu}| |\boldsymbol{\tau}| \\ &\leq \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}} \|\alpha^{-1/2} \{\boldsymbol{\tau}\}\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}} + \widehat{\beta} \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}} \|\alpha^{-1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}} \\ &\quad + \|\alpha^{1/2} \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_\Gamma)]^{2 \times 2}} \|\alpha^{-1/2} \boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\mathcal{E}_\Gamma)]^{2 \times 2}} \end{aligned}$$

obteniendo,

$$|s_h(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})| \leq C |\mathbf{v}|_h \left(\|\alpha^{-1/2} \{\boldsymbol{\tau}\}\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}}^2 + \|\alpha^{-1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}}^2 + \|\alpha^{-1/2} \boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\mathcal{E}_\Gamma)]^{2 \times 2}}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.29)$$

Luego, usando la definición de α (ver (2.14)) y la parte i) del Lema 2.2.1, se deduce que

$$\|\alpha^{-1/2} \{\boldsymbol{\tau}\}\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}}^2 = \widehat{\alpha}^{-1} \|\mathbf{h}^{1/2} \{\boldsymbol{\tau}\}\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}}^2 \leq \widehat{\alpha}^{-1} C_1 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\boldsymbol{\tau}_T\|_{[L^2(\partial T)]^{2 \times 2}}^2.$$

Aplicando el Lema 2.2.2, se concluye,

$$\|\alpha^{-1/2} \{\boldsymbol{\tau}\}\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}}^2 \leq \widehat{\alpha}^{-1} C_1 C_{INV} \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2. \quad (2.30)$$

Para el segundo y tercer término de (2.29) procedemos de manera similar. En efecto, aplicando las partes ii) y iii) del Lema 2.2.1 y Lema 2.2.2, se obtiene

$$\|\alpha^{-1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}}^2 \leq \widehat{\alpha}^{-1} C_2 C_{INV} \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2, \quad (2.31)$$

y

$$\|\alpha^{-1/2}\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\partial\Omega)]^{2\times 2}}^2 \leq \widehat{\alpha}^{-1}C_3C_{INV}\|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}}^2. \quad (2.32)$$

Reemplazando (2.30), (2.31), y (2.32) en (2.29), se deduce que

$$|s_h(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})| \leq C_s|\mathbf{v}|_h\|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \leq C_s\|\mathbf{v}\|_h\|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h},$$

siendo $C_s := C\widehat{\alpha}^{-1}\max\{C_1, C_2, C_3\}$.

De esta manera, se concluye que s_h es una forma bilineal y acotada.

Por otro lado, sea $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h$ fijo, pero arbitrario. Se tiene que el funcional $B_{\mathbf{v}} : \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $B_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\tau}) := s_h(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})$ vive en $\boldsymbol{\Sigma}'_{h,0}$. Esto permite definir una aplicación $\mathbb{B} : \mathbf{W}_h \rightarrow \boldsymbol{\Sigma}'_{h,0}$, tal que $\mathbb{B}(\mathbf{v}) = B_{\mathbf{v}}$.

Por otro lado, del Teorema de Representación de Riez, dado $F \in \boldsymbol{\Sigma}'_{h,0}$, es posible definir $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\Sigma}_{h,0}} : \boldsymbol{\Sigma}'_{h,0} \rightarrow \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}$ tal que $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\Sigma}_{h,0}}(F)$ satisface la relación $F(\boldsymbol{\eta}) = \langle \mathcal{R}_{\boldsymbol{\Sigma}_{h,0}}(F), \boldsymbol{\eta} \rangle_{\boldsymbol{\Sigma}_h}$, $\forall \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}$. Así, podemos definir $\mathcal{S} : \mathbf{W}_h \rightarrow \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}$ tal que

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) := (\mathcal{R}_{\boldsymbol{\Sigma}_{h,0}} \circ \mathbb{B})(\mathbf{v}) = \mathcal{R}_{\boldsymbol{\Sigma}_{h,0}}(\mathbb{B}(\mathbf{v})) = \mathcal{R}_{\boldsymbol{\Sigma}_{h,0}}(B_{\mathbf{v}}),$$

tal que

$$\int_{\Omega} \mathcal{S}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\tau} = \langle \boldsymbol{\tau}, \mathcal{S}(\mathbf{v}) \rangle_{\boldsymbol{\Sigma}_h} = \langle \boldsymbol{\tau}, \mathcal{R}_{\boldsymbol{\Sigma}_{h,0}}(B_{\mathbf{v}}) \rangle_{\boldsymbol{\Sigma}_h} = B_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\tau}) = s_h(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}).$$

□

Lema 2.2.4 *El funcional G_h , definido en (2.18), es lineal y acotado (es decir $G_h \in \boldsymbol{\Sigma}'_h$). Además, existe $\mathcal{G} \in \boldsymbol{\Sigma}_h$ tal que*

$$G_h(\boldsymbol{\tau}) = \int_{\Omega} \mathcal{G} : \boldsymbol{\tau}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h.$$

Más aún, existe $C_{\mathcal{G}} > 0$ tal que

$$\|\mathcal{G}\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \leq C_{\mathcal{G}}\|\alpha^{1/2}g \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2\times 2}}.$$

Demostración: No es difícil verificar que G_h es lineal, veamos que es acotado. Sea $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h$. Tenemos

$$\begin{aligned} |G_h(\boldsymbol{\tau})| &= \left| \int_{\mathcal{E}_T} g \otimes \boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{\tau} \right| \leq \|\alpha^{1/2}g \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2\times 2}} \|\alpha^{-1/2}\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2\times 2}} \\ &= \widehat{\alpha}^{-1/2} \|\alpha^{1/2}g \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2\times 2}} \|\mathbf{h}^{1/2}\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2\times 2}} \\ &\leq \widehat{\alpha}^{-1/2} C_3^{1/2} \|\alpha^{1/2}g \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2\times 2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\boldsymbol{\tau}_T\|_{[L^2(\partial T)]^{2\times 2}}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \widehat{\alpha}^{-1/2} C_3^{1/2} C_{INV}^{1/2} \|\alpha^{1/2}g \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2\times 2}} \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}}. \end{aligned}$$

Luego, definiendo $C_{\mathcal{G}}^2 := \widehat{\alpha}^{-1}C_3C_{INV}$ tenemos que G_h es acotado y así $G_h \in \boldsymbol{\Sigma}'_h$. Gracias al Teorema de Representación de Riez, existe $\mathcal{G} \in \boldsymbol{\Sigma}_h$ tal que

$$G_h(\boldsymbol{\tau}) = \langle \mathcal{G}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\boldsymbol{\Sigma}_h} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h \iff \int_{\mathcal{E}_T} g \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu} = \int_{\Omega} \mathcal{G} : \boldsymbol{\tau} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h. \quad (2.33)$$

Por otro lado, usando (2.33) tenemos que $G_h(\mathcal{G}) = \|\mathcal{G}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2$ y del acotamiento de $G_h(\mathcal{G})$ tenemos

$$\|\mathcal{G}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}} \leq C_{\mathcal{G}} \|\alpha^{1/2} g \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2 \times 2}}.$$

□

Ahora, considerando (2.28) y (2.33), la primera ecuación del problema (2.19) puede ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\nu} \boldsymbol{\sigma}_h^d - \nabla_h \mathbf{u}_h + \mathbf{S}(\mathbf{u}_h) - \mathcal{G} \right) : \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}.$$

Asumiendo que $\nabla_h \mathbf{W}_h \subseteq \boldsymbol{\Sigma}_h$, se obtiene

$$\boldsymbol{\sigma}_h^d = \nu(\nabla_h \mathbf{u}_h - \mathbf{S}(\mathbf{u}_h) + \mathcal{G}). \quad (2.34)$$

Por otro lado, la segunda ecuación de (2.19) se puede escribir como

$$\int_{\Omega} (\nabla_h \mathbf{v} - \mathbf{S}(\mathbf{v})) : \boldsymbol{\sigma}_h^d + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla_h \mathbf{v} - \mathbf{S}(\mathbf{v})) : \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_h \mathbf{I} + c_h(\mathbf{v}, \mathbf{u}_h) = F_h(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h.$$

Luego, reemplazando (2.34), se llega a la formulación primal condensada: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \times \mathbf{W}_h$ tal que: $\boldsymbol{\sigma}_h^d = \nu(\nabla_h \mathbf{u}_h - \mathbf{S}(\mathbf{u}_h) + \mathcal{G})$ y

$$\nu \int_{\Omega} (\nabla_h \mathbf{v} - \mathbf{S}(\mathbf{v})) : (\nabla_h \mathbf{u}_h - \mathbf{S}(\mathbf{u}_h)) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla_h \mathbf{v} - \mathbf{S}(\mathbf{v})) : \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h) \mathbf{I} + c_h(\mathbf{v}, \mathbf{u}_h) = F_h(\mathbf{v}) - \nu \int_{\Omega} (\nabla_h \mathbf{v} - \mathbf{S}(\mathbf{v})) : \mathcal{G}, \quad (2.35)$$

$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h$.

Dado que en la condensación estática (2.34) sólo es posible obtener $\boldsymbol{\sigma}_h^d$ en función de \mathbf{u}_h , no es posible obtener la formulación primal del método pues en la formulación (2.35) queda un término que depende de la traza de $\boldsymbol{\sigma}_h$, la cual es desconocida. Aún así es posible mostrar que el problema (2.19) tiene única solución, que es lo que estudiamos en el siguiente Teorema.

Teorema 2.2.1 *Suponiendo que $\nabla_h \mathbf{W}_h \subseteq \boldsymbol{\Sigma}_h$, el problema (2.19) tiene única solución.*

Demostración: La existencia y unicidad del esquema lineal (2.19) pasa por mostrar que el problema homogéneo asociado tiene solución trivial. Tomando $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}_h$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u}_h$ en la primera y segunda ecuación del problema homogéneo asociado a (2.19) respectivamente, tenemos

$$a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\sigma}_h) - b_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h) + s_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h) = 0,$$

$$b_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h) - s_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h) + c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = 0.$$

Sumando estas ecuaciones y considerando (2.24) y (2.25), llegamos a

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h^d\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2 + |\mathbf{u}_h|_h^2 = 0,$$

entonces,

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h^d\|_{0,\Omega} = 0 \wedge |\mathbf{u}_h|_h = 0 \implies \boldsymbol{\sigma}_h^d = \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\Sigma}_h},$$

también, de $|\mathbf{u}_h|_h = 0$, concluimos que \mathbf{u}_h es continua en Ω y se anula en $\partial\Omega$.

Reemplazando $\boldsymbol{\sigma}_h^d = \theta_{\Sigma_h}$ y \mathbf{u}_h en la primera ecuación de (2.19) y considerando que $\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket = 0$ llegamos a

$$\int_{\Omega} \nabla_h \mathbf{u}_h : \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{h,0}.$$

Dado que $\nabla_h \mathbf{W}_h \subseteq \Sigma_h$, $\nabla_h \mathbf{u}_h \in \Sigma_{h,0}$, tomando $\boldsymbol{\tau} = \nabla_h \mathbf{u}_h$ en la integral de arriba obtenemos que \mathbf{u}_h es constante en Ω , pero \mathbf{u}_h es cero en $\partial\Omega$, en consecuencia

$$\mathbf{u}_h = \theta_{\mathbf{W}_h}.$$

Ahora, $\boldsymbol{\sigma}_h = \boldsymbol{\sigma}_h^d + \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h) \mathbf{I} = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h) \mathbf{I}$. Reemplazando $\boldsymbol{\sigma}_h$ y \mathbf{u}_h en la segunda ecuación de (2.19) obtenemos

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla_h \mathbf{v} : \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h) \mathbf{I} - s_h(\mathbf{v}, \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h) \mathbf{I}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h.$$

Definiendo $\widehat{\mathbf{W}}_h := \{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_h : \mathbf{w}|_T \in RT_{k-1}(T), \forall T \in \mathcal{T}_h \wedge \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \mathcal{E}_{\Gamma}\}$, la ecuación de arriba resulta

$$\int_{\Omega} \text{div}_h(\mathbf{v}) \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \widehat{\mathbf{W}}_h. \quad (2.36)$$

Ahora, en vista que $\boldsymbol{\sigma}_h \in \Sigma_{h,0}$, se deduce $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h) \in L_0^2(\Omega)$. Además, del Corolario 2.4 en [19] tenemos que \mathbf{div} es sobreyectivo de $[H_0^1(\Omega)]^2$ a $L_0^2(\Omega)$, esto implica que existe $\mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ tal que $\mathbf{div}(\mathbf{w}) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h)$. Sea $\mathbf{v}_h = \Pi(\mathbf{w})$, donde $\Pi(\mathbf{w})|_T = \Pi_{RT}(\mathbf{w}|_T)$, $\forall T \in \mathcal{T}_h$, siendo Π_{RT} el operador proyección de Raviart-Thomas de grado $k-1$, con $k \in \mathbb{Z}^+$. En este sentido

$$\mathbf{div}(\mathbf{v}_h|_T) = \mathbf{div}(\Pi_{RT} \mathbf{w}) = \mathcal{P}_{k-1}(\mathbf{div}(\mathbf{w})|_T) = \mathcal{P}_{k-1}(\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h)|_T) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h)|_T \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Finalmente, tomando $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h$ en (2.36), obtenemos $\|\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, concluyendo que

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \theta_{\Sigma_h}.$$

Así, el problema homogéneo asociado a (2.19) tiene solución trivial, y concluimos que el problema (2.19) tiene única solución. \square

Desafortunadamente, en principio no supimos cómo obtener estimaciones de error a priori para el Problema (2.19). En su lugar, nuestra propuesta consistió en evitar ese camino presentando un esquema discontinuo que extiende de forma natural la formulación mixta dual estándar, esto es descrito a continuación.

2.3. Un segundo esquema de Galerkin Discontinuo (DG)

Aplicando la fórmula de integración por partes (2.10) en la segunda ecuación del Problema (2.11) obtenemos la formulación: *Hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \Sigma_{h,0} \times \mathbf{W}_h$ tal que*

$$\frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h^d : \boldsymbol{\tau}^d + \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau}) - \int_{\mathcal{E}} \llbracket \hat{\mathbf{u}} \rrbracket : \{\boldsymbol{\tau}\} - \int_{\mathcal{E}_I} \{\hat{\mathbf{u}}\} \cdot \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}, \quad (2.37)$$

$$- \int_{\Omega} \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{v} + \int_{\mathcal{E}} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket : (\{\boldsymbol{\sigma}_h - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\}) + \int_{\mathcal{E}_I} \{\mathbf{v}\} \cdot (\llbracket \boldsymbol{\sigma}_h - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h,$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}_{h,0}$ y \mathbf{W}_h son espacios de elementos finitos apropiados.

Siguiendo el camino usado en [6], definimos los siguientes flujos numéricos:

$$\hat{\mathbf{u}}_{T,e} := \begin{cases} \{\mathbf{u}_h\} + \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket \boldsymbol{\beta} - \gamma \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket & \text{si } e \in \mathcal{E}_I, \\ \mathbf{g} & \text{si } e \in \mathcal{E}_{\Gamma}, \end{cases} \quad (2.38)$$

y

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{T,e} := \begin{cases} \{\boldsymbol{\sigma}_h\} - \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket \otimes \boldsymbol{\beta} - \alpha \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket & \text{si } e \in \mathcal{E}_I, \\ \boldsymbol{\sigma}_h - \alpha(\mathbf{u}_h - \mathbf{g}) \otimes \boldsymbol{\nu} & \text{si } e \in \mathcal{E}_{\Gamma}, \end{cases} \quad (2.39)$$

donde las funciones auxiliares α , γ (escalares) y $\boldsymbol{\beta}$ (vector) son univaluadas en cada lado $e \in \mathcal{E}$ y son definidas de manera que se obtengan las razones óptimas de convergencia de nuestra aproximación. En este sentido, definimos $\alpha|_e = \hat{\alpha} \mathbf{h}$, $\gamma|_e = \frac{\hat{\gamma}}{\mathbf{h}}$ y $\boldsymbol{\beta} \in L^\infty(\mathcal{E}_I)$ un vector arbitrario de \mathbb{R}^2 , con $\hat{\alpha}, \hat{\gamma} > 0$ arbitrarios, mientras que \mathbf{h} está definido en (2.15).

Reemplazando (2.38) y (2.39) en (2.37) resulta el problema: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \times \mathbf{W}_h$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h^d : \boldsymbol{\tau}^d + \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau}) + \int_{\mathcal{E}_I} \gamma \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket \cdot \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket - \int_{\mathcal{E}_I} (\{\mathbf{u}_h\} + \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket \boldsymbol{\beta}) \cdot \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket = \int_{\mathcal{E}_{\Gamma}} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}, \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\sigma}_h) + \int_{\mathcal{E}_I} (\{\mathbf{v}\} + \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \boldsymbol{\beta}) \cdot \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket + \int_{\mathcal{E}} \alpha \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket : \llbracket \mathbf{v} \rrbracket = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\mathcal{E}_{\Gamma}} \alpha \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\nu} : \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$\forall (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \times \mathbf{W}_h$.

Así, definiendo las formas bilineales

$$\begin{aligned} & a_{DG} : [H^1(\mathcal{T}_h)]^{2 \times 2} \times [H^1(\mathcal{T}_h)]^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b_{DG} : [H^1(\mathcal{T}_h)]^{2 \times 2} \times [H^1(\mathcal{T}_h)]^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ & a_{DG}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) := \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^d : \boldsymbol{\eta}^d + \int_{\mathcal{E}_I} \gamma \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \cdot \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket, \quad b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau}) - \int_{\mathcal{E}_I} (\{\mathbf{v}\} + \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \boldsymbol{\beta}) \cdot \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \\ & c_{DG} : [H^1(\mathcal{T}_h)]^2 \times [H^1(\mathcal{T}_h)]^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ & c_{DG}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \int_{\mathcal{E}} \alpha \llbracket \mathbf{v} \rrbracket : \llbracket \mathbf{w} \rrbracket \end{aligned} \quad (2.41)$$

y los funcionales

$$\begin{aligned} & G_{DG} : [H^1(\mathcal{T}_h)]^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_{DG} : [H^1(\mathcal{T}_h)]^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ & G_{DG}(\boldsymbol{\tau}) := \int_{\mathcal{E}_{\Gamma}} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu} \quad F_{DG}(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\mathcal{E}_{\Gamma}} \alpha \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\nu} : \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nu} \end{aligned} \quad (2.42)$$

obtenemos la formulación global DG: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \times \mathbf{W}_h$ tal que

$$\begin{aligned} a_{DG}(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) + b_{DG}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\tau}) &= G_{DG}(\boldsymbol{\tau}) & \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}, \\ -b_{DG}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}_h) + c_{DG}(\mathbf{v}, \mathbf{u}_h) &= F_{DG}(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h. \end{aligned} \quad (2.43)$$

A continuación mostraremos algunas propiedades de las formas bilineales y los funcionales definidos que nos permitirán asegurar la existencia y unicidad de solución, así como la estabilidad del esquema.

