



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

**MODELO DE PROPAGACIÓN Y CONTROL DE
PROCESOS EPIDEMIOLÓGICOS DE
TRANSMISIÓN INDIRECTA ENTRE DOS
POBLACIONES**

POR
FELIPE ANDRÉS JARA ZUBIETA

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
de la Universidad de Concepción para optar al título profesional de
Ingeniero Civil Matemático

Profesores guía: Dra. Verónica Anaya Domínguez, Dr. Mauricio Sepúlveda Cortés.

Junio de 2021
Concepción, Chile

© 2021 Felipe Andrés Jara Zubieta

Se autoriza la reproducción total o parcial, sólo con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

Agradecimientos

En orden cronológico, agradezco al Profesor Carlos Pérez por su apoyo ya que en su calidad de Vicedecano me brindó la oportunidad de continuar en esta carrera.

Al Profesor Julio Aracena y a la Profesora Mónica Selva por su trato cordial, amable y el apoyo brindado durante sus respectivos periodos de jefatura de carrera.

A mis profesores guías: Prof. Verónica Anaya y Prof. Mauricio Sepúlveda, muchas gracias por su constante apoyo, enorme paciencia y permanente comprensión durante todo este largo periodo.

A la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) por su apoyo financiero a través del Proyecto Fondecyt N1180868.

Por último, agradezco el ambiente que generan todo/as lo/as profesore/as del DIM, un ambiente tranquilo en donde predomina el trato gentil, en especial, gracias a los Profesores Carlos Mora y Juan Molina, y a los funcionarios del DIM: Sra. María Eugenia, Sr. José Parra, Sra. Cecilia Leiva y Sra. Paola Gatica, por su muy buena disposición cuando necesité de su ayuda.

Índice general

Agradecimientos	III
Lista de tablas	VI
Lista de figuras	VII
1. Introducción	1
2. Modelo de Propagación de Enfermedades	5
2.1. Modelo epidémico simple de Kermack-McKendrick	6
2.2. Difusión y Modelo de Propagación de Enfermedades entre dos Poblaciones	10
2.2.1. Difusión	10
2.2.2. Modelo de Propagación de Enfermedades entre dos Poblaciones	12
2.3. Ecuación de Reacción-Difusión	14
3. Planteamiento del Problema	16
3.1. Indicadores o Cantidades de Interés	18
3.2. Análisis de Sensibilidad y Problema de Optimización	20
4. Modelo Temporal	22

Índice general	V
4.1. Modelo Matemático Temporal	22
4.2. Existencia y Unicidad	24
5. Modelo Espacio - Temporal	31
5.1. Problema Abstracto de Cauchy	31
5.1.1. Preliminares	31
5.1.2. C_0 Semigrupos	34
5.1.3. P.V.I Semilineal	36
5.2. Modelo Matemático Espacio - Temporal	37
5.2.1. Existencia y Unicidad Sistema (5.6)	40
5.2.2. Existencia y Unicidad Sistema (5.7)	48
5.2.3. Existencia y Unicidad Sistema (5.8)	54
6. Optimización	56
6.1. Optimización con restricciones EDO	57
6.1.1. Existencia del Óptimo	57
6.1.2. Gradiente	60
6.2. Optimización con restricciones EDP	69
6.2.1. Existencia del Óptimo	69
6.2.2. Gradiente	74
7. Análisis de Sensibilidad	92
7.1. Modelo Temporal	93
7.2. Modelo Espacio -Temporal	110
8. Resultados Numéricos - Optimización	134

8.1. Optimización con restricciones EDO	135
8.2. Optimización con restricciones EDP	140
9. Conclusiones	150
Anexo A	152
Anexo B	161
Bibliografía	174

Lista de tablas

8.1. Comparación de $\nabla_a \tilde{J}_h$ con $\Delta \tilde{J}_h$ para distintos valores \mathbf{h}	136
8.2. Resultados de los método de optimización (Iter: Iteraciones)	137
8.3. Comparación de $\nabla_a \tilde{J}_\Delta$ con $\Delta \tilde{J}_\Delta$ para distintos valores \mathbf{h}	142
8.4. Resultados de los método de optimización (Iter: Iteraciones)	142

Lista de figuras

2.1.	Flujo de transferencia de los modelos <i>SIR</i> (arriba) y <i>SIS</i> (abajo)	7
2.2.	Flujo de transmisión del modelo <i>SIR</i> con sus tasas de transferencias.	9
2.3.	Flujo de transmisión del modelo <i>SIS</i> con sus tasas de transferencias.	9
2.4.	Esquema que representa Ω_1 (en azul), Ω_2 (en negro) y la región donde interactúan $\tilde{\Omega}$ (achurada)	12
2.5.	Interacción entre las poblaciones y flujo de transmisión con sus tasas de transferencia en cada una de ellas.	14
3.1.	$\beta_{bb}(t, a)$ (en azul), $\tilde{\beta}_{bb} = 0.3$ (en rojo) y $\alpha\tilde{\beta}_{bb}$ (en verde). Gráfico 1 y 2: $t_c = 25$ (en negro), $\gamma = 0.2$ y α varía: $\alpha = 0.2$ (izq.) y $\alpha = 0.8$ (der.). Gráfico 3 y 4: $t_c = 25$ (en negro), $\alpha = 0.2$ y γ varía: $\gamma = 0.2$ (izq.) y $\gamma = 2.5$ (der.). Gráfico 5 y 6: $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.2$ y t_c (en negro) varía: $t_c = 10$ (izq.) y $t_c = 35$ (der.). .	17
6.1.	Intervalo de trabajo $[0, L]$. En azul Ω_1 y en negro Ω_2	88
7.1.	t_c (línea vertical punteada en negro). Gráfico sup.: β_{bb} en azul; Gráfico centr.: u_1 en azul y u_2 en rojo; Gráfico inf.: v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.	94
7.2.	t_c (línea vertical punteada en negro). Gráfico sup.: β_{bb} en azul; Gráfico centr.: u_1 en azul y u_2 en rojo; Gráfico inf.: v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.	95
7.3.	t_c (línea vertical punteada en negro). Gráfico sup.: β_{bb} en azul; Gráfico centr.: u_1 en azul y u_2 en rojo; Gráfico inf.: v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.	96

7.4. $t_c = 10$ (sup.), $t_c = 20$ (centr.) y $t_c = 30$ (inf.)	98
7.5. $t_c = 35$ (sup.), $t_c = 45$ (centr.) y $t_c = 65$ (inf.).	99
7.6. $t_c = 10$ (sup.), $t_c = 20$ (centr.) y $t_c = 25$ (inf.).	100
7.7. $t_c = 35$ (sup.), $t_c = 45$ (centr.) y $t_c = 60$ (inf.).	101
7.8. $t_c = 10$ (sup.), $t_c = 20$ (centr.) y $t_c = 30$ (inf.).	102
7.9. $t_c = 35$ (sup.), $t_c = 45$ (centr.) y $t_c = 60$ (inf.).	103
7.10. $t_c = 10$ (sup.), $t_c = 20$ (centr.) y $t_c = 30$ (inf.).	104
7.11. $t_c = 35$ (sup.), $t_c = 45$ (centr.) y $t_c = 60$ (inf.).	105
7.12. Función $g(a) = (1 - \alpha)^2 + \gamma^2$	106
7.13. Gráfico sup.: Tridimensional, Gráfico inf.: Líneas de Contorno.	107
7.14. Gráfico sup.: Tridimensional, Gráfico inf.: Líneas de Contorno.	108
7.15. Gráfico sup.: Tridimensional, Gráfico inf.: Líneas de Contorno.	109
7.16. Intervalo de trabajo $[0, L]$. En azul dominio espacial de la población H_1 y en negro dominio espacial de la población H_2	110
7.17. Solución en $t = 10$. Gráfico sup.: u_1 en azul y u_2 en rojo; Gráfico inf.: v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.	112
7.18. Solución en $t = 52$. Gráfico sup.: u_1 en azul y u_2 en rojo; Gráfico inf.: v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.	113
7.19. Solución en $t = 70$. Gráfico sup.: u_1 en azul y u_2 en rojo; Gráfico inf.: v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.	114
7.20. Solución en $t = 120$. Gráfico sup.: u_1 en azul y u_2 en rojo; Gráfico inf.: v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.	115
7.21. Solución en $t = 130$. Gráfico sup.: u_1 en azul y u_2 en rojo; Gráfico inf.: v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.	116
7.22. Solución en $t = 160$. Gráfico sup.: u_1 en azul y u_2 en rojo; Gráfico inf.: v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.	117

7.23. Solución en $t = 400$. Gráfico sup.: u_1 en azul y u_2 en rojo; Gráfico inf.: v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.	118
7.24. $t_c = 35$ (sup.), $t_c = 60$ (centr.) y $t_c = 80$ (inf.)	120
7.25. $t_c = 100$ (sup.), $t_c = 125$ (centr.) y $t_c = 160$ (inf.)	121
7.26. $t_c = 35$ (sup.), $t_c = 60$ (centro) y $t_c = 80$ (inf.)	122
7.27. $t_c = 100$ (sup.), $t_c = 125$ (centro) y $t_c = 160$ (inf.)	123
7.28. $t_c = 10$ (sup.), $t_c = 35$ (centro) y $t_c = 60$ (inf.)	124
7.29. $t_c = 80$ (sup.), $t_c = 100$ (centro) y $t_c = 125$ (inf.)	125
7.30. $t_c = 20$ (sup.), $t_c = 35$ (centro) y $t_c = 60$ (inf.)	126
7.31. $t_c = 80$ (sup.), $t_c = 100$ (centro) y $t_c = 125$ (inf.)	127
7.32. Función $g(a) = (1 - \alpha)^2 + \gamma^2$	128
7.33. Gráfico sup.: Tridimensional, Gráfico inf.: Líneas de Contorno.	129
7.34. Gráfico sup.: Tridimensional, Gráfico inf.: Líneas de Contorno.	130
7.35. Gráfico sup.: Tridimensional, Gráfico inf.: Líneas de Contorno.	131
7.36. Gráfico sup.: Tridimensional, Gráfico inf.: Líneas de Contorno.	132
8.1. Gráfico de Líneas de Contorno de $\tilde{J}_h(a)$	135
8.2. $\tilde{J}_h(a)$ y puntos de prueba.	137
8.3. $\tilde{J}_h(a)$, región de búsqueda Q (líneas punteada negra), a_0 (rojo) y a_{opt} (verde).	138
8.4. Gráfico sup.: u_1 , Gráfico centr.: u_2 , Gráfico inf.: v_1 (azul), v_2 (rojo), v_3 (verde) y c (celestre), en a_{opt} y $t_c = 20$	139
8.5. Gráfico de Líneas de Contorno de $\tilde{J}_\Delta(a)$	140
8.6. $\tilde{J}_\Delta(a)$ y puntos de prueba.	141
8.7. $\tilde{J}_\Delta(a)$, región de búsqueda Q (líneas punteada negra), a_0 (rojo), a_{opt} escogido (verde) y a_{opt} entregado considerando el gradiente discreto (azul).	143

-
- 8.8. Solución en $t = 10$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste. 144
- 8.9. Solución en $t = 58$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste. 145
- 8.10. Solución en $t = 106$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste. 146
- 8.11. Solución en $t = 130$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste. 147
- 8.12. Solución en $t = 200$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste. 148
- 8.13. Solución en $t = 400$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste. 149

Capítulo 1

Introducción

En epidemiología la transmisión de enfermedades en una población se describe por medio del modelo propuesto por William O. Kermack y Anderson G. McKendrick en 1927 [Kermack and McKendrick, 1927], el cual consta de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que asume que la población se divide en grupos mutuamente excluyentes (o clases) tales como: susceptibles, infectados y removidos/recuperados; que supone que la población está mezclada de manera homogénea y que el proceso epidémico es determinista. No obstante, en la realidad los organismos se mezclan de manera no homogénea, se distribuyen en el espacio y generalmente interactúan con el entorno físico y con otros organismos. Hay evidencia considerable que el espacio puede afectar la dinámica de las poblaciones ([Cantrell and Cosner, 2003]) y estas consideraciones pueden ser representadas de manera simple por el término de difusión.

Desde su creación, el modelo Kermack-McKendrick ha evolucionado considerando: otras clases como expuestos, asintomáticos o en cuarentena; efectos demográficos como nacimientos, muertes, inmigración o emigración; heterogeneidad de la población clasificando a grupos por edad, género, étnia o grupo social; y otros comportamientos de dispersión espacial más complejos que la simple difusión como convección, advección, taxis, quimiotaxis o difusión cruzada.

Los modelos matemáticos basados en el modelo compartimental de Kermack-McKendrick se han utilizado para describir la propagación de enfermedades infecciosas tales como hantavirus, influenza A/H1N1, VIH, tuberculosis, cólera, hepatitis, ébola, COVID-19, etc. Entender el comportamiento de estas enfermedades es esencial para la vigilancia de la salud pública y la implementación de medidas o estrategias reactivas que permitan minimizar el número de infectados en la población. Por ejemplo, en [Bürger et al., 2018] se describe la transmisión del hantavirus en roedores utilizando un modelo espacio-temporal que divide a la población en susceptible-expuesto-infectado-recuperado (SEIR), que distingue entre subpoblaciones mas-

culinas y femeninas, y que la describe como un sistema de convección-difusión-reacción; o como en [Bürger et al., 2016] en donde se desarrolla un modelo espacio-temporal SEIR de transmisión de la influenza A/H1N1 en el año 2009 en Chile.

En el presente trabajo se propone un modelo para la propagación de enfermedades entre dos poblaciones. Las poblaciones H_1 y H_2 están confinadas en las regiones espaciales Ω_1 y Ω_2 respectivamente, e interactúan entre ellas en una región común a Ω_1 y Ω_2 denotada por $\tilde{\Omega}$. La enfermedad nace en la población H_1 y se propaga hacia la población H_2 por medio del contacto entre un individuo infectado de la población H_1 y un individuo susceptible de la población H_2 . En la población H_1 la enfermedad será descrita por el modelo SIS (susceptible-infectado-susceptible) con difusión y su coeficiente de contagio será una función que depende de los parámetros de control α , γ y t_c , y de la variable temporal, por su parte la enfermedad en la población H_2 será descrita por el modelo SIR (susceptible-infectado-recuperado) con difusión y sus coeficientes de contagio serán constantes.

El modelo propuesto es una simplificación del modelo presentado en [Anaya et al., 2015] y es el resultado de acoplar los modelos SIS y SIR con difusión, consiste en una ecuación de reacción-difusión con coeficientes de difusión constantes, no incluye términos: no-locales, no-lineales ni cruzados, es de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + F(t, \alpha, \gamma, t_c, u)$$

y se llamará modelo espacio-temporal. Si no se considera el término de difusión entonces se obtiene:

$$\frac{du}{dt} = F(t, \alpha, \gamma, t_c, u)$$

el cual se denominará modelo temporal. En ambos modelos u es la variable de estado.

El modelo temporal es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y se hace uso de la teoría clásica para probar existencia y unicidad de la solución, además se logra mostrar que dicha solución depende de los parámetros de control y se obtienen algunas propiedades de ella. Por otro lado, el modelo espacio-temporal consiste en dos sistemas de ecuaciones diferenciales parciales (con dominios espaciales distintos) acoplados y que interactúan en la región espacial $\tilde{\Omega}$. Para probar existencia, unicidad y dependencia de los parámetros de control de la solución del modelo, el sistema se resuelve desde la teoría de C_0 -semigrupos y se concibe como el acople de problemas abstractos de Cauchy semilineales en dominios espaciales diferentes.

Desde ambos modelos es posible extraer información epidemiológica de interés como la tasa de incidencia de la enfermedad, incidencia acumulada de la enfermedad, la cantidad máxima de individuos infectados o el tiempo de extinción de la enfermedad en cada población. Uno de los objetivos de este trabajo es verificar si la variación de los parámetros de control tienen un efecto en el comportamiento de la enfermedad en la población H_2 analizando si

el cambio de ellos afecta los indicadores epidemiológicos (también llamados cantidades de interés) de manera significativa, y si lo hace entonces el siguiente objetivo es encontrar los valores de dichos parámetros que afecten a las cantidades de interés de forma que éstos indiquen que el impacto de enfermedad en la población H_2 sea menor.

El análisis del efecto de los parámetros de control sobre la solución de los modelos (temporal y espacio-temporal) y sobre las cantidades de interés se desarrolla numéricamente, en el caso del modelo temporal se emplea el esquema de Euler explícito para encontrar su solución y las cantidades de interés asociadas a él. En el caso del modelo espacio-temporal, el análisis se hace en dimensión espacial 1 y se emplea el esquema de diferencias finitas de Crank-Nicolson. A partir de este análisis se escogen las cantidades de interés que definirán la función objetivo del problema de optimización que surge de minimizar tales indicadores.

En este trabajo se desea encontrar el valor del parámetro que minimiza cierto funcional formado por las cantidades de interés, sin embargo la búsqueda puede tener como objetivo encontrar el conjunto de parámetros que hace que el modelo propuesto represente de mejor manera a ciertos datos observados, tal como en [Coronel et al., 2019] en donde el problema consiste en la determinación de los coeficientes en los términos de reacción a partir de una observación de las variables de estado en el tiempo final del proceso (problema de identificación), se aplica una metodología basada en la optimización con ecuaciones diferenciales parciales como restricciones y se reformula el problema inverso como un problema de optimización para una función de costo apropiada; o como en [Bürger et al., 2021] en donde se trabaja con modelos de crecimiento fenomenológicos (los que requieren un número pequeño de parámetros para describir los patrones de crecimiento de una epidemia) y se propone un estudio sistemático para precisar las diferencias entre los PGMs (phenomenological growth models) y para determinar cómo éstos pueden explicar la capacidad de ciertos modelos, en comparación con otros, para adaptarse de mejor manera a los datos (Influenza, Ebola y COVID-19).

Ahora bien, la teoría de C_0 -semigrupos ofrece una forma explícita de la solución del modelo espacio-temporal que junto con las propiedades de F y supuestos adecuados permiten mostrar la existencia del óptimo del problema de optimización. Basado en [Berres et al., 2005] y [Hinze et al., 2009], se calcula el gradiente continuo y el gradiente discreto de la función objetivo por medio del cálculo del lagrangiano para encontrar el óptimo, y se muestra la existencia de la solución de los respectivos problemas adjuntos. Se procede de forma análoga para el modelo temporal.

Por último, se resuelve numéricamente cada uno de los problemas de optimización haciendo uso del gradiente discreto y de los métodos numéricos generados por la función *fmincon* de MATLAB. Se analiza el rendimiento y la solución entregada por cada uno de los métodos con los que trabaja *fmincon*, y se presta especial atención en determinar si proporcionar el gradiente discreto beneficia la búsqueda del óptimo.

El procedimiento descrito consta de un parte teórica y otra de experimentación numérica, y se presenta en esta tesis de la siguiente manera:

- **Capítulo 2 - Modelo de Propagación de Enfermedades:** se describe la obtención del modelo de reacción-difusión que se estudiará.
- **Capítulo 3 - Planteamiento del Problema:** se exponen los objetivos de este trabajo. Desde un punto de vista epidemiológico se detallan las cantidades de interés que darán origen a la función objetivo con la que se trabaja.
- **Capítulo 4 - Modelo Temporal:** se prueba existencia y unicidad de la solución del modelo temporal y se muestra que ella depende de los parámetros de control.
- **Capítulo 5 - Modelo Espacio-Temporal:** se presentan definiciones y resultados elementales de espacios de sobolev y teoría de C_0 -semigrupos los que serán usados para probar existencia y unicidad de la solución del modelo espacio-temporal además de dependencia con respecto a los parámetros de control.
- **Capítulo 6 - Optimización:** se definen los problemas de optimización asociados a cada modelo y se muestra la existencia del óptimo. Se calculan los gradientes continuos y discretos de la función objetivo por medio del cálculo del lagrangiano y se prueba la existencia de la solución de los problemas adjuntos.
- **Capítulo 7 - Análisis de Sensibilidad:** se analiza numéricamente la respuesta a la variación de los parámetros de control de las soluciones y de las cantidades de interés que se obtienen desde cada modelo. Se define la función objetivo con la que se trabaja en el problema de optimización.
- **Capítulo 8 - Resultados Numéricos de Optimización:** se resuelven numéricamente los problemas de optimización presentados en el capítulo 6. Se encuentra el óptimo a través de los métodos numéricos proporcionados por la función *fmincon* de MATLAB y se comparan sus rendimientos (uno de estos métodos utiliza el gradiente discreto calculado en el capítulo 6).

Capítulo 2

Modelo de Propagación de Enfermedades

Las epidemias han tenido un impacto relevante en el desarrollo de los eventos a lo largo de la historia. La Peste Negra, ahora identificada como probablemente la bubónica, fue causada por un organismo (*Bacillus pestis*) y transmitida por pulgas al hombre (principalmente de ratas negras), invadió Europa desde el siglo sexto y se extendió desde Asia hacia Europa en varias olas durante el siglo XIV comenzando en 1346, y se estima que causó la muerte de hasta un tercio de la población de Europa entre 1346 y 1350. La enfermedad resurgió regularmente en varias partes de Europa durante más de 300 años (especialmente como la Gran Plaga de Londres de 1665-1666) para luego retirarse gradualmente del continente. Más del 15 % de la población de Londres murió, la peste apareció de repente, creció en intensidad y luego desapareció dejando parte de la población sin ser afectada.

Hasta principios del siglo pasado existían pocos trabajos sobre modelos matemáticos que estudiaran el comportamiento de las enfermedades. Una excepción interesante es un artículo de Daniel Bernoulli escrito en 1760 (publicado en 1766) que analiza las muertes por viruela y estaba dirigido a influir sobre las políticas públicas para que en ellas se considerara la variolación (una técnica de inyección de una cepa leve del virus de la viruela para inducir inmunidad contra la enfermedad completa). Sin embargo, a principios del siglo XX se realizó un trabajo más sistemático sobre el modelado de enfermedades. William Heaton Hamer, quién estaba interesado en la recurrencia regular del sarampión, y Ronald Ross, quién obtuvo un premio Nobel en 1902 por demostrar que la malaria fue transmitida por mosquitos, propusieron hipótesis sobre la transmisión de enfermedades infecciosas e investigaron sus consecuencias a través de modelos matemáticos.

Basado en estos trabajos, W.O. Kermack y A.G. McKendrick publicaron en 1927 un artículo clásico: *A contribution to the mathematical theory of epidemics* [Kermack and Mc-

Kendrick, 1927] cuyas predicciones son muy similares al comportamiento observado en la Peste Negra y en otras innumerables epidemias. En este artículo se descubre una condición para la propagación de una enfermedad (condición del umbral) y se brinda una forma para predecir el tamaño final de una epidemia.

El modelo de Kermack-McKendrick se basa en supuestos relativamente simples sobre las tasas de transferencia entre las diferentes clases de miembros de la población y en él se asume que la población está mezclada de manera homogénea. La teoría basada en la condición del umbral se ha extendido a modelos mucho más complejos que incluyen mecanismos de dispersión espacial y se ha complementado con la teoría de control para optimizar políticas de salud pública.

2.1. Modelo epidémico simple de Kermack-McKendrick

El modelo supone que la población en estudio está mezclada de manera homogénea¹, la divide en grupos mutuamente excluyentes - compartimentos - y asume que el proceso epidémico es determinista, es decir, que el comportamiento de la enfermedad está determinada completamente por su historia (depende del tiempo) y que las interrelaciones dinámicas entre los compartimentos están descritas por las tasas de transferencia entre ellos (o tasas de flujo).

En principio, la población será dividida en tres compartimentos (o clases) etiquetadas como S , I y R :

- Susceptibles - $S(t)$: denota al número de individuos en el tiempo t sanos y sin inmunidad al agente infeccioso y que por tanto pueden ser infectados al ser expuestos a éste.
- Infectados - $I(t)$: es el número de individuos afectados por la enfermedad y que pueden transmitirla por contacto a los individuos susceptibles.
- Recuperados - $R(t)$: es el número de aquellos individuos inmunes, aislados y/o que fueron infectados y que se recuperaron, pero que una vez recuperados son inmunes a la enfermedad y en consecuencia no afectan a la transmisión de la esta.²

Se hará uso de la terminología SIR para describir una enfermedad que confiere inmunidad contra la reinfección y para indicar que el paso de los individuos entre las clases es desde la clase susceptible S hacia la clase infectados I y desde ésta hacia la clase recuperados R (las

¹dicho de un conjunto: formado por elementos iguales.

²esta caracterización es diferente de la perspectiva epidemiológica pero a menudo son equivalentes desde un punto de vista que considera sólo el estado del individuo con respecto a la enfermedad.

epidemias suelen ser enfermedades de este tipo). Por otra parte, se empleará la terminología *SIS* cuando la población es dividida en sólo dos clases, para describir una enfermedad sin inmunidad contra la reinfección y para indicar que la transferencia de los individuos es desde la clase susceptible hacia la clase infectados y viceversa (por lo general, las enfermedades causadas por un virus son del tipo *SIR*, mientras que las enfermedades causadas por bacterias son del tipo *SIS*). El proceso de transmisión se representa por medio del siguiente diagrama de transferencia:

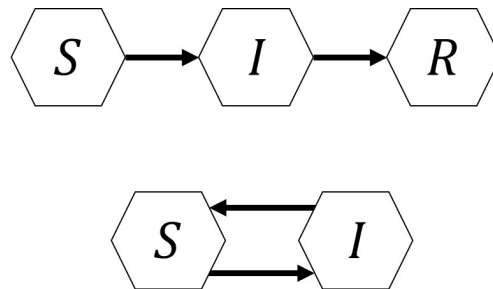


Figura 2.1: Flujo de transferencia de los modelos *SIR* (arriba) y *SIS* (abajo)

El objetivo del modelo es rastrear el número de individuos en cada uno de los tres compartimentos en un momento t dado, para ello se considera un pequeño intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ y el cambio neto de la cantidad de individuos que pertenecen al compartimento (ΔS , ΔI y ΔR respectivamente). En el diagrama de transferencia, las flechas indican la dirección del movimiento individual y en consecuencia el cambio neto de la cantidad de individuos en un compartimento es la cantidad de individuos que entran menos la cantidad de individuos que salen de él durante el intervalo de tiempo. Aplicando este principio a cada compartimento, el modelo *SIR* se puede expresar como:

$$\left. \begin{aligned} \Delta S(t) &= S(t + \Delta t) - S(t) = - \text{Nuevos Infectados} \\ \Delta I(t) &= I(t + \Delta t) - I(t) = + \text{Nuevos Infectados} - \text{Transferidos hacia R} \\ \Delta R(t) &= R(t + \Delta t) - R(t) = + \text{Transferidos hacia R} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

A partir del cambio neto (por ejemplo: ΔS) es posible obtener la razón de cambio promedio ($\frac{\Delta S}{\Delta t}$) y si Δt tiene a 0, se obtiene la razón de cambio o tasa de cambio instantánea de la cantidad S en el tiempo t , esto es, se obtiene una derivada con respecto al tiempo o tasa de transferencia ($\frac{dS}{dt}$), y como resultado los modelos son formulados inicialmente como ecuaciones diferenciales³.