2.3.1. Existencia y unicidad

El objetivo de esta sección es demostrar propiedades de las formas bilineales dadas en (2.41) y los funcionales definidos en (2.42), para concluir la existencia y unicidad del esquema (2.43). Para tales efectos dotamos el espacio $\boldsymbol{\Sigma}_{h,0}$ de la norma

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h} = \left(\|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\gamma^{1/2}[\boldsymbol{\tau}]\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2 + \|\mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \right)^{1/2} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}; \mathcal{T}_h),$$

y $[L^2(\Omega)]^2$ con su norma habitual. Por lo tanto, para el espacio producto, consideramos $\|(\cdot, \cdot)\|_{DG} : H(\mathbf{div}; \mathcal{T}_h) \times [L^2(\Omega)]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\|(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\|_{DG} := \left(\|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h}^2 + \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \right)^{1/2} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in H(\mathbf{div}; \mathcal{T}_h) \times [L^2(\Omega)]^2.$$

La continuidad de las formas bilineales, medida en sus correspondientes normas, se sigue de una estimación directa, y utiliza algunas desigualdades definidas sobre los espacios discretos $\boldsymbol{\Sigma}_h$ y \mathbf{W}_h que aproximan a las soluciones buscadas. Para tal fin, comenzamos introduciendo los espacios de elementos finitos como siguen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_h &:= \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2} : \boldsymbol{\tau}|_T \in [\mathbf{RT}_r(T)]^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} &:= \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h : \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} = 0 \right\}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{W}_h := \{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v}|_T \in [P_k(T)]^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \},$$

donde $k, r \geq 0$. Dado $\kappa \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbf{RT}_{\kappa}(T)$ es el subespacio vectorial de $[P_{\kappa+1}(T)]^2$ definido por:

$$\mathbf{RT}_{\kappa}(T) := [P_{\kappa}(T)]^2 \oplus \mathbf{x}P_{\kappa}(T), \quad (2.45)$$

conocido como espacio de Raviart-Thomas local, definido sobre cada $T \in \mathcal{T}_h$.

A continuación daremos dos resultados. El primero de ellos es necesario para el acotamiento de la forma bilineal b_{DG} y del funcional F_{DG} , mientras que el segundo nos dará una cota para $\|\cdot\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h}$.

Lema 2.3.1 *Existe $C > 0$, independiente del tamaño de la malla, tal que*

$$a) \|\mathbf{h}^{1/2} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^2}^2 \leq C \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h.$$

$$b) \|\mathbf{h}^{1/2} \{\mathbf{v}\}\|_{[L^2(\mathcal{E})]^2}^2 \leq C \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h.$$

Demostración: Comenzaremos probando *a*). Siguiendo un razonamiento similar a la demostración del Lema 2.2.1 (o del Lema 3.1 en [10]) se sigue que existe $c^* > 0$, independiente del tamaño de la malla tal que

$$\|\mathbf{h}^{1/2} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^2}^2 \leq c^* \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\partial T)]^2}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h.$$

Luego, aplicando el Lema 2.2.2, se deduce

$$\|\mathbf{h}^{1/2} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^2}^2 \leq C \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h,$$

con $C = c^* C_{INV}$. Para *b*) se procede de manera similar. Omitimos más detalles. \square

Lema 2.3.2 *Existe una constante $c_3 > 0$, independiente del tamaño de malla, tal que*

$$c_3 \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 \leq \|\boldsymbol{\tau}^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2. \quad (2.46)$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_0 := \{\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \mathcal{T}_h) : \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} = 0\}$.

Demostración: Adaptamos la prueba de la Proposición IV.3.1 en [9]. Sea $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_0$. Dado que $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^d + \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{I}$, es fácil ver que

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 = \|\boldsymbol{\tau}^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \frac{1}{2} \|\text{tr}(\boldsymbol{\tau})\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

por ende (2.46) será consecuencia de probar

$$\|\text{tr}(\boldsymbol{\tau})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C (\|\boldsymbol{\tau}^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2).$$

Con este fin, considerando que $\int_{\Omega} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 0$, deducimos que existe $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$, tal que

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \text{ en } \Omega \quad \text{y} \quad \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq c \|\text{tr}(\boldsymbol{\tau})\|_{L^2(\Omega)}.$$

Luego, considerando la decomposición $\nabla \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v})^d + \frac{1}{2} \text{tr}(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{I} = (\nabla \mathbf{v})^d + \frac{1}{2} \text{div}(\mathbf{v}) \mathbf{I}$ y que $\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta}^d = \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^d : \boldsymbol{\eta}$, deducimos que

$$\|\text{tr}(\boldsymbol{\tau})\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \text{div}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \text{div}(\mathbf{v}) \mathbf{I} = 2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} - 2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^d : \nabla \mathbf{v}.$$

Aplicando la fórmula de integración por partes (2.10) al lado derecho de la ecuación anterior, tenemos

$$\|\text{tr}(\boldsymbol{\tau})\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2 \left(\int_{\mathcal{E}_I} \{\mathbf{v}\} \cdot \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}_h \boldsymbol{\tau} - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^d : \nabla \mathbf{v} \right),$$

de donde se ve que la demostración se sigue de la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*, Lema 2.3.1, y el hecho de que $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$. \square

Gracias al Lema 2.3.1 podemos establecer ahora las siguientes propiedades de continuidad de las formas bilineales.

Lema 2.3.3 *Existe $C_{cont} > 0$, independiente del tamaño de la malla, tal que*

$$a_{DG}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) \leq C_{cont} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h} \|\boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times \boldsymbol{\Sigma}_h, \quad (2.47)$$

$$b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \leq C_{cont} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times \mathbf{W}_h, \quad (2.48)$$

$$c_{DG}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq C_{cont} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\mathbf{w}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \quad \forall (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{W}_h \times \mathbf{W}_h. \quad (2.49)$$

Demostración: Sean $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\Sigma}_h$ y $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}_h$, primero notamos que (2.47) se sigue de la aplicación de la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*, de $\|\boldsymbol{\tau}^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}} \leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}} \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h$ y de la definición de $\|\cdot\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h}$

$$\begin{aligned} |a_{DG}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta})| &\leq \frac{1}{\nu} \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}} \|\boldsymbol{\eta}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}} + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \\ &\leq \frac{1}{\nu} (\|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2)^{1/2} (\|\boldsymbol{\eta}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2)^{1/2} \\ &\leq C_{cont} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h} \|\boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h}, \end{aligned}$$

con $C_{cont} = \frac{1}{\nu}$. Por otro lado, para (2.48) usamos la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*, la definición de γ , el hecho que $\boldsymbol{\beta} \in [L^\infty(\mathcal{E}_I)]^2$ y el Lema 2.3.1

$$\begin{aligned} |b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})| &\leq \|\mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\quad + \frac{1}{\hat{\gamma}} \left(\|\mathbf{h}^{1/2} \{\mathbf{v}\}\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} + \|\boldsymbol{\beta}\|_{[L^\infty(\mathcal{E}_I)]^2} \|\mathbf{h}^{1/2} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \right) \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \\ &\leq \|\mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \frac{\sqrt{C}(1 + \|\boldsymbol{\beta}\|_{[L^\infty(\mathcal{E}_I)]^2})}{\hat{\gamma}} \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\leq C_{cont} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}, \end{aligned}$$

con $C_{cont} = \max \left\{ 1, \frac{\sqrt{C}(1 + \|\boldsymbol{\beta}\|_{[L^\infty(\mathcal{E}_I)]^2})}{\hat{\gamma}} \right\}$. Por último, para (2.49) usaremos la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*, la definición de α y el Lema 2.3.1

$$\begin{aligned} |c_{DG}(\mathbf{v}, \mathbf{w})| &\leq \hat{\alpha} \|\mathbf{h}^{1/2} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \|\mathbf{h}^{1/2} \llbracket \mathbf{w} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \\ &\leq C_{cont} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\mathbf{w}\|_{[L^2(\Omega)]^2}, \end{aligned}$$

con $C_{cont} = \hat{\alpha}C$. □

El acotamiento de los funcionales se muestra en el siguiente Lema, teniendo en cuenta que el vector normal $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)^T$ es unitario, esto es $\|\boldsymbol{\nu}\|_{\mathbb{R}^2}^2 := \nu_1^2 + \nu_2^2 = 1$.

Lema 2.3.4 *Existe $C_{cot} > 0$, independiente del tamaño de la malla, tal que*

$$|F_{DG}(\mathbf{v})| \leq C_{cot} \left(\|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|\alpha^{1/2} \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2 \times 2}} \right) \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h, \quad (2.50)$$

$$|G_{DG}| \leq C_{cot} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h} \|\gamma^{1/2} \mathbf{g}\|_{[L^2(\Gamma)]^2} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h. \quad (2.51)$$

Demostración: Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h$. Usando la desigualdad de *Cauchy – Schwarz* y la definición del funcional F_{DG} obtenemos

$$|F_{DG}(\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|\alpha^{1/2} \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2 \times 2}} \|\alpha^{1/2} \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2 \times 2}},$$

ahora, siendo $\alpha = \hat{\alpha}h$ y considerando los Lemas 2.2.1 y 2.2.2, tenemos que

$$|F_{DG}(\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \sqrt{\hat{\alpha}C_3C_{INV}} \|\alpha^{1/2} \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2 \times 2}} \|\mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}.$$

Finalmente, dado que $\boldsymbol{\nu}$ es unitario, es fácil ver que $\|\mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\partial T)]^{2 \times 2}} = \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\partial T)]^2}$. Usando esta igualdad se deduce (2.50) con $C_{cot} = \max\{1, \sqrt{\hat{\alpha}C_3C_{INV}}\}$.

Sea $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h$. Dado que la expresión $\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}$ puede ser escrita como $\mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{\tau}$, se tiene

$$|G_{DG}| \leq \|\mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2 \times 2}} \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2 \times 2}}.$$

La prueba de (2.51) considera los mismos argumentos utilizados para probar (2.50). \square

Para finalizar esta sección mostraremos que la forma bilineal b_{DG} satisface una condición de tipo *inf-sup* discreta.

Lema 2.3.5 *Sea \mathbf{W}_h un subespacio de dimensión finita de $[L^2(\Omega)]^2$ tal que \mathbf{W}_h es subespacio de $\text{div}_h \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}$. Entonces, para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h$ existe $\tilde{c} > 0$ tal que*

$$\sup_{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \setminus \{\theta\}} \frac{b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h}} \geq \tilde{c} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}.$$

Demostración: Dado $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h$, definiendo $\boldsymbol{\eta} := -\nabla \mathbf{z}$, con \mathbf{z} solución del Problema auxiliar (1.21) tenemos que $\boldsymbol{\eta} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ es tal que $\text{div}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{v}$ y $\|\boldsymbol{\eta}\|_{H(\text{div}; \Omega)} \leq \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}$. Ahora, denotando por $\boldsymbol{\eta}_h = \Pi_{RT}(\boldsymbol{\eta})$, la proyección de *Raviart-Thomas* de $\boldsymbol{\eta}$ en $\boldsymbol{\Sigma}_h \cap H(\text{div}; \Omega)$, tenemos que $\text{div}(\boldsymbol{\eta}_h) = \mathbf{v}$, $\boldsymbol{\eta}_h \in \boldsymbol{\Sigma}_h$ y $\|\gamma^{1/2}[\boldsymbol{\eta}_h]\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^2}^2 = 0$. Esto implica que

$$\sup_{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \setminus \{\theta\}} \frac{b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h}} \geq \frac{b_{DG}(\boldsymbol{\eta}_h, \mathbf{v})}{\|\boldsymbol{\eta}_h\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h}} \geq \frac{\|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2}{\|\boldsymbol{\eta}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2},$$

queda así demostrado el Lema. \square

Observación 2.3.1 *No es difícil ver que el Lema 2.3.5 también es válido reemplazando $\boldsymbol{\Sigma}_{h,0}$ por $\boldsymbol{\Sigma}_h$.*

Observación 2.3.2 *Con el objetivo de probar el buen planteamiento de este esquema, podríamos tratar de aplicar la teoría de Babuška-Brezzi. Sin embargo, la dificultad de esta técnica es la caracterización del kernel de \mathbf{B}_{DG} , el operador lineal inducido por la forma bilineal b_{DG} . Para facilitar esta caracterización, se puede usar un alto grado polinomial. Por ejemplo, si usamos al menos un polinomio local de grado 3 para el espacio \mathbf{W}_h , eligiendo funciones burbuja en el elemento, es posible deducir que $\ker(\mathbf{B}_{DG}) := \{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h : \text{div} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}\}$, lo que nos permitirá obtener la correspondiente estimación de error a priori. Alternativas para superar esta restricción para grados polinomiales inferiores se tratan a continuación.*

2.3.2. Estimación de error a priori

El objetivo de esta sub-sección es dar la correspondiente estimación de error *a priori* para el esquema (2.43). Por este motivo partiremos mostrando que el esquema tiene única solución.

Teorema 2.3.1 *Suponiendo que $\nabla_h \mathbf{W}_h$ es un subespacio de Σ_h , existe un único $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \Sigma_h \times \mathbf{W}_h$ solución del problema (2.43).*

Demostración: Como el sistema discreto (2.43) es cuadrado, basta con comprobar que el sistema homogéneo correspondiente: *Encontrar $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \Sigma_{h,0} \times \mathbf{W}_h$ tal que*

$$\begin{aligned} a_{DG}(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) + b_{DG}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\tau}) &= 0 & \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{h,0}, \\ -b_{DG}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}_h) + c_{DG}(\mathbf{v}, \mathbf{u}_h) &= 0 & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h, \end{aligned} \quad (2.52)$$

tiene como única solución la trivial. Con este fin, tomando $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}_h$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u}_h$ en las ecuaciones anteriores y sumándolas tenemos

$$\frac{1}{\nu} \|\boldsymbol{\sigma}_h^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2 + \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}}^2 = 0,$$

de donde, concluimos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_h^d = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_h = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_h \mathbf{I}, \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_h \in H(\mathbf{div}, \Omega), \\ \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket = \mathbf{0} &\Leftrightarrow (\mathbf{u}_h \in C^0(\bar{\Omega})) \wedge (\mathbf{u}_h = \mathbf{0} \text{ en } \mathcal{E}_\Gamma). \end{aligned}$$

Usando (2.10) en ambas ecuaciones de (2.52) y teniendo en cuenta lo anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_h \mathbf{u}_h : \boldsymbol{\tau} &= 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{h,0}, \\ \int_{\Omega} \mathbf{div}(\mathbf{v}) \cdot \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h) &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h. \end{aligned}$$

Sea $\boldsymbol{\tau} = \nabla_h \mathbf{u}_h \in \Sigma_h$ por hipótesis. Como

$$\int_{\Omega} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}) = \int_{\Omega} \operatorname{div}_h(\mathbf{u}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div}(\mathbf{u}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\nu} = \int_{\mathcal{E}_\Gamma} \mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\nu} = 0,$$

concluimos que $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{h,0}$. Tomando $\boldsymbol{\tau} = \nabla_h \mathbf{u}$ en la primera ecuación de arriba, tenemos que $\nabla \mathbf{u}_h = \mathbf{0}$ en Ω , implicando que \mathbf{u}_h es una función constante, continua y que se anula en la frontera, luego $\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$ en Ω . Por otro lado, dado que $\boldsymbol{\sigma}_h \in H(\mathbf{div}, \Omega)$, existe un único $\mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ tal que $\mathbf{div}(\mathbf{w}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h)$. Así, definiendo \mathbf{w}_h como la proyección de *Raviart-Tomas* local de \mathbf{w} ($\mathbf{w}_h|_T = \Pi_{RT}^k(\mathbf{w})$ para cada $T \in \mathcal{T}_h$) y reemplazándolo en la segunda ecuación de (2.52), tenemos $\|\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, es decir, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h) = \mathbf{0}$ en Ω . Así $\boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{0}$, es decir, el problema (2.52) admite única solución $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Es

más, la existencia es consecuencia de la *Alternativa de Fredholm* para el caso de dimensión finita. \square

A continuación enunciaremos tres lemas técnicos necesarios para probar la estabilidad de la solución única. Para el resto de la sección asumiremos que $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \times \mathbf{W}_h$ es la única solución del problema (2.43).

Lema 2.3.6 *Existe $c_1 > 0$ independiente del tamaño de malla, tal que*

$$\|\mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \leq c_1 \left(\|G_{DG}\|^2 + \|\boldsymbol{\sigma}_h^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2 \right).$$

Demostración: Del Lema 2.3.5, la primera ecuación de (2.43) y la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*, se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{c} \|\mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} &\leq \sup_{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \setminus \{\theta\}} \frac{b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}_h)}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h}} \leq \sup_{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \setminus \{\theta\}} \frac{|G_{DG}(\boldsymbol{\tau}) - a_{DG}(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau})|}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h}} \\ &\leq \|G_{DG}\| + \frac{1}{\nu} \|\boldsymbol{\sigma}_h^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}} + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \\ &\leq \sqrt{3} \sqrt{\|G_{DG}\|^2 + \frac{1}{\nu^2} \|\boldsymbol{\sigma}_h^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2}. \end{aligned}$$

Tomando $c_1 = \frac{3 \max\{1, 1/\nu^2\}}{\tilde{c}^2}$, se finaliza la prueba. \square

Lema 2.3.7 *Existe $\bar{c} > 0$, independiente del tamaño de malla, tal que*

$$\left| \int_{\mathcal{E}_I} (\{\mathbf{v}\} + \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \boldsymbol{\beta}) \cdot \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \right| \leq \bar{c} \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times \mathbf{W}_h.$$

Demostración: La desigualdad de *Cauchy-Schwarz* implica

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathcal{E}_I} (\{\mathbf{v}\} + \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \boldsymbol{\beta}) \cdot \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \right| \\ &\leq \|\gamma^{-1/2} \{\mathbf{v}\}\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} + \|\gamma^{-1/2} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \boldsymbol{\beta}\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \\ &\leq \max\{1, \|\boldsymbol{\beta}\|_{[L^\infty(\Omega)]^2}\} \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \left(\|\gamma^{-1/2} \{\mathbf{v}\}\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} + \|\gamma^{-1/2} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}} \right). \end{aligned}$$

Notando que ν es unitario y $\gamma = \mathcal{O}(\frac{1}{h})$, la prueba se sigue de los Lemas 2.3.1 y 2.2.2. \square

Lema 2.3.8 *Suponiendo que $\mathbf{div}_h(\boldsymbol{\Sigma}_h)$ es un subespacio de \mathbf{W}_h , existe $c_2 > 0$ tal que*

$$\|\mathbf{div}_h \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \leq c_2 \left(\|F_{DG}\|^2 + \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}} + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2 \right).$$

Demostración: Primero notamos que

$$\|\mathbf{div}_h \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} = \frac{\int_{\Omega} \mathbf{div}_h \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{div}_h \boldsymbol{\sigma}_h}{\|\mathbf{div}_h \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}} \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h \setminus \{\theta\}} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{div}_h \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}}.$$

Para acotar el supremo, usamos la segunda ecuación de (2.43) y la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*, Lemas 2.3.1 y 2.3.7, así

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h \setminus \{\theta\}} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{div}_h \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}} &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h \setminus \{\theta\}} \frac{\left| c_{DG}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + \int_{\mathcal{E}_I} (\{\mathbf{v}\} + \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \boldsymbol{\beta}) \cdot \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket - F_{DG}(\mathbf{v}) \right|}{\|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}} \\ &\leq \tilde{c} \left(\|F_{DG}\| + \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}} + \|\llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \right) \\ &\leq \tilde{c} \sqrt{3} \sqrt{\|F_{DG}\|^2 + \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}}^2 + \|\llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando $c_2 = 3\tilde{c}^2$, concluimos el resultado. \square

Dados estos Lemas, procedemos a demostrar la estabilidad del esquema.

Teorema 2.3.2 *Bajo las mismas suposiciones del Teorema 2.3.1 y del Lema 2.3.8, existe $C > 0$, independiente del tamaño de la malla, tal que*

$$\|(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)\|_{DG} \leq C \mathcal{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad (2.53)$$

$$\text{donde } \mathcal{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) := \max \left\{ 1, \|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|\alpha^{1/2} \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2 \times 2}} + \|\gamma^{1/2} \mathbf{g}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^2} + \|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|\alpha^{1/2} \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\nu}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^{2 \times 2}}^2 + \|\gamma^{1/2} \mathbf{g}\|_{[L^2(\mathcal{E}_T)]^2}^2 \right\}$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad, asumiremos que $\|(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)\|_{DG} \geq 1$. En el otro caso, la solución es acotada y la estabilidad es garantizada.

Tomando $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}_h$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u}_h$ en (2.43) y sumando, tenemos

$$\frac{1}{\nu} \|\boldsymbol{\sigma}_h^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2 + \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}}^2 = G_{DG}(\boldsymbol{\sigma}_h) + F_{DG}(\mathbf{u}_h).$$

Así, aplicando la desigualdad de *Cauchy-Schwarz* junto con los Lemas 2.3.6 y 2.3.8, deducimos las desigualdades

$$\frac{1}{\nu} \|\boldsymbol{\sigma}_h^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2 + \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}}^2 \leq (\|G_{DG}\| + \|G_{DG}\|) \|(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)\|_{DG}, \quad (2.54)$$

$$\varepsilon_1 \|\mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \leq \varepsilon_1 c_1 \left(\|G_{DG}\|^2 + \|\boldsymbol{\sigma}_h^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2 \right), \quad (2.55)$$

$$\varepsilon_2 \|\mathbf{div}_h \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \leq \varepsilon_2 c_2 \left(\|F_{DG}\|^2 + \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^{2 \times 2}}^2 + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2 \right), \quad (2.56)$$

donde $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ son constantes a nuestra disposición. Sumando (2.54), (2.55) y (2.56), obtenemos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\nu} - \varepsilon_1 c_1\right) \|\boldsymbol{\sigma}_h^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \varepsilon_2 \|\mathbf{div}_h(\boldsymbol{\sigma}_h)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + (1 - \varepsilon_1 c_1 - \varepsilon_2 c_2) \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \\ & + (1 - \varepsilon_2 c_2) \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}}^2 + \varepsilon_1 \|\mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \leq (\|G_{DG}\|^2 + \|F_{DG}\|^2) \|(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)\|_{DG} \\ & + \varepsilon_1 c_1 \|G_{DG}\|^2 + \varepsilon_2 c_2 \|F_{DG}\|^2. \end{aligned}$$

Considerando $\varepsilon_1 \leq \min\left\{\frac{1}{4c_1}, \frac{1}{4\nu c_1}\right\}$ y $\varepsilon_2 \leq \frac{1}{4c_2}$, el Lema 2.3.2 y el hecho que $\|(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)\|_{DG} \geq 1$, se tiene que

$$\tilde{C} \|(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)\|_{DG}^2 \leq (\|G_{DG}\| + \|F_{DG}\| + \|G_{DG}\|^2 + \|F_{DG}\|^2) \|(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)\|_{DG}.$$

La prueba se finaliza aplicando el Lema 2.3.4 y tomando el máximo entre 1 y la cota anterior. \square

A continuación procederemos a dar las estimaciones de error *a priori* para el esquema (2.43). Para ello necesitamos los siguientes Lemas, que establecen propiedades locales de aproximación para polinomios de $H^1(T)$ y $H(\mathbf{div}; T)$.

Lema 2.3.9 *Sea \mathcal{T}_h un elemento de una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, y sea $T \in \mathcal{T}_h$. Dado un entero no negativo m , sea $\Pi_T^m : L^2(T) \rightarrow \mathbf{P}_m(T)$ el operador lineal y acotado dado por $L^2(T)$ -proyección ortogonal, que satisface $\Pi_T^m(p) = p$ para todo $p \in \mathbf{P}_m(T)$. Entonces existe $C > 0$, independiente del tamaño de la malla, tal que para cada s, t satisfaciendo que $0 \leq s \leq m + 1$ y $0 \leq s < t$, se tiene*

$$\|(I - \Pi_T^m)(w)|_{H^s(T)}\| \leq C h_T^{\min\{t, m+1\}-s} \|w\|_{H^t(T)} \quad \forall w \in H^t(T), \quad (2.57)$$

y para cada $t > 1/2$ se tiene

$$\|(I - \Pi_T^m)(w)|_{L^2(\partial T)}\| \leq C h_T^{\min\{t, m+1\}-1/2} \|w\|_{H^t(T)} \quad \forall w \in H^t(T), \quad (2.58)$$

Demostración: Ver [13], [18]. \square

Lema 2.3.10 *Sea \mathcal{T}_h un elemento de una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, y sea $T \in \mathcal{T}_h$. Dado un entero positivo k , sea $\mathcal{E}_T^k : [H^1(T)]^2 \rightarrow \mathbf{RT}_{k-1}(T)$ el operador de interpolación local, que verifica $\mathbf{div}(\mathcal{E}_T^k(\boldsymbol{\tau})) = \Pi_T^{k-1}(\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}))$ para todo $\boldsymbol{\tau} \in [H^1(T)]^2$. Entonces, dado $\boldsymbol{\tau} \in [H^1(T)]^2$ con $\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) \in H^s(T)$, donde l y s son enteros positivo y no negativo respectivamente, existe $C > 0$, independiente del tamaño de malla, tal que*

$$\|\boldsymbol{\tau} - \mathcal{E}_T^k(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(T)]^2} \leq C h_T^l \|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^l(T)]^2} \quad 1 \leq l \leq k, \quad (2.59)$$

y

$$\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau} - \mathcal{E}_T^k(\boldsymbol{\tau}))\|_{L^2(T)} \leq C h_T^s \|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^s(T)]^2} \quad 0 \leq s \leq k. \quad (2.60)$$

Demostración: Ver [1]. \square

Teorema 2.3.3 Sean $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)$ las únicas soluciones de (1.13) y (2.43) respectivamente. Asumiendo que $\boldsymbol{\sigma}|_T \in [H^t(T)]^{2 \times 2}$, $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}|_T) \in [H^t(T)]^2$ y $\mathbf{u}|_T \in [H^{1+t}(T)]^2$ con $t > 1/2$, para todo $T \in \mathcal{T}_h$, tenemos

$$\begin{aligned} & \|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{DG}^2 \\ & \leq C_{\text{err}} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2 \min\{t, k, r+1\}} \left\{ \|\boldsymbol{\sigma}\|_{[H^t(T)]^{2 \times 2}}^2 + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})\|_{[H^t(T)]^2}^2 + \|\mathbf{u}\|_{[H^{1+t}(T)]^2}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde $C_{\text{err}} > 0$ es independiente del tamaño de malla.

Demostración: Primero, notamos que nuestro esquema discreto (2.43) es consistente, es decir, si $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ es la solución exacta de (1.13), entonces

$$\begin{aligned} a_{DG}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) + b_{DG}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\tau}) &= 0 & \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}, \\ -b_{DG}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) + c_{DG}(\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) &= 0 & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Sea $\Pi\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}$ y $\Pi\mathbf{u} \in \mathbf{W}_h$ las proyecciones de $\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{u} respectivamente. De la desigualdad triangular, tenemos

$$\|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{DG} \leq \|(\boldsymbol{\sigma} - \Pi\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u} - \Pi\mathbf{u})\|_{DG} + \|(\Pi\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, \Pi\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{DG}. \quad (2.63)$$

Nuestro objetivo ahora es acotar $\|(\Pi\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, \Pi\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{DG}$. Para este fin, consideraremos $\Pi\boldsymbol{\sigma}$, de componentes normales continuas, como la proyección de *Raviart-Thomas* de $\boldsymbol{\sigma}$ de orden r , que pertenece a $\boldsymbol{\Sigma}_{h,0}$. $\Pi\mathbf{u}$ será la L^2 -proyección de \mathbf{u} en $\mathbf{W}_h \cap C(\bar{\Omega})$. También definimos $(e_h^\sigma, e_h^u) := (\Pi\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, \Pi\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \times \mathbf{W}_h$. A continuación, testeamos (2.62) con $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := (e_h^\sigma, e_h^u)$ y sumamos ambas ecuaciones, deduciendo

$$\begin{aligned} \nu^{-1} \|(e_h^\sigma)^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\gamma^{1/2} \llbracket e_h^\sigma \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2 + \|\alpha^{1/2} \llbracket e_h^u \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}}^2 &= a_{DG}(e_h^\sigma, e_h^\sigma) + c_{DG}(e_h^u, e_h^u) \\ &= a_{DG}(\Pi\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}, e_h^\sigma) + b_{DG}(e_h^\sigma, \Pi\mathbf{u} - \mathbf{u}) \\ &\quad + c_{DG}(e_h^\sigma, \Pi\mathbf{u} - \mathbf{u}), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usa el hecho que $b_{DG}(\Pi\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}, e_h^u) = 0$. Acotando cada término del lado derecho y usando una versión discreta de la desigualdad de *Minkowski*, deducimos que existe $C_* > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \nu^{-1} \|(e_h^\sigma)^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\gamma^{1/2} \llbracket e_h^\sigma \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2 + \|\alpha^{1/2} \llbracket e_h^u \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}}^2 \\ & \leq C_* (\|\boldsymbol{\sigma} - \Pi\boldsymbol{\sigma}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{u} - \Pi\mathbf{u} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}}^2 + \|\mathbf{u} - \Pi\mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Ahora, gracias al Lema 2.3.2, sólo necesitamos acotar el término $\|\mathbf{div}(e_h^\sigma)\|_{[L^2(\Omega)]^2}$ para lograr nuestro objetivo. Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h$, tenemos que

$$-\int_{\Omega} \mathbf{div}_h(e_h^\sigma) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \mathbf{div}_h(\Pi\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v}.$$

Como $\int_{\Omega} \mathbf{div}_h(\Pi\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathcal{P}_r(\mathbf{div}_h(\boldsymbol{\sigma})) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v}$, con \mathcal{P}_r la proyección ortogonal de $[L^2(\Omega)]^2$ a $[P_r(T)]^2$, deducimos

$$-\int_{\Omega} \mathbf{div}_h(e_h^{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} = b_{DG}(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) + \int_{\mathcal{E}_I} (\{\mathbf{v}\} + \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \boldsymbol{\beta}) \cdot \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h - \Pi\boldsymbol{\sigma} \rrbracket.$$

Por otro lado, notamos de la segunda ecuación en (2.62) y el hecho que $\Pi\mathbf{u}$ es continua, que $b_{DG}(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = c_{DG}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}) = c_{DG}(\mathbf{u}_h - \Pi\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c_{DG}(\Pi\mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v})$. Entonces, aplicando la desigualdad de *Cauchy-Schwarz* y los Lemas 2.3.1 y 2.3.7, resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{div}_h(e_h^{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \mathbf{v} &\leq \|\alpha^{1/2} \llbracket e_h^{\mathbf{u}} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}} \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}} + \|\gamma^{-1/2}(\{\mathbf{v}\} + \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \boldsymbol{\beta})\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \|\gamma^{1/2} \llbracket e_h^{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \\ &\quad + \|\alpha^{1/2} \llbracket \Pi\mathbf{u} - \mathbf{u} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}} \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}} \\ &\leq \bar{c}(\|\alpha^{1/2} \llbracket e_h^{\mathbf{u}} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}} + \|\gamma^{1/2} \llbracket e_h^{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} + \|\alpha^{1/2} \llbracket \Pi\mathbf{u} - \mathbf{u} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}}) \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Aplicando (2.65) y (2.64) encontramos, en vista que $\mathbf{div}_h(e_h^{\boldsymbol{\sigma}}) \in \mathbf{W}_h$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{div}_h(e_h^{\boldsymbol{\sigma}})\|_{[L^2(\Omega)]^2} &\leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h \setminus \{\theta\}} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{div}_h \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}} \\ &\leq C(\|\boldsymbol{\sigma} - \Pi\boldsymbol{\sigma}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}} + \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{u} - \Pi\mathbf{u} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}} + \|\mathbf{u} - \Pi\mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^2}). \end{aligned} \quad (2.66)$$

De (2.64) y (2.66), y usando el Lema 2.3.2, concluimos

$$c_1 \min\{1, \nu^{-1}\} \|e_h^{\boldsymbol{\sigma}}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h}^2 \leq C(\|\boldsymbol{\sigma} - \Pi\boldsymbol{\sigma}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\alpha^{1/2} \llbracket \mathbf{u} - \Pi\mathbf{u} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}}^2 + \|\mathbf{u} - \Pi\mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2), \quad (2.67)$$

deduciendo así una cota para $\|e_h^{\boldsymbol{\sigma}}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h}$.

Ahora, acotaremos $\|e_h^{\mathbf{u}}\|_{[L^2(\Omega)]^2}$. Con este fin, notamos primero que para cualquier $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}$

$$b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, e_h^{\mathbf{u}}) = b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, \Pi\mathbf{u} - \mathbf{u}) + b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h),$$

y usando la primera ecuación de (2.62), se concluye

$$b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, e_h^{\mathbf{u}}) = b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, \Pi\mathbf{u} - \mathbf{u}) + a_{DG}(\Pi\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) - a_{DG}(e_h^{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\tau}).$$

Gracias a la condición *inf-sup* discreta dada por el Lema 2.3.5, y acotando cada término en las formas bilineales a_{DG} y b_{DG} , se tiene

$$\tilde{c} \|e_h^{\mathbf{u}}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq \sup_{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \setminus \{\theta\}} \frac{b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h}} \leq \tilde{c}(\|\mathbf{u} - \Pi\mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \alpha^{1/2} \|\llbracket \mathbf{u} - \Pi\mathbf{u} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E})]^{2 \times 2}} + \|\boldsymbol{\sigma} - \Pi\boldsymbol{\sigma}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}),$$

donde también hemos tenido en cuenta el acotamiento para $\|e_h^{\boldsymbol{\sigma}}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h}$. Finalmente, la conclusión se sigue de (2.63) y los resultados de aproximación conocidos para los operadores de proyección $\Pi\boldsymbol{\sigma}$ y $\Pi\mathbf{u}$ que hemos introducido. \square

Observación 2.3.3 Notamos que el par de espacios discretos $(\boldsymbol{\Sigma}_h, \mathbf{W}_h) := (\mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h), [P_1(\mathcal{T}_h)]^2)$ satisfacen la condición: $\mathbf{div}_h \boldsymbol{\Sigma}_h \subseteq \mathbf{W}_h$ y $\nabla_h \mathbf{W}_h \subseteq \boldsymbol{\Sigma}_h$.

2.4. Un esquema DG estabilizado

Una opción para evitar la dificultad de la caracterización del kernel del operador \mathbf{B}_{DG} , asociado a la forma bilineal b_{DG} , consiste en aplicar una técnica de estabilización. En particular, esto puede hacerse agregando a la formulación variacional (2.43) el término de mínimos cuadrados

$$\delta_2 \int_{\Omega} \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau}) = -\delta_2 \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \mathcal{T}_h), \quad (2.68)$$

donde δ_2 es un parámetro real a determinar. Sumando (2.68) a la primera ecuación de (2.43) obtenemos la siguiente formulación variacional estabilizada:

$$\begin{aligned} a_{DG}^{stab}(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) + b_{DG}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\tau}) &= G_{DG}^{stab}(\boldsymbol{\tau}) & \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}, \\ -b_{DG}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}_h) + c_{DG}(\mathbf{v}, \mathbf{u}_h) &= F_{DG}(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h, \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde la forma bilineal $a_{DG}^{stab} : H(\mathbf{div}, \mathcal{T}_h) \times H(\mathbf{div}, \mathcal{T}_h) \rightarrow \mathbb{R}$ es definida por

$$a_{DG}^{stab}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) := a_{DG}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) + \delta_2 \int_{\Omega} \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\eta}) \cdot \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau}),$$

y el funcional $G_{DG}^{stab} : H(\mathbf{div}, \mathcal{T}_h) \rightarrow \mathbb{R}$ viene dado por

$$G_{DG}^{stab}(\boldsymbol{\tau}) := G_{DG}(\boldsymbol{\tau}) - \delta_2 \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{div}_h(\boldsymbol{\tau}).$$

A continuación mostraremos la $\boldsymbol{\Sigma}$ -elipticidad de la forma bilineal a_{DG}^{stab} .