El modelo (2.1) se basa en los siguientes supuestos:

³al formular modelos en términos de las derivadas también se está asumiendo que el número de individuos en un compartimento es una función diferenciable en el tiempo.

- (i) Si $N > 0$ es la cantidad total de individuos de la población y β es el coeficiente de transmisión, probabilidad de contagio de una persona por unidad de tiempo o el número promedio de contactos suficientes para la transmisión de la enfermedad, entonces la fracción de individuos infectados es I/N y por tanto $(\beta I)/N$ es el número promedio de contactos con infectados por unidad de tiempo de un individuo susceptible, y en consecuencia, $S(\beta I)/N$ es el número de nuevos infectados por unidad de tiempo por cada uno de los miembros de $S(t)$ ([Ma and Xia, 2008], p.19).
- (ii) La tasa de transferencia desde un compartimento es proporcional al número de individuos en él, por tanto la tasa de transferencia de I a R (tasa de recuperación) puede escribirse como $\gamma I(t)$ (la fracción de infectados que se recuperan por unidad de tiempo es una constante $\gamma > 0$).
- (iii) Se ignoran fenómenos demográficos en la población (no se consideran nacimientos, muertes naturales, emigración o inmigración) y se asume que la duración de la enfermedad es corta en comparación con el tiempo de vida de los huéspedes, en consecuencia el tamaño de la población es constante:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

- (iv) El período de incubación es lo suficientemente corto de modo que será despreciado (no hay periodo de latencia⁴) y por consiguiente cuando un individuo de la clase S es infectado pasa de inmediato a la clase I .

por tanto, el conjunto de ecuaciones (2.1) queda así:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\frac{\beta}{N}S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{\beta}{N}S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

De forma análoga se obtienen las ecuaciones para el modelo SIS :

$$\left. \begin{aligned} \Delta S(t) &= S(t + \Delta t) - S(t) = - \text{Nuevos Infectados} + \text{Nuevos Susceptibles} \\ \Delta I(t) &= I(t + \Delta t) - I(t) = + \text{Nuevos Infectados} - \text{Nuevos Susceptibles} \end{aligned} \right\}$$

⁴es el tiempo que pasa desde la exposición a algo que puede causar una enfermedad (como radiación o un virus) hasta la aparición de síntomas.

pero en este caso los infectados que pueden recuperarse de la enfermedad no gozan de inmunidad y si bien la transmisión de la enfermedad se rige por los mismos supuestos (i) y (iv), en el supuesto (ii) los individuos recuperados regresan a la clase S a una tasa γI en lugar de pasar a la clase R y en (iii) se considera:

$$S(t) + I(t) = N$$

luego, las ecuaciones diferenciales para el modelo SIS son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\frac{\beta}{N}S(t)I(t) + \gamma I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{\beta}{N}S(t)I(t) - \gamma I(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Los modelos compartimentales básicos que describen el comportamiento de las enfermedades transmisibles están contenidas en tres artículos escritos por Kermack y McKendrick en 1927, 1932 y 1933. Lo que a menudo se llama el modelo epidémico Kermack-McKendrick es en realidad un caso especial del modelo general presentado en estos documentos (el modelo general incluye la dependencia de la edad de infección, es decir, el tiempo transcurrido desde la infección). El caso especial del modelo propuesto por Kermack y McKendrick en 1927 es el presentado en (2.2) y (2.3), y son las bases del modelo que se utiliza en este trabajo.

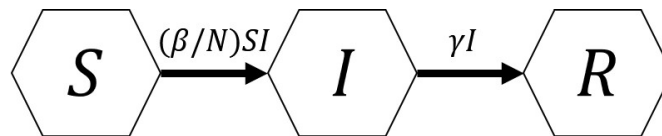


Figura 2.2: Flujo de transmisión del modelo SIR con sus tasas de transferencias.

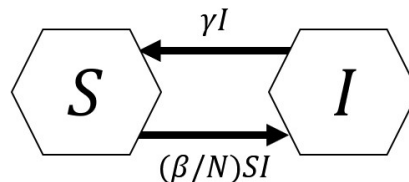


Figura 2.3: Flujo de transmisión del modelo SIS con sus tasas de transferencias.

2.2. Difusión y Modelo de Propagación de Enfermedades entre dos Poblaciones

Los modelos que se han descrito asumen que todos los individuos de la población experimentan el mismo entorno homogéneo, sin embargo, en la realidad los organismos se mezclan de manera no homogénea, se distribuyen en el espacio y típicamente interactúan con el entorno físico y con otros organismos. Hay evidencia considerable que el espacio puede afectar la dinámica de las poblaciones y la estructura de las comunidades ([Cantrell and Cosner, 2003]), por tanto tener presente estas consideraciones ayudará a obtener un modelo que se ajuste de mejor manera a la realidad.

Dichas consideraciones pueden describirse por medio del proceso de *difusión*. El concepto de difusión puede verse aproximadamente como la tendencia de un grupo de partículas inicialmente concentradas cerca de un punto en el espacio a extenderse en el tiempo ocupando gradualmente un área cada vez más grande alrededor del punto inicial. Aquí el término partículas no solo se refiere a partículas físicas, sino también a individuos de una población biológica o a cualquier otra unidad identificable y el término espacio no se refiere sólo al espacio euclidiano ordinario sino que también será un espacio abstracto como un nicho ecológico ([Cantrell and Cosner, 2003]).

Los modelos de difusión pueden derivarse como los límites a gran escala de los modelos de dispersión basados en *caminatas aleatorias*, o bien, también puede derivarse de la *Ley de Fick*, ley que describe el flujo de una sustancia difusora en términos de su gradiente (en este caso el flujo neto de la población) y es esta última descripción la que se considerará en este trabajo (para más información sobre *caminatas aleatorias* y *Ley de Fick* ver [Okubo and Levin, 2001], [Cantrell and Cosner, 2003] y [Murray, 2002]).

2.2.1. Difusión

La difusión es el fenómeno por el cual un grupo de partículas en su conjunto se extiende según el movimiento irregular o aleatorio de cada partícula, es decir, cuando el movimiento microscópico irregular de cada partícula da lugar a un movimiento macroscópico regular del grupo total de partículas (regularidad macroscópica), el fenómeno de difusión surge.

La teoría clásica de difusión (Ley de Fick) menciona que la cantidad de materia transportada en la dirección x (en una dimensión) a través de una unidad de área en una unidad de tiempo - flujo J_x - es proporcional al gradiente de la concentración de la materia, es decir:

$$J_x = -d \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.4)$$

donde u es la concentración de la materia, d es el coeficiente de difusión, difusividad o tasa

de movimiento y el signo menos indica que la difusión transporta materia desde una alta a una baja concentración. Haciendo uso de la Ley de Fick (2.4) se puede obtener:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial J_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(d \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Si d se considera constante, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y extendiendo a un espacio de dimensión mayor, la ecuación de difusión queda como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \Delta u$$

Ahora bien, supóngase que la población en estudio se distribuye espacialmente en una región Ω . Si $u(x, t)$ representa la densidad de población en la posición x y en el tiempo t , entonces el término de difusión describe el movimiento en el espacio del flujo neto de los individuos de la población. Agregando estas consideraciones a los modelos determinísticos ya presentados, se obtiene un modelo que adicionalmente considera la distribución espacial de los individuos como interacciones individuales espaciales aleatorias que dan lugar a un movimiento general de la población.

Si se define $A(x, t)$ como la densidad de población de la clase A y se consideran los supuestos sobre la dinámica de las interacciones entre las clases, entonces:

$$\int_{\Omega} [S(x, t) + I(x, t)] dx = N \quad , \quad \text{para el modelo } SIS$$

$$\int_{\Omega} [S(x, t) + I(x, t) + R(x, t)] dx = N \quad , \quad \text{para el modelo } SIR$$
(2.5)

y las ecuaciones que representan a los modelos con difusión quedan como:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} &= d \Delta S(x, t) - \frac{\beta}{N} S(x, t) I(x, t) + \gamma I(x, t) \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} &= d \Delta I(x, t) + \frac{\beta}{N} S(x, t) I(x, t) - \gamma I(x, t) \end{aligned} \right\} \text{Modelo } SIS \text{ con difusión}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} &= d\Delta S(x,t) - \frac{\beta}{N} S(x,t)I(x,t) \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} &= d\Delta I(x,t) + \frac{\beta}{N} S(x,t)I(x,t) - \gamma I(x,t) \\ \frac{\partial R(x,t)}{\partial t} &= d\Delta R(x,t) + \gamma I(x,t) \end{aligned} \right\} \text{Modelo } SIR \text{ con difusión}$$

2.2.2. Modelo de Propagación de Enfermedades entre dos Poblaciones

Considere dos poblaciones H_1 y H_2 , que están confinadas en las regiones espaciales Ω_1 y Ω_2 respectivamente. Asuma que la cantidad total de individuos de la población H_i es $N_i \geq 0$ ($i = 1, 2$) y que ambas poblaciones interactúan en una región común a Ω_1 y Ω_2 llamada $\tilde{\Omega}$.

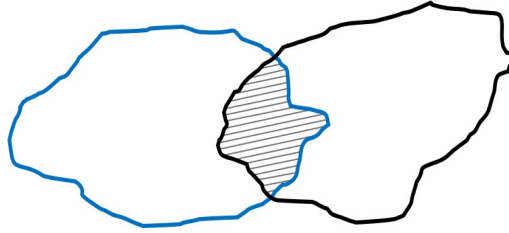


Figura 2.4: Esquema que representa Ω_1 (en azul), Ω_2 (en negro) y la región donde interactúan $\tilde{\Omega}$ (achurada)

La enfermedad nace en la población H_1 y se propaga hacia la población H_2 por medio del contacto entre un individuo infectado de la población H_1 y un individuo susceptible de la población H_2 . En la población H_1 la enfermedad será descrita por medio del modelo SIS con difusión, las clases se denotarán por: S_b y I_b , y los parámetros por: β_{bb} y γ_b . Aquí, el coeficiente de transmisión β_{bb} no será constante, será una función que depende de t y de los parámetros α , γ y t_c , y se definirá como:

$$\beta_{bb}(t, \alpha, \gamma, t_c) = \begin{cases} \tilde{\beta}_{bb} & , \text{ si } t \leq t_c \\ \tilde{\beta}_{bb} \left(\alpha + (1 - \alpha)e^{-\gamma(t-t_c)} \right) & , \text{ si } t > t_c \end{cases}$$

donde $\tilde{\beta}_{bb} > 0$ es el coeficiente inicial de transmisión de la enfermedad en H_1 .

Por otro lado, el modelo SIR con difusión describirá el desarrollo de la enfermedad en la población H_2 . Las clases se denotarán por: S_h , I_h y R_h , y sus parámetros por: β_{hh} y γ_h . La transmisión de la enfermedad de la población H_1 a la población H_2 se representará por el

término de incidencia $\frac{\beta_{bh}}{N_2} S_h I_b$, con β_{bh} como el coeficiente de transmisión de la enfermedad entre las poblaciones.

Por tanto, el conjunto de ecuaciones que representa la situación descrita es:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial S_b(x, t)}{\partial t} &= d_1 \Delta S_b(x, t) - \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} S_b(x, t) I_b(x, t) + \gamma_b I_b(x, t) \\
 \frac{\partial I_b(x, t)}{\partial t} &= d_2 \Delta I_b(x, t) + \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} S_b(x, t) I_b(x, t) - \gamma_b I_b(x, t) \\
 \frac{\partial S_h(x, t)}{\partial t} &= d_3 \Delta S_h(x, t) - \frac{\beta_{hh}}{N_2} S_h(x, t) I_h(x, t) - \frac{\beta_{bh}}{N_2} S_h(x, t) I_b(x, t) \\
 \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} &= d_4 \Delta I_h(x, t) + \frac{\beta_{hh}}{N_2} S_h(x, t) I_h(x, t) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} S_h(x, t) I_b(x, t) - \gamma_h I_h(x, t) \\
 \frac{\partial R(x, t)}{\partial t} &= d_5 \Delta R_h(x, t) + \gamma_h I_h(x, t)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

donde $a := [\alpha, \gamma, t_c]^t$ y $d_i > 0$ son los coeficientes de difusión ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

A partir de (2.6) se define:

$$M_1(x, t) := S_b(x, t) + I_b(x, t)$$

$$M_2(x, t) := S_h(x, t) + I_h(x, t) + R_h(x, t)$$

y en vista de (2.5) se obtiene:

$$\int_{\Omega_i} M_i(x, t) dx = N_i \quad , \quad \text{para } i = 1, 2.$$

El requerimiento que la población H_i permanezca confinada durante todo el tiempo en Ω_i se traduce en la siguiente condición de frontera sin flujo:

$$\nabla M_i(x, t) \cdot \eta_i = 0 \quad , \quad \text{para } (x, t) \in \partial\Omega_i \times [0, \infty)$$

donde η_i es el vector normal a lo largo de $\partial\Omega_i$ en dirección hacia el exterior de Ω_i ($i = 1, 2$), es decir:

$$\nabla S_b(x, t) \cdot \eta_1 = \nabla I_b(x, t) \cdot \eta_1 = 0 \quad , \quad \text{para } (x, t) \in \partial\Omega_1 \times [0, \infty)$$

$$\nabla S_h(x, t) \cdot \eta_2 = \nabla I_h(x, t) \cdot \eta_2 = \nabla R_h(x, t) \cdot \eta_2 = 0 \quad , \quad \text{para } (x, t) \in \partial\Omega_2 \times [0, \infty)$$

El diagrama de transferencia en cada población (población H_1 en azul y población H_2 en negro) y la interacción entre ambas poblaciones (línea punteada) es representada a través del siguiente esquema:

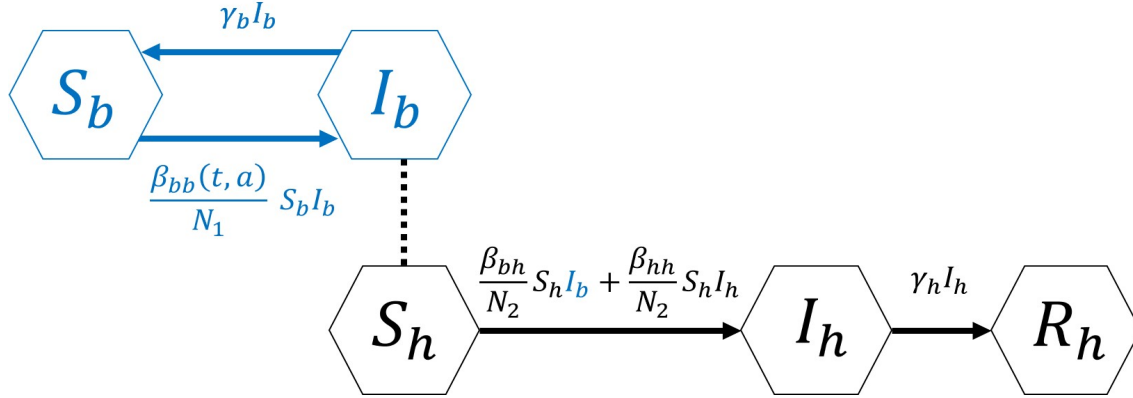


Figura 2.5: Interacción entre las poblaciones y flujo de transmisión con sus tasas de transferencia en cada una de ellas.

2.3. Ecuación de Reacción-Difusión

La ecuación de difusión (ecuación diferencial parcial) que representa el fenómeno de dispersión local de los individuos de la población:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u$$

y la ecuación diferencial ordinaria que se obtiene del modelo determinístico y que representa la historia de vida de la población (reacción):

$$\frac{du}{dt} = f(x, t, u)$$

dan lugar a la ecuación de reacción-difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + f(x, t, u)$$

Éstos modelos pueden ser analizados para dar información sobre la dinámica de una población en una escala de tiempo grande, fueron introducidos por Skellam [Skellam, 1951] y por Kierstead y Slobodkin [Kierstead and Slobodkin, 1953], pueden ser extendidos a varias especies que interactúan entre sí y a explicar el comportamiento de dispersión que es más complejo que la simple difusión: *advección*, *taxis*, *quimiotaxis* y *difusión-cruzada* (para más información visitar [Murray, 2002]).

El sistema de ecuaciones de reacción-difusión que describirá la propagación de enfermedades entre ambas poblaciones será:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + F(t, a, u) \quad (2.7)$$

donde $u := [S_b, I_b, S_h, I_h, R_h]^t$, D es la matriz diagonal de difusión con $[d_1, d_1, d_2, d_2, d_2]^t$ en la diagonal ($d_i > 0, i = 1, 2$) y F se define como:

$$F(t, a, u) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} S_b(x, t) I_b(x, t) + \gamma_b I_b(x, t) \\ \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} S_b(x, t) I_b(x, t) - \gamma_b I_b(x, t) \\ -\frac{\beta_{hh}}{N_2} S_h(x, t) I_h(x, t) - \frac{\beta_{bh}}{N_2} S_h(x, t) I_b(x, t) \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} S_h(x, t) I_h(x, t) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} S_h(x, t) I_b(x, t) - \gamma_h I_h(x, t) \\ \gamma_h I_h(x, t) \end{bmatrix}$$

La ecuación (2.7) es una simplificación del sistema de ecuaciones estudiado en [Anaya et al., 2015], tanto en los términos de difusión como en los términos de reacción, pues en ella sólo se consideran coeficientes constantes de difusión, en lugar de los términos no-locales, no-lineales y cruzados estudiados en [Anaya et al., 2015].

Capítulo 3

Planteamiento del Problema

De aquí en adelante, la población transmisora de la enfermedad (población H_1) será por ejemplo una población de aves, porcinos o roedores y la población H_2 será una población de seres humanos. Al sistema (2.7) se agrega una variable auxiliar $C_h(x, t)$ que representa el término de incidencia de la enfermedad en la población H_2 y cuya ecuación asociada es:

$$\frac{\partial C_h(x, t)}{\partial t} = \frac{\beta_{hh}}{N_2} S_h(x, t) I_h(x, t)$$

por tanto el conjunto de ecuaciones con el que se trabajará es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + F(t, a, u) \quad (3.1)$$

donde $u := [S_b, I_b, S_h, I_h, R_h, C_h]^t$, $a := [\alpha, \gamma, t_c]^t$, D es la matriz de difusión (matriz diagonal con $[d_1, d_1, d_2, d_2, d_2, 0]^t$ en la diagonal, $d_i > 0$, $i = 1, 2$) y F se redefine como:

$$F(t, a, u) := \begin{bmatrix} -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} S_b(x, t) I_b(x, t) + \gamma_b I_b(x, t) \\ \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} S_b(x, t) I_b(x, t) - \gamma_b I_b(x, t) \\ -\frac{\beta_{hh}}{N_2} S_h(x, t) I_h(x, t) - \frac{\beta_{bh}}{N_2} S_h(x, t) I_b(x, t) \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} S_h(x, t) I_h(x, t) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} S_h(x, t) I_b(x, t) - \gamma_h I_h(x, t) \\ \gamma_h I_h(x, t) \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} S_h(x, t) I_h(x, t) \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de transmisión ($\tilde{\beta}_{bb}$, β_{bh} y β_{hh}) y las tasas de transferencia (γ_b y γ_h) del modelo (3.1) son parámetros propios de la enfermedad en cada población. En este modelo el coeficiente de transmisión de la enfermedad de la población H_1 ($\beta_{bb}(t, a)$) es una función que depende de t y del parámetro a :

$$\beta_{bb}(t, a) = \begin{cases} \tilde{\beta}_{bb} & , \text{ si } t \leq t_c \\ \tilde{\beta}_{bb} \left(\alpha + (1 - \alpha)e^{-\gamma(t-t_c)} \right) & , \text{ si } t > t_c \end{cases} \quad (3.2)$$

en particular, el parámetro afecta el coeficiente de contagio de la población H_1 de la siguiente manera: α determina cuánto disminuye $\beta_{bb}(t, a)$ con respecto a $\tilde{\beta}_{bb}$, γ establece cuán rápido decrece y t_c cuándo lo hace.

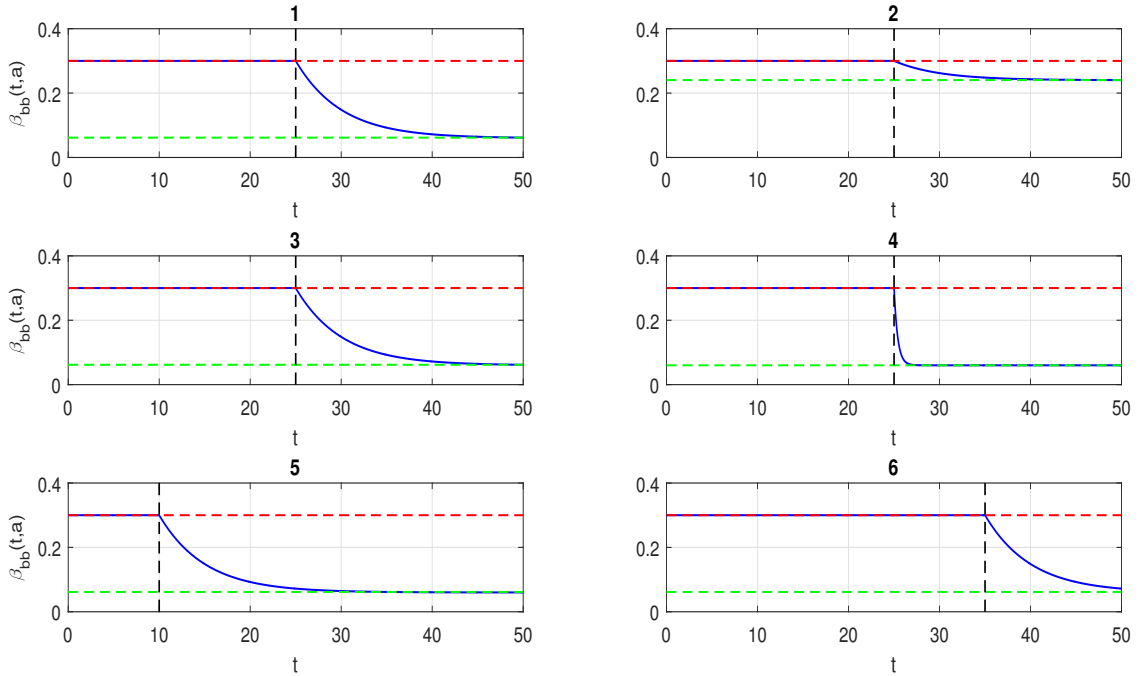


Figura 3.1: $\beta_{bb}(t, a)$ (en azul), $\tilde{\beta}_{bb} = 0.3$ (en rojo) y $\alpha\tilde{\beta}_{bb}$ (en verde). **Gráfico 1 y 2:** $t_c = 25$ (en negro), $\gamma = 0.2$ y α varía: $\alpha = 0.2$ (izq.) y $\alpha = 0.8$ (der.). **Gráfico 3 y 4:** $t_c = 25$ (en negro), $\alpha = 0.2$ y γ varía: $\gamma = 0.2$ (izq.) y $\gamma = 2.5$ (der.). **Gráfico 5 y 6:** $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.2$ y t_c (en negro) varía: $t_c = 10$ (izq.) y $t_c = 35$ (der.).

Modificar $\beta_{bb}(t, a)$ a través de a significa tener control sobre la transmisión de la enfermedad en la población H_1 y puesto que la enfermedad nace en ella y se propaga a la población

H_2 , entonces se espera, en principio, tener control sobre la enfermedad en esta última.

3.1. Indicadores o Cantidades de Interés

La epidemiología es el estudio de la distribución, frecuencia y determinantes de los problemas de salud y enfermedades en una población humana. El propósito de ella es obtener, interpretar y utilizar la información para reducir las enfermedades y promover la salud en los individuos [Vaughan and Morrow, 1989].

La medición de la frecuencia de las enfermedades implica obtener información sobre la ocurrencia de un fenómeno de salud (enfermedad, trastorno o muerte) en poblaciones y por lo tanto son fundamentales para las investigaciones descriptivas y analíticas de la enfermedad [Fuentes and del Prado, 2013].

Las dos principales medidas o indicadores de la frecuencia de una enfermedad son: incidencia y prevalencia, y se definen a continuación:

- **Incidencia:** mide el número de nuevos casos, episodios o eventos que ocurren en un período definido. Es la medida de frecuencia más básica y es el mejor indicador para determinar si una condición decrece, crece o permanece estática [Vaughan and Morrow, 1989]. La incidencia de una enfermedad puede medirse de dos formas:
 - **Tasa de Incidencia:** también denominada densidad de incidencia, expresa la ocurrencia de la enfermedad entre la población en relación con unidades de tiempo-personas, por lo que mide la velocidad de ocurrencia de la enfermedad (es el potencial instantáneo de cambio en el estado de salud por unidad de tiempo, durante un periodo específico, en relación con el tamaño de la población susceptible en el mismo periodo [Moreno-Altamirano et al., 2000]).
 - **Incidencia Acumulada:** expresa únicamente el volumen de nuevos casos de infectados en una población durante un periodo determinado, y mide la probabilidad o el riesgo promedio de los miembros de una población de contraer una enfermedad en un periodo específico [Moreno-Altamirano et al., 2000].
- **Tasa de Ataque:** es una tasa de incidencia que se utiliza para aquellos casos en que las enfermedades se presentan en un período muy corto (el período de exposición es limitado), se emplea frecuentemente para brotes epidémicos [Ministerio de Salud del Perú, 2001].
- **Tasa de Ataque Secundaria:** es un indicador que mide la velocidad de propagación de una enfermedad. Mide la frecuencia de nuevos casos durante un período epidémico entre los contactos de casos conocidos [Ministerio de Salud del Perú, 2001].

- **Prevalencia:** es la proporción de individuos de una población que tienen la enfermedad en un momento determinado, este indicador describe la situación en un punto en el tiempo contabilizando tanto los casos nuevos como los antiguos [Ministerio de Salud del Perú, 2001].

En este trabajo se considerará la incidencia acumulada y la tasa de incidencia de la enfermedad ambas en la población de humanos (en este caso, la tasa de incidencia es equivalente a la tasa de ataque puesto que la enfermedad en estudio se considera una epidemia). Además, se considerarán otras dos cantidades de interés o indicadores: cantidad máxima de humanos infectados y el tiempo de extinción de la enfermedad en humanos, y sus definiciones están sujetas al modelo matemático con el cual se representa la propagación de la enfermedad.

Suponga que el dominio temporal de la enfermedad es $I := [0, T]$, donde $T > 0$ es un número muy grande, y considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (sistema de reacción) que forma parte de (3.1). Para este caso, los indicadores están representados por:

- **Tasa de Ataque en Humanos:** $R_h(T) := \int_0^T \gamma I_h(t) dt$.
- **Incidencia Acumulada en Humanos:** $C_h(T) := \int_0^T \frac{\beta_{hh}}{N_2} S_h(t) I_h(t) dt$.
- **Cantidad Máxima de Humanos Infectados** - $\max_{t \in I} I_h(t)$: es la cantidad máxima de individuos infectados de la población H_2 considerando todo el periodo de duración de la enfermedad.
- **Tiempo de Extinción de la Enfermedad en Humanos** - t_{ex} : es el tiempo posterior a t_{max} y en donde la cantidad de humanos infectados es inferior a 1 (t_{max} es el tiempo en donde se alcanza la máxima cantidad de humanos infectados). Matemáticamente, t_{ex} se define como $t_{max} < t_{ex}$ y $I_h(t_{ex}) < 1$ donde t_{max} es $I_h(t_{max}) = \max_{t \in I} I_h(t)$.

Por otro lado, si se considera el modelo (3.1) completamente, entonces los indicadores se definen como:

- **Tasa de Ataque Promedio en Humanos:** $\frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} R_h(x, T) dx$ (aquí $|\Omega_2|$ es la medida de la región en donde se distribuye la población de humanos. La medida será longitud si la región está en un espacio unidimensional, área en el caso bidimensional y volumen en el caso tridimensional).

- **Incidencia Acumulada Promedio en Humanos:** $\frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} C_h(x, T) dx.$
- **Cantidad Máxima de Humanos Infectados:** es el máximo valor de la densidad promedio de humanos infectados durante todo el periodo de duración de la enfermedad y se define como $\frac{1}{|\Omega_2|} \max_{t \in I} \int_{\Omega_2} I_h(x, t) dx.$
- **Tiempo de Extinción de la Enfermedad en Humanos:** es el tiempo t_{ex} superior a t_{max} y es tal que la densidad promedio sobre la región en la que se distribuye la población H_2 es menor que 1. En términos matemáticos, t_{ex} es el tiempo que cumple con $t_{max} < t_{ex}$ y $\frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} I_h(x, t_{ex}) dx < 1$, donde t_{max} es $\int_{\Omega_2} I_h(x, t_{max}) dx = \max_{t \in I} \int_{\Omega_2} I_h(x, t) dx.$

Disminuir éstas cantidades de interés o indicadores implica disminuir el impacto de la enfermedad sobre la población H_2 y puesto que se tiene control sobre la transmisión de la enfermedad entonces surge la siguiente pregunta: ¿es posible disminuir éstos indicadores a través del control del coeficiente de transmisión de la enfermedad en la población H_1 ? Para responderla, en primer lugar se debe saber si modificar el coeficiente de transmisión por medio de a tiene un efecto sobre los indicadores escogidos (Análisis de Sensibilidad), y si lo tiene, entonces el siguiente paso es determinar el valor de a para el cual los indicadores se minimizan (Problema de Optimización).

3.2. Análisis de Sensibilidad y Problema de Optimización

Se llamará *análisis de sensibilidad* a estudiar numéricamente cuán sensibles son los indicadores al cambio de a , en principio este análisis se hará para el sistema de reacción y luego se replicará el estudio en los indicadores que se obtienen del sistema de reacción-difusión.

Posteriormente, se seleccionarán aquellos indicadores que son sensibles a a y adecuados para generar una función objetivo a minimizar, a priori, la función estará compuesta por una combinación lineal de los cuatros indicadores. Luego de seleccionar la función objetivo adecuada, se procederá a resolver el *problema de optimización* el cual consiste en encontrar el valor de a tal que minimice dicha función. En términos generales, el problema de optimización se define como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } J(u, a) := AR_h(T) + BC_h(T) + C \max_{t \in I} I_h(t) + Dt_{ex} \\ \text{sujeto a:} \\ \frac{du}{dt} = F(t, a, u) \end{array} \right.$$

para el caso del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, y:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } J(u, a) := \frac{A}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} R_h(x, T) dx + \frac{B}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} C_h(x, T) dx \\ \quad + \frac{C}{|\Omega_2|} \max_{t \in I} \int_{\Omega_2} I_h(x, t) dx + Dt_{ex} \\ \text{sujeto a:} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + F(t, a, u) \end{array} \right.$$

para el caso del sistema de ecuaciones diferenciales parciales (aquí A , B , C y D son números reales.).

Capítulo 4

Modelo Temporal

En este capítulo se aborda matemáticamente el modelo temporal (sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtiene de (3.1) también llamado sistema de reacción). El problema se plantea formalmente en términos matemáticos, se prueba existencia y unicidad de la solución, dependencia con respecto a la variable o parámetro de control y se obtienen algunas características de ella.

4.1. Modelo Matemático Temporal

En un intervalo de tiempo dado $[0, T]$ ($T > 0$), el modelo considera dos poblaciones independientes H_1 y H_2 con número total de individuos $N_1, N_2 > 0$, respectivamente. La población H_1 es dividida en dos compartimentos o clases: susceptibles e infectados, mientras que la población H_2 es dividida en tres clases: susceptibles, infectados y recuperados.

Las variables de estado $u_1 := u_1(t)$ y $u_2 := u_2(t)$ representan la cantidad de individuos en el tiempo t de la clase susceptibles e infectados de la población H_1 , por su parte, las variables $v_1 := v_1(t)$, $v_2 := v_2(t)$ y $v_3 := v_3(t)$ representan las cantidades de individuos de las clases susceptibles, infectados y recuperados de la población H_2 en el tiempo t . Luego, la población total en cada población está dada por:

$$u_1(t) + u_2(t) = N_1 \quad , \quad v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = N_2 \quad (4.1)$$

La enfermedad nace en la población H_1 y se transmite a la población H_2 por el contacto entre un individuo infectado de la población H_1 con un individuo susceptible de la población H_2 . La enfermedad en la población H_1 se describe por medio del modelo *SIS* y en la población H_2 a través del modelo *SIR* agregando el término de incidencia $(\beta_{bh}/N_2)v_1u_2$. La tasa de

recuperación $0 < \gamma_r < 1$ de la población H_i es constante y el período de infección en la población H_i está dada por $1/\gamma_r$ (si $i = 1$ entonces $r = b$ y si $i = 2$ entonces $r = h$). El coeficiente de transmisión de la enfermedad en H_2 ($0 < \beta_{hh} < 1$) y el coeficiente de transmisión entre ambas poblaciones ($0 < \beta_{bh} < 1$) se considerarán constantes, no obstante, el coeficiente de transmisión en H_1 (β_{bb}) dependerá de t y de la variable de control $a := [\alpha, \gamma, t_c]^t$. β_{bb} se define como:

$$\beta_{bb}(t, a) = \begin{cases} \tilde{\beta}_{bb} & , \quad \text{si } t \leq t_c \\ \tilde{\beta}_{bb}(\alpha + (1 - \alpha)e^{-\gamma(t-t_c)}) & , \quad \text{si } t > t_c \end{cases}$$

donde $0 < \tilde{\beta}_{bb} < 1$ es el coeficiente inicial de transmisión de la enfermedad en H_1 y $a \in Q \subset (0, 1) \times (0, M) \times (0, T)$, con $M > 0$ y Q un conjunto cerrado, acotado y convexo.

Adicionalmente se considera la variable $c =: c(t)$ que representa el término de incidencia de la enfermedad en la población H_2 y tiene como ecuación asociada a:

$$\frac{dc}{dt}(t) = \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(t)v_2(t)$$

Así, para la variable de control $a \in Q$, el modelo temporal de la propagación de la enfermedad de H_1 a H_2 se obtiene del acoplamiento de los modelos *SIS* y *SIR* a través del término de incidencia $(\beta_{bh}/N_2)v_1u_2$. El conjunto de ecuaciones resultante es:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt}(t) = -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1}u_1(t)u_2(t) + \gamma_b u_2(t) \\ \frac{du_2}{dt}(t) = \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1}u_1(t)u_2(t) - \gamma_b u_2(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

con $u_i(0) \geq 0$ ($i = 1, 2$) y $N_1 > 0$.

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt}(t) = -\frac{\beta_{hh}}{N_2}v_1(t)v_2(t) - \frac{\beta_{bh}}{N_2}v_1(t)u_2(t) \\ \frac{dv_2}{dt}(t) = \frac{\beta_{hh}}{N_2}v_1(t)v_2(t) + \frac{\beta_{bh}}{N_2}v_1(t)u_2(t) - \gamma_h v_2(t) \\ \frac{dv_3}{dt}(t) = \gamma_h v_2(t) \end{cases} \quad (4.3)$$

con $v_i(0) \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$) y $N_2 > 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dc}{dt}(t) = \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(t)v_2(t) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

con $c(0) \geq 0$.

En la siguiente sección se prueba la existencia y unicidad de la solución del sistema (4.2)-(4.4). Específicamente, se prueba que el sistema tiene solución única en $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$ (Teorema 4.2.1) y es única con respecto al parámetro a (Teorema 4.2.2). Además, las soluciones están acotadas (Corolario 4.2.3) y pertenecen a $H^1([0, T])$ donde $T > 0$ (Corolario 4.2.4).

4.2. Existencia y Unicidad

Sea $G : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$:

$$G(t, a, u) := \begin{bmatrix} -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1(t)u_2(t) + \gamma_b u_2(t) \\ \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1(t)u_2(t) - \gamma_b u_2(t) \\ -\frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(t)v_2(t) - \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1(t)u_2(t) \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(t)v_2(t) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1(t)u_2(t) - \gamma_h v_2(t) \\ \gamma_h v_2(t) \end{bmatrix}$$

con $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^5$ y $u := [u_1, u_2, v_1, v_2, v_3]^t$. El problema (4.2)-(4.3) es de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = G(t, a, u) \quad , \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{array} \right. \quad (4.5)$$

donde $u_0 = [u_1(0), u_2(0), v_1(0), v_2(0), v_3(0)]^t$.

Teorema 4.2.1: Para $a \in Q$ fijo y $u_0 \in \mathbb{R}_+^5$, el problema (4.5) tiene solución única en $[0, \infty)$ y $\mathbf{0} \leq u(t) \leq \mathbf{M}$ para todo $t \geq 0$, donde $\mathbf{0} = [0, 0, 0, 0, 0]^t$, $\mathbf{M} = [N_1, N_1, N_2, N_2, N_2]^t \in \mathbb{R}_+^5$, $N_1 = u_1(0) + u_2(0)$ y $N_2 = v_1(0) + v_2(0) + v_3(0)$.

Demostración:

Sea $a \in Q$. Se define $\mathbf{G}(t, u) := G(t, a, u)$ y por tanto $\mathbf{G}(t, u) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$. Considere el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \mathbf{G}(t, u) & , \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

con $u_0 \in \mathbb{R}_+^5$. Como \mathbf{G} es continua con respecto a t y es localmente Lipschitz continua en u (ver anexo A.1.2 y A.1.3) entonces por resultados fundamentales de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, existe $u(t)$ solución única de (4.6) en un intervalo maximal $I_{max} := [0, t_{max})$, para algún $t_{max} > 0$ ($u \in \mathcal{C}(I_{max}, \mathbb{R}^5)$) y $u(t)$ es:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \mathbf{G}(s, u(s)) ds \quad , \quad t \in I_{max}$$

Por otro lado, si las condiciones iniciales son no negativas entonces las soluciones son no negativas ($u(t) \geq 0$ en I_{max}). En efecto, procediendo como en [Li, 2018] p.37, el cono de \mathbb{R}^5 :

$$\mathbb{R}_+^5 = \{(u_1, u_2, v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^5 : u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0\}$$

es positivamente invariante con respecto a (4.6), esto se obtiene si el campo vectorial definido por du/dt es tangente a \mathbb{R}_+^5 o tiene dirección hacia el interior de \mathbb{R}_+^5 . En este caso:

- **Plano u_1, v_1, v_2, v_3 :** En este plano $u_2 = 0$ y por tanto $\left. \frac{du_2}{dt} \right|_{u_2=0} = 0$. El campo vectorial du/dt en este plano es tangente a él y en consecuencia es invariante a (4.6) (ninguna solución en el interior de \mathbb{R}_+^5 puede escapar del interior a través de este plano).
- **Plano u_2, v_1, v_2, v_3 :** Aquí $u_1 = 0$, luego $\left. \frac{du_1}{dt} \right|_{u_1=0} = \gamma_b u_2 \geq 0$. En este plano el campo vectorial du/dt apunta hacia el interior de \mathbb{R}_+^5 y por tanto ninguna solución puede escapar del interior de \mathbb{R}_+^5 a través de este plano.
- **Plano u_1, u_2, v_2, v_3 :** $v_1 = 0$, $\left. \frac{dv_1}{dt} \right|_{v_1=0} = 0$.
- **Plano u_1, u_2, v_1, v_3 :** $v_2 = 0$, $\left. \frac{dv_2}{dt} \right|_{v_2=0} = \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1 u_2 \geq 0$.

$$\blacksquare \text{ Plano } u_1, u_2, v_1, v_2 : v_3 = 0, \left. \frac{dv_3}{dt} \right|_{v_3=0} = \gamma_h v_2 \geq 0.$$

en consecuencia, se tiene que:

$$\begin{cases} \text{si } u_i(0) \geq 0 \text{ entonces } u_i(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in [0, t_{max}) \text{ (} i = 1, 2\text{)}. \\ \text{si } v_i(0) \geq 0 \text{ entonces } v_i(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in [0, t_{max}) \text{ (} i = 1, 2, 3\text{)}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Por otra parte, al sumar la primera y la segunda componente del sistema (4.6), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{du_1(t)}{dt} + \frac{du_2(t)}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}[u_1(t) + u_2(t)] &= 0 \end{aligned}$$

luego, si $N(t) = u_1(t) + u_2(t)$ y considerando (4.1), entonces se genera el P.V.I:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) &= 0, \quad t \in (0, t_{max}) \\ N(0) &= u_1(0) + u_2(0) \end{aligned}$$

cuya solución es $N(t) = N(0)$ para todo $t \in [0, t_{max})$ y por lo tanto $N_1 = N(0)$. Si de forma análoga, se suma la tercera, cuarta y quinta ecuación del sistema (4.6), y se considera nuevamente (4.1), entonces se obtiene:

$$\begin{cases} (\forall t \in [0, t_{max})) \quad u_1(t) + u_2(t) = N_1 \\ (\forall t \in [0, t_{max})) \quad v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = N_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

con $N_1 = u_1(0) + u_2(0)$ y $N_2 = v_1(0) + v_2(0) + v_3(0)$.

Por tanto, de (4.7) y (4.8):

$$\begin{cases} (\forall t \in [0, t_{max})) \quad 0 \leq u_i(t) \leq N_1 \text{ (} i = 1, 2\text{)}. \\ (\forall t \in [0, t_{max})) \quad 0 \leq v_i(t) \leq N_2 \text{ (} i = 1, 2, 3\text{)}. \end{cases}$$

las soluciones están acotadas en el intervalo maximal de existencia, en consecuencia, pueden ser extendidas a $[0, \infty)$, es decir, $u \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^5)$.

Teorema 4.2.2: Las soluciones de (4.5) son únicas respecto a $a \in Q$.

Demostración:

Sean $a_1 \neq a_2 \in Q$ y $u_0, v_0 \in \mathbb{R}_+^5$. Se define $u(t) := (u_i(t))_{i=1}^5$ como la solución de (4.5) con a_1 y u_0 , y $v(t) := (v_i(t))_{i=1}^5$ como la solución de (4.5) con a_2 y v_0 . Por Teorema 4.2.1, la solución está dada por:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t G(s, a_1, u(s)) ds \quad , \quad t > 0$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t G(s, a_2, v(s)) ds \quad , \quad t > 0$$

Sea $t > 0$:

$$\|u(t) - v(t)\|_{\mathbb{R}^5} \leq \|u_0 - v_0\|_{\mathbb{R}^5} + \int_0^t \left\| G(s, a_1, u(s)) - G(s, a_2, v(s)) \right\|_{\mathbb{R}^5} ds$$

por propiedad de G (A.1.4):

$$\leq \|u_0 - v_0\|_{\mathbb{R}^5} + C \int_0^t |\beta_{bb}(s, a_1) - \beta_{bb}(s, a_2)| ds + \int_0^t L \|u(s) - v(s)\|_{\mathbb{R}^5} ds$$

y por desigualdad A.1.5 considerando $h(t) = \|u_0 - v_0\|_{\mathbb{R}^5} + c \int_0^t |\beta_{bb}(s, a_1) - \beta_{bb}(s, a_2)| ds$ y $\kappa(t) = L > 0$, se tiene que para todo $t > 0$:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{\mathbb{R}^5} &\leq \|u_0 - v_0\|_{\mathbb{R}^5} + N_1 \int_0^t |\beta_{bb}(s, a_1) - \beta_{bb}(s, a_2)| ds \\ &\quad + \int_0^t L \left(\|u_0 - v_0\|_{\mathbb{R}^5} + N_1 \int_0^s |\beta_{bb}(\tau, a_1) - \beta_{bb}(\tau, a_2)| d\tau \right) e^{L(t-s)} ds \end{aligned}$$

aquí $\|u_0 - v_0\|_{\mathbb{R}^5} = 0$ si $u_0 = v_0$ y $|\beta_{bb}(\tau, a_1) - \beta_{bb}(\tau, a_2)| = 0$ si $a_1 = a_2$ (por continuidad de β_{bb} en a) y por tanto $\|u - v\|_{\infty} = 0$, lo cual implica la unicidad de la solución con respecto a la condición inicial y $a \in Q$.

Corolario 4.2.3: La solución del sistema (4.2)-(4.4) (u_i, v_j, c) existe en $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^6)$, es única con respecto a las condiciones iniciales y a $a \in Q$, además:

$$\begin{aligned} 0 \leq u_i(t) \leq N_1 \quad , \quad i = 1, 2 \\ 0 \leq v_j(t) \leq N_2 \quad , \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad , \quad t \geq 0$$

y si se considera $t \in [0, T]$ ($T > 0$) entonces existe $N_3 > 0$ tal que $0 \leq c(t) \leq N_3$ en $[0, T]$.

Demostración:

Por Teorema 4.2.1, existe $u_i, v_j \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$ solución (4.2)-(4.3) y si las condiciones iniciales son no negativas:

$$\begin{aligned} 0 \leq u_i(t) \leq N_1 \quad , \quad i = 1, 2 \\ 0 \leq v_j(t) \leq N_2 \quad , \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad , \quad t \geq 0$$

luego:

$$\frac{dc}{dt}(t) = \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(t)v_2(t) \quad , \quad t > 0 \quad \Rightarrow \quad c(t) = \frac{\beta_{hh}}{N_2} \int_0^t v_1(s)v_2(s)ds + c_0 \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$$

y c es única con respecto a $a \in Q$ puesto que v_1 y v_2 lo son por Teorema 4.2.2. Además, si $t \in [0, T]$ entonces $0 \leq c(t) \leq N_3 := \beta_{hh}TN_2 + c_0$ con $c_0 \geq 0$.

Corolario 4.2.4: Las soluciones de (4.2)-(4.4) también pertenecen a $H^1([0, T])$.

Demostración:

Por Corolario 4.2.3, en particular para $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} 0 \leq u_i(t) \leq N_1 \quad , \quad i = 1, 2 \\ 0 \leq v_j(t) \leq N_2 \quad , \quad j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (4.9)$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} 0 \leq \int_0^T |u_i(t)|^2 \leq N_1^2 T \quad , \quad i = 1, 2 \\ 0 \leq \int_0^T |v_j(t)|^2 \leq N_2^2 T \quad , \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

desde donde se obtiene que $u_i, v_j \in L^2([0, T])$ (para $i = 1, 2$ y $j = 1, 2, 3$).

Por otro lado, de (4.9) y considerando que $0 \leq \alpha\tilde{\beta}_{bb} \leq \beta_{bb}(t, a) \leq \tilde{\beta}_{bb}$ para todo $(t, a) \in [0, \infty) \times Q$, se tiene:

$$\begin{aligned} -N_1\tilde{\beta}_{bb} &\leq G_1(t, a, u) \leq \gamma_b N_1 \\ -\gamma_b N_1 &\leq G_2(t, a, u) \leq N_1\tilde{\beta}_{bb} \\ -\beta_{hh}N_2 - \beta_{bh}N_1 &\leq G_3(t, a, u) \leq 0 \\ -\gamma_h N_2 &\leq G_4(t, a, u) \leq \beta_{hh}N_2 + \beta_{bh}N_1 \\ 0 &\leq G_5(t, a, u) \leq \gamma_h N_2 \end{aligned}$$

con $G = (G_i)_{i=1}^5$, y puesto que $\frac{du}{dt} = G$, entonces:

$$\begin{cases} 0 \leq \left| \frac{du_i}{dt}(t) \right| \leq L, & i = 1, 2 \\ 0 \leq \left| \frac{dv_j}{dt}(t) \right| \leq L, & j = 1, 2, 3 \end{cases}, t \geq 0$$

donde $L = \max\{\gamma_b N_1, \tilde{\beta}_{bb} N_1, \gamma_h N_2, \beta_{hh} N_2 + \beta_{bh} N_1\}$. Por lo tanto, $\frac{du_i}{dt}, \frac{dv_j}{dt} \in L^2([0, T])$, es decir, $u_i, v_j \in H^1([0, T])$.

Por otra parte, el Corolario 4.2.3 también implica que $c \in L^2([0, T], \mathbb{R})$ y por último:

$$\frac{dc}{dt}(t) = \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(t) v_2(t), t \in [0, T] \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{dc}{dt}(t) \leq \beta_{hh} N_2, t \in [0, T].$$

es decir, $c \in H^1([0, T])$.

Proposición 4.2.5: El modelo temporal tiene solución: $u_i, v_j, c \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}) \cap H^1([0, T])$, está acotada y es única con respecto a u_0, c_0 y $a \in Q$ en $[0, T]$ para todo $T > 0$.

Demostración:

Directo del Corolario 4.2.3 y 4.2.4.

Proposición 4.2.6: Se define el número básico de reproducción del modelo (4.1) como:

$$\mathcal{R}_b(t, a) = \frac{\beta_{bb}(t, a)}{\gamma_b}$$

luego, si existe $(\tau, a) \in [0, \infty) \times Q$ tal que para todo $t \geq \tau$ se cumple $\mathcal{R}_b(t, a) < 1$, entonces $u_2(t) \rightarrow 0$ y $u_1(t) \rightarrow N_1$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración:

Basado en [Li, 2018] p.46. Como $u_1(t) + u_2(t) = N_1$ entonces $u_1(t) = N_1 - u_2(t)$ y sustituyendo en:

$$\frac{du_2}{dt}(t) = \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1(t) u_2(t) - \gamma_b u_2(t)$$

se obtiene:

$$\frac{du_2}{dt}(t) = \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} [N_1 - u_2(t)] u_2(t) - \gamma_b u_2(t)$$

Para simplificar notación, sea $\beta^* = \beta_{bb}(t, a)$, por tanto la expresión anterior queda como:

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{dt}(t) &= \frac{\beta^*}{N_1} [N_1 - u_2(t)] u_2(t) - \gamma_b u_2(t) \\ &= [\beta^* - \gamma_b] u_2(t) - \frac{\beta^*}{N_1} u_2(t) u_2(t) \\ &= [\beta^* - \gamma_b] u_2(t) \left[1 - \frac{\beta^* u_2(t)}{N_1 [\beta^* - \gamma_b]} \right] \end{aligned}$$

por hipótesis existe (τ, a) tal que para todo $t \geq \tau$: $\mathcal{R}_b(t, a) < 1$, luego $\beta^* < \gamma_b$ y por tanto:

$$[\beta^* - \gamma_b] < 0 \quad \wedge \quad \left[1 - \frac{\beta^* u_2(t)}{N_1 [\beta^* - \gamma_b]} \right] > 0$$

con $u_2(t) \geq 0$, de aquí:

- si $u_2 = 0$ entonces $\frac{du_2}{dt} = 0$.
- si $u_2 > 0$ entonces $\frac{du_2}{dt} < 0$.

en consecuencia $u_2(t)$ es monótona decreciente y puesto que $0 \leq u_2(t) \leq N_1$, entonces $u_2(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y por tanto $u_1(t) \rightarrow N_1$.

Capítulo 5

Modelo Espacio - Temporal

En este capítulo el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (sistema de reacción-difusión o modelo espacio - temporal) se define formalmente en términos matemáticos y se prueba la existencia y unicidad de la solución, y dependencia de ella con respecto al parámetro de control. Se utilizan resultados de la Teoría de Espacios de Sobolev ([Lions and Magenes, 1972]) y de la Teoría de C_0 -Semigrupos ([Pazy, 1983] y [Vrabie, 2003]) para ello.

Como primera parte de este capítulo se presenta la teoría relacionada con Espacios de Sobolev y C_0 -Semigrupos y como segunda parte se expone la demostración de sistema reacción-difusión.

5.1. Problema Abstracto de Cauchy

5.1.1. Preliminares

Definición 5.1.1: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $n \in \mathbb{N}$. Para $p \in [1, \infty)$, se define el espacio vectorial:

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty\}$$

y si $p = \infty$ entonces:

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y existe una constante } C > 0$$

$$\text{tal que } |u(x)| \leq C \text{ c.t.p en } \Omega\}$$

dotados respectivamente con las normas:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty)$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ c.t.p en } \Omega\}$$

Nota 5.1.2: Si $u \in L^\infty(\Omega)$ entonces $|u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ c.t.p en Ω .

Definición 5.1.3: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $n \in \mathbb{N}$. Para $k \in \mathbb{N}_0$ y $p \in [1, \infty]$, se define el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ por:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : u \text{ tiene derivada débil } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq k\}$$

dotado con la norma:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty)$$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}$$

Nota 5.1.4: En el caso que $p = 2$ se escribe $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ y si $k = 0$ se escribe $L^p(\Omega) := W^{0,p}(\Omega)$ para $p \in [1, \infty)$.