Lema 2.4.1 *Suponiendo que $\delta_2 > 0$, existe $\hat{c} > 0$, independiente del tamaño de malla, tal que*

$$a_{DG}^{stab}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) \geq \hat{c} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}_h}^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0},$$

donde $\hat{c} := c_3 \min \left\{ \frac{1}{\nu}, \frac{1}{2}, \frac{\delta_2}{2} \right\}$ y c_3 es la constante del Lema 2.3.2.

Demostración: Usando la definición de la forma bilineal a_{DG}^{stab} y el Lema 2.3.2, obtenemos

$$\begin{aligned} a_{DG}^{stab}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) &= \frac{1}{\nu} \|\boldsymbol{\tau}^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2 + \delta_2 \|\mathbf{div}_h \boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \\ &\geq c_3 \min \left\{ \frac{1}{\nu}, \frac{1}{2}, \frac{\delta_2}{2} \right\} \left(\|\boldsymbol{\tau}^d\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \frac{1}{2} \|\gamma^{1/2} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2}^2 + \frac{\delta_2}{2} \|\mathbf{div}_h \boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \right), \end{aligned}$$

lo que completa la prueba. \square

La existencia, unicidad y estabilidad del esquema (2.69) se garantiza en el siguiente resultado.

Lema 2.4.2 *Bajo las mismas hipótesis del Lema 2.3.2, el problema (2.69) tiene única solución $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0} \times \mathbf{W}_h$. Además, existe $C > 0$, independiente del tamaño de malla, tal que*

$$\|(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)\|_{DG} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|\alpha^{1/2}\mathbf{g}\|_{[L^2(\mathcal{E}_\Gamma)]^2}^2)^{1/2}.$$

Demostración: Es una consecuencia de los Lemas 2.3.3, 2.3.5, 2.3.2 y la clásica teoría de Babůska-Brezzi (ver [9]). \square

A continuación establecemos la razón de convergencia del esquema.

Teorema 2.4.1 *Sea $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)$ las únicas soluciones de (1.13) y (2.69), respectivamente. Entonces, asumiendo que $\boldsymbol{\sigma}|_T \in [H^t(T)]^{2 \times 2}$, $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}|_T) \in [H^t(T)]^2$ y $\mathbf{u}|_T \in [H^t(T)]^2$, con $t > 1/2$, para todo $T \in \mathcal{T}_h$, existe $C_{\text{err}} > 0$, independiente del tamaño de malla, tal que*

$$\begin{aligned} & \|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{DG}^2 \\ & \leq C_{\text{err}} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2 \min\{t, k, r+1\}} \left\{ \|\boldsymbol{\sigma}\|_{[H^t(T)]^{2 \times 2}}^2 + \|\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}\|_{[H^t(T)]^2}^2 + \|\mathbf{u}\|_{[H^{t+1}(T)]^2}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Demostración: El resultado se sigue de la teoría de Babůska-Brezzi, Lemas 2.4.2, 2.3.9 y 2.3.10. \square

Observación 2.4.1 *Pensamos que las ideas expuestas en esta sección podrían servir para desarrollar el análisis de error a priori de (2.19). Sin embargo por motivos de extensión de la tesis, se dejó como posible tema para desarrollar en futuras investigaciones.*

Observación 2.4.2 *Los expuesto en este capítulo ha dado lugar a la publicación*

T.P. BARRIOS, R. BUSTINZA AND F. SÁNCHEZ: *Analysis of DG approximations for Stokes problem based on velocity-pseudostress formulation*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 33, 5, pp. 1540-1564, (2017).

Capítulo 3

Implementación de un esquema LDG para el problema de Helmholtz

El objetivo de este capítulo es deducir un esquema DG aumentado para el problema de Helmholtz y extender los resultados de existencia, unicidad y estimación de *error a priori* obtenidas en [5] para un esquema LDG. Adicionalmente, describiremos la implementación computacional del esquema aumentado. Con este fin, aplicando técnicas vistas en el Capítulo 2, comenzaremos deduciendo el método LDG y el método DG a implementar. Posteriormente, definiendo funciones bases sobre cada $T \in \mathcal{T}_h$, mostraremos que encontrar la solución del esquema es equivalente a resolver un sistema lineal de ecuaciones y mostraremos que la matriz A y el vector b del sistema lineal $Ax = b$, se construyen utilizando *matrices locales* y *vectores locales*. Finalmente, una vez implementado nuestro algoritmo en MATLAB, lo testaremos con dos ejemplos y varios valores de ω (ver Tabla 3.2). Comenzaremos definiendo el problema de Helmholtz.

3.1. El problema de Helmholtz

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^2 con frontera poligonal $\Gamma := \partial\Omega$, la cual se particiona en dos componentes disjuntos, Γ_N y Γ_D (es decir $\Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$), con $|\Gamma_D| > 0$. El problema de Helmholtz consiste en: *Determinar un campo escalar u tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u - \omega^2 u &= f && \text{en } \Omega, \\ u &= g_D && \text{en } \Gamma_D, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}} u &= g_N && \text{en } \Gamma_N. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Aquí $\omega > 0$ representa el número de onda fijo (con correspondiente longitud de onda $\lambda = 2\pi/\omega$). f es un término fuente en $L^2(\Omega)$, mientras que los datos de frontera $g_D \in L^2(\Gamma_D)$ y $g_N \in L^2(\Gamma_N)$. $\partial_{\boldsymbol{\nu}}$ representa la derivada en la dirección de $\boldsymbol{\nu}$, vector normal unitario exterior a Γ . Esta ecuación es utilizada en la acústica para la propagación del sonido en un fluido no viscoso, compresible e irrotacional (mirar por ejemplo [22]).

Introduciendo la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} = \nabla u$ ($\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \Delta u$) y considerando que $\partial_{\boldsymbol{\nu}} u = \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$, el Problema (3.1) puede ser escrito como: *Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u)$ tal que*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} - \nabla u &= 0 && \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \omega^2 u &= -f && \text{en } \Omega, \\ u &= g_D && \text{en } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} &= g_N && \text{en } \Gamma_N. \end{aligned} \tag{3.2}$$

A continuación daremos una hipótesis necesaria para que el Problema (3.1) esté bien puesto.

Hipótesis 3.1.1 *Dado $z \in L^2(\Omega)$ asumimos que el problema*

$$-\Delta \varphi - \omega^2 \varphi = z \quad \text{en } \Omega, \quad \varphi|_{\Gamma_D} = 0, \quad \partial_{\boldsymbol{\nu}} \varphi|_{\Gamma_N} = 0, \tag{3.3}$$

admite única solución, es decir, $-\omega^2$ no es valor propio para el Laplaciano con condiciones de contorno mixtas. Además, si φ es la única solución de (3.3) entonces, existe $\varepsilon \in (1/2, 1]$ tal que $\varphi \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)$.

La Hipótesis 3.1.1 establece que para garantizar la existencia única de solución de (3.3) es necesario una propiedad adicional de suavidad reflejada en la existencia de ε . Se puede probar que esta hipótesis se satisface si se asume alguna restricción geométrica sobre los ángulos entre los lados de Γ_D y Γ_N (Ver [21], Capítulo 4). Además, esta regularidad adicional permite definir el operador continuo

$$\mathcal{L}_\omega : L^2(\Omega) \rightarrow H^{1+\varepsilon}(\Omega),$$

con $\mathcal{L}_\omega(z) = \varphi$, donde φ es la única solución de (3.3).

En la Sección 3.1 de [5] se muestra que el acotamiento del operador \mathcal{L}_ω depende de la regularidad adicional ε , y de la cercanía de ω al espectro del laplaciano, más precisamente, que existe $C_{\mathcal{L}} := C_{\mathcal{L}}(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|\mathcal{L}_\omega\| \leq C_{\mathcal{L}} \max_{j \in \mathbb{N}} \left\{ 1 + \frac{\omega^2 + 1}{|\omega^2 - \lambda_j|} \right\}, \tag{3.4}$$

donde λ_j son los valores propios del operador laplaciano (la existencia de estos valores propios está garantizada por el Teorema 4.2 de [24]).

3.2. Esquema LDG para el problema de Helmholtz

En esta sección seguiremos un camino similar a lo realizado en la Sección 2.2, adaptando las definiciones y resultados dados. Sea \mathcal{T}_h una partición por triángulos de Ω y \mathcal{E}_I el conjunto de lados interiores inducidos por \mathcal{T}_h (contados una vez), sean $\mathcal{E}_D = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \partial T \cap \Gamma_D$, $\mathcal{E}_N = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \partial T \cap \Gamma_N$.

Multiplicando la primera y segunda ecuación de (3.2) por $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h$ y $v \in V_h$ respectivamente, integrando sobre $T \in \mathcal{T}_h$, aplicando integración por partes y sumando sobre $T \in \mathcal{T}_h$ obtenemos la formulación:

Hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_{\Omega} u_h \cdot \operatorname{div}_h(\boldsymbol{\tau}) - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \widehat{u} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_T &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h, \\ \int_{\Omega} \nabla_h v \cdot \boldsymbol{\sigma}_h - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} v \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_T - \omega^2 \int_{\Omega} u_h v &= \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in V_h, \end{aligned} \quad (3.5)$$

para las sumatorias del sistema anterior tenemos un resultado similar a (2.9)

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} v \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_T = \int_{\mathcal{E}} \llbracket v \rrbracket \cdot \{\boldsymbol{\tau}\} + \int_{\mathcal{E}_I} \{v\} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in \Pi_{T \in \mathcal{T}_h} [L^2(\partial T)]^2 \times L^2(\partial T). \quad (3.6)$$

y la correspondiente fórmula de integración por partes es análoga.

Aplicando (3.6) en (3.5) e integrando por partes se deduce el esquema: *Encontrar* $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} - \int_{\Omega} \nabla_h u_h \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_{\mathcal{E}} \llbracket u_h - \widehat{u} \rrbracket \cdot \{\boldsymbol{\tau}\} + \int_{\mathcal{E}_I} \{u_h - \widehat{u}\} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h, \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \nabla_h v - \int_{\mathcal{E}} \llbracket v \rrbracket \cdot \{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\} - \int_{\mathcal{E}_I} \{v\} \llbracket \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket &= \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in V_h. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Finalmente, definiendo los flujos numéricos como

$$\widehat{u}_{T,e} := \begin{cases} \{u_h\} + \llbracket u_h \rrbracket \cdot \boldsymbol{\beta} & \text{si } e \in \mathcal{E}_I, \\ g_D & \text{si } e \in \mathcal{E}_D, \\ u_h & \text{si } e \in \mathcal{E}_N, \end{cases} \quad (3.8)$$

y

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{T,e} := \begin{cases} \{\boldsymbol{\sigma}_h\} - \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket \boldsymbol{\beta} - \alpha \llbracket u_h \rrbracket & \text{si } e \in \mathcal{E}_I, \\ \boldsymbol{\sigma}_h - \alpha(u_h - g_D) \boldsymbol{\nu} & \text{si } e \in \mathcal{E}_D, \\ g_N \boldsymbol{\nu} & \text{si } e \in \mathcal{E}_N, \end{cases} \quad (3.9)$$

con α y $\boldsymbol{\beta}$ definidos igual que en (2.13) y (2.14) es decir $\alpha = \mathcal{O}(\frac{1}{h})$ y $\boldsymbol{\beta} \in [L^\infty(\mathcal{E}_I)]^2$, se obtiene el esquema LDG: *Encontrar* $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$ tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} - \int_{\Omega} \nabla_h u_h \cdot \boldsymbol{\tau} + S_h(u_h, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\mathcal{E}_D} g_D \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h, \quad (3.10a)$$

$$\int_{\Omega} \nabla_h v \cdot \boldsymbol{\sigma}_h - S_h(v, \boldsymbol{\sigma}_h) + \alpha(u_h, v) - \omega^2 \int_{\Omega} u_h v = \int_{\Omega} f v + \int_{\mathcal{E}_D} \alpha g_D v + \int_{\mathcal{E}_N} g_N v \quad \forall v \in V_h, \quad (3.10b)$$

donde

$$S_h(v, \boldsymbol{\tau}) := \int_{\mathcal{E}_I} (\{\boldsymbol{\tau}\} - \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \boldsymbol{\beta}) \cdot \llbracket v \rrbracket + \int_{\mathcal{E}_D} v \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad (3.11)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(v, w) := \int_{\mathcal{E}_I} \alpha \llbracket v \rrbracket \cdot \llbracket w \rrbracket + \int_{\mathcal{E}_D} \alpha v w. \quad (3.12)$$

Introduciendo los espacios de elementos finitos discontinuos $V_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_T \in P_m(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}$, $\boldsymbol{\Sigma}_h = \{\boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \boldsymbol{\tau}|_T \in [P_{m'}(T)]^2, \forall T \in \mathcal{T}_h\}$, con m y m' enteros no negativos y la norma $\|\cdot\|_h$ como

$$\|v\|_h := \left(\|\nabla v\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + |v|_h^2 \right)^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\mathcal{T}_h),$$

donde $|\cdot|_h : H^1(\mathcal{T}_h) \rightarrow \mathbb{R}$ es la seminorma definida por

$$|v|_h = \left(\|\alpha^{1/2} \llbracket v \rrbracket\|_{\mathcal{E}_I}^2 + \|\alpha^{1/2} v\|_{\mathcal{E}_D}^2 \right)^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\mathcal{T}_h).$$

Se puede probar la siguiente desigualdad de tipo *Poincaré* (ver Lema 4.3 en [10])

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|v\|_h \quad \forall v \in H^1(\mathcal{T}_h). \quad (3.13)$$

Lema 3.2.1 *Existen $\mathbf{S}_h : H^1(\mathcal{T}_h) \rightarrow \boldsymbol{\Sigma}_h$ y $\mathbf{G}_h \in \boldsymbol{\Sigma}_h$ tales que*

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}_h(v) \cdot \boldsymbol{\tau} = S_h(v, \boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h, \quad (3.14)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{G}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = \int_{\mathcal{E}_D} g_D \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h. \quad (3.15)$$

Además, $\|\mathbf{G}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq \|g_D\|_{L^2(\mathcal{E}_D)}$ y existe $C_S > 0$, independiente del tamaño de la malla, tal que

$$\|\mathbf{S}_h(v)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq C_S |v|_h \quad \forall v \in H^1(\mathcal{T}_h).$$

Demostración: Las demostraciones de (3.14) y (3.15) se obtienen de manera similar a lo hecho en los Lemas (2.2.3) y (2.2.4) respectivamente. Además, tomando $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{S}_h(v)$ y $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{G}_h$ en (3.14) y (3.15) respectivamente, se obtienen las desigualdades enunciadas. \square

Observación 3.2.1 *Del Lema anterior se puede concluir que si u es solución exacta de (3.1), entonces $\mathbf{S}_h(u) = \mathbf{G}_h$.*

Teniendo en cuenta (3.14) y (3.15) en (3.10a), y considerando que $\nabla_h V_h \subseteq \boldsymbol{\Sigma}_h$, se deduce

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \nabla_h u_h - \mathbf{S}_h(u_h) + \mathbf{G}_h. \quad (3.16)$$

Así, es posible eliminar $\boldsymbol{\sigma}_h$ del sistema (3.10), quedando en términos de u_h y del dato de frontera Dirichlet. Ahora, reemplazando (3.16) en (3.10b) y considerando nuevamente (3.14) obtenemos la formulación primal: *Hallar $u_h \in V_h$ tal que*

$$a_h(u_h, v) - \omega^2 \int_{\Omega} u_h v = \mathcal{F}_h(v) \quad \forall v \in V_h, \quad (3.17)$$

donde la forma bilineal a_h y el funcional lineal \mathcal{F}_h vienen definidos como

$$a_h(v, w) := \int_{\Omega} (\nabla_h v - \mathbf{S}_h(v)) \cdot (\nabla_h w - \mathbf{S}_h(w)) + \boldsymbol{\alpha}(v, w) \quad \forall v, w \in H^1(\mathcal{T}_h),$$

$$\mathcal{F}_h(v) := \int_{\Omega} f v + \int_{\mathcal{E}_N} g_N v + \int_{\mathcal{E}_D} \alpha g_D v - \int_{\Omega} (\nabla_h v - \mathbf{S}_h(v)) \cdot \mathbf{G}_h \quad \forall v \in H^1(\mathcal{T}_h).$$

Lo anterior permite afirmar que el Problema (3.10) es equivalente con el Problema (3.17) en el siguiente sentido.

Teorema 3.2.1 *Supongamos que $\nabla_h V_h \subseteq \boldsymbol{\Sigma}_h$. Si $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$ es una solución de (3.10), entonces $u_h \in V_h$ es solución de (3.17). Recíprocamente, si $u_h \in V_h$ es una solución de (3.17) entonces $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$, con $\boldsymbol{\sigma}_h := \nabla_h u_h - \mathbf{S}_h(u_h) + \mathbf{G}_h(g_D)$, es solución de (3.10).*

Demostración: La demostración pasa por considerar los pasos para obtener la formulación (3.17), se omiten detalles adicionales. \square

Un resultado necesario para la existencia y estabilidad de (3.17) sigue a continuación.

Lema 3.2.2 *La forma bilineal a_h es acotada y coerciva en $H^1(\mathcal{T}_h)$.*

Demostración: Sean $u, v \in H^1(\mathcal{T}_h)$, aplicando la desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$\begin{aligned} |a_H(u, v)| &\leq \left| \int_{\Omega} [\nabla_h u - \mathbf{S}_h(u)] \cdot [\nabla_h v - \mathbf{S}_h(v)] \right| + \left| \int_{\mathcal{E}_I} \alpha \llbracket u \rrbracket \cdot \llbracket v \rrbracket \right| + \left| \int_{\mathcal{E}_D} \alpha u \cdot v \right| \\ &\leq \|\nabla_h u - \mathbf{S}_h(u)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\nabla_h v - \mathbf{S}_h(v)\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|\alpha^{1/2} \llbracket u \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \|\alpha^{1/2} \llbracket v \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \\ &\quad + \|\alpha^{1/2} u\|_{L^2(\mathcal{E}_D)} \|\alpha^{1/2} v\|_{L^2(\mathcal{E}_D)} \\ &\leq (\|\nabla_h u\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|\mathbf{S}_h(u)\|_{[L^2(\Omega)]^2}) (\|\nabla_h v\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|\mathbf{S}_h(v)\|_{[L^2(\Omega)]^2}) \\ &\quad + \|\alpha^{1/2} \llbracket u \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} \|\alpha^{1/2} \llbracket v \rrbracket\|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} + \|\alpha^{1/2} u\|_{L^2(\mathcal{E}_D)} \|\alpha^{1/2} v\|_{L^2(\mathcal{E}_D)}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el Lema 3.2.1, la desigualdad $ab + cd \leq (a+c)(b+d) \quad \forall a, b, c, d > 0$ y la definición de $\|\cdot\|_h$, tenemos

$$|a_h(u, v)| \leq C_a \|u\|_h \|v\|_h \quad (3.18)$$

donde $C_a := (1 + C_S^2)$, concluyendo así que a_h es acotada en $H^1(\mathcal{T}_h)$.