Teorema 5.1.5: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $k \in \mathbb{N}_0$ y $p \in [1, \infty]$. Entonces $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach y:

- $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interior:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} uv \, dx$$

- $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interior:

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

Definición 5.1.6: Sea X Banach y sea $T > 0$. Se definen:

- $C([0, T]; X) = \{u : [0, T] \rightarrow X \text{ es continua y } \|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X < \infty\}$

- $AC([0, T]; X) = \{u : [0, T] \rightarrow X \text{ es absolutamente continua}\}$
- Si X es separable y $p \in [1, \infty)$:

$L^p(0, T; X) = \left\{ u : [0, T] \rightarrow X \text{ fuertemente medible:} \right.$

$$\left. \|u\|_{L^p(0, T; X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

$L^\infty(0, T; X) := \left\{ u : [0, T] \rightarrow X \text{ fuertemente medible:} \right.$

$$\left. \|u\|_{L^\infty(0, T; X)} := \inf\{C > 0 : \|u(t)\|_X < C \text{ c.t.p en } [0, T]\} < \infty \right\}$$

- $W^{1,p}([0, T]; X) = \left\{ u \in AC([0, T]; X) : \frac{du}{dt} \in L^p(0, T; X) \right\}$

Teorema 5.1.7: Sea $T > 0$ y X un espacio de Banach separable. Entonces para $1 \leq p \leq \infty$ los espacios $L^p(0, T; X)$ son espacios Banach. Para $p \in [1, \infty)$ el espacio dual de $L^p(0, T; X)$ puede ser identificado isométricamente con $L^q(0, T; X^*)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y X^* es el espacio dual de X , además:

$$\langle u, v \rangle_{L^q(0, T; X^*), L^p(0, T; X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_{X^*, X} dt$$

Por otro lado, si H es un espacio de Hilbert separable entonces $L^2(0, T; H)$ es un espacio de Hilbert con producto interior:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (v(t), u(t))_H dt$$

Definición 5.1.8 (Gelfand Triple): Sean H y V espacio de Hilbert con una inyección continua y densa $V \hookrightarrow H$, entonces se tienen inyecciones continuas y densas:

$$V \hookrightarrow H = H^* \hookrightarrow V^* \tag{5.1}$$

donde H^* y V^* es el espacio dual de H y V respectivamente y (5.1) se denomina Gelfand Triple.

Notar que la inyección $H \hookrightarrow V^*$ está dada por $y \in H \hookrightarrow (y, \cdot) \in H^* \subset V^*$. Además, se define:

$$\mathbf{W}(0, T; H, V) := \{u : u \in L^2(0, T; V), \partial_t u \in L^2(0, T; V^*)\}$$

Teorema 5.1.9: ([Hinze et al., 2009], p.40). Sea $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ (Gelfand Triple), entonces $\mathbf{W}(0, T; H, V)$ es un espacio de Hilbert (y por tanto reflexivo) y se tiene la inyección continua:

$$\mathbf{W}(0, T; H, V) \hookrightarrow C([0, T]; H)$$

Además, para $u, v \in \mathbf{W}(0, T; H, V)$ se tiene la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\langle u(t), v(t) \rangle_H - \langle u(s), v(s) \rangle_H = \int_s^t \langle \partial_t u(\tau), v(\tau) \rangle_{V^*, V} + \langle \partial_t v(\tau), u(\tau) \rangle_{V^*, V} d\tau \quad (5.2)$$

para todo $t, s \in [0, T]$. En particular, si $u = v$ entonces:

$$\|u(t)\|_H^2 - \|u(s)\|_H^2 = 2 \int_s^t \langle \partial_t u(\tau), u(\tau) \rangle_{V^*, V} d\tau \quad (5.3)$$

Nota 5.1.10: La inyección $H \hookrightarrow V^*$ está dada por $\langle v, w \rangle_{V^*, V} = \langle v, w \rangle_H$ para todo $v \in H$ y $w \in V$.

5.1.2. C_0 Semigrupos

Sea X un espacio de Banach con norma denotada por $\|\cdot\|$, $\mathcal{L}(X)$ el espacio de los operadores lineales de X (esto es, $f \in \mathcal{L}(X)$ si y sólo si $f : X \rightarrow X$ y f es lineal) y $\|U\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ux\|$ para todo $U \in \mathcal{L}(X)$.

Definición 5.1.10: Sea $T > 0$ y $F : [0, T] \times X \rightarrow X$. F se dice *Lipschitz continua en $u \in X$ uniformemente con respecto a t* si existe una constante $\tilde{L} > 0$ tal que:

$$\|F(t, u) - F(t, v)\| \leq \tilde{L} \|u - v\|$$

para todo $u, v \in X$ y $t \in [0, T]$.

Definición 5.1.11: Una familia de operadores lineales acotados $S(t) : X \rightarrow X$ donde $(0 \leq t < \infty)$, denotada por $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, se dice *semigrupo de operadores lineales acotados en X* si:

- $S(0)x = x$, para todo $x \in X$.
- $S(t + s) = S(t)S(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

Un semigrupo de operadores lineales acotados $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es *uniformemente continuo* si:

$$\lim_{t \downarrow 0} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0, \quad I \text{ es el operador identidad en } X.$$

El operador lineal $A : \text{Dom}(A) \subset X \rightarrow X$ definido por:

$$\text{Dom}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (S(t)x - x) \text{ existe} \right\}$$

y:

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (S(t)x - x), \quad x \in \text{Dom}(A)$$

se llama *generador infinitesimal* del semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Definición 5.1.13: Un semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineales acotados en X es un semigrupo *fuertemente continuo* de operadores lineales acotados si:

$$\lim_{t \downarrow 0} S(t)x = x, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Un semigrupo *fuertemente continuo* de operadores lineales acotados en X será llamado un *semigrupo de clase C_0* o simplemente *C_0 semigrupo*.

Si A es el generador infinitesimal del C_0 semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, entonces $S(t) = e^{At}$ para $t \geq 0$.

Teorema 5.1.14: (Teorema 2.3.1, [Vrabie, 2003], p.41) Si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un C_0 semigrupo, entonces existe $M \geq 1$ y $\omega \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{t\omega}$$

para todo $t \geq 0$.

Nota 5.1.15: Según Teorema 2.2, [Pazy, 1983], p.4: $\omega \geq 0$.

Definición 5.1.16: Un C_0 semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ en X se dice un *C_0 semigrupo de contracciones* si $M = 1$ y $\omega = 0$, y por tanto $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

Corolario 5.1.17: (Corolario 2.5, [Pazy, 1983], p.5) Si A es un generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ entonces $\text{Dom}(A)$ es denso en X y A es un operador lineal y cerrado.

Definición 5.1.18: Sea X^* el dual de X . Se denota por $\langle x^*, x \rangle$ o $\langle x, x^* \rangle$ el valor de $x^* \in X^*$ en $x \in X$. Sea A un operador lineal con dominio denso $\text{Dom}(A)$ en X . Se dice que A^* es el *operador adjunto* de A y se define como al operador lineal de $\text{Dom}(A^*) \subset X^*$ en X^* tal que: $\text{Dom}(A^*)$ es el conjunto de todos los elementos $x^* \in X^*$ para los cuales existe un $y^* \in X^*$ tal que:

$$\langle x^*, Ax \rangle = \langle y^*, x \rangle \quad \text{para todo } x \in \text{Dom}(A) \quad (5.4)$$

y si $x^* \in \text{Dom}(A^*)$ entonces $y^* = A^*x^*$ donde y^* es el elemento de X^* que satisface (5.4).

Observar que si $\text{Dom}(A)$ es denso en X entonces existe a lo más un $y^* \in X^*$ para el cual (5.4) se cumple ([Pazy, 1983], p. 38).

Definición 5.1.19: Sea H un espacio de Hilbert con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Un operador A en H es *auto-adjunto* si $A = A^*$.

Definición 5.1.20: Un operador lineal A en X es *disipativo* sí y sólo si:

$$\forall x \in \text{Dom}(A), \forall \lambda > 0, \quad \|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$$

Definición 5.1.21: ([Barbu, 1989], p.174) Un operador A en un espacio Hilbert H es *disipativo* en H sí y sólo si:

$$\forall x \in \text{Dom}(A), \quad \langle Ax, x \rangle \leq 0$$

5.1.3. P.V.I Semilineal

Sea X un espacio de Banach y A un generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ en X . El problema del valor inicial semilineal es:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + G(t, u(t)) & , t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 & , u_0 \in X \end{cases} \quad (\text{P})$$

donde $T > 0$, $G : [0, T] \times X \rightarrow X$ es medible en t y Lipschitz continua en $u \in X$ uniformemente con respecto a t .

La forma integral de (P) es:

$$u(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-r)}G(r, u(r))dr \quad , t \in [0, T] \quad (5.5)$$

y por tanto una solución continua u de la ecuación integral (5.5), es decir, $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$, se denominará una *mild solution* del problema de valor inicial (P).

Por otra parte, una *solución clásica* de (P) es una solución continua en $[0, T]$, continuamente diferenciable en $(0, T]$, $u(t) \in \text{Dom}(A)$ para cada $t \in (0, T]$ y satisface (P) en $[0, T]$. Además, una *solución fuerte* de (P) es una solución absolutamente continua en $[0, T]$,

$u'(t) \in L^1(0, T; X)$, $u(t) \in \text{Dom}(A)$ c.t.p en $(0, T)$ y satisface (P) c.t.p $(0, T)$ ([Vrabie, 2003], p.250, p.184).

Por último, la existencia de la solución de (P) está asegurada por los siguientes teoremas:

Proposición 5.A: (Proposición 1.2, [Barbu, 1989], p.175) Sea $G : [0, T] \times X \rightarrow X$ medible en t y Lipschitz continua en $u \in X$, uniformemente con respecto a t . Si A es un generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ en X entonces para todo $u_0 \in X$ el problema (P) tiene una única *mild solution* u en $C([0, T]; X)$. Si además X es un espacio de Hilbert y A es autoadjunto y disipativo en X entonces $\langle Au, u \rangle \in L^2(0, T; X)$, $u \in W^{1,2}([\delta, T]; X)$ para todo $\delta \in [0, T]$ y u es una solución fuerte de (P). Por último, si $|\langle Au_0, u_0 \rangle| < \infty$ entonces $u \in W^{1,2}([0, T]; X)$.

Teorema 5.B: (Teorema 2.1, [Apreutesei, 2012]) Sea $A : \text{Dom}(A) \subseteq X \rightarrow X$ un generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ en el espacio de Banach X , $G : [0, T] \times X \rightarrow X$ medible en t y Lipschitz continua en $u \in X$, uniformemente con respecto a t . Si $u_0 \in X$ entonces el problema (P) tiene una única *mild solution* u en $C([0, T]; X)$. Si además X es un espacio de Hilbert, A es autoadjunto y disipativo en X , y $u_0 \in \text{Dom}(A)$ entonces u es una solución fuerte y $u \in W^{1,2}([0, T]; X) \cap L^2(0, T; \text{Dom}(A))$.

5.2. Modelo Matemático Espacio - Temporal

En un intervalo de tiempo dado $[0, T]$ ($T > 0$), el modelo considera dos poblaciones independientes H_1 y H_2 con número total de individuos $N_1, N_2 > 0$ respectivamente. La población H_i se distribuye sobre un dominio espacial acotado y con frontera suficientemente suave $\Omega_i \subset \mathbb{R}^l$ ($i = 1, 2$ y $l = 1, 2, 3$), donde $\Omega_1 \neq \Omega_2$ y $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Se asume que ambas poblaciones interactúan en una región en común $\tilde{\Omega} := \Omega_1 \cap \Omega_2$, con $\tilde{\Omega} \neq \Omega_i$ para $i = 1, 2$.

La población H_1 es dividida en dos compartimentos o clases: susceptibles e infectados, mientras que la población H_2 es dividida en tres clases: susceptibles, infectados y recuperados.

Las variables de estado $u_1 := u_1(x, t)$ y $u_2 := u_2(x, t)$ representan las densidades de población en el espacio x y tiempo t de la clase susceptibles e infectados de la población H_1 respectivamente, y las variables $v_1 := v_1(x, t)$, $v_2 := v_2(x, t)$ y $v_3 := v_3(x, t)$ representan las densidades de población de las clases susceptibles, infectados y recuperados, respectivamente, de la población H_2 en el espacio x y tiempo t . Por tanto, la población total en cada población está dada por:

$$\int_{\Omega_1} [u_1(x, t) + u_2(x, t)] dx = N_1 \quad , \quad \int_{\Omega_2} [v_1(x, t) + v_2(x, t) + v_3(x, t)] dx = N_2$$

La enfermedad nace en la población H_1 y se transmite a la población H_2 por el contacto entre un individuo infectado de la población H_1 con un individuo susceptible de la población H_2 . La enfermedad en la población H_1 se describe por medio del modelo SIS con difusión y en la población H_2 a través del modelo SIR con difusión. La tasa de recuperación $0 < \gamma_r < 1$ de la población H_i es constante y el período de infección en la población H_i está dada por $1/\gamma_r$ (si $i = 1$ entonces $r = b$ y si $i = 2$ entonces $r = h$). El coeficiente de transmisión de la enfermedad en H_2 ($0 < \beta_{hh} < 1$) y el coeficiente de transmisión entre ambas poblaciones ($0 < \beta_{bh} < 1$) se considerarán constantes, no obstante, el coeficiente de transmisión en H_1 (β_{bb}) dependerá de t y de la variable de control $a := [\alpha, \gamma, t_c]^t$. β_{bb} se define como:

$$\beta_{bb}(t, a) = \begin{cases} \tilde{\beta}_{bb} & , \quad \text{si } t \leq t_c \\ \tilde{\beta}_{bb} \left(\alpha + (1 - \alpha)e^{-\gamma(t-t_c)} \right) & , \quad \text{si } t > t_c \end{cases}$$

donde $0 < \tilde{\beta}_{bb} < 1$ es el coeficiente inicial de transmisión de la enfermedad en H_1 y $a \in Q \subset (0, 1) \times (0, M) \times (0, T)$, con $M > 0$ y Q un conjunto cerrado, acotado y convexo.

Adicionalmente se considera la variable $c =: c(x, t)$ que representa el término de incidencia de la enfermedad en la población H_2 y tiene como ecuación asociada a:

$$\partial_t c(x, t) = \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(x, t) v_2(x, t)$$

Así, para la variable de control $a \in Q$, la propagación de la enfermedad de H_1 a H_2 se modela por medio del acoplamiento de los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales derivados de los modelos SIS y SIR con difusión a través del término de incidencia $(\beta_{bh}/N_2)v_1u_2$, luego el conjunto de ecuaciones resultante que considera la variable espacial es:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = d_u \Delta u_1 - \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 u_2 + \gamma_b u_2 \\ \partial_t u_2 = d_u \Delta u_2 + \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 u_2 - \gamma_h u_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

para $(x, t) \in \Omega_{1,T} := \Omega_1 \times (0, T)$.

$$\begin{cases} \partial_t v_1 &= d_v \Delta v_1 - \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 v_2 - \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1 u_2 \\ \partial_t v_2 &= d_v \Delta v_2 + \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 v_2 + \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1 u_2 - \gamma_h v_2 \\ \partial_t v_3 &= d_v \Delta v_3 + \gamma_h v_2 \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} \partial_t c &= \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 v_2 \end{cases} \quad (5.8)$$

para $(x, t) \in \Omega_{2,T} := \Omega_2 \times (0, T)$, donde Δ es el operador Laplaciano en Ω_i ($i = 1, 2$) y $d_u, d_v > 0$ son los coeficientes de difusión constantes.

El requerimiento que la población H_i permanezca confinada durante todo el tiempo en Ω_i ($i = 1, 2$) se traduce en las siguientes condiciones de frontera sin flujo:

$$\nabla u_k(x, t) \cdot \eta_1 = 0 \quad , \quad \text{en} \quad \sum_{1,T} := \partial\Omega_1 \times (0, T)$$

para $k = 1, 2$ y:

$$\nabla v_j(x, t) \cdot \eta_2 = 0 \quad , \quad \text{en} \quad \sum_{2,T} := \partial\Omega_2 \times (0, T)$$

para $j = 1, 2, 3$, donde η_i es el vector normal a lo largo de $\partial\Omega_i$ en dirección hacia el exterior de Ω_i ($i = 1, 2$).

Finalmente, las condiciones iniciales:

$$w(x, 0) = w^0(x) \quad , \quad w \in \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, c\}$$

son funciones no negativas en sus respectivos dominios espaciales: Ω_1 para $\{u_1, u_2\}$ y Ω_2 para $\{v_1, v_2, v_3, c\}$.

En las siguientes secciones se probará la existencia y unicidad de la solución del sistema de reacción-difusión (5.6)-(5.8). Dado que los sistemas están acoplados sólo por el término $(\beta_{bh}/N_2)v_1 u_2$, primero se probará la existencia y unicidad (e.u) de (5.6) para luego probar e.u de (5.7) y posteriormente la e.u de (5.8). La función u_1 obtenida de (5.6) se extenderá de forma adecuada a $\Omega_2/\tilde{\Omega}$ y será una función conocida en (5.7). La demostración de la existencia y unicidad se basa, en parte, en el procedimiento presentado en [Apreutesei, 2012] y [Zhou et al., 2019].

Por último, considere la siguiente configuración (la cual será usada en la e.u del sistema

(5.6)-(5.8):

Sea $k \in \mathbb{N}$ y $X = [L^2(\Omega)]^k$ el espacio de Banach con norma:

$$\|u\|_X = \sup\{\|u_j\| : j = 1, \dots, k\}$$

con $u := (u_j)_{j=1}^k \in X$ y $\|u_j\| := \left(\int_{\Omega} |u_j(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ para todo $j = 1, \dots, k$.

Para $j = 1, \dots, k$, se define A_j como el operador $A_j : \text{Dom}(A_j) \subseteq L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ tal que:

- $A_j u_j = m \Delta u_j$, $m > 0$.
- $u_j \in \text{Dom}(A_j) = \left\{ u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}$.

y que genera a $S_j = \{S_j(t)\}_{t \geq 0}$ el C_0 semigrupo de contracciones en $L^2(\Omega)$. Además, A_j es auto-adjunto y es disipativo en $L^2(\Omega)$ (Teorema 4.2.2, [Vrabie, 2003], p. 84), luego $S = (S_j)_{j=1}^k$ es un C_0 semigrupo de contracciones en X con generador infinitesimal $A = (A_j)_{j=1}^k$ el cual es auto-adjunto y disipativo en X , en efecto: sea $x \in \text{Dom}(A_j)$:

$$\langle A_j x, x \rangle = d_j \int_{\Omega} \Delta x \, x \, dx = d_j \int_{\partial\Omega} x \frac{\partial x}{\partial \eta} dS - d_j \int_{\Omega} (\nabla x)^2 dx = -d_j \int_{\Omega} (\nabla x)^2 dx \leq 0$$

5.2.1. Existencia y Unicidad Sistema (5.6)

Sea:

$$G_1(t, a, u) = -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 u_2 + \gamma_b u_2$$

$$G_2(t, a, u) = \left(\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 - \gamma_b \right) u_2$$

y $D = \left\{ w \in H^2(\Omega_1) : \frac{\partial w}{\partial \eta_1} = 0 \text{ en } \partial\Omega_1 \right\}$, con $u : \Omega_1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $u := [u_1, u_2]^t$, luego (5.6) se reescribe como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_1 = d_u \Delta u_1 + G_1(t, a, u_1, u_2) & , \text{ en } \Omega_{1,T} \\ \partial_t u_2 = d_u \Delta u_2 + G_2(t, a, u_1, u_2) & , \text{ en } \Omega_{1,T} \\ \nabla u_1 \cdot \eta_1 = \nabla u_2 \cdot \eta_1 = 0 & , \text{ en } \sum_{1,T} \\ u_1(x, 0) = u_1^0(x), u_2(x, 0) = u_2^0(x) & , \text{ en } \Omega_1 \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Teorema 5.2.1: Para $a \in Q$ fijo, si $u_j^0(x) \geq 0$ y $u_j^0(x) \in D \cap L^\infty(\Omega_1)$ ($j = 1, 2$), entonces el sistema (5.9) tiene solución única u_j , es no negativa, existe una constante $C > 0$ que sólo depende de u_j^0 y es independiente de a tal que: $0 \leq u_j(x, t) \leq C$ c.t.p en $\Omega_1 \times [0, T]$. Además:

$$u_j \in L^\infty(\Omega_{1,T}) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega_1)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega_1)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega_1)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega_1))$$

con $j = 1, 2$.

Demostración:

Considere la configuración presentada con $k = 2$, $m = d_u$ y $\Omega = \Omega_1$ ($X = [L^2(\Omega_1)]^2$). Sea $a \in Q$ fijo y $u_j^0(x) \geq 0 \in \text{Dom}(A_j) \cap L^\infty(\Omega_1)$ para $j = 1, 2$.

Se define $f(t, u) = G(t, a, u)$, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $f = (f)_{j=1}^2$, luego (5.9) queda como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_1 = d_u \Delta u_1 + f_1(t, u_1, u_2) & , \text{ en } \Omega_{1,T} \\ \partial_t u_2 = d_u \Delta u_2 + f_2(t, u_1, u_2) & , \text{ en } \Omega_{1,T} \\ \nabla u_1 \cdot \eta_1 = \nabla u_2 \cdot \eta_1 = 0 & , \text{ en } \sum_{1,T} \\ u_1(x, 0) = u_1^0(x), u_2(x, 0) = u_2^0(x) & , \text{ en } \Omega_1 \end{array} \right. \quad (5.10)$$

El problema (5.10) puede ser tratado como una ecuación diferencial ordinaria abstracta no homogénea de la forma [Martin and Smith, 1990]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) = A\mathbf{u}(t) + F(t, \mathbf{u}(t)) \quad , \quad t \in [0, T] \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad , \quad \mathbf{u}_0 \in X \end{array} \right. \quad (\text{P.1})$$

donde $\mathbf{u}_0 = [u_1^0(x), u_2^0(x)]^t$, $\mathbf{u}(t) \in X$ es tal que $[\mathbf{u}(t)](x) := [u_1(x, t), u_2(x, t)]^t$ para $(x, t) \in \Omega_1 \times [0, T]$ y $F := (F_j)_{j=1}^2$ es una función $F : [0, T] \times X \longrightarrow X$ definida como $[F_j(t, \varphi)](x) := f_j(t, \varphi(x))$ para $(t, \varphi) \in [0, T] \times X$ y $x \in \Omega_1$.

El operador A es un generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones en X , F es continua y medible en t para $t \in [0, T]$ pero no es Lipschitz continua en u uniformemente con respecto a t , sin embargo, truncando la función F se obtiene en una función Lipschitz continua.

Se define el problema truncado asociado a (P.1) como:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{u}^N(t) = A\mathbf{u}^N(t) + F^N(t, \mathbf{u}^N(t)) & , t \in [0, T] \\ \mathbf{u}^N(0) = \mathbf{u}_0 & , \mathbf{u}_0 \in X \end{cases} \quad (\text{PT.1})$$

donde $N > 0$ es suficientemente grande, $[\mathbf{u}^N(t)](x) := [u_1^N(x, t), u_2^N(x, t)]^t$ para $(x, t) \in \Omega_1 \times [0, T]$ y $F^N := (F_j^N)_{j=1}^2$ es una función $F^N : [0, T] \times X \rightarrow X$ tal que $[F_j^N(t, \varphi)](x) := f_j^N(t, \varphi(x))$ para $(t, \varphi) \in [0, T] \times X$ y $x \in \Omega_1$, con $f_j^N(t, \varphi(x))$ ($j = 1, 2$) definida como:

- si $|u_1| \leq N$ entonces u_1 no sufre cambio alguno en f_j .
- si $u_1 > N$ entonces u_1 se sustituye por N en f_j .
- si $u_1 < -N$ entonces u_1 se sustituye por $-N$ en f_j .

Si se procede de forma similar con u_2 entonces $F^N(t, u)$ es Lipschitz continua en $u \in X$ uniformemente con respecto a $t \in [0, T]$ (anexo B.1.1), en consecuencia por Teorema 5.B el problema (PT.1) admite una única solución fuerte $\mathbf{u}^N \in W^{1,2}([0, T]; X)$, así para $j = 1, 2$:

$$\begin{cases} u_j^N(t) \in C([0, T]; L^2(\Omega_1)) \\ u_j^N(t) \in \text{Dom}(A_j) \text{ c.t.p en } (0, T) \text{ y por tanto } u_j^N(t) \in L^2(0, T; H^2(\Omega_1)) \\ \frac{d}{dt} u_j^N(t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega_1)) \end{cases} \quad (5.11)$$

Además, $u_j^N(t) \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_1))$, en efecto, sea $t \in [0, T]$, de (PT.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega_1} |\partial_s u_1^N(x, s)|^2 dx ds - 2d_u \int_0^t \int_{\Omega_1} \partial_s u_1^N(x, s) \Delta u_1^N(x, s) dx ds \\ + d_u^2 \int_0^t \int_{\Omega_1} |\Delta u_1^N(x, s)| dx ds = \int_0^t \int_{\Omega_1} |f_1^N(s, u_1^N(x, s), u_2^N(x, s))|^2 dx ds \end{aligned}$$

por identidad de Green:

$$-2d_u \int_0^t \int_{\Omega_1} \partial_s u_1^N(x, s) \Delta u_1^N(x, s) dx ds = d_u \int_{\Omega_1} |\nabla u_1^N(x, t)|^2 dx - d_u \int_{\Omega_1} |\nabla u_1^N(x, 0)|^2 dx$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega_1} |\partial_s u_1^N(x, s)|^2 dx ds + d_u \int_{\Omega_1} |\nabla u_1^N(x, t)|^2 dx - d_u \int_{\Omega_1} |\nabla u_1^N(x, 0)|^2 dx \\ & \quad + d_u^2 \int_0^t \int_{\Omega_1} |\Delta u_1^N(x, s)| dx ds = \int_0^t \int_{\Omega_1} |f_1^N(s, u_1^N(x, s), u_2^N(x, s))|^2 dx ds \end{aligned}$$

reordenando:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega_1} |f_1^N(s, u_1^N(x, s), u_2^N(x, s))|^2 dx ds + d_u \int_{\Omega_1} |\nabla u_1^0(x)|^2 dx \\ & = \int_0^t \int_{\Omega_1} |\partial_s u_1^N(x, s)|^2 dx ds + d_u \int_{\Omega_1} |\nabla u_1^N(x, t)|^2 dx + d_u^2 \int_0^t \int_{\Omega_1} |\Delta u_1^N(x, s)| dx ds \end{aligned} \tag{5.12}$$

Por otro lado, por la Lipschitz continuidad de $F^N(t, u)$ en $u \in X$ se obtiene:

$$\|f_1^N(s, u_1^N, u_2^N)\|_{L^2(\Omega_1)} = \|f_1^N(s, u_1^N, u_2^N) - f_1^N(s, 0, 0)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq L\|u_1^N\|_{L^2(\Omega_1)} + L\|u_2^N\|_{L^2(\Omega_1)}$$

donde $L > 0$ es la constante de Lipschitz continuidad, de aquí:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega_1} |f_1^N(s, u_1^N(x, s), u_2^N(x, s))|^2 dx ds \leq \\ & \leq L \left(\int_0^t \int_{\Omega_1} |u_1^N(x, s)|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega_1} |u_2^N(x, s)|^2 dx ds \right) \end{aligned}$$

y como $u_j^N(t) \in L^2(0, T; H^2(\Omega_1))$ ($j = 1, 2$ por (5.11)) y $u_1^0(x) \in H^2(\Omega_1)$ entonces:

$$\int_0^t \int_{\Omega_1} |f_1^N(s, u_1^N(x, s), u_2^N(x, s))|^2 dx ds + d_u \int_{\Omega_1} |\nabla u_1^0(x)|^2 dx < \infty$$

por tanto, de (5.12) se obtiene:

$$\int_0^t \int_{\Omega_1} |\partial_s u_1^N(x, s)|^2 dx ds + d_u \int_{\Omega_1} |\nabla u_1^N(x, t)|^2 dx + d_u^2 \int_0^t \int_{\Omega_1} |\Delta u_1^N(x, s)| dx ds < \infty$$

y por (5.11) se concluye que $\int_{\Omega_1} |\nabla u_1^N(x, t)|^2 dx < \infty$, es decir, $u_1^N \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_1))$. Por el mismo procedimiento se prueba que $u_2^N \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_1))$.

Por otra parte, $u_j^N(x, t)$ es acotada en Q , donde $Q := \Omega_1 \times (0, T)$ (por conveniencia de notación). En efecto, sea:

$$M = \max\{\|f_j^N\|_{L^\infty(Q)}, \|u_j^0\|_{L^\infty(\Omega_1)} : j = 1, 2\} > 0$$

M está bien definida pues f_j^N está acotada por definición, luego $u_1^N(x, t)$ satisface:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u_1^N(t) = A_1u_1^N(t) + F_1^N(t, u_1^N(t), u_2^N(t)) & , t \in [0, T] \\ u_1^N(0) = u_1^0 \end{cases}$$

y por tanto $U_1^N(x, t) = u_1^N(x, t) - Mt - \|u_1^0\|_{L^\infty(\Omega_1)}$ satisface el problema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U_1^N(t) = A_1U_1^N(t) + F_1^N(t, u_1^N(t), u_2^N(t)) - M & , t \in [0, T] \\ U_1^N(0) = u_1^0 - \|u_1^0\|_{L^\infty(\Omega_1)} \end{cases}$$

luego por Teorema 5.B la solución existe y:

$$U_1^N(t) = e^{A_1t} (u_1^0 - \|u_1^0\|_{L^\infty(\Omega_1)}) + \int_0^t e^{A_1(t-r)} (F_1^N(r, u_1^N(r), u_2^N(r)) - M) dr$$

Dado que $u_1^0 - \|u_1^0\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq 0$ y $F_1^N(r, u_1^N(r), u_2^N(r)) - M \leq 0$ entonces $U_1^N(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, T]$, es decir, $U_1^N(x, t) \leq 0$ para todo $(x, t) \in Q$ y consecuencia $u_1^N(x, t) \leq Mt + \|u_1^0\|_{L^\infty(\Omega_1)}$ para todo $(x, t) \in Q$. De la misma manera se prueba que $W_1^N(x, t) = u_1^N(x, t) + Mt + \|u_1^0\|_{L^\infty(\Omega_1)} \geq 0$ en Q y por tanto $u_1^N(x, t) \geq -Mt - \|u_1^0\|_{L^\infty(\Omega_1)}$ para todo $(x, t) \in Q$, por consiguiente:

$$(\forall (x, t) \in Q) |u_1^N(x, t)| \leq Mt + \|u_1^0\|_{L^\infty(\Omega_1)}$$

Procediendo de forma análoga se obtiene que:

$$(\forall (x, t) \in Q) |u_2^N(x, t)| \leq Mt + \|u_2^0\|_{L^\infty(\Omega_1)}$$

así:

$$(\forall (x, t) \in Q) |u_j^N(x, t)| \leq Mt + \|u_j^0\|_{L^\infty(\Omega_1)} \quad (5.13)$$

donde M sólo depende de N , de esta forma se tiene que $u_j^N(x, t) \in L^\infty(Q)$ ($j = 1, 2$).

Además, $u_j^N(x, t)$ es no negativa en Q . $u_2^N(x, t)$ verifica el problema:

$$\begin{cases} \partial_t u_2^N = d_u \Delta u_2^N + f_2^N(t, u_1^N, u_2^N) & , \text{ en } Q \\ \nabla u_2^N \cdot \eta_1 = 0 & , \text{ en } \sum_{1, T} \\ u_2^N(x, 0) = u_2^0(x) & , \text{ en } \Omega_1 \end{cases} \quad (5.14)$$

Se define $(u_2^N)^+(x, t) = \max\{u_2^N(x, t), 0\}$ y $(u_2^N)^-(x, t) = -\min\{u_2^N(x, t), 0\}$, luego

$u_2^N = (u_2^N)^+ - (u_2^N)^-$ y por tanto si $(u_2^N)^-(x, t) = 0$ en Q entonces $u_2^N(x, t) \geq 0$ en Q .

Sea $t \in [0, T]$, multiplicando (5.14) por $(u_2^N)^-$ se obtiene:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} |(u_2^N)^-|^2 = d_u \Delta u_2^N (u_2^N)^- + f_2^N(t, u_1^N, u_2^N) (u_2^N)^-$$

integrando sobre Ω_1 y aplicando integración por partes:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \frac{d}{ds} |(u_2^N)^-|^2 dx + d_u \int_{\Omega_1} |\nabla (u_2^N)^-|^2 dx = \int_{\Omega_1} f_2^N(t, u_1^N, u_2^N) (u_2^N)^- dx$$

aquí $f_2^N(t, u_1^N, u_2^N) = \left(\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1^N - \gamma_b \right) u_2^N$ y por (5.13): $f_2^N(t, u_1^N, u_2^N) \leq c_1^N u_2^N$, luego:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \frac{d}{ds} |(u_2^N)^-|^2 dx + d_u \int_{\Omega_1} |\nabla (u_2^N)^-|^2 dx \leq c_1^N \int_{\Omega_1} |(u_2^N)^-|^2 dx$$

como el segundo término del lado izquierdo es positivo entonces:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \frac{d}{ds} |(u_2^N)^-|^2 dx \leq c_1^N \int_{\Omega_1} |(u_2^N)^-|^2 dx$$

e integrando sobre $[0, t]$:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |(u_2^N)^-|^2 dx \leq c_1^N \int_0^t \int_{\Omega_1} |(u_2^N)^-|^2 dx ds$$

aplicando la desigualdad A.1.5:

$$\int_{\Omega_1} |(u_2^N)^-(x, t)|^2 dx \leq 0$$

y por tanto $(u_2^N)^-(x, t) = 0$, es decir, $u_2^N(x, t) \geq 0$ para todo $(x, t) \in Q$.

Para probar la no negatividad de $u_1^N(x, t)$ considere el problema auxiliar:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u}_1^N = d_u \Delta \tilde{u}_1^N + \tilde{f}_1^N(t, \tilde{u}_1^N, u_2^N) & , \text{ en } Q \\ \nabla \tilde{u}_1^N \cdot \eta_1 = 0 & , \text{ en } \sum_{1,T} \\ \tilde{u}_1^N(x, 0) = u_1^0(x) & , \text{ en } \Omega_1 \end{cases} \quad (5.15)$$

donde $\tilde{f}_1^N(t, \tilde{u}_1^N, u_2^N) = -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_2^N \tilde{u}_1^N$ es Lipschitz continua en X uniformemente con respecto a $t \in [0, T]$ y $\tilde{f}_1^N \leq f_1^N$ (ver anexo B.1.2) y puesto que $u_2^N(x, t) \in L^\infty(Q)$, se tiene:

$\tilde{f}_1^N \leq c_2^N \tilde{u}_1^N$ en Q .

Por Teorema 5.B la solución del problema (5.15) existe y procediendo como en el caso anterior se obtiene:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |(\tilde{u}_1^N)^-|^2 dx \leq c_2^N \int_0^t \int_{\Omega_1} |(\tilde{u}_1^N)^-|^2 dx ds$$

aplicando la desigualdad A.1.5:

$$\int_{\Omega_1} |(\tilde{u}_1^N)^-(x, t)|^2 dx \leq 0$$

y por tanto $(\tilde{u}_1^N)^-(x, t) = 0$, es decir, $\tilde{u}_1^N(x, t) \geq 0$ para todo $(x, t) \in Q$. Luego, por el principio de comparación de ecuaciones parabólicas:

$$u_1^N(x, t) \geq \tilde{u}_1^N(x, t) \geq 0, \text{ para todo } (x, t) \in Q.$$

Por otra parte, se definió:

$$M = \max\{\|f_j^N\|_{L^\infty(Q)}, \|u_j^0\|_{L^\infty(\Omega_1)} : j = 1, 2\}$$

y si se escoge $N > 2 \max\{\|u_j^0\|_{L^\infty(\Omega_1)} : j = 1, 2\}$ entonces existe $\theta \in (0, T)$ tal que:

$$M\theta + \|u_j^0\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq \frac{N}{2}, \quad j = 1, 2$$

y por (5.13): $|u_j^N(x, t)| \leq N$ en $(x, t) \in \Omega_1 \times (0, \theta)$ ($j = 1, 2$), por consiguiente $F^N = F$ para todo $t \in (0, \theta)$ y por tanto $u_1^N(x, t)$ y $u_2^N(x, t)$ es solución del problema (5.10) en $\Omega_1 \times (0, \theta)$.

Por último, para probar la existencia de la solución global en Q , se verificará que la solución local está uniformemente acotada en $\Omega_1 \times (0, \theta)$. El problema (5.10) tiene solución en $\Omega_1 \times (0, \theta)$, luego sumando la primera y segunda ecuación de (5.10) se obtiene el problema de difusión:

$$\begin{cases} \partial_t(u_1^N + u_2^N) = d_u \Delta(u_1^N + u_2^N) & , \text{ en } \Omega_1 \times (0, \theta) \\ \nabla(u_1^N + u_2^N) \cdot \eta_1 = 0 & , \text{ en } \partial\Omega_1 \times (0, \theta) \\ u_1(x, 0) + u_2(x, 0) = u_1^0(x) + u_2^0(x) & , \text{ en } \Omega_1 \end{cases}$$

como $u_1^0(x) + u_2^0(x) \geq 0$ y $u_1^0(x) + u_2^0(x) \in L^\infty(\Omega_1)$ entonces la solución del problema de difusión existe, es $u_1^N(x, t) + u_2^N(x, t) \geq 0$ en $\Omega_1 \times (0, \theta)$ y $u_1^N(x, t) + u_2^N(x, t) \in L^\infty(\Omega_1 \times (0, \theta))$, es decir, existe $C > 0$ que depende de $u_1^0 + u_2^0$ y es independiente de la variable de control a tal que:

$$0 \leq u_1^N(x, t) + u_2^N(x, t) \leq C \text{ c.t.p en } \Omega_1 \times (0, \theta)$$

Puesto que $u_1^N(x, t) \geq 0$ y $u_2^N(x, t) \geq 0$ en $\Omega_1 \times (0, \theta)$ entonces:

$$0 \leq u_j^N(x, t) \leq C \text{ c.t.p en } \Omega_1 \times (0, \theta)$$

esto es, $u_1^N(x, t), u_2^N(x, t) \in L^\infty(\Omega_1 \times (0, \theta))$, en consecuencia la solución de (5.10) está definida en todo $\Omega_1 \times [0, T]$, así (5.9) tiene solución $u_j := u_j^N$ ($j = 1, 2$) y es tal que:

$$u_j^N \in L^\infty(\Omega_{1,T}) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega_1)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega_1)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega_1)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega_1))$$

Teorema 5.2.2: La solución de (5.9) es única con respecto a $a \in Q$.

Demostración:

Considere las condiciones del teorema anterior y $a_1 \neq a_2 \in Q$. Sea $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^t \in X$ la solución (P.1) con a_1 y u_0 , y sea $\mathbf{v} = [v_1, v_2]^t \in X$ la solución de (P.1) con a_2 y v_0 , luego:

$$\mathbf{u}(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-r)F(r, a_1, \mathbf{u}(r))dr \quad , \quad t \in [0, T].$$

$$\mathbf{v}(t) = S(t)v_0 + \int_0^t S(t-r)F(r, a_2, \mathbf{v}(r))dr \quad , \quad t \in [0, T].$$

Sea $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_X &\leq \|S(t)(u_0 - v_0)\|_X + \int_0^t \|S(t-r) [F(r, a_1, \mathbf{u}(r)) - F(r, a_2, \mathbf{v}(r))]\|_X dr \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|u_0 - v_0\|_X + \int_0^t \|S(t-r)\|_{\mathcal{L}(X)} \|F(r, a_1, \mathbf{u}(r)) - F(r, a_2, \mathbf{v}(r))\|_X dr \end{aligned}$$

puesto que S es un C_0 semigrupo de contracciones en X entonces $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ para $t \in [0, T]$ (Definición 5.1.16), en consecuencia:

$$\leq \|u_0 - v_0\|_X + \int_0^t \|F(r, a_1, \mathbf{u}(r)) - F(r, a_2, \mathbf{v}(r))\|_X dr$$

por tanto:

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_X \leq \|u_0 - v_0\|_X + \int_0^t \|F(r, a_1, \mathbf{u}(r)) - F(r, a_2, \mathbf{v}(r))\|_X dr$$

por B.1.3:

$$\leq \|u_0 - v_0\|_X + \int_0^t L \|\mathbf{u}(r) - \mathbf{v}(r)\|_X dr + L \int_0^t |\beta_{bb}(r, a_2) - \beta_{bb}(r, a_1)| dr$$

reordenando:

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_X \leq \|u_0 - v_0\|_X + L \int_0^t |\beta_{bb}(r, a_2) - \beta_{bb}(r, a_1)| dr + \int_0^t L \|\mathbf{u}(r) - \mathbf{v}(r)\|_X dr$$

por desigualdad A.1.5 considerando $h(t) = \|u_0 - v_0\|_X + L \int_0^t |\beta_{bb}(r, a_2) - \beta_{bb}(r, a_1)| dr$ y $\kappa(t) = L > 0$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_X &\leq \|u_0 - v_0\|_X + \int_0^t |\beta_{bb}(r, a_2) - \beta_{bb}(r, a_1)| dr \\ &\quad + \int_0^t \left(\|u_0 - v_0\|_X + \int_0^s |\beta_{bb}(r, a_2) - \beta_{bb}(r, a_1)| dr \right) L e^{L(t-s)} ds \end{aligned}$$

luego $\|u_0 - v_0\|_X = 0$ si $u_0 = v_0$ y $|\beta_{bb}(r, a_2) - \beta_{bb}(r, a_1)| = 0$ si $a_1 = a_2$, por tanto se obtiene la unicidad de la solución con respecto a $a \in Q$. \square

5.2.2. Existencia y Unicidad Sistema (5.7)

Por Teorema 5.2.2, para $a \in Q$ existe un único u_2 en Ω_1 solución de (5.9). Se define u_2 en Ω_2 como sigue:

$$\bar{u}_2(x, t) = \begin{cases} u_2(x, t) & , (x, t) \in \tilde{\Omega} \times [0, T] \\ 0 & , (x, t) \in (\Omega_2 \setminus \tilde{\Omega}) \times [0, T] \end{cases}$$

con $\tilde{\Omega} = \Omega_1 \cap \Omega_2$, por tanto para $a \in Q$, $\bar{u}_2 \in \Omega_2$ es único, así por definición de \bar{u}_2 y por Teorema 5.2.1:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 &\in L^\infty(\Omega_{2,T}) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega_2)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega_2)) \\ &\quad \text{y} \\ \bar{u}_2 &\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega_2)) \end{aligned} \tag{5.16}$$

Por otra parte, sea:

$$\begin{aligned}
 G_1(t, a, v) &= \left(-\frac{\beta_{hh}}{N_2}v_2 - \frac{\beta_{bh}}{N_2}\bar{u}_2 \right) v_1 \\
 G_2(t, a, v) &= \left(\frac{\beta_{hh}}{N_2}v_1 - \gamma_h \right) v_2 + \frac{\beta_{bh}}{N_2}v_1\bar{u}_2 \\
 G_3(t, a, v) &= \gamma_h v_2
 \end{aligned}$$

y $D = \left\{ w \in H^2(\Omega_2) : \frac{\partial w}{\partial \eta_2} = 0 \text{ en } \partial\Omega_2 \right\}$ con $v : \Omega_2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $v := [v_1, v_2, v_3]^t$, luego (5.7) se reescribe como:

$$\begin{cases}
 \partial_t v_1 = d_v \Delta v_1 + G_1(t, a, v_1, v_2, v_3) & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\
 \partial_t v_2 = d_v \Delta v_2 + G_2(t, a, v_1, v_2, v_3) & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\
 \partial_t v_3 = d_v \Delta v_3 + G_3(t, a, v_1, v_2, v_3) & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\
 \nabla v_j \cdot \eta_2 = 0 & , \text{ en } \sum_{2,T} , \text{ para } j = 1, 2, 3. \\
 v_i(x, 0) = v_j^0(x) & , \text{ en } \Omega_2 , \text{ para } j = 1, 2, 3.
 \end{cases} \quad (5.17)$$

Teorema 5.2.3: Para $a \in Q$ fijo, si $v_j^0(x) \geq 0$ y $v_j^0(x) \in D \cap L^\infty(\Omega_2)$ para $j = 1, 2, 3$, entonces el sistema (5.17) tiene solución única v_j , es no negativa, existe una constante $C > 0$ que sólo depende de v_j^0 y es independiente de a tal que: $0 \leq v_j(x, t) \leq C$ c.t.p en $\Omega_1 \times [0, T]$. Además:

$$v_j \in L^\infty(\Omega_{2,T}) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega_2)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega_2)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega_2))$$

con $j = 1, 2, 3$.

Demostración:

Considere la configuración presentada con $k = 3$, $m = d_v$ y $\Omega = \Omega_2$ ($X = [L^2(\Omega_2)]^3$). Sea $a \in Q$ fijo y $v_j^0(x) \geq 0 \in \text{Dom}(A_j) \cap L^\infty(\Omega_2)$ para $j = 1, 2, 3$.

Se define $f(t, u) = G(t, a, u)$, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $f = (f)_{j=1}^3$, luego (5.17) queda como:

$$\begin{cases}
 \partial_t v_1 = d_v \Delta v_1 + f_1(t, v_1, v_2, v_3) & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\
 \partial_t v_2 = d_v \Delta v_2 + f_2(t, v_1, v_2, v_3) & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\
 \partial_t v_3 = d_v \Delta v_3 + f_3(t, v_1, v_2, v_3) & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\
 \nabla v_j \cdot \eta_2 = 0 & , \text{ en } \sum_{2,T} , \text{ para } j = 1, 2, 3. \\
 v_j(x, 0) = v_j^0(x) & , \text{ en } \Omega_2 , \text{ para } j = 1, 2, 3.
 \end{cases} \quad (5.18)$$

El problema (5.18) puede ser tratado como una ecuación diferencial ordinaria abstracta no homogénea de la forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = A\mathbf{v}(t) + F(t, \mathbf{v}(t)) & , t \in [0, T] \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 & , \mathbf{v}_0 \in X \end{cases} \quad (\text{P.2})$$

donde $\mathbf{v}_0 = [v_1^0(x), v_2^0(x), v_3^0(x)]^t$, $\mathbf{v}(t) \in X$ es tal que $[\mathbf{v}(t)](x) := [v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t)]^t$ para $(x, t) \in \Omega_2 \times [0, T]$ y $F := (F_j)_{j=1}^3$ es una función $F : [0, T] \times X \rightarrow X$ definida como $[F_j(t, \varphi)](x) := f_j(t, \varphi(x))$ para $(t, \varphi) \in [0, T] \times X$ y $x \in \Omega_2$.

El operador A es un generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones en X , F es continua y medible en t para $t \in [0, T]$ pero no es Lipschitz continua en u uniformemente en t , sin embargo truncando la función se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{v}^N(t) = A\mathbf{v}^N(t) + F^N(t, \mathbf{v}^N(t)) & , t \in [0, T] \\ \mathbf{v}^N(0) = \mathbf{v}_0 & , \mathbf{v}_0 \in X \end{cases} \quad (\text{PT.2})$$

donde $N > 0$ es suficientemente grande, $[\mathbf{v}^N(t)](x) := [v_1^N(x, t), v_2^N(x, t), v_3^N(x, t)]^t$ para $(x, t) \in \Omega_2 \times [0, T]$ y $F^N := (F_j^N)_{j=1}^3$ es una función $F^N : [0, T] \times X \rightarrow X$ tal que $[F_j^N(t, \varphi)](x) := f_j^N(t, \varphi(x))$ para $(t, \varphi) \in [0, T] \times X$ y $x \in \Omega_2$, con $f_j^N(t, \varphi(x))$ ($j = 1, 2, 3$) definida como:

- si $|v_1| \leq N$ entonces v_1 no sufre cambio alguno en f_j .
- si $v_1 > N$ entonces v_1 se sustituye por N en f_j .
- si $v_1 < -N$ entonces v_1 se sustituye por $-N$ en f_j .

Si se procede de forma similar con v_2 y v_3 entonces $F^N(t, u)$ es Lipschitz continua en $u \in X$ uniformemente con respecto a $t \in [0, T]$ (ver anexo B.1.4), en consecuencia el problema (PT.2) admite una única solución fuerte $\mathbf{v}^N \in W^{1,2}([0, T]; X)$ (Teorema 5.B). Así, para $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} v_j^N(t) \in C([0, T]; L^2(\Omega_2)) \\ v_j^N(t) \in \text{Dom}(A_j) \text{ c.t.p en } [0, T] \text{ y por tanto } v_j^N(t) \in L^2(0, T; H^2(\Omega_2)) \\ \frac{d}{dt} v_j^N(t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega_2)) \end{cases} \quad (5.19)$$

Además, $v_j^N(t) \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2))$, en efecto, sea $t \in [0, T]$, de (PT.2), procediendo como en el Teorema 5.2.1 y considerando (5.19) se concluye que:

$$\int_{\Omega_2} |\nabla v_1^N(x, t)|^2 dx < \infty$$

por tanto $v_1^N \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2))$ y por el mismo procedimiento se prueba que $v_j^N \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2))$ ($j = 2, 3$).

Por otra parte, $v_j^N(x, t)$ es acotada en Q donde $Q := \Omega_2 \times (0, T)$ (por conveniencia de notación). En efecto, sea:

$$M = \text{máx}\{\|f_j^N\|_{L^\infty(Q)}, \|v_j^0\|_{L^\infty(\Omega_1)} : j = 1, 2, 3\} > 0$$

M está bien definida pues f_j^N está acotada por definición y de forma análoga al Teorema 6.3.1 se concluye que $v_j^N(x, t)$ es acotada en Q , por tanto:

$$(\forall (x, t) \in Q) |v_j^N(x, t)| \leq Mt + \|v_j^0\|_{L^\infty(\Omega_2)} \quad (5.20)$$

donde M sólo depende de N ($v_j^N(x, t) \in L^\infty(Q)$, $j = 1, 2, 3$).

Además, $v_j^N(x, t)$ es no negativa en Q . $v_1^N(x, t)$ verifica el problema:

$$\begin{cases} \partial_t v_1^N = d_v \Delta v_1^N + f_1^N(t, v_1^N, v_2^N, v_3^N) & , \text{ en } Q \\ \nabla v_1^N \cdot \eta_2 = 0 & , \text{ en } \sum_{2, T} \\ v_1^N(x, 0) = v_1^0(x) & , \text{ en } \Omega_2 \end{cases} \quad (5.21)$$

donde $f_1^N(t, v_1^N, v_2^N, v_3^N) = \left(-\frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2^N - \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2 \right) v_1^N$.

Como $v_2^N, \bar{u}_2 \in L^\infty(Q)$ (por 5.20 y 5.16 respectivamente) entonces $f_1^N(t, v_1^N, v_2^N, v_3^N) \leq c_1^N v_1^N$.

Sea $t \in [0, T]$, multiplicando (5.21) por $(v_1^N)^-$ y calculando como en el Teorema 5.2.1 se concluye que:

$$\int_{\Omega_2} |(v_1^N)^-(x, t)|^2 dx \leq 0$$

es decir, $v_1^N(x, t) \geq 0$ para todo $(x, t) \in Q$.

Para probar la no negatividad de $v_2^N(x, t)$ considere el problema auxiliar:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{v}_2^N = d_v \Delta \tilde{v}_2^N + \tilde{f}_2^N(t, v_1^N, \tilde{v}_2^N, v_3^N) & , \text{ en } Q \\ \nabla \tilde{v}_2^N \cdot \eta_2 = 0 & , \text{ en } \sum_{2,T} \\ \tilde{v}_2^N(x, 0) = v_2^0(x) & , \text{ en } \Omega_2 \end{cases} \quad (5.22)$$

donde $\tilde{f}_2^N(t, v_1^N, \tilde{v}_2^N, v_3^N) = \left(\frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1^N - \gamma_h \right) \tilde{v}_2^N$ y v_1^N, v_3^N son soluciones de (PT.2). \tilde{f}_2^N es Lipschitz continua en X uniformemente con respecto a $t \in [0, T]$ y como v_1^N es no negativa entonces $\tilde{f}_2^N \leq f_2^N$ (ver anexo B.1.5), además por (5.20): $\tilde{f}_2^N \leq c_2^N \tilde{v}_2^N$ en Q .