Probaremos ahora la coercividad de a_h en $H^1(\mathcal{T}_h)$, sea $v \in H^1(\mathcal{T}_h)$, de la definición de a_h tenemos

$$a_h(v, v) = \|\nabla_h v\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 - 2 \int_{\Omega} \nabla_h v \cdot \mathbf{S}_h(v) + \|\mathbf{S}_h(v)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + |v|_h^2,$$

considerando la desigualdad $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2 \quad \forall a, b, \varepsilon > 0$, se tiene

$$a_h(v, v) \geq (1 - \varepsilon) \|\nabla_h v\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \|\mathbf{S}_h(v)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + |v|_h^2.$$

Imponiendo que $(1 - \varepsilon) > 0 \Rightarrow \varepsilon < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\varepsilon} < 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} a_h(v, v) &\geq (1 - \varepsilon) \|\nabla_h v\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) C_S^2 |v|_h^2 + |v|_h^2 \\ &\geq (1 - \varepsilon) \|\nabla_h v\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \left[1 + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) C_S^2\right] |v|_h^2. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando $\varepsilon \in \left] \frac{C_S^2}{1+C_S^2}, 1 \right[$ y definiendo $C_{coer} = \min\{(1 - \varepsilon), 1 + (1 - \frac{1}{\varepsilon}) C_S^2\} > 0$, se prueba que

$$a_h(v, v) \geq C_{coer} \|v\|_h^2 \quad \forall v \in H^1(\mathcal{T}_h). \quad (3.19)$$

□

Por otro lado, aplicando Cauchy-Schawrz, el Lema 3.2.1, (3.13), el Lemma 2.3.1 y la definición de $\|\cdot\|_h$ se prueba que

$$|\mathcal{F}_h(v)| \leq C_b \Phi(f, g) \|v\|_h \quad \forall v \in H^1(\mathcal{T}_h),$$

siendo $\Phi(f, g) := \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\alpha^{1/2} g_N\|_{L^2(\mathcal{E}_N)} + \|\alpha^{1/2} g_D\|_{L^2(\mathcal{E}_D)} + 2\|g_D\|_{L^2(\mathcal{E}_D)}$ y $C_b := (1 + \sqrt{C\hat{\alpha}^{-1}})C_P + C_S + 2$.

El siguiente resultado establece la existencia única de solución para el esquema (3.17).

Teorema 3.2.2 *Existe $h_0 = h_0(\varepsilon, \omega) > 0$ tal que, para todo $h < h_0$, el esquema numérico (3.17) admite única solución $u_h \in V_h$. Más aun, si $u \in H^{l+1}(\Omega)$, con $1/2 < l \leq m$, entonces*

$$\|u - u_h\|_h + \|\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq C(\varepsilon, \omega) \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2l} \|u\|_{H^{l+1}(T)}^2 \right]^{1/2}, \quad (3.20)$$

con $C(\varepsilon, \omega) > 0$ independiente de h y u .

Observación 3.2.2 *La demostración del Teorema 3.2.2 se encuentra en la Sección 3.4 de [5] y ésta muestra que las constantes $h_0(\varepsilon, \omega)$ y $C(\varepsilon, \omega)$ dependen de la cercanía de ω al espectro del Laplaciano, mientras que la dependencia de ε se debe a la regularidad del problema (3.3). Es más, esta dependencia tiene que ver con la cota para el operador \mathcal{L}_ω que, como vimos en (3.4), depende de lo antes mencionado (ver Observaciones 3.8 y 3.9 en [5]).*

Finalmente, la existencia única de solución pasa por mostrar que a partir de cierto $h < h_0$, el problema homogéneo asociado a (3.10) tiene solución nula. Gracias a la Hipótesis 3.1.1, el problema homogéneo asociado a (3.1) tiene única solución $u = 0$. Si $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h)$ es la solución del problema homogéneo asociado a (3.10), entonces, usando (3.20), para $h < h_0$ se tiene que

$$\|u_h\|_h + \|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq 0 \iff \|u_h\|_h = 0 \quad \wedge \quad \|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} = 0.$$

De $\|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} = 0$ se sigue que $\boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{0}$ en Ω . Por otro lado, de la definición de $\|\cdot\|_h$, tenemos que

$$\|u_h\|_h = 0 \iff \|\nabla_h u_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} = 0 \wedge |u_h|_h = 0.$$

En vista que $|u_h|_h = 0$, se tiene que u_h es continua en $\bar{\Omega}$ y tiene traza nula en Γ_D . Dado que $\|\nabla_h u_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} = 0$, tenemos que u_h es constante en $\bar{\Omega}$, concluyendo finalmente que $u_h = 0$ en Ω .

3.3. Un esquema DG estabilizado para el problema de Helmholtz

En la sección anterior, para poder obtener una formulación primal con su correspondiente estimación de error a priori, pedimos que los espacios de aproximación para u_h y $\boldsymbol{\sigma}_h$ cumplieran con la conocida condición $\nabla_h V_h \subset \boldsymbol{\Sigma}_h$. En lo que sigue, presentaremos una formulación DG aumentada a fin de no requerir condición alguna entre los espacios de aproximación para u y $\boldsymbol{\sigma}$. Para alcanzar este objetivo, comenzamos introduciendo el siguiente término de Galerkin de cuadrados mínimos

$$\delta_1 \int_{\Omega} (\nabla_h u_h - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot (\nabla_h v + \boldsymbol{\tau}) = 0 \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h, \quad (3.21)$$

donde $\delta_1 > 0$ es un parámetro, independiente de ω , a nuestra disposición. Sumando las ecuaciones (3.10a), (3.10b) y (3.21) obtenemos nuestro esquema DG aumentado: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$ tales que

$$a_h^{est}((\boldsymbol{\sigma}_h, u_h), (\boldsymbol{\tau}, v)) - \omega^2 \int_{\Omega} u_h v = \mathcal{F}_h^{est}(\boldsymbol{\tau}, v) \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h, \quad (3.22)$$

donde la forma bilineal $a_h^{est} : ([H^s(\mathcal{T}_h)]^2 \times H^1(\mathcal{T}_h)) \times ([H^s(\mathcal{T}_h)]^2 \times H^1(\mathcal{T}_h)) \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$\begin{aligned} a_h^{est}((\boldsymbol{\eta}, w), (\boldsymbol{\tau}, v)) &:= \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\tau} - \int_{\Omega} \nabla_h w \cdot \boldsymbol{\tau} + S_h(w, \boldsymbol{\tau}) + \int_{\Omega} \nabla_h v \cdot \boldsymbol{\eta} - S_h(v, \boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\alpha}(w, v) \\ &+ \delta_1 \int_{\Omega} (\nabla_h w - \boldsymbol{\eta}) \cdot (\nabla_h v + \boldsymbol{\tau}) \quad \forall (\boldsymbol{\eta}, w), (\boldsymbol{\tau}, v) \in [H^s(\mathcal{T}_h)]^2 \times H^1(\mathcal{T}_h), \end{aligned}$$

con $S_h(\cdot, \cdot)$ y $\boldsymbol{\alpha}(\cdot, \cdot)$ definidos en (3.11) y (3.12), respectivamente. Por otro lado, el funcional lineal $\mathcal{F}_H^{est} : [H^s(\mathcal{T}_h)]^2 \times H^1(\mathcal{T}_h) \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$\mathcal{F}_h^{est}(\boldsymbol{\tau}, v) := \int f v + \int_{\mathcal{E}_D} \alpha g_D v + \int_{\mathcal{E}_N} g_N v + \int_{\mathcal{E}_D} g_D \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in [H^s(\mathcal{T}_h)]^2 \times H^1(\mathcal{T}_h).$$

En ambos casos, consideramos $s > 1/2$ mientras que V_h y $\boldsymbol{\Sigma}_h$ son definidos igual que en la sección anterior. Introduciendo la norma $\|\cdot\|_{DG}$ como

$$\|(\boldsymbol{\tau}, v)\|_{DG} := \left(\|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|v\|_h^2 \right)^{1/2},$$

se tienen las siguientes propiedades para a_h^{est} , en el siguiente resultado.

Lema 3.3.1 Para $\delta_1 \in (0, 1)$ y $s > 1/2$. Existe $C_{cont}, C_{coer} > 0$, independientes del tamaño de malla y ω , tales que

$$|a_h^{est}((\boldsymbol{\eta}, w), (\boldsymbol{\tau}, v))| \leq C_{cont} \|(\boldsymbol{\eta}, w)\|_{LDG} \|(\boldsymbol{\tau}, v)\|_{LDG} \quad \forall (\boldsymbol{\eta}, w), (\boldsymbol{\tau}, v) \in [H^s(\mathcal{T}_h)]^2 \times H^1(\mathcal{T}_h),$$

$$|a_h^{est}((\boldsymbol{\tau}, v), (\boldsymbol{\tau}, v))| \geq C_{coer} \|(\boldsymbol{\tau}, v)\|_{LDG}^2 \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in [H^s(\mathcal{T}_h)]^2 \times H^1(\mathcal{T}_h).$$

Demostración: La demostración se sigue de manera similar al Lema 3.2.2. Omitimos detalles. \square

Para la existencia única de solución y estimación a priori, aplicando estrategias similares a lo hecho en el Teorema 3.2.2, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3.1 Para $\delta_1 \in (0, 1)$, existe $h_0 := h_0(\omega, \varepsilon) > 0$ tal que para $h < h_0$, el Problema 3.22 tiene única solución $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$. Más aun, existe $\widehat{C} > 0$, independiente del tamaño de malla y ω , tal que

$$\|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h)\|_{LDG} \leq \widehat{C} \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2 \min\{l, m, m'\}} \left(\|\boldsymbol{\sigma}\|_{H^l(T)}^2 + \|u\|_{H^{l+1}(T)}^2 \right) \right]^{1/2}, \quad (3.23)$$

donde m' y m denotan el grado polinomial de los espacios discretos $\boldsymbol{\Sigma}_h$ y V_h , respectivamente.

3.4. Sistema lineal de ecuaciones

Dado $T_k \in \mathcal{T}_h$, desde ahora en adelante asumiremos la siguiente numeración local para los vértices y lados.

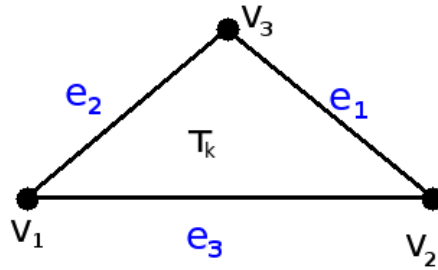


Figura 3.1: Relación entre numeración local de los vértices y numeración local de los lados en el triángulo T_k .

Sea $\{\phi_1^{T_k}(x, y), \phi_2^{T_k}(x, y), \phi_3^{T_k}(x, y)\}$ una base para $P_1(T_k)$ tal que

$$\phi_i^{T_k}(\mathbf{v}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad (3.24)$$

donde $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ y $\mathbf{v}_3 = (x_3, y_3)$ son los vértices de T_k recorridos en sentido antihorario. Definiendo $\phi_i^{T_k}(x, y) = a_{i1} + a_{i2}x + a_{i3}y$ con $i \in \{1, 2, 3\}$, de lo anterior

$$\phi_i^{T_k}(x_j, y_j) = a_{i1} + a_{i2}x_j + a_{i3}y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \iff (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) \begin{pmatrix} 1 \\ x_j \\ y_j \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

así,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, definiendo $COEF$ como la matriz de coeficientes de las funciones base de $P_1(T_k)$, se tiene que

$$COEF = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (3.25)$$

Por otro lado, dado que $\phi_i^{T_k}$ es un polinomio de grado uno, tenemos

$$\phi_i^{T_k}(\mathbf{v}_{lp}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } (l = i) \vee (p = i), \\ 0, & \text{e.o.c,} \end{cases} \quad (3.26)$$

donde \mathbf{v}_{lp} es el punto medio del lado e de vértices $\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_p$. Aquí l, p es la numeración local de los vértices $\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_p$, respectivamente.

Con la base definida para $P_1(T_k)$, podemos definir una base para $[P_1(T_k)]^2$ como

$$\{\varphi_{2l-1}^{T_k}(x, y), \varphi_{2l}^{T_k}(x, y)\}_{l=1}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} \phi_l^{T_k}(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_l^{T_k}(x, y) \end{pmatrix} \right\}_{l=1}^3. \quad (3.27)$$

Considerando (3.21) y (3.10), se tiene la siguiente formulación discreta: *Encontrar* $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$ tales que:

$$\int_{\Omega} (1 - \delta_1) \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} - \int_{\Omega} (1 - \delta_1) \nabla_h u_h \cdot \boldsymbol{\tau} + S_h(u_h, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\mathcal{E}_D} g_D \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h, \quad (3.28a)$$

$$\int_{\Omega} (1 - \delta_1) \nabla_h v \cdot \boldsymbol{\sigma}_h - S_h(v, \boldsymbol{\sigma}_h) + \boldsymbol{\alpha}(u_h, v) + \delta_1 \int_{\Omega} \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v - \omega^2 \int_{\Omega} u_h v = \int_{\Omega} f v + \int_{\mathcal{E}_D} \alpha g_D v + \int_{\mathcal{E}_N} g_N v \quad \forall v \in V_h, \quad (3.28b)$$

con $\delta_1 \in (0, 1)$ y S_h definido en (3.11).

Extendiendo por cero a todo Ω las funciones bases de $P_1(T_k)$ podemos decir que $\phi_i^{T_k} \in V_h$ y $\varphi_i^{T_k} \in \boldsymbol{\Sigma}_h$. Testeando (3.28) con estas funciones base, y dado que $\text{sop}\{\phi_i^{T_k}\} = T_k$ se tiene

$$\int_{T_k} (1 - \delta_1) \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} - \int_{T_k} (1 - \delta_1) \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} + S_h(u_h, \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k}) = \int_{\mathcal{E}_D \cap \partial T_k} g_D \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 6\}, \quad (3.29a)$$

$$\int_{T_k} (1 - \delta_1) \nabla \phi_i^{T_k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_h - S(\phi_i^{T_k}, \boldsymbol{\sigma}_h) + \boldsymbol{\alpha}(u_h, \phi_i^{T_k}) + \delta_1 \int_{T_k} \nabla_h u_h \cdot \nabla_h \phi_i^{T_k} - \omega^2 \int_{T_k} u_h \phi_i^{T_k} = \quad (3.29b)$$

$$\int_{T_k} f \phi_i^{T_k} + \int_{\mathcal{E}_N \cap \partial T_k} \alpha g_N \phi_i^{T_k} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Además, de la definición de la forma bilineal (3.11), considerando que $\text{supp}\{\boldsymbol{\varphi}_i^{T_k}\} = T_k$, y definiendo $\mathcal{E}_I^k := \mathcal{E}_I \cap \partial T_k$, $\mathcal{E}_D^k := \mathcal{E}_D \cap \partial T_k$, tenemos que

$$S_h(u_h, \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k}) = \int_{\mathcal{E}_I^k} (\{\boldsymbol{\varphi}_i^{T_k}\} - \llbracket \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} \rrbracket \boldsymbol{\beta}) \cdot \llbracket u_h \rrbracket + \int_{\mathcal{E}_D^k} u_h \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} \cdot \boldsymbol{\nu} = \int_{\mathcal{E}_I^k} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} - \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} \cdot \boldsymbol{\nu}_k^T \boldsymbol{\beta} \right) \cdot \llbracket u_h \rrbracket + \int_{\mathcal{E}_D^k} u_h \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} \cdot \boldsymbol{\nu},$$

lo cual, usando la definición de salto dada en (2.7b) y reordenando, implica que

$$\begin{aligned} S_h(u_h, \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k}) &= \int_{\mathcal{E}_I^k} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} - \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} \cdot \boldsymbol{\nu}_k^T \boldsymbol{\beta} \right) \cdot u_h^{T_k} \boldsymbol{\nu}^{T_k} + \int_{\mathcal{E}_D^k} u_h^{T_k} \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} \cdot \boldsymbol{\nu} + \sum_{e \in \mathcal{E}_I^k} \int_e \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} - \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} \cdot \boldsymbol{\nu}_k^T \boldsymbol{\beta} \right) \cdot u_h^{T_k} \boldsymbol{\nu}^{T_k} \\ &= S(u_h^{T_k}, \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k}) + \sum_{e \in \mathcal{E}_I^k} S_e(u_h^{T_k}, \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k}) \end{aligned}$$

donde

$$S(v, \boldsymbol{\tau}) := \left(\frac{1}{2} - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu}^{T_k} \right) \int_{\mathcal{E}_I^k} v \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}^{T_k} + \int_{\mathcal{E}_D^k} v \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}^{T_k} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h,$$

$$S_e(v, \boldsymbol{\tau}) := - \left(\frac{1}{2} - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu}^{T_r} \right) \int_e v \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}^{T_r} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in [P_1(T_r)]^2 \times P_1(T_l), \quad e = \partial T_l \cap \partial T_r \in \mathcal{E}_I.$$

De manera análoga, tenemos que

$$S_h(\phi_i^{T_k}, \boldsymbol{\sigma}_h) = S(\phi_i^{T_k}, \boldsymbol{\sigma}_h^{T_k}) + \sum_{e \in \mathcal{E}_I} S_e(\phi_i^{T_k}, \boldsymbol{\sigma}_h^{T_k}),$$

$$\boldsymbol{\alpha}(u_h^{T_k}, \phi_i^{T_k}) = \boldsymbol{\alpha}_1(u_h^{T_k}, \phi_i^{T_k}) + \sum_{e \in \mathcal{E}_I} \boldsymbol{\alpha}_e(u_h^{T_k}, \phi_i^{T_k}),$$

donde

$$\boldsymbol{\alpha}_1(v, w) := \int_{\partial T_k} \alpha v w \quad \forall (v, w) \in V_h \times V_h,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_e(v, w) := - \int_e \alpha v w \quad \forall (v, w) \in P_1(T_l) \times P_1(T_r), \quad e = \partial T_l \cap \partial T_r \in \mathcal{E}_I.$$

En estas ecuaciones se consideró que $\boldsymbol{\nu}^{T_k}$ es un vector normal exterior unitario a ∂T_k .

Dado que $\boldsymbol{\sigma}_h^{T_k} = \sum_{j=1}^6 \lambda_j^{T_k} \boldsymbol{\varphi}_j^{T_k}$, $\boldsymbol{\sigma}_h^{T'_k} = \sum_{j=1}^6 \lambda_j^{T'_k} \boldsymbol{\varphi}_j^{T'_k}$, $u_h^{T_k} = \sum_{j=1}^3 \mu_j^{T_k} \phi_j^{T_k}$, $u_h^{T'_k} = \sum_{j=1}^3 \mu_j^{T'_k} \phi_j^{T'_k}$ y que S , S_e , $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\alpha}_1$ son formas bilineales, tenemos que (3.29) puede ser escrito como el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^6 \lambda_j^{T_k} (1 - \delta_1) \int_{T_k} \boldsymbol{\varphi}_j^{T_k} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} + \sum_{j=1}^3 \mu_j^{T_k} \left(-(1 - \delta_1) \int_{T_k} \nabla \phi_j^{T_k} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} + S(\phi_j^{T_k}, \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k}) \right) + \\ & \sum_{e \in \mathcal{E}_I} \sum_{j=1}^3 \mu_j^{T'_k} S_e(\phi_j^{T'_k}, \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k}) = \int_{\mathcal{E}_D^k} g \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 6\}, \end{aligned} \quad (3.30a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^6 \lambda_j^{T_k} \left((1 - \delta_1) \int_{T_k} \nabla \phi_i^{T_k} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j^{T_k} - S(\phi_i^{T_k}, \boldsymbol{\varphi}_j^{T_k}) \right) + \sum_{j=1}^3 \mu_j^{T_k} \left(\boldsymbol{\alpha}_1(\phi_j^{T_k}, \phi_i^{T_k}) + \delta_1 \int_{T_k} \nabla_h \phi_j^{T_k} \cdot \nabla_h \phi_i^{T_k} \right. \\ & \left. - \omega^2 \int_{T_k} \phi_j^{T_k} \phi_i^{T_k} \right) + \sum_{e \in \mathcal{E}_I} \left(- \sum_{j=1}^6 \lambda_j^{T'_k} S_e(\phi_i^{T_k}, \boldsymbol{\varphi}_j^{T'_k}) + \sum_{j=1}^3 \mu_j^{T'_k} \boldsymbol{\alpha}_e(\phi_j^{T'_k}, \phi_i^{T_k}) \right) = \int_{T_k} f \phi_i^{T_k} + \int_{\mathcal{E}_N^k} \alpha g_N \phi_i^{T_k}, \\ & \forall i \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (3.30b)$$

3.5. Ecuación matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Dado $h > 0$, definimos N igual al número de elementos en la partición \mathcal{T}_h . Definiendo el vector de incógnitas $\mathbf{x} = [\mathbf{x}^{T_1}; \mathbf{x}^{T_2}; \dots; \mathbf{x}^{T_N}] \in \mathbb{R}^{9N}$, con

$$\mathbf{x}^{T_k} = [\boldsymbol{\lambda}^{T_k}; \boldsymbol{\mu}^{T_k}] \in \mathbb{R}^9, \quad \boldsymbol{\lambda}^{T_k} = [\lambda_1^{T_k}, \lambda_2^{T_k}, \dots, \lambda_6^{T_k}]^t \text{ y } \boldsymbol{\mu}^{T_k} = [\mu_1^{T_k}, \mu_2^{T_k}, \mu_3^{T_k}]^t, \quad \forall T_k \in \mathcal{T}_h.$$

El sistema de ecuaciones (3.30) puede ser escrito de manera matricial como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \text{con } A \in \mathbb{R}^{9N \times 9N} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{9N}.$$

Notar que el vector $\boldsymbol{\lambda}^{T_k}$ va desde la posición $9k - 8$ a la posición $9k - 3$ del vector \mathbf{x} mientras que el vector $\boldsymbol{\mu}^{T_k}$ va desde $9k - 2$ a $9k$.

52CAPÍTULO 3. IMPLEMENTACIÓN DE UN ESQUEMA LDG PARA EL PROBLEMA DE HELMHOLTZ

Para construir la matriz A y el vector \mathbf{b} recorreremos cada elemento de \mathcal{T}_h agregando a la matriz A las matrices locales generadas a partir de las nueve ecuaciones lineales obtenidas en (3.30), para tales efectos definimos las matrices locales $A^{T_k} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$; $B^{T_k}, S^{T_k}, S_e^{l,r} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ y $C^{T_k}, \mathcal{B}^{T_k}, \mathcal{B}_e^{k,k'} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ como

$$A_{ij}^{T_k} = A(\varphi_i^{T_k}, \varphi_j^{T_k}) := (1 - \delta_1) \int_{T_k} \varphi_i^{T_k} \cdot \varphi_j^{T_k}, \quad (\mathcal{B}_e^{k,k'})_{ij} = \alpha_e(\phi_i^{T_k}, \phi_j^{T_k}), \quad S_{ij}^{T_k} = S(\varphi_i^{T_k}, \phi_j^{T_k}),$$

$$B_{ij}^{T_k} = B(\varphi_i^{T_k}, \phi_j^{T_k}) := (1 - \delta_1) \int_{T_k} \varphi_i^{T_k} \cdot \nabla \phi_j^{T_k}, \quad (S_e^{l,r})_{ij} = S_e(\varphi_i^{T_l}, \phi_j^{T_r}), \quad \mathcal{B}_{i,j}^{T_k} = \alpha_1(\phi_i^{T_k}, \phi_j^{T_k})$$

$$C_{ij}^{T_k} = C_\omega(\phi_i^{T_k}, \phi_j^{T_k}) := \delta_1 \int_{T_k} \nabla_h \phi_i^{T_k} \nabla_h \phi_j^{T_k} - \omega^2 \int_{T_k} \phi_i^{T_k} \phi_j^{T_k}.$$

Por ejemplo, si estamos en el elemento T_k , y éste tiene como vecinos a los elementos T_1, T_{k+8} y T_N en las aristas e_1, e_2 y e_3 respectivamente (según numeración local.), entonces se agregan las siguientes matrices locales a A .

	α^{T_1}	λ^{T_1}	...	α^{T_k}	λ^{T_k}	...	$\alpha^{T_{k+8}}$	$\lambda^{T_{k+8}}$...	α^{T_N}	λ^{T_N}
α^{T_1}											
λ^{T_1}											
\vdots											
α^{T_k}		$S_{e_1}^{k,k'}$		A^{T_k}	$-B^{T_k} + S^{T_k}$			$S_{e_2}^{k,k'}$			$S_{e_3}^{k,k'}$
λ^{T_k}	$[S_{e_1}^{k',k}]^t$	$\mathcal{B}_{e_1}^{k,k'}$		$[B^{T_k}]^t - [S^{T_k}]^t$	$C^{T_k} + \mathcal{B}^{T_k}$			$[S_{e_2}^{k',k}]^t$		$[S_{e_3}^{k',k}]^t$	$\mathcal{B}_{e_3}^{k,k'}$
\vdots											
$\alpha^{T_{k+8}}$											
$\lambda^{T_{k+8}}$											
\vdots											
α^{T_N}											
λ^{T_N}											

Observaciones:

1. Las matrices $[S_{e_n}^{l,r}]^t$ deben ser multiplicadas por -1.
2. La orientación de la arista e_n es siempre considerada desde el triángulo T_k .

Por otro lado el vector se construye como:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}^{T_1}; \mathbf{b}^{T_2}; \dots; \mathbf{b}^{T_k}; \dots; \mathbf{b}^{T_N}],$$

donde la estructura de cada vector $\mathbf{b}^{T_k} \in \mathbb{R}^9$ es de la forma:

$$\mathbf{b}^{T_k} = [\mathbf{b}^\tau; \mathbf{b}^v],$$

con $\mathbf{b}^\tau \in \mathbb{R}^6$ y $\mathbf{b}^v \in \mathbb{R}^3$, definidos como

$$\mathbf{b}_i^\tau = \int_{\mathcal{E}_D^k} g_D \boldsymbol{\varphi}_i^{T_k} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{b}_j^v = \int_{T_k} f \phi_j^{T_k} + \int_{\mathcal{E}_N^k} \alpha g_N \phi_j^{T_k}, \quad i = 1 : 6, j = 1 : 3.$$

De (3.27), es fácil ver que

$$\mathbf{b}_{2m-1}^\tau = \nu_1 \int_{\mathcal{E}_D^k} g_D \phi_m^{T_k}, \quad \mathbf{b}_{2m}^\tau = \nu_2 \int_{\mathcal{E}_D^k} g_D \phi_m^{T_k}, \quad \forall m \in \{1, 2, 3\}.$$

Finalmente, definiendo los vectores $\mathbf{g}_D := [g_1^D, g_2^D, g_3^D]^t$, $\mathbf{g}_N := [g_1^N, g_2^N, g_3^N]^t$ y $\mathbf{f} := [f_1, f_2, f_3]^t$, con $g_i^D = \int_{\mathcal{E}_D^k} g_D \phi_i^{T_k}$, $g_i^N = \int_{\mathcal{E}_N^k} g_N \phi_i^{T_k}$ y $f_i = \int_{T_k} f \phi_i^{T_k}$, se tiene

$$\mathbf{b}^\tau = [g_1^D \boldsymbol{\nu}^{T_k}, g_2^D \boldsymbol{\nu}^{T_k}, g_3^D \boldsymbol{\nu}^{T_k}]^t \quad \text{y} \quad \mathbf{b}^v = \frac{\hat{\alpha}}{h} \mathbf{g}_N + \mathbf{f}.$$

Las integrales sobre cada triángulo $T \in \mathcal{T}_h$ se aproximan aplicando una regla de cuadratura conocida de siete puntos. En la Tabla 3.1 se describen los nodos y pesos para la cuadratura respecto al elemento de referencia de nodos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, extraída de [8] (Capítulo II, Sección 8).

i	ξ_i	η_i	w_i
1	1/3	1/3	9/80
2	$(6 + \sqrt{15})/21$	$(6 + \sqrt{15})/21$	$(155 + \sqrt{15})/2400$
3	$(9 - 2\sqrt{15})/21$	$(6 + \sqrt{15})/21$	
4	$(6 + \sqrt{15})/21$	$(9 - 2\sqrt{15})/21$	
5	$(6 - \sqrt{15})/21$	$(6 - \sqrt{15})/21$	$(155 - \sqrt{15})/2400$
6	$(9 + 2\sqrt{15})/21$	$(6 - \sqrt{15})/21$	
7	$(6 - \sqrt{15})/21$	$(9 + 2\sqrt{15})/21$	

Tabla 3.1: Nodos (ξ_i, η_i) y pesos w_i de una regla de cuadratura para el elemento de referencia \hat{T} .

Así, definiendo $(x_i, y_i) = L_T(\xi_i, \eta_i)$, donde $L_T : \hat{T} \rightarrow T$ es la transformación afín definida como $L_T(\hat{\mathbf{x}}) = A\hat{\mathbf{x}} + B = \mathbf{x}$, tenemos

$$\begin{bmatrix} \langle f, \phi_1^T \rangle_{L^2(\Omega)} \\ \langle f, \phi_2^T \rangle_{L^2(\Omega)} \\ \langle f, \phi_3^T \rangle_{L^2(\Omega)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^7 w_i f(x_i, y_i) \phi_1^T(x_i, y_i) \\ \sum_{i=1}^7 w_i f(x_i, y_i) \phi_2^T(x_i, y_i) \\ \sum_{i=1}^7 w_i f(x_i, y_i) \phi_3^T(x_i, y_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}_w, \phi_1^T \rangle_{\mathbb{R}^7} \\ \langle \mathbf{f}_w, \phi_2^T \rangle_{\mathbb{R}^7} \\ \langle \mathbf{f}_w, \phi_3^T \rangle_{\mathbb{R}^7} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\phi}_1^T \boldsymbol{\phi}_2^T \boldsymbol{\phi}_3^T]^t \mathbf{f}_w,$$

54CAPÍTULO 3. IMPLEMENTACIÓN DE UN ESQUEMA LDG PARA EL PROBLEMA DE HELMHOLTZ

donde $\mathbf{f}_w := (w_i f(x_i, y_i))_{i=1}^7, \phi_j^T \in \mathbb{R}^7 := (\phi_j^T(x_i, y_i))_{i=1}^7$ son vectores columnas. Por último, definiendo $\Phi = [\phi_1^T \phi_2^T \phi_3^T]$, y considerando (3.25), tenemos que

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_7 & y_7 \end{bmatrix} COEF^t \implies \mathbf{f} = COEF \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_7 & y_7 \end{bmatrix}^t \mathbf{f}_w.$$

Por otro lado, para calcular \mathbf{g}_D y \mathbf{g}_N sumamos las integrales en cada lado de \mathcal{E}_D^k y \mathcal{E}_N^k respectivamente (a los más dos). Para el cálculo en $e \in \mathcal{E}_D^k$ (o $e \in \mathcal{E}_N^k$) usamos la regla de Simpson compuesta. Luego, procediendo de manera similar al cálculo de \mathbf{f} , tenemos que

$$\mathbf{g}_D = COEF \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_7 & y_7 \end{bmatrix}^t \mathbf{g}_D^w, \quad \mathbf{g}_N = COEF \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_7 & y_7 \end{bmatrix}^t \mathbf{g}_N^w,$$

donde las componentes de $\mathbf{g}_D^w := (w_i g_D(x_i, y_i))_{i=1}^7, \mathbf{g}_N^w := (w_i g_N(x_i, y_i))_{i=1}^7$ son vectores columna.

Para finalizar la sección describiremos la estructura de las matrices locales. Con la finalidad de facilitar nuestro objetivo definimos las siguientes matrices

$$E_{T_k} = (\langle \phi_i^{T_k}, \phi_j^{T_k} \rangle_{L^2(T_k)}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad E_{e_n^{T_k}}^{l,r} = (\langle \phi_i^{T_l}, \phi_j^{T_r} \rangle_{L^2(e_n^{T_k})}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Considerando la siguiente regla de integración (que es exacta para polinomios de grado menor o igual a dos)

$$\int_{T_k} f \approx \frac{|T_k|}{3} (f(\mathbf{v}_{12}) + f(\mathbf{v}_{23}) + f(\mathbf{v}_{31})),$$

siendo \mathbf{v}_{lp} punto medio del lado de extremos \mathbf{v}_l y \mathbf{v}_p del triángulo T_k (según numeración local). Tenemos así que

$$(E_{T_k})_{ij} = \langle \phi_i^{T_k}, \phi_j^{T_k} \rangle_{L^2(T_k)} = \frac{|T_k|}{3} (\phi_i^{T_k}(\mathbf{v}_{12}) \phi_j^{T_k}(\mathbf{v}_{12}) + \phi_i^{T_k}(\mathbf{v}_{23}) \phi_j^{T_k}(\mathbf{v}_{23}) + \phi_i^{T_k}(\mathbf{v}_{31}) \phi_j^{T_k}(\mathbf{v}_{31})) =$$

$$\frac{|T_k|}{3} [\phi_i^{T_k}(\mathbf{v}_{12}), \phi_i^{T_k}(\mathbf{v}_{23}), \phi_i^{T_k}(\mathbf{v}_{31})] \begin{bmatrix} \phi_j^{T_k}(\mathbf{v}_{12}) \\ \phi_j^{T_k}(\mathbf{v}_{23}) \\ \phi_j^{T_k}(\mathbf{v}_{31}) \end{bmatrix}.$$

De este modo, definiendo la matriz

$$P = \begin{bmatrix} \phi_1^{T_k}(\mathbf{v}_{12}) & \phi_1^{T_k}(\mathbf{v}_{23}) & \phi_1^{T_k}(\mathbf{v}_{31}) \\ \phi_2^{T_k}(\mathbf{v}_{12}) & \phi_2^{T_k}(\mathbf{v}_{23}) & \phi_2^{T_k}(\mathbf{v}_{31}) \\ \phi_3^{T_k}(\mathbf{v}_{12}) & \phi_3^{T_k}(\mathbf{v}_{23}) & \phi_3^{T_k}(\mathbf{v}_{31}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

se tiene que $E_{T_k} = \frac{|T_k|}{3} PP^t$.

Por otro lado, usando la regla de integración definida para T_k y (3.26), tenemos que $\int_{T_k} \phi_i^{T_k} = \frac{|T_k|}{3}$. Además, usando la regla de integración de Simpson simple (que es exacta para polinomios de grado menor o igual a dos)

$$\int_{e_n^{T_k}} f = \frac{|e_n^{T_k}|}{6} (f(\mathbf{v}_i) + 4f(\mathbf{v}_{if}) + f(\mathbf{v}_f)),$$

con \mathbf{v}_i y \mathbf{v}_f vértices inicial y final, respectivamente, del lado $e_n^{T_k}$ (recorriendo en sentido anti-horario T_k) y \mathbf{v}_{if} el punto medio de dicho lado, tenemos que

$$\begin{aligned} E_{e_n^{T_k} mn}^{l,r} &= \langle \phi_m^{T_l}, \phi_n^{T_r} \rangle_{L^2(e_n^{T_k})} = \frac{|e_n^{T_k}|}{6} (\phi_m^{T_l}(\mathbf{v}_i) \phi_n^{T_r}(\mathbf{v}_i) + 4\phi_m^{T_l}(\mathbf{v}_{if}) \phi_n^{T_r}(\mathbf{v}_{if}) + \phi_m^{T_l}(\mathbf{v}_f) \phi_n^{T_r}(\mathbf{v}_f)) = \\ & \frac{|e_n^{T_k}|}{6} [\phi_m^{T_l}(\mathbf{v}_i), 2\phi_m^{T_l}(\mathbf{v}_{if}), \phi_m^{T_l}(\mathbf{v}_f)] \begin{bmatrix} \phi_n^{T_r}(\mathbf{v}_i) \\ 2\phi_n^{T_r}(\mathbf{v}_{if}) \\ \phi_n^{T_r}(\mathbf{v}_f) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Con esto, definiendo la matriz

$$\mathcal{A}^{e^{T_s}} = \begin{bmatrix} \phi_1^{T_s}(\mathbf{v}_i) & 2\phi_1^{T_s}(\mathbf{v}_{if}) & \phi_1^{T_s}(\mathbf{v}_f) \\ \phi_2^{T_s}(\mathbf{v}_i) & 2\phi_2^{T_s}(\mathbf{v}_{if}) & \phi_2^{T_s}(\mathbf{v}_f) \\ \phi_3^{T_s}(\mathbf{v}_i) & 2\phi_3^{T_s}(\mathbf{v}_{if}) & \phi_3^{T_s}(\mathbf{v}_f) \end{bmatrix},$$

llegamos a que $E_{e_n^{T_k}}^{l,r} = \mathcal{A}^{e^{T_l}} (\mathcal{A}^{e^{T_r}})^t$.