Por Teorema 5.B, la solución de (5.22) existe y procediendo como en el caso anterior se obtiene $(\tilde{v}_2^N)^-(x, t) = 0$, es decir, $\tilde{v}_2^N(x, t) \geq 0$ para todo $(x, t) \in Q$, luego por el principio de comparación de ecuaciones parabólicas se obtiene:

$$v_2^N(x, t) \geq \tilde{v}_2^N(x, t) \geq 0 \quad , \text{ para todo } (x, t) \in Q.$$

Por otra parte, para probar la no negatividad de $v_3^N(x, t)$ considere el problema auxiliar:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{v}_3^N = d_v \Delta \tilde{v}_3^N & , \text{ en } Q \\ \nabla \tilde{v}_3^N \cdot \eta_2 = 0 & , \text{ en } \sum_{2,T} \\ \tilde{v}_3^N(x, 0) = v_3^0(x) & , \text{ en } \Omega_2 \end{cases}$$

cuya solución \tilde{v}_3^N existe y es no negativa en Q , luego como $0 \leq f_3^N := \gamma_h v_2^N$ (v_2^N es solución de (PT.2) y es no negativa) entonces por el principio de comparación de ecuaciones parabólicas:

$$v_3^N(x, t) \geq \tilde{v}_3^N(x, t) \geq 0 \quad , \text{ para todo } (x, t) \in Q.$$

Ahora, si se escoge $N > 2 \max\{\|v_j^0\|_{L^\infty(\Omega_2)} : j = 1, 2, 3\}$ entonces la terna $v_1^N(x, t)$, $v_2^N(x, t)$ y $v_3^N(x, t)$ es solución del problema (5.18) en $\Omega_2 \times (0, \theta)$.

Finalmente, sumando la primera, segunda y tercera ecuación de (5.18) se obtiene el problema de difusión:

$$\begin{cases} \partial_t (v_1^N + v_2^N + v_3^N) = d_v \Delta (v_1^N + v_2^N + v_3^N) & , \text{ en } \Omega_2 \times (0, \theta) \\ \nabla (v_1^N + v_2^N + v_3^N) \cdot \eta_2 = 0 & , \text{ en } \partial\Omega_2 \times (0, \theta) \\ v_1(x, 0) + v_2(x, 0) + v_3(x, 0) = v_1^0(x) + v_2^0(x) + v_3^0(x) & , \text{ en } \Omega_2 \end{cases}$$

dado que $v_1^0(x) + v_2^0(x) + v_3^0(x) \geq 0$ y $v_1^0(x) + v_2^0(x) + v_3^0(x) \in L^\infty(\Omega_2)$ entonces la solución del problema de difusión es $v_1^N(x, t) + v_2^N(x, t) + v_3^N(x, t) \in L^\infty(\Omega_2 \times (0, \theta))$ y $v_1^N(x, t) + v_2^N(x, t) + v_3^N(x, t) \geq 0$, es decir, existe $C > 0$ que depende de $v_1^0 + v_2^0 + v_3^0$ y es independiente de la variable de control a tal que:

$$0 \leq v_1^N(x, t) + v_2^N(x, t) + v_3^N(x, t) \leq C \text{ c.t.p en } \Omega_1 \times (0, \theta)$$

y puesto que para $j = 1, 2, 3$: $v_j^N(x, t) \geq 0$ en $\Omega_1 \times (0, \theta)$ entonces:

$$0 \leq v_j^N(x, t) \leq C \text{ c.t.p en } \Omega_1 \times (0, \theta)$$

esto es, $v_j^N(x, t) \in L^\infty(\Omega_1 \times (0, \theta))$, en consecuencia la solución de (5.18) está definida en todo $\Omega_2 \times [0, T]$, así (5.17) tiene solución $v_j := v_j^N$ ($j = 1, 2, 3$) y es tal que:

$$v_j^N \in L^\infty(\Omega_{2,T}) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega_2)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega_2)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega_2))$$

Teorema 5.2.4: La solución de (5.17) es única con respecto a $a \in Q$.

Demostración:

Sean las condiciones del Teorema 5.2.3.

Sea $a_1, a_2 \in Q$ ($a_1 \neq a_2$) y $\bar{u}_2^j \in L^2(\Omega_2)$ asociado a $a_j \in Q$ ($j = 1, 2$).

Sea además $\mathbf{v} = (v_i)_{i=1}^3$ solución del problema (P.2) con v_0 y a_1 , y $\mathbf{w} = (w_i)_{i=1}^3$ solución del problema (P.2) con w_0 y a_2 , luego:

$$\mathbf{v}(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-r)F(r, a_1, \mathbf{v}(r))dr \quad , \quad t \in [0, T].$$

$$\mathbf{w}(t) = S(t)w_0 + \int_0^t S(t-r)F(r, a_2, \mathbf{w}(r))dr \quad , \quad t \in [0, T].$$

Sea $t \in [0, T]$ y procediendo como en el Teorema 5.2.2 se obtiene:

$$\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{w}(t)\|_X \leq \|u_0 - w_0\|_X + \int_0^t \|F(r, a_1, \mathbf{v}(r)) - F(r, a_2, \mathbf{w}(r))\|_X dr$$

por B.1.6:

$$\leq \|u_0 - w_0\|_X + L \int_0^t \|\mathbf{v}(r) - \mathbf{w}(r)\|_X dr + L \int_0^t \|\bar{u}_2^1(r) - \bar{u}_2^2(r)\|_{L^2(\Omega_2)} dr$$

y reordenando:

$$\leq \|u_0 - w_0\|_X + L \int_0^t \|\bar{u}_2^1(r) - \bar{u}_2^2(r)\|_{L^2(\Omega_2)} dr + L \int_0^t \|\mathbf{v}(r) - \mathbf{w}(r)\|_X dr$$

por desigualdad A.1.5 considerando $h(t) = \|u_0 - w_0\|_X + L \int_0^t \|\bar{u}_2^1(r) - \bar{u}_2^2(r)\|_{L^2(\Omega_2)} dr$ y $\kappa(t) = L > 0$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_X &\leq \|u_0 - w_0\|_X + L \int_0^t \|\bar{u}_2^1(r) - \bar{u}_2^2(r)\|_{L^2(\Omega_2)} dr \\ &\quad + \int_0^t \left(\|u_0 - w_0\|_X + L \int_0^t \|\bar{u}_2^1(r) - \bar{u}_2^2(r)\|_{L^2(\Omega_2)} dr \right) L e^{L(t-s)} ds \end{aligned}$$

luego $\|u_0 - w_0\|_X = 0$ si $u_0 = w_0$ y $\|\bar{u}_2^1(r) - \bar{u}_2^2(r)\|_{L^2(\Omega_2)} = 0$ si $a_1 = a_2$ (por Teorema 5.2.2), por tanto se obtiene la unicidad de la solución con respecto a $a \in Q$. \square

5.2.3. Existencia y Unicidad Sistema (5.8)

$$\begin{cases} \partial_t c(x, t) = \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(x, t) v_2(x, t) & , (x, t) \in \Omega_2 \times (0, T) \\ c(x, 0) = c^0(x) & , x \in \Omega_2 \end{cases}$$

Teorema 5.2.5: Sea $a \in Q$, si $c^0 \geq 0 \in L^\infty(\Omega_2)$ entonces el problema (5.8) tiene solución única con respecto a a , es no negativa y:

$$c \in L^\infty(\Omega_{2,T}) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega_2))$$

$$\partial_t c \in L^2(0, T; L^2(\Omega_2))$$

Demostración:

Sea $a \in Q$ y $X = L^\infty(\Omega_2)$. Para $a \in Q$ existe una única v_j solución del sistema (5.7), es no negativa y:

$$v_j \in L^\infty(\Omega_{2,T}) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega_2)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega_2)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega_2))$$

($j = 1, 2$). Luego, el sistema (5.8) puede escribirse como:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{c}(t) = F(t, a, \mathbf{c}) & , t \in (0, T] \\ \mathbf{c}(0) = c^0 \geq 0 & \in X \end{cases}$$

donde $[\mathbf{c}(t)](x) = c(x, t)$ para $x \in \Omega_2$ y $F : [0, T] \times X \rightarrow X$ es definida como $[F(t, a, \mathbf{c})](x) = \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(x, t) v_2(x, t)$ con $x \in \Omega_2$ y donde v_j depende de a (por Teorema 5.2.4) ($j = 1, 2$).

Por tanto en $\Omega_{2,T}$:

$$c(x, t) = \frac{\beta_{hh}}{N_2} \int_0^t v_1(x, s) v_2(x, s) ds + c^0 \geq 0$$

y:

$$c(x, t) \leq \frac{\beta_{hh}}{N_2} \int_0^t \|v_1\|_{L^\infty(\Omega_{2,T})} \|v_2\|_{L^\infty(\Omega_{2,T})} + \|c^0\|_{L^\infty(\Omega_2)}$$

y en consecuencia $c \in L^\infty(\Omega_{2,T}) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega_2))$, además:

$$\partial_t c(x, t) \leq \frac{\beta_{hh}}{N_2} \|v_1\|_{L^\infty(\Omega_{2,T})} v_2(x, t)$$

sea $C = \frac{\beta_{hh}}{N_2} \|v_1\|_{L^\infty(\Omega_{2,T})} > 0$:

$$\|\partial_t c(t)\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C^2 \|v_2(t)\|_{L^2(\Omega_2)}$$

\Rightarrow

$$\|\partial_t c(t)\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \leq C^4 \|v_2(t)\|_{L^2(\Omega_2)}^2$$

\Rightarrow

$$\int_0^T \|\partial_t c(s)\|_{L^2(\Omega_2)}^2 ds \leq C^4 \int_0^T \|v_2(s)\|_{L^2(\Omega_2)}^2 ds$$

y como $v_2 \in L^2(0, T; H^2(\Omega_2))$ entonces $\partial_t c \in L^2(0, T; L^2(\Omega_2))$.

Capítulo 6

Optimización

Tal como se mencionó en el capítulo 3, se desea disminuir el impacto de la enfermedad en la población de humanos minimizando las cantidades de interés (Tasa de Ataque en Humanos, Incidencia Acumulada en Humanos, Cantidad Máxima de Humanos Infectados y el Tiempo de Extinción de la Enfermedad en Humanos) a través del control del coeficiente de transmisión de la enfermedad en la población transmisora de la enfermedad ($\beta_{bb}(t, a)$).

Se desea minimizar el funcional:

$$J(u, a) := AR_h(T) + BC_h(T) + C \max_{t \in I} I_h(t) + Dt_{ex} + \varepsilon g(a) \quad (6.1)$$

$$J(u, a) := \frac{A}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} R_h(x, T) dx + \frac{B}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} C_h(x, T) dx + \frac{C}{|\Omega_2|} \max_{t \in I} \int_{\Omega_2} I_h(x, t) dx + Dt_{ex} + \varepsilon g(a) \quad (6.2)$$

donde $a = [\alpha, \gamma, t_c]^t$ y $u = [S_b, I_b, S_h, I_h, R_h, C_h]^t$ (con u solución del modelo temporal en el caso de (6.1) y solución del modelo espacio-temporal en el caso de (6.2)) y donde $A, B, C, D, \varepsilon \in \mathbb{R}$ son parámetros que junto a la función $g : Q \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se determinarán a través de ensayos numéricos.

En este capítulo se exponen los argumentos para asegurar la existencia de la solución del problema de optimización (primero se hará para el problema que involucra el modelo temporal y luego para el modelo espacio-temporal); se obtiene el problema adjunto y el gradiente continuos; y se presentan: el esquema discreto del problema de optimización, el problema adjunto discreto y el gradiente discreto que será utilizado para el cálculo del óptimo.

6.1. Optimización con restricciones EDO

6.1.1. Existencia del Óptimo

Sea $F : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$:

$$F(t, a, u) := \begin{bmatrix} -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1(t) u_2(t) + \gamma_b u_2(t) \\ \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1(t) u_2(t) - \gamma_b u_2(t) \\ -\frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(t) v_2(t) - \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1(t) u_2(t) \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(t) v_2(t) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1(t) u_2(t) - \gamma_h v_2(t) \\ \gamma_h v_2(t) \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(t) v_2(t) \end{bmatrix}$$

donde $F = (F_i)_{i=1}^6$, $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^6$ y $u := [u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, c]^t$.

Se denominará problema directo al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(t, a, u) & , \quad t \in (0, T] \\ u(0) = u_0 \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.3)$$

donde $\mathbf{0} = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^t$, y cuya solución existe ($u \in [\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})]^6 \cap [H^1([0, T])]^6$), depende del parámetro a : $u = u(a)$ (Proposición 4.2.5) y es de la forma:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(s, a, u(s)) ds \quad , \quad t \in [0, T]$$

Por otra parte, se define el problema de optimización:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{mín} & J(u(T), a) := Av_3(T) + Bc(T) + \varepsilon\{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \\ (u, a) \in W_{ad} \times Q & \\ \text{sujeto a:} & u \text{ satisface (6.3)} \end{array} \right. \quad (6.4)$$

donde:

- Q es un conjunto no vacío, convexo, acotado y cerrado tal que $Q \subset (0, 1) \times (0, M) \times (0, T) \subset \mathbb{R}^3$ y $M > 0$.
- $W_{ad} = \{u \in [\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})]^6 \cap [H^1([0, T])]^6 : \mathbf{0} \leq u \leq \mathbf{M}\}$ con $\mathbf{0}$ y $\mathbf{M} = [N_1, N_1, N_2, N_2, N_2, N_3]^t$ según Corolario 4.2.3.
- $J : [\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})]^6 \cap [H^1([0, T])]^6 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g(a) := \{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\}$ se obtienen tras el análisis de sensibilidad y otras consideraciones cuyos detalles se presentarán el capítulo de *Análisis de Sensibilidad*.

Puesto que $u = u(a)$ entonces (6.4) puede ser formulado de forma equivalente como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{mín} & J(u(T), a) \\ a \in Q & \\ \text{s. a:} & u = u(a) \text{ satisface (6.3)} \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Teorema 6.1.1: El problema (6.5) tiene al menos una solución óptima $\bar{a} \in Q$.

Demostración:

Se tiene:

- a) $Q \subset \mathbb{R}^3$ es no vacío, convexo, acotado y cerrado.
- b) $J(u(T), a) = Av_3(T) + Bc(T) + \varepsilon\{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \geq 0$ pues $v_3, c \in W_{ad}$ (Corolario 4.2.3) y $A, B, \varepsilon \in \mathbb{R}$ son escogidos adecuadamente para ello (ver capítulo de *Análisis de Sensibilidad*).
- c) J es continua en u y a .

Dado que $J \geq 0$ (b.) y Q es no vacío (a.), el ínfimo:

$$J^* := \inf_{a \in Q} J(u(T), a)$$

existe y en consecuencia es posible encontrar una sucesión minimizante $(a_k) \subset Q$ tal que:

$$J^* := \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k(T), a_k) \quad (6.6)$$

La sucesión a_k está acotada pues $Q \subset \mathbb{R}^3$ es acotado ($a.$), por tanto existe una subsucesión convergente a $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$ ($a_{k_n} \rightarrow \bar{a}$ cuando $n \rightarrow \infty$) y como Q es cerrado entonces $\bar{a} \in Q$.

Por otra parte, como:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(s, a, u(s)) ds \quad , \quad t \in [0, T]$$

entonces se obtiene una sucesión en W_{ad} de la forma:

$$u_{k_n}(t) = u_0 + \int_0^t F(s, a_{k_n}, u_{k_n}(s)) ds \quad , \quad t \in [0, T]$$

Sea $t \in [0, T]$ y $u_{\bar{a}}(t) = u_0 + \int_0^t F(s, \bar{a}, u_{\bar{a}}(s)) ds$:

$$\|u_{k_n}(t) - u_{\bar{a}}(t)\|_{\mathbb{R}^6} \leq \int_0^t \left\| F(s, a_{k_n}, u_{k_n}(s)) - F(s, \bar{a}, u_{\bar{a}}(s)) \right\|_{\mathbb{R}^6} ds$$

y por propiedad de F (A.2.1):

$$\leq C \int_0^t |\beta_{bb}(s, a_{k_n}) - \beta_{bb}(s, \bar{a})| ds + L \int_0^t \|u_{k_n}(s) - u_{\bar{a}}(s)\|_{\mathbb{R}^6} ds$$

por desigualdad de Gronwall (A.1.5):

$$\begin{aligned} &\leq C \int_0^t |\beta_{bb}(s, a_{k_n}) - \beta_{bb}(s, \bar{a})| ds + LC \int_0^t \left(\int_0^s |\beta_{bb}(\tau, a_{k_n}) - \beta_{bb}(\tau, \bar{a})| d\tau \right) e^{\int_s^t L d\tau} ds \\ &\leq C \int_0^T |\beta_{bb}(s, a_{k_n}) - \beta_{bb}(s, \bar{a})| ds + LC \int_0^T \left(\int_0^s |\beta_{bb}(\tau, a_{k_n}) - \beta_{bb}(\tau, \bar{a})| d\tau \right) e^{L(T-s)} ds \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\|u_{k_n} - u_{\bar{a}}\|_{\infty} \leq \int_0^T |\beta_{bb}(s, a_{k_n}) - \beta_{bb}(s, \bar{a})| ds + L \int_0^T \left(\int_0^s |\beta_{bb}(\tau, a_{k_n}) - \beta_{bb}(\tau, \bar{a})| d\tau \right) e^{L(T-s)} ds$$

por continuidad de $\beta_{bb}(t, a)$ (A.1.1) se concluye que $u_{k_n} \rightarrow u_{\bar{a}}$ si $a_{k_n} \rightarrow \bar{a}$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Por último, la continuidad de $J(c.)$ implica:

$$\begin{aligned} J(u_{k_n}(T), a_{k_n}) &= Av_{3_{k_n}}(T) + Bc_{k_n}(T) + \varepsilon\{(1 - \alpha_{k_n})^2 + \gamma_{k_n}^2\} \\ &\rightarrow J(u_{\bar{a}}(T), a_{\bar{a}}) = Av_{3_{\bar{a}}}(T) + Bc_{\bar{a}}(T) + \varepsilon\{(1 - \bar{\alpha})^2 + \bar{\gamma}^2\} \end{aligned}$$

cuando $a_{k_n} \rightarrow \bar{a}$ y consecuencia: $J^* = J(u_{\bar{a}}, a_{\bar{a}})$ (por 6.6), es decir \bar{a} es el óptimo.

□

6.1.2. Gradiente

Calcular el gradiente será útil para implementar la optimización numérica del problema. En esta subsección se calculará el gradiente continuo y el gradiente discreto de la función objetivo J por medio del cálculo del lagrangiano asociado al problema de optimización en estudio ([?], [Hinze et al., 2009]). Representar el gradiente de J con respecto al parámetro a a través del lagrangiano involucra resolver un sistema adjunto (otro sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias), sin embargo, es una forma más eficiente de calcularlo que hacerlo por medio de las derivadas direccionales en las direcciones de las componentes de a .

Considere el problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & J(u, a) \quad \text{sujeto a: } e(u, a) = 0 \\ (u, a) & \in W \times Y \end{aligned}$$

donde $e(u, a)$ se denominará problema directo y representa un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o bien un sistema de ecuaciones diferenciales parciales cuya solución $u \in W$ depende del parámetro $a \in Y$.

Por lo general el problema de optimización se reformula agregando (o sustrayendo) las restricciones a la función objetivo por medio del lagrangiano, el cual se define como sigue:

$$\mathcal{L}(u, a, \lambda) := J(u, a) + E(u, a, \lambda)$$

donde λ son los multiplicadores de Lagrange relacionados con la restricción $e(u, a) = 0$ y $E(u, a, \lambda) = \langle e(u, a), \lambda \rangle$ es la formulación variacional de $e(u, a) = 0$, luego:

$$J(u, a) = \mathcal{L}(u, a, \lambda) - E(u, a, \lambda)$$

y puesto que $u = u(a)$ entonces $\tilde{J}(a) := J(u, a)$, en consecuencia:

$$\frac{d\tilde{J}(a)}{da} = \frac{d\mathcal{L}(u, a, \lambda)}{da} - \frac{dE(u, a, \lambda)}{da}$$

Como u es admisible (esto es: $e(u, a) = 0$) entonces $\frac{\mathbf{d}E(u, a, \lambda)}{\mathbf{d}a} = 0$ y puesto que:

$$\frac{\mathbf{d}\mathcal{L}(u, a, \lambda)}{\mathbf{d}a} = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(u, a, \lambda)}{\partial u}, \frac{\mathbf{d}u(a)}{\mathbf{d}a} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{L}(u, a, \lambda)}{\partial a}$$

se obtiene:

$$\frac{\mathbf{d}\tilde{J}(a)}{\mathbf{d}a} = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(u, a, \lambda)}{\partial u}, \frac{\mathbf{d}u(a)}{\mathbf{d}a} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{L}(u, a, \lambda)}{\partial a}$$

aquí $\mathbf{d}u(a)/\mathbf{d}a$ no puede ser calculado puesto que u no es una función explícita del parámetro a , sin embargo si se considera λ tal que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(u, a, \lambda)}{\partial u} = 0$$

entonces la derivada de la función objetivo con respecto al parámetro a es:

$$\frac{\mathbf{d}\tilde{J}(a)}{\mathbf{d}a} = \frac{\partial \mathcal{L}(u, a, \lambda)}{\partial a}$$

donde u es solución del problema directo y λ es solución del problema adjunto, este último, es el problema que se genera a partir de la condición $\partial \mathcal{L}(u, a, \lambda)/\partial u = 0$ (el problema adjunto es otro sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias u otro sistema de ecuaciones diferenciales parciales, respectivamente).

El gradiente continuo y discreto se obtienen siguiendo el procedimiento expuesto en [Chavent, 2009] (pag. 65-71) pero considerando a u_0 como parámetro fijo y a a como variable.

a) Gradiente Continuo

Sea el problema de optimización:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \\ (u, a) \in W \times Y \\ \text{sujeto a:} \end{array} \quad \begin{array}{l} J(u(T), a) := Av_3(T) + Bc(T) + \varepsilon\{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \\ u = u(a) \text{ satisface (6.3)} \end{array} \right.$$

donde (6.3) es el problema directo y por Proposición 4.2.5 es posible considerar $W := [H^1([0, T])]^6$. Sea $Y := \mathbb{R}^3$ y $Z := [L^2([0, T])]^6$, el lagrangiano asociado al problema de optimización está dado por:

$$\mathcal{L} : W \times Y \times Z^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}(u, a, \lambda) := J(u(T), a) + E(u, a, \lambda)$$

donde $J : W \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $E(u, a, \lambda) := \langle e(u, a), \lambda \rangle_{Z, Z^*}$ (Z^* es el dual de Z) es la formulación variacional del problema directo con:

$$e(u, a) := F(t, a, u(t)) - \frac{du(t)}{dt}$$

y por tanto:

$$E(u, a, \lambda) := \int_0^T \left[F(t, a, u(t)) - \frac{du(t)}{dt} \right] \lambda(t) dt$$

donde $\lambda(t) := [\lambda_i(t)]_{i=1}^6 \in Z^* := L^2([0, T])^6$ son los multiplicadores de Lagrange, luego:

$$\mathcal{L}(u, a, \lambda) = J(u(T), a) + \int_0^T \left[F(t, a, u(t)) - \frac{du(t)}{dt} \right] \lambda(t) dt$$

y aplicando integración por partes se obtiene:

$$\mathcal{L}(u, a, \lambda) = J(u(T), a) + \int_0^T \left[F(t, a, u(t)) \lambda(t) + u(t) \frac{d\lambda(t)}{dt} \right] dt - u(T) \lambda(T) + u(0) \lambda(0)$$

Al calcular la derivada de \mathcal{L} en la dirección $\delta u \in W$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u, a, \lambda), \delta u \right\rangle &= \frac{\partial J}{\partial u}(u(T), a) \delta u + \int_0^T \left[\frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u(t))^t \delta u \lambda(t) + \delta u \frac{d\lambda}{dt} \right] dt - \delta u(T) \lambda(T) \\ &\quad + \delta u(0) \lambda(0) \end{aligned}$$

omo $u(0) = u_0$ es parámetro fijo entonces se obtiene:

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u, a, \lambda), \delta u \right\rangle = \frac{\partial J}{\partial u}(u(T), a) \delta u + \int_0^T \left[\frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u(t))^t \delta u \lambda(t) + \delta u \frac{d\lambda}{dt} \right] dt - \delta u(T) \lambda(T)$$

y puesto que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u, a, \lambda) = 0$$

entonces:

$$\int_0^T \left[\frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u(t))^t \delta u \lambda(t) + \delta u \frac{d\lambda}{dt} \right] dt = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial J}{\partial u}(u(T), a) \delta u - \delta u(T) \lambda(T) = 0$$

\Leftrightarrow

$$\int_0^T \left[\frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u(t))^t \lambda(t) + \frac{d\lambda}{dt} \right] \delta u dt = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial J}{\partial u}(u(T), a) \delta u = \delta u(T) \lambda(T)$$

\Leftrightarrow

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u(t))^t \lambda(t) + \frac{d\lambda}{dt} \right] \delta u = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial J}{\partial u}(u(T), a) \delta u = \delta u(T) \lambda(T)$$

\Leftrightarrow

$$-\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u(t))^t \lambda(t) \quad \wedge \quad \lambda(T) = \frac{\partial J}{\partial u}(u(T), a)$$

en consecuencia λ es solución del siguiente problema adjunto:

$$\begin{cases} -\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u(t))^t \lambda(t) , & t \in [0, T) \\ \lambda(T) = \frac{\partial J}{\partial u}(u(T), a) \end{cases}$$

Teorema 6.1.2: El problema adjunto al problema de optimización es:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d\lambda_1}{dt}(t) = \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_2(t) (\lambda_2(t) - \lambda_1(t)) \\ -\frac{d\lambda_2}{dt}(t) = \left(\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1(t) - \gamma_b \right) (\lambda_2(t) - \lambda_1(t)) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1(t) (\lambda_4(t) - \lambda_3(t)) \\ -\frac{d\lambda_3}{dt}(t) = \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2(t) (\lambda_4(t) + \lambda_6(t) - \lambda_3(t)) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} u_2(t) (\lambda_4(t) - \lambda_3(t)) \\ -\frac{d\lambda_4}{dt}(t) = \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(t) (\lambda_4(t) + \lambda_6(t) - \lambda_3(t)) + \gamma_h (\lambda_5(t) - \lambda_4(t)) \\ -\frac{d\lambda_5}{dt}(t) = 0 \\ -\frac{d\lambda_6}{dt}(t) = 0 \end{array} \right. , t \in (0, T]$$

con $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = 0$, $\lambda_5(T) = A$ y $\lambda_6(T) = B$ (ver A.2.3) y está bien definido.