Los valores de $\mathcal{A}^{e^{T_s}}$ dependen de la numeración local de la arista $e_n^{T_k}$, con $n \in \{1, 2, 3\}$. Considerando (3.24) y (3.26), el script valinte.m entrega la matriz \mathcal{A}^T para una arista dada.

```

1 function A=valinte(k)
2 % k : numeración local de la arista
3 % A : matriz \cA_{T_k}
4 if k==1
5     A=[1 1 0;0 1 1;0 0 0];
6 elseif k==2
7     A=[0 0 0;1 1 0;0 1 1];
8 else
9     A=[0 1 1;0 0 0;1 1 0];
10 end

```

A continuación describiremos la estructura de las matrices locales.

- **Matriz A^{T_k} :** De la definición de A^{T_k} podemos ver que ella es simétrica. Por otro lado, considerando (3.27), tenemos que

$$A_{2m,2n-1}^{T_k} = A_{2m-1,2n}^{T_k} = 0, \quad \forall n, m \in \{1, 2, 3\},$$

además:

$$A_{2m-1,2n-1}^{T_k} = A_{2m,2n}^{T_k} = (1 - \delta_1) \int_{T_k} \phi_m^{T_k} \phi_n^{T_k}, \quad \forall n, m \in \{1, 2, 3\}.$$

Así $A^{T_k} = \text{Alocal}((1 - \delta_1)E_{T_k})$, donde Alocal tiene como código

```

1 function B=Alocal(A)
2 % A: matriz de 3x3
3 % B: matriz de 6x6
4 B=[A(1,1) 0 A(1,2) 0 A(1,3) 0;0 A(1,1) 0 A(1,2) 0 A(1,3);
5     A(2,1) 0 A(2,2) 0 A(2,3) 0;0 A(2,1) 0 A(2,2) 0 A(2,3);
6     A(3,1) 0 A(3,2) 0 A(3,3) 0;0 A(3,1) 0 A(3,2) 0 A(3,3)];
    
```

- **Matriz B^{T_k} :** Considerando que $\phi_j(x, y) = a_{j1} + a_{j2}x + a_{j3}y$, entonces $\nabla \phi_j = [a_{j2}, a_{j3}]^t$, y usando (3.27), tenemos

$$B_{2m-1,j}^{T_k} = a_{j2}(1 - \delta_1) \int_{T_k} \phi_m^{T_k} = \frac{(1 - \delta_1)|T_k|}{3} a_{j2} \quad \forall m, j \in \{1, 2, 3\},$$

$$B_{2m,j}^{T_k} = a_{j3}(1 - \delta_1) \int_{T_k} \phi_m^{T_k} = \frac{(1 - \delta_1)|T_k|}{3} a_{j3} \quad \forall m, j \in \{1, 2, 3\},$$

concluyendo que

$$B^{T_k} = \frac{(1 - \delta_1)|T_k|}{3} [(COEF(:, 2 : 3))^t; (COEF(:, 2 : 3))^t; (COEF(:, 2 : 3))^t],$$

- **Matriz C^{T_k} :** De la definición de $C_{ij}^{T_k}$ es directo que

$$C^{T_k} = \delta_1 |T_k| COEF(:, 2 : 3) COEF(:, 2 : 3)^t - w^2 E_{T_k}.$$

En ambos casos $COEF(:, 2 : 3) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ corresponde a las dos últimas columnas de $COEF$.

- **Matriz S^{T_k} :** Considerando la definición de $S_{ij}^{T_k}$ y (3.27), tenemos que

$$S_{2m-1,j}^{T_k} = \nu_1^{T_k} (1/2 - \nu^{T_k} \cdot \beta) \int_{\mathcal{E}_I^k} \phi_m^{T_k} \phi_j^{T_k} + \nu_1^{T_k} \int_{\mathcal{E}_\Gamma^k} \phi_m^{T_k} \phi_j^{T_k} = \sum_{e_n \in \partial T} \eta_1^{T_k} \int_{e_n} \phi_m^{T_k} \phi_j^{T_k}, \quad \forall m, j \in \{1, 2, 3\},$$

$$S_{2m,j}^{T_k} = \nu_2^{T_k} (1/2 - \nu^{T_k} \cdot \beta) \int_{\mathcal{E}_I^k} \phi_m^{T_k} \phi_j^{T_k} + \nu_2^{T_k} \int_{\mathcal{E}_\Gamma^k} \phi_m^{T_k} \phi_j^{T_k} = \sum_{e_n \in \partial T} \eta_2^{T_k} \int_{e_n} \phi_m^{T_k} \phi_j^{T_k}, \quad \forall m, j \in \{1, 2, 3\}$$

donde

$$\eta^{T_k} = \begin{cases} \nu^{T_k} (1/2 - \nu^{T_k} \cdot \beta), & \text{si } e_n \in \mathcal{E}_I^k \\ \nu^{T_k}, & \text{si } e_n \in \mathcal{E}_\Gamma^k. \end{cases}$$

Así la matriz S^{T_k} viene dada por

$$S^{T_k} = \sum_{e_n \in \partial T_k} [\eta^{T_k} E_{e_n}^{k,k}(1, :); \eta^{T_k} E_{e_n}^{k,k}(2, :); \eta^{T_k} E_{e_n}^{k,k}(3, :)].$$

- **Matriz \mathcal{B}^{T_k}** : Considerando la definición de $\mathcal{B}_{ij}^{T_k}$ y α_1 , tenemos que

$$\mathcal{B}_{ij}^{T_k} = \sum_{e_n \in \partial T_k} \frac{\hat{\alpha}}{h} \int_{e_n} \phi_i^{T_k} \phi_j^{T_k}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

donde

$$h = \begin{cases} \text{máx}\{h_{T_k}, h_{T'_k}\}, & \text{si } e_n \in \mathcal{E}_I^k \\ h_{T_k}, & \text{si } e_n \in \mathcal{E}_\Gamma^k \end{cases}.$$

Así,

$$\mathcal{B}^{T_k} = \sum_{e_n \in \partial T_k} \frac{\hat{\alpha}}{h} E_{e_n}^{k,k}.$$

- **Matrices $S_{e_n}^{l,r}$** : Tenemos dos casos posibles $(l, r) = (k, k')$ y $(l, r) = (k', k)$. Considerando la definición de $S_{e_n}^{l,r}$, (3.27) y que $\nu^{T'_k} = -\nu^{T_k}$. Así, cuando $(l, r) = (k, k')$ tenemos que

$$(S_{e_n}^{k,k'})_{2m-1,j} = -\nu_1^{T_k} (1/2 - \nu^{T_k} \cdot \beta) \int_{e_n} \phi_m^{T_k} \phi_j^{T'_k}, \quad \forall m, j \in \{1, 2, 3\},$$

$$(S_{e_n}^{k,k'})_{2m,j} = -\nu_2^{T_k} (1/2 - \nu^{T_k} \cdot \beta) \int_{e_n} \phi_m^{T_k} \phi_j^{T'_k}, \quad \forall m, j \in \{1, 2, 3\},$$

por lo que

$$S_{e_n}^{k,k'} = -(1/2 - \nu^{T_k} \cdot \beta) [\nu^{T_k} E_{e_n}^{k,k'}(1, :); \nu^{T_k} E_{e_n}^{k,k'}(2, :); \nu^{T_k} E_{e_n}^{k,k'}(3, :)].$$

Por otro lado, si $(l, r) = (k', k)$, tenemos que

$$(S_{e_n}^{k',k})_{2m-1,j} = \nu_1^{T_k} (1/2 + \nu^{T_k} \cdot \beta) \int_{e_n} \phi_m^{T'_k} \phi_j^{T_k}, \quad \forall m, j \in \{1, 2, 3\},$$

$$(S_{e_n}^{k',k})_{2m,j} = \nu_2^{T_k} (1/2 + \nu^{T_k} \cdot \beta) \int_{e_n} \phi_m^{T'_k} \phi_j^{T_k}, \quad \forall m, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Así,

$$S_{e_n}^{k',k} = (1/2 + \nu^{T_k} \cdot \beta) [\nu^{T_k} E_{e_n}^{k',k}(1, :); \nu^{T_k} E_{e_n}^{k',k}(2, :); \nu^{T_k} E_{e_n}^{k',k}(3, :)].$$

- **Matriz $\mathcal{B}_{e_n}^{k,k'}$** : De la definición de $\mathcal{B}_{e_n}^{k,k'}$ es directo que

$$\mathcal{B}_{e_n}^{k,k'} = -\frac{\hat{\alpha}}{h} E_{e_n}^{k,k'}.$$

con $h = \text{máx}\{h_{T_k}, h_{T'_k}\}$.

3.6. Resultados numéricos

En esta sección mostraremos el rendimiento del método DG estabilizado (3.28), considerando espacios de aproximación $P_1 - [P_1]^2$. El código ha sido escrito en MATLAB. En lo que sigue, N representará el número total de grados de libertad (incógnitas) del sistema lineal (3.30). Además, denotamos los errores individuales $e_h(u) := \|u - u_h\|_h$, $e_0(\boldsymbol{\sigma}) := \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,\Omega}$, $e_0(u) := \|u - u_h\|_{0,\Omega}$ y el error global del método será denotado por $e := (e_h(u)^2 + e_0(\boldsymbol{\sigma})^2)^{1/2}$, donde $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in [L^2(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega)$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$ son las únicas soluciones de las formulaciones continua y discreta (3.2) y (3.28), respectivamente. Adicionalmente, si e y \tilde{e} representan el error de dos triangulaciones consecutivas con N y \tilde{N} grados de libertad respectivamente, entonces la razón de convergencia experimental es calculada por

$$r := -2 \frac{\log(e/\tilde{e})}{\log(N/\tilde{N})}.$$

Las definiciones para $r_h(u)$, $r_0(\boldsymbol{\sigma})$ y $r_0(u)$ son análogas.

Para la validación del método consideramos dos ejemplos. El primero de ellos se define en el cuadrado unitario $\Omega :=]0, 1[^2$, con $\Gamma_D = \Gamma$, mientras que en el segundo se considerará Ω como el dominio $] - 1, 1[^2 \setminus]0, 1] \times [-1, 0]$, con $\bar{\Gamma}_D = \{0\} \times [-1, 0] \cup]0, 1] \times \{0\}$. En cada uno de los ejemplos los datos f , g_D y/o g_N son elegidos de modo que la solución exacta u sea la indicada en la Tabla 3.2, mientras que $\hat{\alpha} = 1$, $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (1, 1)^\dagger$ y $\delta_1 = 1/2$.

Ejemplo	Dominio Ω	C.F.	ω	solución u
1	$]0, 1[^2$	Dirichlet	1	$\text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)$
2	$] - 1, 1[^2 \setminus]0, 1] \times [-1, 0]$	mixtas	1 5 10	$J_{2/3}(\omega r) \text{sen}(\frac{2}{3}\theta)$

Tabla 3.2: Datos para los dos ejemplos.

De la Tabla 3.2 podemos notar que la solución u del Ejemplo 1 es suave, mientras que la solución u del Ejemplo 2, dada en coordenadas polares y con $J_{2/3}$ representando la función de Bessel de primera especie de índice $2/3$, pertenece a $H^{1+2/3}(\Omega)$, pues no es diferenciable en $(0, 0)$. Esto implica que $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \in H^{2/3}(\Omega)$.

Para el cálculo de los errores consideramos regla de cuadratura de siete puntos para aproximar la integral en cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$, y regla de Simpson compuesta para aproximar integrales sobre los lados $e \in \mathcal{E}$.

Observación 3.6.1 Como en nuestros ejemplos consideramos $m = m' = 1$, aplicando el Teorema 3.3.1, si $u \in H^{1+l}(\Omega)$ con $l \leq 1$ tenemos que a partir de cierto tamaño de malla h_0 , existe $C > 0$ tal que

$$e \leq C \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2l} \|u\|_{H^{1+l}(T)}^2 \right]^{1/2} = \mathcal{O}(h^l),$$

Considerando además la relación $h = N^{-1/2}$, tenemos que la razón experimental debe tender a l cuando h tiende a cero.

Dado que en el Ejemplo 1 la función $u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ es infinitamente diferenciable, se puede tomar $l = 1$ en la Observación 3.6.1, deduciendo que $e = \mathcal{O}(h)$, asintóticamente. Esta tendencia puede ser vista en la columna correspondiente a e de la Tabla 3.3. Además, de la misma tabla, podemos notar que a partir de un h_0 relativamente pequeño el esquema empieza a converger (aproximadamente 128 elementos), esto se tiene gracias a que $\omega = 1$. Así es posible obtener una buena gráfica para u_h con relativamente pocos elementos (como muestra la Figura 3.2).

N	$e_0(u)$	$r_0(u)$	$e_h(u)$	r_h
8	0,093131629209	--	1,275329379024491	--
32	0,030607316408	1,605394659063	0,749655123113854	0,766570954475679
128	0,0084444088542	1,857862946089	0,393441698563820	0,930077171682434
512	0,002208726795	1,934726728710	0,199590874442475	0,979104108186681
2048	0,000565698649	1,965109348162	0,100307478860860	0,992616583895493
N	$e_0(\sigma)$	$r_0(\sigma)$	e	r
8	0,576517743584877	--	1,399584843327189	--
32	0,352166781944672	0,711106176941737	0,828253732811457	0,756854240807375
128	0,204520382252296	0,784014206126675	0,443424127586004	0,901385528085613
512	0,110693425269468	0,885675093003063	0,228231355336201	0,958190263782430
2048	0,057636731136989	0,941509113958842	0,115687437051650	0,980264803365708

Tabla 3.3: Errores y razones experimentales para el Ejemplo 1.

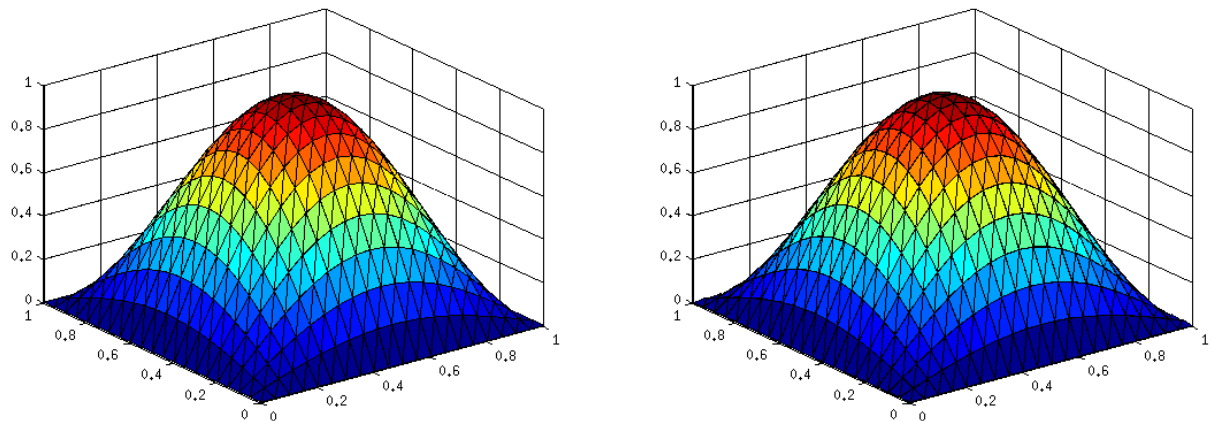


Figura 3.2: Gráfica solución exacta u (izquierda) y aproximada u_h (derecha) para una malla de 800 elementos (Ejemplo 1).

60CAPÍTULO 3. IMPLEMENTACIÓN DE UN ESQUEMA LDG PARA EL PROBLEMA DE HELMHOLTZ

La solución exacta en el Ejemplo 2 es $u(r, \theta) = J_{2/3}(\omega r) \sin(\frac{2}{3}\theta) \in H^{1+2/3}(\Omega)$, lo que permite tomar $l = \frac{2}{3}$ en la Observación 3.6.1, lo cual nos dice que $e \approx \mathcal{O}(h^{2/3})$.

Cuando $\omega = 1$, esta tendencia puede ser apreciada en la Tabla 3.4. Además, dado que $\omega = 1$, es posible obtener buenas aproximaciones de u a partir de 384 elementos aproximadamente, lo cual puede ser notado en la tabla antes mencionada o bien en la Figura 3.3.

N	$e_0(u)$	$r_0(u)$	$e_h(u)$	r_h
24	0,05645018301	--	0,18223894164	--
96	0,02272578217	1,31264830842	0,11328097746	0,68592565460
384	0,00911422517	1,31813803118	0,07089871115	0,67607431264
1536	0,00363700173	1,32537040022	0,04452672410	0,67108792697
6144	0,00144766544	1,32902138546	0,02801321252	0,66856403487
N	$e_0(\sigma)$	$r_0(\sigma)$	e	r
24	0,14250910522	--	0,23134363384	--
96	0,08900860406	0,67903739242	0,14406634392	0,683304059619272
384	0,05601904259	0,66802747487	0,09035906360	0,672992114333577
1536	0,03530484778	0,66605103024	0,05682483115	0,667539761869719
6144	0,02225227433	0,66591349985	0,03577574302	0,666934029262928

Tabla 3.4: Errores y razones experimentales para el Ejemplo 2 con $\omega = 1$.