Demostración:

Considere el cambio de variable $\hat{t} = T - t$, el problema adjunto queda como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineal con $\hat{t} \in [0, T]$ y condición inicial $\lambda_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $\lambda_5(0) = A$ y $\lambda_6(0) = B$.

Y por tanto su solución es $\lambda(\hat{t}) = z \exp\left(-\int_0^{\hat{t}} \frac{\partial F}{\partial u}(\hat{t}, a, u(\hat{t}))^t d\hat{t}\right)$, donde:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\hat{t}, a, u)^t = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_{bb}(\hat{t}, a)}{N_1} u_2 & \frac{\beta_{bb}(\hat{t}, a)}{N_1} u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta_{bb}(\hat{t}, a)}{N_1} u_1 + \gamma_b & \frac{\beta_{bb}(\hat{t}, a)}{N_1} u_1 - \gamma_b & -\frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1 & \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2 - \frac{\beta_{bh}}{N_2} u_2 & \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2 + \frac{\beta_{bh}}{N_2} u_2 & 0 & \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 & \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 - \gamma_h & \gamma_h & \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz con coeficientes continuos y acotados en $0 \leq \hat{t} \leq T$.

□

Por último, por Proposición 4.2.5: $u = u(a)$ y por tanto $\tilde{J}(a) := J(u(T), a)$, luego:

$$\left\langle \frac{\mathbf{d}\tilde{J}(a)}{\mathbf{d}a}, \delta a \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}(u, a, \lambda), \delta a \right\rangle = \left\langle \frac{\partial J}{\partial a}(u(T), a) + \int_0^T \frac{\partial F}{\partial a}(t, a, u(t))^t \lambda(t) dt, \delta a \right\rangle$$

donde $\delta a \in \mathbb{R}^3$, por consiguiente, el gradiente continuo queda como:

$$\nabla_a \tilde{J}(a) = \frac{\partial J}{\partial a}(u(T), a) + \int_0^T \frac{\partial F}{\partial a}(t, a, u(t))^t \lambda(t) dt$$

con $\lambda(t)$ solución del problema adjunto y $u(t)$ solución del problema directo (gradiente continuo como tal en A.2.3).

b) Gradiente Discreto

Sea $h > 0$, $t^0 = 0 < t^1 < t^2 < \dots < t^{K-1} < t^K = T$ y $t^{k+1} = t^k + h$ una partición de $[0, T]$. Considere $u^k := u(t^k)$ para todo $k = 0, 1, \dots, K$ y el problema directo discreto (Euler explícito aplicado al problema directo):

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1} - u^k}{h} = F(t^k, a, u^k) & , \quad k = 0, \dots, K-1 \\ u^0 = u_0 \end{cases} \quad (6.7)$$

Considerel problema de optimización discreto:

$$\begin{cases} \text{mín} & J_h(u^K, a) \\ a \in Q \\ \text{s.a:} & u \text{ satisface (6.7)} \end{cases}$$

con $J_h(u^K, a) := zu^K + \varepsilon \{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\}$ y $z := [0, 0, 0, 0, A, B]^t \in \mathbb{R}^6$. El lagrangiano discreto asociado al problema de optimización se define como:

$$\mathcal{L}_h(u_h, a, \lambda_h) := J_h(u^K, a) + E_h(u_h, a, \lambda_h)$$

donde $u_h := (u^k)_{k=0}^K$ ($u^k \in \mathbb{R}^6$) es la solución del problema directo discreto, $\lambda_h := (\lambda^k)_{k=1}^K$

$(\lambda^k \in \mathbb{R}^6)$ son los multiplicadores de lagrange discretos con λ^k como la aproximación de $\lambda(t)$ en el tiempo t^k para todo $k = 1, \dots, K$, y:

$$\begin{aligned} E_h(u_h, a, \lambda_h) &:= \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ hF(t^k, a, u^k) - (u^{k+1} - u^k) \right\} \lambda^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} hF(t^k, a, u^k) \lambda^{k+1} - \sum_{k=0}^{K-1} (u^{k+1} - u^k) \lambda^{k+1} \end{aligned}$$

Aplicando suma por partes: $\sum_{k=0}^{K-1} (u^{k+1} - u^k) \lambda^{k+1} = u^K \lambda^K - u^0 \lambda^0 - \sum_{k=0}^{K-1} (\lambda^{k+1} - \lambda^k) u^k$, se obtiene:

$$E_h(u_h, a, \lambda_h) = \sum_{k=0}^{K-1} hF(t^k, a, u^k) \lambda^{k+1} - u^K \lambda^K + u^0 \lambda^0 + \sum_{k=0}^{K-1} (\lambda^{k+1} - \lambda^k) u^k$$

luego, considerando una dirección arbitraria $\delta u_h := (\delta u^k)_{k=0}^K$ ($\delta u^k \in \mathbb{R}^6$):

$$\left\langle \frac{\partial E_h}{\partial u_h}, \delta u_h \right\rangle = h \sum_{k=0}^{K-1} \frac{\partial F}{\partial u}(t^k, a, u^k) \delta u^k \lambda^{k+1} - \delta u^K \lambda^K + \delta u^0 \lambda^0 + \sum_{k=0}^{K-1} (\lambda^{k+1} - \lambda^k) \delta u^k$$

aquí u^0 es fijo y por tanto $\delta u^0 = 0$.

Al derivar parcialmente \mathcal{L}_h con respecto a $\delta u_h := (\delta u^k)_{k=0}^K$ ($\delta u^k \in \mathbb{R}^6$):

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial u_h}(u_h, a, \lambda_h), \delta u_h \right\rangle &= \frac{\partial J_h}{\partial u^K}(u^K, a) \delta u^K + h \sum_{k=0}^{K-1} \frac{\partial F}{\partial u}(t^k, a, u^k) \delta u^k \lambda^{k+1} - \delta u^K \lambda^K \\ &\quad + \sum_{k=0}^{K-1} (\lambda^{k+1} - \lambda^k) \delta u^k \\ &= \left\{ \frac{\partial J_h}{\partial u^K}(u^K, a) - \lambda^K \right\} \delta u^K + \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ h \frac{\partial F}{\partial u}(t^k, a, u^k) \lambda^{k+1} + \lambda^{k+1} - \lambda^k \right\} \delta u^k \end{aligned}$$

debido a que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial u_h}(u_h, a, \lambda_h) = 0$$

entonces, para todo $k = 0, \dots, K - 1$:

$$\frac{\partial J_h}{\partial u^K}(u^K, a) - \lambda^K = 0 \quad \wedge \quad h \frac{\partial F}{\partial u}(t^k, a, u^k)^t \lambda^{k+1} + \lambda^{k+1} - \lambda^k = 0$$

esto es:

$$\frac{\partial J_h}{\partial u^K}(u^K, a) - \lambda^K = 0 \quad \wedge \quad \lambda^k = \lambda^{k+1} + h \frac{\partial F}{\partial u}(t^k, a, u^k)^t \lambda^{k+1}$$

por consiguiente se genera el siguiente problema adjunto discreto:

$$\begin{cases} \lambda^k = \lambda^{k+1} + h \frac{\partial F}{\partial u}(t^k, a, u^k)^t \lambda^{k+1} & , \quad k = K - 1, \dots, 0 \\ \lambda^K = \frac{\partial J_h}{\partial u^K}(u^K, a) \end{cases}$$

Por último, el diferencial del lagrangiano con respecto al vector de parámetros a queda:

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial a}(u_h, a, \lambda_h), \delta a \right\rangle = \left\langle \frac{\partial J_h}{\partial a}(u^K, a) + \frac{\partial E_h}{\partial a}(u_h, a, \lambda_h), \delta a \right\rangle$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial a}(u_h, a, \lambda_h) = \frac{\partial J_h}{\partial a}(u^K, a) + \sum_{k=0}^{K-1} h \frac{\partial F}{\partial a}(t^k, a, u^k)^t \lambda^{k+1}$$

y por tanto el gradiente discreto es:

$$\nabla_a \tilde{J}_h(a) = \frac{\partial J_h}{\partial a}(u^K, a) + h \sum_{k=0}^{K-1} \frac{\partial F}{\partial a}(t^k, a, u^k)^t \lambda^{k+1}$$

donde λ^k es solución del problema adjunto discreto y u^k es solución del problema directo discreto.

Para este trabajo se tiene que el problema directo discreto es:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^{k+1} = u_1^k + h \left(-\frac{\beta_{bb}(t^k, a)}{N_1} u_1^k u_2^k + \gamma_b u_2^k \right) \\ u_2^{k+1} = u_2^k + h \left(\frac{\beta_{bb}(t^k, a)}{N_1} u_1^k u_2^k - \gamma_b u_2^k \right) \\ v_1^{k+1} = v_1^k + h \left(-\frac{\beta_{hh} v_1^k v_2^k}{N_2} - \frac{\beta_{bh} v_1^k u_2^k}{N_2} \right) \\ v_2^{k+1} = v_2^k + h \left(\frac{\beta_{hh} v_1^k v_2^k}{N_2} + \frac{\beta_{bh} v_1^k u_2^k}{N_2} - \gamma_h v_2^k \right) \\ v_3^{k+1} = v_3^k + h \gamma_h v_2^k \\ c^{k+1} = c^k + h \frac{\beta_{hh} v_1^k v_2^k}{N_2} \end{array} \right. \quad (6.8)$$

donde $u_i^0 \geq 0$ ($i = 1, 2$), $v_j^0 \geq 0$ ($j = 1, 2, 3$) y $c^0 \geq 0$. El problema adjunto discreto es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^k = \lambda_1^{k+1} + h \frac{\beta_{bb}(t^k, a)}{N_1} u_2^k (\lambda_2^{k+1} - \lambda_1^{k+1}) \\ \lambda_2^k = \lambda_2^{k+1} + h \left\{ \left(\frac{\beta_{bb}(t^k, a)}{N_1} u_1^k - \gamma_b \right) (\lambda_2^{k+1} - \lambda_1^{k+1}) + \frac{\beta_{bh} v_1^k (\lambda_4^{k+1} - \lambda_3^{k+1})}{N_2} \right\} \\ \lambda_3^k = \lambda_3^{k+1} + h \left\{ \frac{\beta_{hh} v_2^k (\lambda_4^{k+1} + \lambda_6^{k+1} - \lambda_3^{k+1})}{N_2} + \frac{\beta_{bh} u_2^k (\lambda_4^{k+1} - \lambda_3^{k+1})}{N_2} \right\} \\ \lambda_4^k = \lambda_4^{k+1} + h \left\{ \frac{\beta_{hh} v_1^k (\lambda_4^{k+1} + \lambda_6^{k+1} - \lambda_3^{k+1})}{N_2} + \gamma_h (\lambda_5^{k+1} - \lambda_4^{k+1}) \right\} \\ \lambda_5^k = 0 \\ \lambda_6^k = 0 \end{array} \right. \quad (6.9)$$

con $\lambda_1^K = \lambda_2^K = \lambda_3^K = \lambda_4^K = 0$, $\lambda_5^K = A$ y $\lambda_6^K = B$; y el gradiente discreto es:

$$\nabla_a \tilde{J}_h(a) = \begin{bmatrix} -2\varepsilon(1-\alpha) \\ 2\varepsilon\gamma \end{bmatrix} + h \sum_{k=0}^{K-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{N_1} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \alpha}(t^k, a) u_1^k u_2^k (\lambda_2^k - \lambda_1^k) \\ \frac{1}{N_1} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \gamma}(t^k, a) u_1^k u_2^k (\lambda_2^k - \lambda_1^k) \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

6.2. Optimización con restricciones EDP

6.2.1. Existencia del Óptimo

Considere nuevamente el sistema de ecuaciones diferenciales parciales acoplados:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = d_u \Delta u_1 + G_1(t, a, u_1, u_2) & , \text{ en } \Omega_{1,T} \\ \partial_t u_2 = d_u \Delta u_2 + G_2(t, a, u_1, u_2) & , \text{ en } \Omega_{1,T} \\ \nabla u_j \cdot \eta_1 = 0 & , \text{ en } \sum_{1,T} , \text{ para } j = 1, 2. \\ u_j(x, 0) = u_j^0(x) & , \text{ en } \Omega_1 , \text{ para } j = 1, 2. \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\begin{cases} \partial_t v_1 = d_v \Delta v_1 + F_1(t, a, v_1, v_2, \bar{u}_2) & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \partial_t v_2 = d_v \Delta v_2 + F_2(t, a, v_1, v_2, \bar{u}_2) & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \partial_t v_3 = d_v \Delta v_3 + F_3(t, a, v_2) & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \nabla v_j \cdot \eta_2 = 0 & , \text{ en } \sum_{2,T} , \text{ para } j = 1, 2, 3. \\ v_i(x, 0) = v_i^0(x) & , \text{ en } \Omega_2 , \text{ para } j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (6.12)$$

$$\begin{cases} \partial_t c = H(t, a, v_1, v_2) & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ c(x, 0) = c^0(x) & , \text{ en } \Omega_2 \end{cases} \quad (6.13)$$

donde:

$$\bar{u}_2(x, t) = \begin{cases} u_2(x, t) & , (x, t) \in \tilde{\Omega} \times [0, T] \\ 0 & , (x, t) \in (\Omega_2 \setminus \tilde{\Omega}) \times [0, T] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
G_1(t, a, u_1, u_2) &= -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 u_2 + \gamma_b u_2 \\
G_2(t, a, u_1, u_2) &= \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 u_2 - \gamma_b u_2 \\
F_1(t, a, v_1, v_2, \bar{u}_2) &= \left(-\frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2 - \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2 \right) v_1 \\
F_2(t, a, v_1, v_2, \bar{u}_2) &= \left(\frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 - \gamma_h \right) v_2 + \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1 \bar{u}_2 \\
F_3(t, a, v_2) &= \gamma_h v_2 \\
H(t, a, v_1, v_2) &= \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 v_2
\end{aligned}$$

$$j = 1, 2 : u_j^0(x) \geq 0 \in \left\{ w \in H^2(\Omega_1) : \frac{\partial w}{\partial \eta_1} = 0 \text{ en } \partial\Omega_1 \right\}$$

$$\begin{aligned}
j = 1, 2, 3 : v_j^0(x) \geq 0 \in \left\{ w \in H^2(\Omega_2) : \frac{\partial w}{\partial \eta_2} = 0 \text{ en } \partial\Omega_2 \right\} \\
c^0(x) \geq 0 \in L^\infty(\Omega_2)
\end{aligned}$$

el cual, por Teoremas 5.2.1, 5.2.3 y 5.2.5, tiene solución no negativa y:

$$\begin{cases} u_j \in L^\infty(\Omega_{1,T}) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega_1)) & , \quad j = 1, 2. \\ v_j, c \in L^\infty(\Omega_{2,T}) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega_2)) & , \quad j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (6.14)$$

luego, para $j = 1, 2$ se define:

$$W_j := \{w \in L^\infty(\Omega_{j,T}) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega_j)) : w(x, t) \geq 0, (x, t) \in \Omega_{j,T}\}$$

Considere el problema de optimización:

$$\begin{cases} \text{mín} & J(u(\cdot, T), a) := \frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} \{Av_3(x, T) + Bc(x, T)\} dx + \varepsilon\{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \\ (u, a) & \\ \in W_{ad} \times Q & \\ \text{sujeto a:} & u \text{ satisface (6.11) - (6.13)} \end{cases} \quad (6.15)$$

donde $u = [u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, c]^t$ y:

- Q es un conjunto no vacío, convexo, acotado y cerrado tal que $Q \subset (0, 1) \times (0, M) \times (0, T) \subset \mathbb{R}^3$ y $M > 0$.
- $W_{ad} := [W_1]^2 \times [W_2]^4$.

- $J : [L^\infty(\Omega_{1,T}) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega_1))]^2 \times [L^\infty(\Omega_{2,T}) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega_2))]^4 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g(a) := \{(1-\alpha)^2 + \gamma^2\}$ se obtienen tras el análisis de sensibilidad y otras consideraciones cuyos detalles se presentarán en el capítulo de *Análisis de Sensibilidad*.

Por Teoremas 5.2.2 y 5.2.4 la solución de (6.11)-(6.13) depende del parámetro a y en consecuencia $u = u(a)$, por tanto (6.15) puede ser formulado de forma equivalente como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{mín} & J(u(\cdot, T), a) \\ a \in Q & \\ \text{s.a} & u = u(a) \text{ satisface (6.11) - (6.13)} \end{array} \right. \quad (6.16)$$

Teorema 6.2.1: El problema (6.16) tiene al menos una solución óptima $\bar{a} \in Q$.

Demostración:

Se tiene:

- $Q \subset \mathbb{R}^3$ es no vacío, convexo, acotado y cerrado.
- $J(u(\cdot, T), a) = \frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} \{Av_3(x, T) + Bc(x, T)\} dx + \varepsilon \{(1-\alpha)^2 + \gamma^2\} \geq 0$ pues $v_3, c \in W_{ad}$ y $A, B, \varepsilon \in \mathbb{R}$ son escogidos adecuadamente para ello (ver capítulo de *Análisis de Sensibilidad*).
- J es continua en u y a .

Dado que $J \geq 0$ (b.) y Q es no vacío (a.), el ínfimo:

$$J^* := \inf_{a \in Q} J(u(\cdot, T), a)$$

existe y en consecuencia es posible encontrar una sucesión minimizante $(a_k) \subset Q$ tal que:

$$J^* := \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k(\cdot, T), a_k) \quad (6.17)$$

La sucesión a_k está acotada pues $Q \subset \mathbb{R}^3$ es acotado (a.), por tanto existe una subsucesión convergente a $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$ ($a_{k_n} \rightarrow \bar{a}$ cuando $n \rightarrow \infty$) y como Q es cerrado entonces $\bar{a} \in Q$.

Por otra parte, por Teoremas 5.2.1 y 5.2.3 la solución de (6.11)-(6.13) es de la forma:

$$u_j(t) = S_j(t)u_j^0 + \int_0^t S_j(t-r)G_j(r, a, u_1, u_2) dr \quad , \quad t \in [0, T] \quad , \quad j = 1, 2.$$

$$v_i(t) = T_i(t)v_i^0 + \int_0^t T_i(t-r)F_i(r, a, v_1, v_2, \bar{u}_2) dr \quad , \quad t \in [0, T] \quad , \quad i = 1, 2$$

$$v_3(t) = T_3(t)v_3^0 + \int_0^t T_3(t-r)F_3(r, a, v_1, v_2) dr \quad , \quad t \in [0, T]$$

$$c(t) = c^0 + \int_0^t H(r, a, v_1, v_2) dr \quad , \quad t \in [0, T]$$

donde S_j es el C_0 semigrupo de contracciones en $L^2(\Omega_1)$ descrito en el Teorema 5.2.1 ($j = 1, 2$) y T_i es el C_0 semigrupo de contracciones en $L^2(\Omega_2)$ descrito en el Teorema 5.2.3 ($i = 1, 2, 3$), por consiguiente se obtiene una sucesión en W_{ad} :

$$u_j^{k_n}(t) = S_j(t)u_j^0 + \int_0^t S_j(t-r)G_j(r, a_{k_n}, u_1^{k_n}(r), u_2^{k_n}(r))dr \quad , \quad t \in [0, T] \quad , \quad j = 1, 2.$$

$$v_i^{k_n}(t) = T_i(t)v_i^0 + \int_0^t T_i(t-r)F_i(r, a_{k_n}, v_1^{k_n}(r), v_2^{k_n}(r), \bar{u}_2^{k_n}(r))dr \quad , \quad t \in [0, T] \quad , \quad i = 1, 2$$

$$v_3^{k_n}(t) = T_3(t)v_3^0 + \int_0^t T_3(t-r)F_3(r, a_{k_n}, v_1^{k_n}(r), v_2^{k_n}(r))dr \quad , \quad t \in [0, T]$$

$$c^{k_n}(t) = c^0 + \int_0^t H(r, a_{k_n}, v_1^{k_n}(r), v_2^{k_n}(r))dr \quad , \quad t \in [0, T]$$

Sea $t \in [0, T]$ y $u_2^{\bar{a}}(t) = S_2(t)u_2^0 + \int_0^t S_2(t-r)G_2(r, \bar{a}, u_1^{\bar{a}}(r), u_2^{\bar{a}}(r))dr$. Procediendo como en el Teorema 5.2.2 (considerando la propiedad B.1.3 y desigualdad A.1.5) se tiene:

$$\begin{aligned} \|u_2^{k_n} - u_2^{\bar{a}}\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq C \int_0^T |\beta_{bb}(s, a_{k_n}) - \beta_{bb}(s, \bar{a})| ds \\ &\quad + C \int_0^T \left(\int_0^s |\beta_{bb}(\tau, a_{k_n}) - \beta_{bb}(\tau, \bar{a})| d\tau \right) e^{C(T-s)} ds \end{aligned}$$

donde $C > 0$ es independiente de a_{k_n} (propiedad B.1.3), luego por continuidad de $\beta_{bb}(t, a)$ (A.1.1) se concluye que $u_2^{k_n} \rightarrow u_2^{\bar{a}}$ si $a_{k_n} \rightarrow \bar{a}$ cuando $n \rightarrow \infty$ y por tanto $\bar{u}_2^{k_n} \rightarrow \bar{u}_2^{\bar{a}}$ si $a_{k_n} \rightarrow \bar{a}$ cuando $n \rightarrow \infty$ (aquí \bar{u}_2 es la extensión de u_2 sobre Ω_2).

Por otro lado, si $v_i^{\bar{a}}(t) = T_i(t)v_i^0 + \int_0^t T_i(t-r)F_i(r, \bar{a}, v_1^{\bar{a}}(r), v_2^{\bar{a}}(r), \bar{u}_2^{\bar{a}}(r))dr$ ($i = 1, 2$), entonces procediendo como en el Teorema 5.2.4 (considerando la propiedad B.1.6 y desigualdad A.1.5):

$$\begin{aligned} \|v_i^{k_n}(t) - v_i^{\bar{a}}(t)\|_{L^2(\Omega_2)} &\leq L \int_0^t \|\bar{u}_2^{k_n}(r) - \bar{u}_2^{\bar{a}}(r)\|_{L^2(\Omega_2)} dr \\ &\quad + \int_0^t \left(L \int_0^t \|\bar{u}_2^{k_n}(r) - \bar{u}_2^{\bar{a}}(r)\|_{L^2(\Omega_2)} dr \right) Le^{L(t-s)} ds \end{aligned}$$

donde $L > 0$ es independiente de a_{k_n} . Luego, si $a_{k_n} \rightarrow \bar{a}$ entonces $v_i^{k_n} \rightarrow v_i^{\bar{a}}$ ($i = 1, 2$).

Ahora, como $v_3^{\bar{a}}(t) = T_3(t)v_3^0 + \int_0^t T_3(t-r)F_3(r, \bar{a}, v_2^{\bar{a}}(r))dr$ entonces:

$$\|v_3^{k_n}(t) - v_3^{\bar{a}}(t)\|_{L^2(\Omega_2)} \leq \gamma_h \int_0^t \|v_2^{k_n}(t) - v_2^{\bar{a}}(t)\|_{L^2(\Omega_2)}$$

y por tanto: $v_3^{k_n} \rightarrow v_3^{\bar{a}}$ si $a_{k_n} \rightarrow \bar{a}$ (pues $v_2^{k_n} \rightarrow v_2^{\bar{a}}$).

Por último, en virtud de $v_i^{k_n} \rightarrow v_i^{\bar{a}}$ cuando $a_{k_n} \rightarrow \bar{a}$ ($i = 1, 2$), se obtiene:

$$c^{k_n}(t) = c^0 + \int_0^t v_1^{k_n}(r)v_2^{k_n}(r)dr \rightarrow c^{\bar{a}}(t) = c^0 + \int_0^t v_1^{\bar{a}}(r)v_2^{\bar{a}}(r)dr$$

en $L^2(\Omega_2)$ cuando $a_{k_n} \rightarrow \bar{a}$.

Así, por continuidad de $J(c)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} J(u_{k_n}(\cdot, T), a_{k_n}) &= \frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} \{Av_3^{k_n}(x, T) + Bc^{k_n}(x, T)\}dx + \varepsilon\{(1 - \alpha_{k_n})^2 + \gamma_{k_n}^2\} \\ &\rightarrow J(u_{\bar{a}}(\cdot, T), a_{\bar{a}}) = \frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} \{Av_3^{\bar{a}}(x, T) + Bc^{\bar{a}}(x, T)\}dx + \varepsilon\{(1 - \bar{\alpha})^2 + \bar{\gamma}^2\} \end{aligned}$$

cuando $a_{k_n} \rightarrow \bar{a}$ y en consecuencia $J^* = J(u_{\bar{a}}(\cdot, T), \bar{a})$ (por 6.17), es decir, \bar{a} es el óptimo.

□

6.2.2. Gradiente

De forma análoga a la sección 6.1.2 se obtendrá el gradiente de J a través del lagrangiano y en este caso el problema adjunto será un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Basado en [Hinze et al., 2009] (p. 58, 59, 63, 78-79) y en [Berres et al., 2005] se obtiene el gradiente continuo y discreto.

a) Gradiente Continuo

a.1) Problema General: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^l$, $l \in \mathbb{N}$, $T > 0$ y:

$$\begin{cases} \partial_t u = D\Delta u + F(t, a, u) & , \text{ en } \Omega_T := \Omega \times (0, T) \\ \nabla u_i \cdot \eta = 0 & , \text{ en } \sum_T := \partial\Omega \times (0, T) \text{ para } i = 1, 2, \dots, k. \\ u(x, 0) = u_0(x) & , \text{ en } \Omega \end{cases} \quad (6.18)$$

donde $u := (u_i)_{i=1}^k \in [L^2(0, T; H^2(\Omega))]^k$ depende del parámetro a ($u = u(a)$) con $\partial_t u \in [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^k$, $F : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, η el vector normal a lo largo de $\partial\Omega$ en dirección hacia el exterior de Ω y D una matriz diagonal de k filas y k columnas, con $k \in \mathbb{N}$.

Se llamará problema directo al problema (6.18) y su formulación variacional considerando u^0 parámetro fijo es:

$$\int_0^T \langle \partial_t u, p \rangle_{H^{1*}, H^1} dt + \int_0^T \int_{\Omega} D \nabla u \nabla p \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} F(t, a, u) p \, dx \, dt$$

para todo $p \in [L^2(0, T; H^1(\Omega))]^k$.