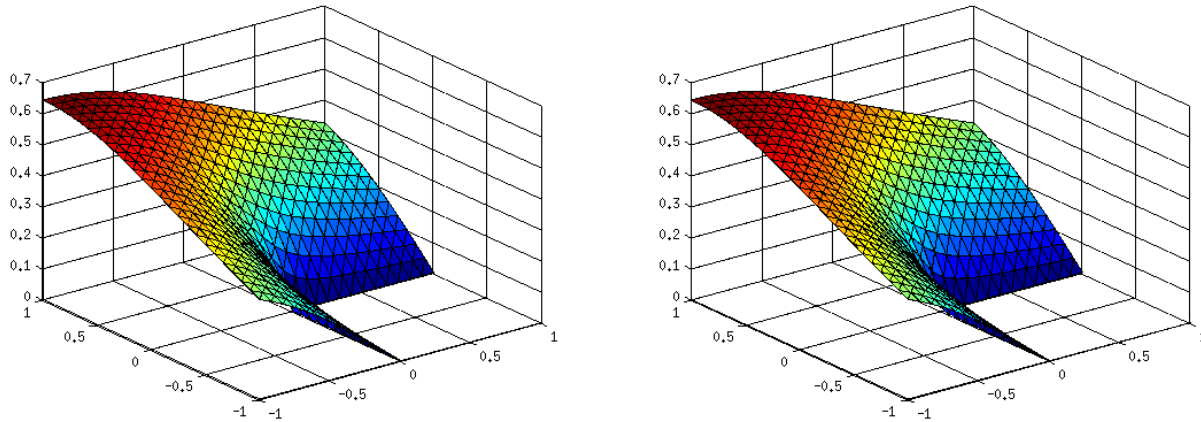
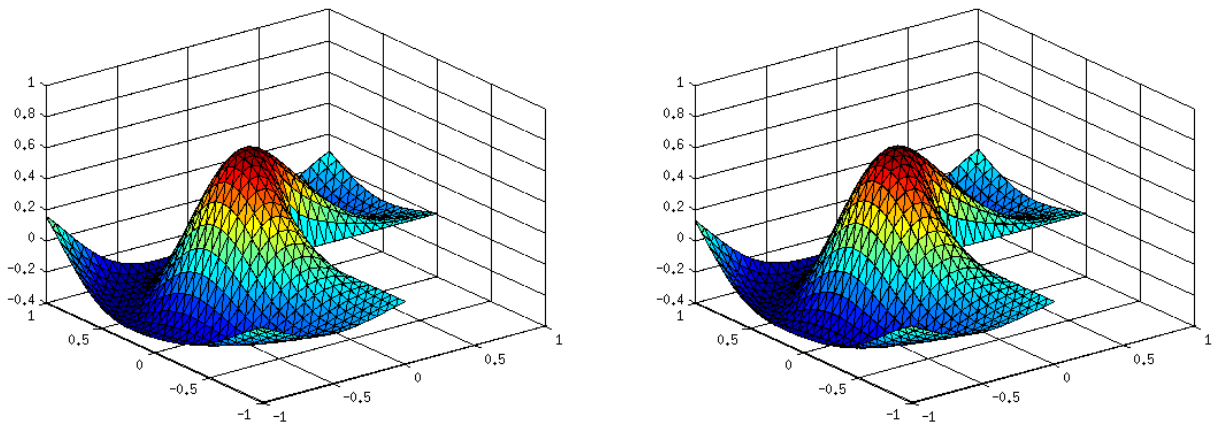


Figura 3.3: Gráfica solución exacta u (izquierda) y aproximada u_h (derecha) con $\omega = 1$ y una malla de 864 elementos (Ejemplo 2).

Con $\omega = 5$ podemos ver en la Tabla 3.5 que la convergencia del método no es tan rápida. Además del gráfico de error (Figura 3.5) se puede ver que el orden de convergencia preicho se empieza a tener a partir de $N=384$.

N	$e_0(u)$	$r_0(u)$	$e_h(u)$	r_h
24	1,17516492876	--	5,71069568276	--
96	0,32400706646	1,85876606319	1,80002024723	1,66565337231
384	0,16279687303	0,99295228914	0,90363878601	0,99419503400
1536	0,06062932814	1,42498524841	0,37602760629	1,26490761336
6144	0,01100585470	2,46174464819	0,13261796337	1,50356237744
24576	0,00282878676	1,96001585594	0,06939196531	0,93443567235
98304	0,00079792454	1,82585921166	0,03949430832	0,81312387132
N	$e_0(\sigma)$	$r_0(\sigma)$	e	r
24	5,80921318351	--	8,14610354663	--
96	1,73686864029	1,74185412724	2,50135674466	1,703399322792266
384	0,85632103881	1,02026497052	1,24492922573	1,006647102668212
1536	0,33573202298	1,35084161971	0,50409597493	1,304293387384848
6144	0,09958757798	1,75327244700	0,16584694720	1,603845978661447
24576	0,05050978942	0,97940277228	0,08582822192	0,950328440319653
98304	0,02917841020	0,79166174780	0,04910376779	0,805618382291092

Tabla 3.5: Errores y razones experimentales para el Ejemplo 2 con $\omega = 5$.Figura 3.4: Gráfica solución exacta u (izquierda) y aproximada u_h (derecha) con $\omega = 5$ y una malla de 1350 elementos (Ejemplo 2).

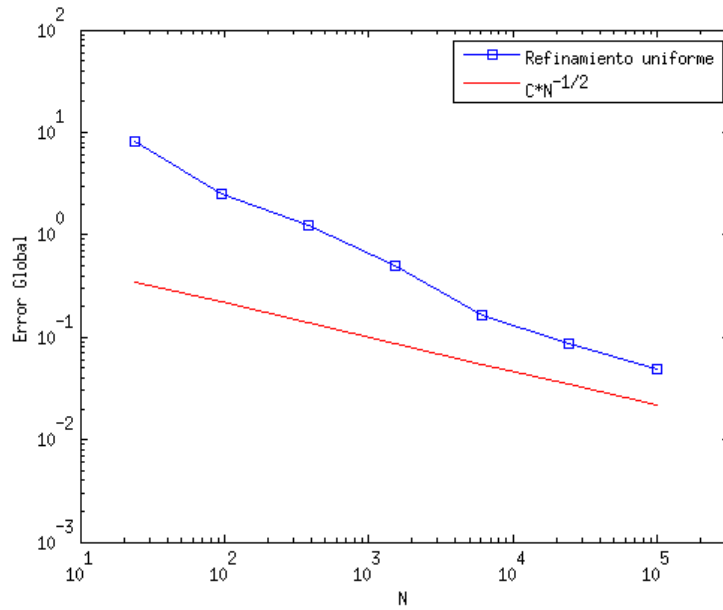


Figura 3.5: Gráfica en escala logarítmica der error v/s Número de elementos para $w = 5$ (Ejemplo 2).

N	$e_0(u)$	$r_0(u)$	$e_h(u)$	r_h
24	0,34380888725	--	3,70978810427	--
96	0,32688276997	0,07283350363	3,44248487469	0,10788646974
384	0,36382489142	--	3,64392094489	--
1536	0,14395932230	1,33758303392	1,55061097484	1,23265487901
6144	0,02479032187	2,53781230773	0,37668362698	2,04141154986
24576	0,00637310246	1,95970924297	0,16275519569	1,21064972638
98304	0,00178924231	1,83264707555	0,08310886176	0,96962937723
N	$e_0(\sigma)$	$r_0(\sigma)$	e	r
24	3,96940914425	--	5,43311482789	--
96	3,40611105373	0,22079880106	4,84275692378	0,165950947971828
384	3,65224809922	--	5,15917396789	--
1536	1,49446065067	1,28915986054	2,15355683271	1,260418698104128
6144	0,30893947981	2,27422875928	0,48716953622	2,144225570744424
24576	0,11780904980	1,39087387914	0,20091845594	1,277813828136837
98304	0,05818171226	1,01781270764	0,10145045365	0,985834776718452

Tabla 3.6: Errores y razones experimentales para el Ejemplo 2 con $\omega = 10$.

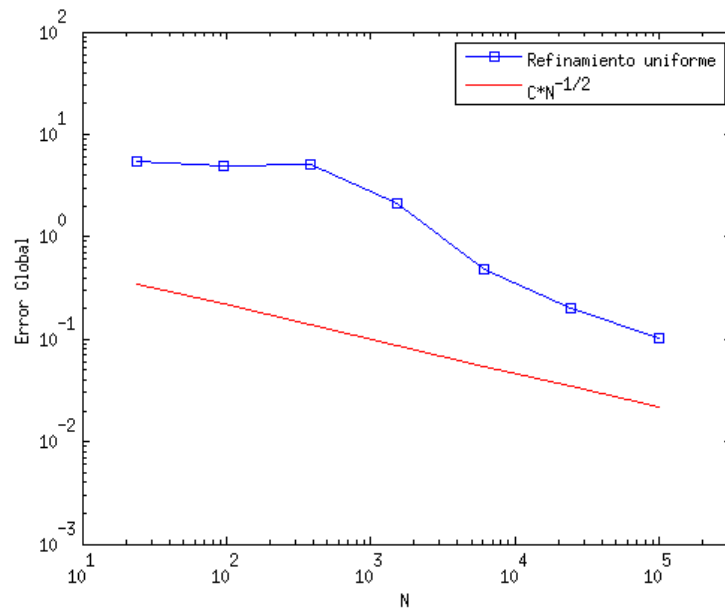


Figura 3.6: Gráfica en escala logarítmica de error v/s Número de elementos para $w = 10$ (Ejemplo 2).

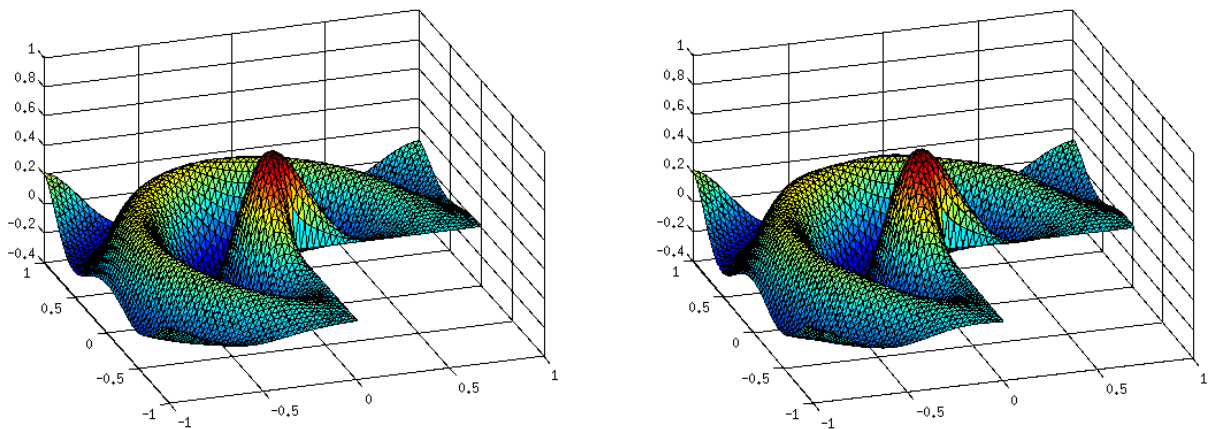


Figura 3.7: Gráfica solución exacta u (izquierda) y aproximada u_h (derecha) con $\omega = 10$ y una malla de 5400 elementos (Ejemplo 2).

En la Tabla 3.6 podemos ver que cuando $\omega = 10$, aunque a partir de la tercera iteración los errores empiezan a decaer, no lo hacen al orden deseado, esto debido al alto valor de ω el cual provoca que a partir de un h_0 alto el método converja. Esto puede también ser apreciado en el Gráfico de Error (Figura 3.6) donde se exhibe que recién en el sexto refinamiento se empieza a dar la tendencia deseada.

Conclusiones y trabajos futuros

Teniendo en cuenta lo expuesto en el presente escrito, podemos concluir lo siguiente:

- 1) Se formuló un nuevo esquema DG (2.43) para el problema de Stokes en las variables velocidad y pseudo-esfuerzo, considerando como espacios de aproximación funciones discontinuas polinomiales a trozos ($\Sigma_{h,0}$ y \mathbf{W}_h , respectivamente). Se logró demostrar existencia única de solución, asumiendo para ello que $\nabla \mathbf{W}_h \subseteq \Sigma_{h,0}$ (ver Teorema 2.3.1). Adicionalmente, suponiendo que $\mathbf{div}_h \Sigma_h \subseteq \mathbf{W}_h$, fue posible obtener la estabilidad del esquema y una estimación de error a priori (ver Teoremas 2.3.2 y 2.3.3).
- 2) Agregando un término de cuadrados mínimos a la Formulación (2.43), se obtuvo una formulación estabilizada para el problema de Stokes (2.69) y fue posible garantizar existencia única de solución, estabilidad del esquema y estimación de error a priori usando la Teoría de Babūška-Brezzi (ver Lema 2.4.2 y Teorema 2.4.1). Estos resultados en conjunto con los mencionados en (1) dieron lugar a la publicación [6].
- 3) Se formuló un esquema LDG para el problema de Helmholtz (3.10) y se exhibió un resultado de existencia, unicidad y estimación de error a priori el que supone que $\nabla V_h \subseteq \Sigma_h$. Adicionalmente introduciendo un término de cuadrados mínimos se generó la formulación DG (3.22), mostrando existencia única de solución y estimación de error a priori sin la necesidad de la inclusión impuesta a los espacios de aproximación, dando mayor libertad en la elección de los grados polinomiales de éstos.
- 4) Se generó un código en MATLAB que resuelve el esquema DG (3.28), para la ecuación de Helmholtz. Se observó que a medida que el número de onda es mayor es necesario refinar más la malla para obtener los órdenes de convergencia del método, acorde al Teorema 3.3.1.

Para finalizar podemos considerar algunos trabajos futuros:

- 1) Implementar computacionalmente las formulaciones (2.43) y (2.69) y testear con algunos ejemplos las estimaciones de error a priori obtenidas en los Teoremas 2.3.3 y 2.4.1.
- 2) Extender la aplicabilidad de la técnica para el problema de Stokes generalizado, por ejemplo.
- 3) Implementar computacionalmente el esquema obtenido para el problema de Stokes generalizado.
- 4) Dar estimaciones de error a posteriori para el esquema de Stokes generalizado e implementar computacionalmente.

Bibliografía

- [1] A. AGOUZAL, AND J.-M. THOMAS: *An extension theorem for the equilibrium finite element spaces*. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, vol. 13, pp. 257-266, (1996).
- [2] D.N. ARNOLD, F. BREZZI, B. COCKBURN AND L.D. MARINI: *Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 39, 5, pp. 1749-1779, (2001).
- [3] T.P. BARRIOS AND G. GATICA: *An augmented mixed finite element method with Lagrange multipliers: A priori and a posteriori error analyses*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 200, pp. 653-676, (2007).
- [4] T.P. BARRIOS AND R. BUSTINZA: *A priori and a posteriori error analyses of an augmented discontinuous Galerkin formulation*. IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 30, pp. 987-1008, (2010).
- [5] T.P. BARRIOS, R. BUSTINZA AND V. DOMÍNGUEZ: *Adaptive numerical solution of a discontinuous Galerkin method for a Helmholtz problem in low-frequency regime*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 300, pp. 312-340, (2016).
- [6] T.P. BARRIOS, R. BUSTINZA AND F. SÁNCHEZ: *Analysis of DG approximations for Stokes problem based on velocity-pseudostress formulation*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 33, 5, pp. 1540-1564, (2017).
- [7] G. BENITEZ ALVAREZ, A.F. DOURADO LOULA, E. GOMES DUTRA DO CARMO, F. ALVES ROCHINHA: *A discontinuous finite element formulation for Helmholtz equation*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, vol. 195, pp. 40184035, (2006).
- [8] D. BRAESS: *Finite Elements, Theory, fast solvers and applications in solid mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, (2007).
- [9] F. BREZZI AND M. FORTIN, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 1991.
- [10] R. BUSTINZA AND G.N. GATICA: *A local discontinuous Galerkin method for nonlinear diffusion problems with mixed boundary conditions*. SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 26, 1, pp. 152-177, (2004).

- [11] P. CASTILLO, B. COCKBURN, I. PERUGIA, AND D. SCHÖTZAU: *An a priori error analysis of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 38, 5, pp. 1676-1706, (2000).
- [12] Z. CAI, C. TONG, P.S. VASSILEVSKI AND C. WANG: *Mixed finite element method for incompressible flow: Stationary Stokes equations*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 26, pp. 957-978, (2010).
- [13] P. CIARLET: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, (1978).
- [14] B. COCKBURN, G. KANSCHAT, D. SCHÖTZAU, AND C. SCHWAB: *Local discontinuous Galerkin method for the Stokes system*. SIAM Journal Numerical Analysis, vol. 40, pp. 3193-343, (2002).
- [15] G.N. GATICA: *Introducción al Análisis Funcional*. Reverté, 2014.
- [16] G.N. GATICA, A. MÁRQUEZ AND M.A. SÁNCHEZ: *Analysis of a velocity-pressure-pseudostress formulation for the stationary Stokes equations*. Comput Methods Appl Mech Eng 199 (2010), 10641079.
- [17] G.N. GATICA, A. MÁRQUEZ AND M.A. SÁNCHEZ: *Pseudostress-based mixed finite element methods for the Stokes problem in \mathbb{R}^n with Dirichlet boundary conditions. I: a priori error analysis*. Communications in Computational Physics, vol 12, pp 109-134 (2012).
- [18] G.N. GATICA AND F.J. SAYAS: *A note on the local approximation properties of piecewise polynomials with applications to LDG methods*. Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 51, 2, pp. 109-117, (2006).
- [19] V. GIRAULT AND P. RAVIART: *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, 1986.
- [20] O. GONZÁLEZ AND A.M. STUART: *A First Course in Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, 2008.
- [21] P. GRISVARD: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, 1985.
- [22] F. IHLENBURG: *Finite Elements Analysis of Acoustic Scattering*. Springer-Verlag, 1998.
- [23] F. IHLENBURG AND I. BABUKA: *Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number. Part I: The h-version of the FEM*. Computational Math. Appl., vol 30, 5, pp 9-37, 1995.
- [24] W. MCLEAN: *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [25] I. PERUGIA AND D. SCHÖTZAU: *An hp-analysis of the local discontinuous Galerkin method for diffusion problems*. Journal of Scientific Computing, vol. 17, pp. 561-571, (2002).
- [26] C. SCHWAB: *p and hp-Finite Element Methods, Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics*. Numer. Math. Sci. Comput., Oxford University Press, New York, 1998.