Por otro lado, sea el problema de optimización:

$$\begin{cases} \text{mín} & J(u(\cdot, T), a) \\ (u, a) \in W \times Y \\ \text{sujeto a:} & u \text{ satisface el problema (6.18)} \end{cases} \quad (6.19)$$

donde $W := [\mathbf{W}(0, T; L^2, H^1)]^k$, $Y := \mathbb{R}^3$ y $J : W \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $Z := [L^2(0, T; H^1(\Omega)^*)]^k$, el lagrangiano asociado al problema de optimización (6.19) está dado por:

$$\mathcal{L} : W \times Y \times Z^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}(u, a, p) := J(u(\cdot, T), a) + E(u, a, p)$$

con $E(u, a, p) := \langle e(u, a), p \rangle_{Z, Z^*}$ (Z^* es el dual de Z) la formulación variacional del problema directo, $p := (p_i)_{i=1}^k \in [L^2(0, T; H^1(\Omega))]^k$ los multiplicadores de Lagrange y por tanto:

$$E(u, a, p) = \int_0^T \langle \partial_t u(t), p(t) \rangle_{H^1, H^1} dt + \int_0^T \int_{\Omega} D \nabla u \nabla p \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} F(t, a, u) p \, dx \, dt$$

Si se considera:

- $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \eta \, dS - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx$
- Para $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)^*$:

$$(u(T), p(T))_{L^2} - (u(0), p(0))_{L^2} = \int_0^T \langle \partial_t u(t), p(t) \rangle_{H^1, H^1} dt + \int_0^T \langle \partial_t p(t), u(t) \rangle_{H^1, H^1} dt$$

entonces E queda como:

$$\begin{aligned} E(u, a, p) &= - \int_0^T \langle \partial_t p(t), u(t) \rangle_{H^1, H^1} dt + \int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} D u \nabla p \cdot \eta \, dS \right) dt \\ &\quad - \int_0^T \left(\int_{\Omega} D u \Delta p \, dx \right) dt - \int_0^T \left(\int_{\Omega} F(t, a, u) p \, dx \right) dt \\ &\quad - \int_{\Omega} u(0) p(0) \, dx + \int_{\Omega} u(T) p(T) \, dx \end{aligned}$$

luego derivando \mathcal{L} en la dirección $\delta u \in W$, se obtiene:

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(u, a, p)}{\partial u}, \delta u \right\rangle = \left\langle \frac{\partial J(u, a)}{\partial u}, \delta u \right\rangle + \left\langle \frac{\partial E(u, a, p)}{\partial u}, \delta u \right\rangle$$

donde:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial E(u, a, p)}{\partial u}, \delta u \right\rangle &= - \int_0^T \langle \partial_t p(t), \delta u(t) \rangle_{H^1, H^1} dt + \int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} \delta u \, D \nabla p \cdot \eta \, dS \right) dt \\ &\quad - \int_0^T \left(\int_{\Omega} \delta u \, D \Delta p \, dx \right) dt - \int_0^T \left(\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u) \delta u \, p \, dx \right) dt \end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega} \delta u(0)p(0) dx + \int_{\Omega} \delta u(T)p(T) dx$$

como $u(0) = u_0$ entonces $\delta u(0) = 0$. Además, puesto que $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)^*$ entonces $\langle v, w \rangle_{H^1^*, H^1} = (v, w)_{L^2}$ para todo $v \in L^2(\Omega)$ y $w \in H^1(\Omega)^*$, así:

$$\begin{aligned} &= - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t p \delta u dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} D \Delta p \delta u dx dt + \int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} \delta u D \nabla p \cdot \eta dS \right) dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u)^t p \delta u \right) dx dt + \int_{\Omega} \delta u(T)p(T) dx \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} \left(\partial_t p + D \Delta p + \frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u)^t p \right) \delta u dx dt + D \int_0^T \int_{\partial\Omega} \nabla p \cdot \eta \delta u dS dt \\ &\quad + \int_{\Omega} \delta u(T)p(T) dx \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u, a, p), \delta u \right\rangle &= \frac{\partial J}{\partial u}(u(\cdot, T), a) \delta u(T) - \int_0^T \int_{\Omega} \left(\partial_t p + D \Delta p + \frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u)^t p \right) \delta u dx dt \\ &\quad + D \int_0^T \int_{\partial\Omega} \nabla p \cdot \eta \delta u dS dt + \int_{\Omega} \delta u(T)p(T) dx \end{aligned}$$

Para u solución del problema directo, se desea encontrar p tal que satisfice:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u, a, p) = 0$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} &- \int_0^T \int_{\Omega} \left(\partial_t p + D \Delta p + \frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u)^t p \right) dx dt + D \int_0^T \int_{\partial\Omega} \nabla p \cdot \eta dS dt \\ &+ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial J}{\partial u}(u(T), a) + p(T) \right) dx = 0 \end{aligned}$$

es decir:

- $\int_0^T \int_{\Omega} \left(\partial_t p + D \Delta p + \frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u)^t p \right) dx dt = 0$
- $D \int_0^T \int_{\partial\Omega} \nabla p \cdot \eta dS dt = 0$
- $\int_{\Omega} \left(\frac{\partial J}{\partial u}(u(\cdot, T), a) + p(T) \right) dx = 0$

en consecuencia p satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales (problema adjunto):

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t p(x, t) = -D \Delta p(x, t) - \frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u)^t p(x, t) \quad , \quad \text{en } \Omega_T \\ \nabla p_i(x, t) \cdot \eta = 0 \quad , \quad \text{en } \sum_T \text{ para } i = 1, \dots, k. \\ p(x, T) = -\frac{\partial J}{\partial u}(u(\cdot, T), a) \quad , \quad \text{en } \Omega \end{array} \right.$$

Por último, como $u = u(a)$ entonces $\tilde{J}(a) := J(u(\cdot, T), a)$, luego:

$$\begin{aligned} \nabla_a \tilde{J}(a) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}(u, a, p) \\ &= \frac{\partial J}{\partial a}(u(\cdot, T), a) - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial a}(t, a, u(x, t))^t p(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (6.20)$$

con $p(x, t)$ solución del problema adjunto y $u(x, t)$ solución del problema directo.

a.2) Problema en Estudio: En este caso, el problema directo es el sistema (6.11)-(6.13) el cual se presenta nuevamente a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_1 = d_u \Delta u_1 - \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 u_2 + \gamma_b u_2 \quad , \quad \text{en } \Omega_{1,T} \\ \partial_t u_2 = d_u \Delta u_2 + \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 u_2 - \gamma_b u_2 \quad , \quad \text{en } \Omega_{1,T} \\ \nabla u_j \cdot \eta_1 = 0 \quad , \quad \text{en } \sum_{1,T} \text{ , para } j = 1, 2. \\ u_j(x, 0) = u_j^0(x) \quad , \quad \text{en } \Omega_1 \text{ , para } j = 1, 2. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t v_1 = d_v \Delta v_1 - \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 v_2 - \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2 v_1 \quad , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \partial_t v_2 = d_v \Delta v_2 + \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 v_2 + \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2 v_1 - \gamma_h v_2 \quad , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \partial_t v_3 = d_v \Delta v_3 + \gamma_h v_2 \quad , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \nabla v_j \cdot \eta_2 = 0 \quad , \text{ en } \sum_{2,T} , \text{ para } j = 1, 2, 3. \\ v_j(x, 0) = v_j^0(x) \quad , \text{ en } \Omega_2 , \text{ para } j = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t c = \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 v_2 \quad , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ c(x, 0) = c^0(x) \quad , \text{ en } \Omega_2 \end{array} \right.$$

El problema de optimización (problema (6.15)) es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \quad J(u(\cdot, T), a) := \frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} \{A v_3(x, T) + B c(x, T)\} dx + \varepsilon \{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \\ (u, a) \\ \in W_{ad} \times Q \\ \text{sujeto a:} \quad u \text{ satisface (6.9) - (6.11)} \end{array} \right.$$

donde $u := [u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, c]^t$. De acuerdo a lo expuesto en **a.1)**, el problema adjunto al problema de optimización es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t p_1 = -d_u \Delta p_1 - \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_2 (p_2 - p_1) \quad , \text{ en } \Omega_{1,T} \\ \partial_t p_2 = -d_u \Delta p_2 - \left(\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 - \gamma_b \right) (p_2 - p_1) - \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1 (\bar{p}_4 - \bar{p}_3) \quad , \text{ en } \Omega_{1,T} \\ \nabla p_j \cdot \eta_1 = 0 \quad , \text{ en } \sum_{1,T} , \text{ para } j = 1, 2. \\ p_j(x, T) = 0 \quad , \text{ en } \Omega_1 , \text{ para } j = 1, 2. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t p_3 = -d_v \Delta p_3 - \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2 (p_4 + p_6 - p_3) - \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2 (p_4 - p_3) \quad , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \partial_t p_4 = -d_v \Delta p_4 - \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 (p_4 + p_6 - p_3) - \gamma_h (p_5 - p_4) \quad , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \partial_t p_5 = -d_v \Delta p_5 \quad , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \nabla p_j \cdot \eta_2 = 0 \quad , \text{ en } \sum_{2,T} , \text{ para } j = 3, 4, 5. \\ p_j(x, T) = p_j^T(x) \quad , \text{ en } \Omega_2 , \text{ para } j = 3, 4, 5. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \partial_t p_6 = 0 & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ p_6(x, T) = p_6^T(x) & , \text{ en } \Omega_2 \end{cases}$$

con $p_3^T(x) = p_4^T(x) = 0$, $p_5^T(x) = -\frac{A}{|\Omega_2|}$ y $p_6^T(x) = -\frac{B}{|\Omega_2|}$ para todo $x \in \Omega_2$. (ver A.2.3 y considerar p en lugar de λ).

Teorema 6.2.2: El problema adjunto tiene solución.

Demostración:

De:

$$\begin{cases} \partial_t p_6 = 0 & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ p_6(x, T) = -\frac{B}{|\Omega_2|} & , \text{ en } \Omega_2 \end{cases}$$

se obtiene que $p_6(x, t) = -\frac{B}{|\Omega_2|}$ para todo $(x, t) \in \Omega_{2,T}$.

Se denotará por (A) al siguiente conjunto de ecuaciones que tiene a p_6 como función conocida:

$$\begin{cases} \partial_t p_3 = -d_v \Delta p_3 - \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2 (p_4 + p_6 - p_3) - \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2 (p_4 - p_3) & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \partial_t p_4 = -d_v \Delta p_4 - \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 (p_4 + p_6 - p_3) - \gamma_h (p_5 - p_4) & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \partial_t p_5 = -d_v \Delta p_5 & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \nabla p_j \cdot \eta_2 = 0 & , \text{ en } \sum_{2,T} , \text{ para } j = 3, 4, 5. \\ p_j(x, T) = p_j^T(x) & , \text{ en } \Omega_2 , \text{ para } j = 3, 4, 5. \end{cases}$$

Considere el siguiente cambio de variable $s = T - t$ y el cambio de funciones $q_j(x, s) = p_j(x, T - s)$ donde $p_j(x, T - s) = p_j(x, t)$ para $(x, t) \in \Omega_{2,T}$ ($j = 3, 4, 5$), luego el sistema (A) es equivalente a:

$$\begin{cases} \partial_s q_3 = d_v \Delta q_3 + \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2 (q_4 + p_6 - q_3) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2 (q_4 - q_3) & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \partial_s q_4 = d_v \Delta q_4 + \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 (q_4 + p_6 - q_3) + \gamma_h (q_5 - q_4) & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \partial_s q_5 = d_v \Delta q_5 & , \text{ en } \Omega_{2,T} \\ \nabla q_j \cdot \eta_2 = 0 & , \text{ en } \sum_{2,T} , \text{ para } j = 3, 4, 5. \\ q_j(x, 0) = q_j^T(x) & , \text{ en } \Omega_2 , \text{ para } j = 3, 4, 5. \end{cases}$$

el cual se denotará por (B), luego procediendo como en el Teorema 5.2.3 se tiene que el

sistema (B) es equivalente a:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\mathbf{q}(s) = A\mathbf{q}(s) + F(t, \mathbf{q}(s)) & , s \in [0, T] \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 & , \mathbf{q}_0 \in X \end{cases} \quad (\text{P})$$

donde $X = [L^2(\Omega_2)]^3$, $\mathbf{q}_0 = (p_{j+2}^t(x))_{j=1}^3$, $\mathbf{q}(s) \in X$ es tal que $[\mathbf{q}(s)](x) := [q_3(x, s), q_4(x, s), q_5(x, s)]^t$ para $(x, s) \in \Omega_2 \times [0, T]$ y $F := (F_j)_{j=1}^3$ definida como:

$$[F_1(s, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)](x) := \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2 (\varphi_4(x) + p_6 - \varphi_3(x)) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2 (\varphi_4(x) - \varphi_3(x))$$

$$[F_2(s, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)](x) := \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 (\varphi_4(x) + p_6 - \varphi_3(x)) + \gamma_h (\varphi_5(x) - \varphi_4(x))$$

$$[F_3(s, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)](x) := 0$$

para $(t, \varphi) \in [0, T] \times X$ y $x \in \Omega_2$.

$F : [0, T] \times X \rightarrow X$ está bien definida puesto que $v_1, v_2, \bar{u}_2 \in L^2(\Omega_2)$ y como F es lineal entonces es Lipschitz continua, así (P) satisface las hipótesis del Teorema 5.B y por tanto tiene solución, lo cual implica que (B) tiene solución y por consiguiente (A) tiene solución.

Ahora, considere: $i \in \{3, 4\}$, $\tilde{\Omega} := \Omega_1 \cap \Omega_2$ y:

$$\bar{p}_i(x, t) = \begin{cases} p_i(x, t) & , (x, t) \in \tilde{\Omega} \times [0, T] \\ 0 & , (x, t) \in (\Omega_1 \setminus \tilde{\Omega}) \times [0, T] \end{cases}$$

luego \bar{p}_i es una extensión de p_i en Ω_1 , y procediendo como se acaba de hacer, se obtiene que el sistema:

$$\begin{cases} \partial_t p_1 = -d_u \Delta p_1 - \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_2 (p_2 - p_1) & , \text{ en } \Omega_{1,T} \\ \partial_t p_2 = -d_u \Delta p_2 - \left(\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 - \gamma_b \right) (p_2 - p_1) - \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1 (\bar{p}_4 - \bar{p}_3) & , \text{ en } \Omega_{1,T} \\ \nabla p_j \cdot \eta_1 = 0 & , \text{ en } \sum_{1,T} , \text{ para } j = 1, 2. \\ p_j(x, T) = 0 & , \text{ en } \Omega_1 , \text{ para } j = 1, 2. \end{cases}$$

tiene solución.

b) Gradiente Discreto

b.1) Problema General cuando $\Omega \subset \mathbb{R}$: Sea el sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\begin{cases} \partial_t u = D\Delta u + F(t, a, u) & , \text{ en } \Omega_T = \Omega \times (0, T) \\ \nabla u_i \cdot \eta = 0 & , \text{ en } \sum_T = \partial\Omega \times (0, T) \text{ para } i = 1, 2, \dots, l. \\ u(x, 0) = u_0(x) & , \text{ en } \Omega \end{cases}$$

con $u := (u_i)_{i=1}^l$ ($l \in \mathbb{N}$), el que será considerado como problema directo. Aquí $\Omega := [0, L] \subset \mathbb{R}$, $T > 0$ y $\Omega \times [0, T]$ se particionará como sigue:

- $[0, L]$ en $K + 1$ elementos de la forma $x_j = j\Delta x$ con $\Delta x > 0$, $j = 0, \dots, K$ tal que $K = L/\Delta x$, $x_0 = 0$ y $x_K = L$.
- $[0, T]$ en $M - 1$ subintervalos de la forma $[t^n, t^{n+1}]$ donde $\Delta t > 0$, $t^n = n\Delta t$, $n = 0, \dots, M - 1$ tal que $M = T/\Delta t$, $t^0 = 0$ y $t^M = T$.

El problema directo se resuelve haciendo uso del esquema de Crank-Nicolson (el cual no tiene restricciones de estabilidad) y por tanto se genera el siguiente problema directo discreto:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{D}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) + F(t^n, a, u_j^n) \\ \text{para } j = 1, \dots, K - 1 \text{ y } n = 0, \dots, M - 1 \\ \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad j = 1, K \text{ y } n = 0, \dots, M - 1. \\ u_j^0 = u_{0j}, \text{ para } j = 1, \dots, K - 1. \end{cases} \quad (6.21)$$

donde $u_j^n := u(j\Delta x, n\Delta t) \in \mathbb{R}^l$, $u_{0j} \in \mathbb{R}^l$ para todo $j = 1, \dots, K$. y $D \in \mathcal{M}_{l \times l}(\mathbb{R})$ es una matriz diagonal.

Se define $u_\Delta := \{u_j^n \in \mathbb{R}^l : j = 1, \dots, K - 1 \wedge n = 0, \dots, M\}$ a la solución de (6.21), $u^M := (u_j^M)_{j=1}^K$ y el problema de optimización discreto como:

$$\begin{cases} \text{mín} & J_\Delta(u^M, a) \\ a \in Q \\ \text{s. a:} & u_\Delta \text{ satisface (6.21)} \end{cases}$$

Sea $p_\Delta := \{p_j^n \in \mathbb{R}^l : j = 1, \dots, K-1 \wedge n = 0, \dots, M\}$ los multiplicadores de lagrange discretos, el lagrangiano asociado al problema de optimización discreto queda como:

$$\mathcal{L}_\Delta(u_\Delta, a, p_\Delta) := J_\Delta(u^M, a) + E_\Delta(u_\Delta, a, p_\Delta)$$

donde $E_\Delta(u_\Delta, a, p_\Delta)$ denota la formulación débil discreta.

Ahora, del esquema discreto (6.21) se obtiene:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} D\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) + \Delta t F(t^n, a, u_j^n)$$

y si $\nu := \frac{\Delta t}{2\Delta x^2}$ entonces:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_j^n &= \nu D\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) + \Delta t F(t^n, a, u_j^n) \\ &= \nu D\left(\{u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n\} + \{u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^n\} - 2\{u_j^{n+1} + u_j^n\}\right) + \Delta t F(t^n, a, u_j^n) \end{aligned}$$

considerando $u_*^{n+1/2} = \frac{u_*^{n+1} + u_*^n}{2}$, se obtiene:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \nu D\left(2u_{j+1}^{n+1/2} + 2u_{j-1}^{n+1/2} - 4u_j^{n+1/2}\right) + \Delta t F(t^n, a, u_j^n)$$

luego, multiplicando por p_j^{n+1} y sumando sobre j y n :

$$\begin{aligned} E_\Delta(u_\Delta, a, p_\Delta) &:= \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} \left\{ \left(u_j^{n+1} - u_j^n \right) - \nu D\left(2u_{j+1}^{n+1/2} + 2u_{j-1}^{n+1/2} - 4u_j^{n+1/2} \right) \right\} p_j^{n+1} \\ &\quad - \Delta t F(t^n, a, u_j^n) p_j^{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} \left(u_j^{n+1} - u_j^n \right) p_j^{n+1} - 2\nu D \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} u_{j+1}^{n+1/2} p_j^{n+1} \\ &\quad - 2\nu D \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} u_{j-1}^{n+1/2} p_j^{n+1} + 4\nu D \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} u_j^{n+1/2} p_j^{n+1} \\ &\quad - \Delta t \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} F(t^n, a, u_j^n) p_j^{n+1} \end{aligned}$$

haciendo uso de sumas por partes:

$$\blacksquare \sum_{n=0}^{M-1} (u_j^{n+1} - u_j^n) p_j^{n+1} = u_j^M p_j^M - u_j^0 p_j^0 - \sum_{n=0}^{M-1} u_j^n (p_j^{n+1} - p_j^n)$$

Por otro lado, modificando índices en:

$$\blacksquare \sum_{j=1}^{K-1} u_{j+1}^{n+1/2} p_j^{n+1} = \sum_{j=1}^{K-1} u_j^{n+1/2} p_{j-1}^{n+1} + u_K^{n+1/2} p_{K-1}^{n+1} - u_1^{n+1/2} p_0^{n+1}$$

$$\blacksquare \sum_{j=1}^{K-1} u_{j-1}^{n+1/2} p_j^{n+1} = \sum_{j=1}^{K-1} u_j^{n+1/2} p_{j+1}^{n+1} + u_0^{n+1/2} p_1^{n+1} - u_{K-1}^{n+1/2} p_K^{n+1}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} E_{\Delta}(u_{\Delta}, a, p_{\Delta}) &= \sum_{j=1}^{K-1} \left\{ u_j^M p_j^M - u_j^0 p_j^0 + \sum_{n=0}^{M-1} u_j^n (p_j^n - p_j^{n+1}) \right\} \\ &\quad - 2\nu D \sum_{n=0}^{M-1} \left\{ \sum_{j=1}^{K-1} u_j^{n+1/2} p_{j-1}^{n+1} + u_K^{n+1/2} p_{K-1}^{n+1} - u_1^{n+1/2} p_0^{n+1} \right\} \\ &\quad - 2\nu D \sum_{n=0}^{M-1} \left\{ \sum_{j=1}^{K-1} u_j^{n+1/2} p_{j+1}^{n+1} + u_0^{n+1/2} p_1^{n+1} - u_{K-1}^{n+1/2} p_K^{n+1} \right\} \\ &\quad + 4\nu D \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} u_j^{n+1/2} p_j^{n+1} - \Delta t \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} F(t^n, a, u_j^n) p_j^{n+1} \end{aligned}$$

es decir:

$$E_{\Delta}(u_{\Delta}, a, p_{\Delta}) = \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} (p_j^n - p_j^{n+1}) u_j^n - \nu D \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} (2p_{j-1}^{n+1} + 2p_{j+1}^{n+1} - 4p_j^{n+1}) u_j^{n+1/2}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{K-1} \left(u_j^M p_j^M - u_j^0 p_j^0 \right) \\
& - 2\nu D \sum_{n=0}^{M-1} \left(u_K^{n+1/2} p_{K-1}^{n+1} - u_1^{n+1/2} p_0^{n+1} + u_0^{n+1/2} p_1^{n+1} - u_{K-1}^{n+1/2} p_K^{n+1} \right) \\
& - \Delta t \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} F(t^n, a, u_j^n) p_j^{n+1}
\end{aligned}$$

Observar que:

$$\begin{aligned}
& -2\nu D \sum_{n=0}^{M-1} \left(u_K^{n+1/2} p_{K-1}^{n+1} - u_1^{n+1/2} p_0^{n+1} + u_0^{n+1/2} p_1^{n+1} - u_{K-1}^{n+1/2} p_K^{n+1} \right) \\
& = -2\nu D \sum_{n=0}^{M-1} \left\{ \left(u_K^{n+1/2} - u_{K-1}^{n+1/2} \right) p_{K-1}^{n+1} - \left(p_K^{n+1} - p_{K-1}^{n+1} \right) u_{K-1}^{n+1/2} \right\} \\
& \quad - 2\nu D \sum_{n=0}^{M-1} \left\{ \left(p_1^{n+1} - p_0^{n+1} \right) u_0^{n+1/2} - \left(u_1^{n+1/2} - u_0^{n+1/2} \right) p_0^{n+1} \right\}
\end{aligned}$$

aquí:

$$\begin{aligned}
& \blacksquare \left(u_K^{n+1/2} - u_{K-1}^{n+1/2} \right) = \frac{u_K^n + u_K^{n+1}}{2} - \frac{u_{K-1}^n + u_{K-1}^{n+1}}{2} = \frac{u_K^n - u_{K-1}^n}{2} + \frac{u_K^{n+1} - u_{K-1}^{n+1}}{2} \\
& \blacksquare \left(u_1^{n+1/2} - u_0^{n+1/2} \right) = \frac{u_1^n + u_1^{n+1}}{2} - \frac{u_0^n + u_0^{n+1}}{2} = \frac{u_1^n - u_0^n}{2} + \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{2}
\end{aligned}$$

y puesto que las condiciones de frontera cumplen:

$$\left(\forall j = 1, K, n = 0, \dots, M \right) \quad \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

entonces:

$$\blacksquare \left(u_K^{n+1/2} - u_{K-1}^{n+1/2} \right) = \left(u_1^{n+1/2} - u_0^{n+1/2} \right) = 0$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
& -2\nu D \sum_{n=0}^{M-1} \left(u_K^{n+1/2} p_{K-1}^{n+1} - u_1^{n+1/2} p_0^{n+1} + u_0^{n+1/2} p_1^{n+1} - u_{K-1}^{n+1/2} p_K^{n+1} \right) \\
& = -2\nu D \sum_{n=0}^{M-1} \left\{ \left(p_1^{n+1} - p_0^{n+1} \right) u_0^{n+1/2} - \left(p_K^{n+1} - p_{K-1}^{n+1} \right) u_{K-1}^{n+1/2} \right\}
\end{aligned}$$

y en consecuencia:

$$\begin{aligned}
E_\Delta(u_\Delta, a, p_\Delta) &= \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} \left(p_j^n - p_j^{n+1} \right) u_j^n - \nu D \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} \left(2p_{j-1}^{n+1} + 2p_{j+1}^{n+1} - 4p_j^{n+1} \right) u_j^{n+1/2} \\
&+ \sum_{j=1}^{K-1} \left\{ u_j^M p_j^M - u_j^0 p_j^0 \right\} \\
&- 2\nu D \sum_{n=0}^{M-1} \left\{ \left(p_1^{n+1} - p_0^{n+1} \right) u_0^{n+1/2} - \left(p_K^{n+1} - p_{K-1}^{n+1} \right) u_{K-1}^{n+1/2} \right\} \\
&- \Delta t \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} F(t^n, a, u_j^n) p_j^{n+1} \tag{6.22}
\end{aligned}$$

Luego, considerando δu_j^n una dirección arbitraria se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial E_\Delta}{\partial u_j^n}, \delta u_j^n \right\rangle &= \left(p_j^n - p_j^{n+1} \right) \delta u_j^n - \nu D \left(2p_{j-1}^{n+1} + 2p_{j+1}^{n+1} - 4p_j^{n+1} \right) \frac{\delta u_j^n}{2} \\
&+ \left\{ \delta u_j^M p_j^M - \delta u_j^0 p_j^0 \right\} \\
&- 2\nu D \left\{ \left(p_1^{n+1} - p_0^{n+1} \right) \frac{\delta u_0^n}{2} - \left(p_K^{n+1} - p_{K-1}^{n+1} \right) \frac{\delta u_{K-1}^n}{2} \right\} \\
&- \Delta t \frac{\partial F}{\partial u_j^n}(t^n, a, u_j^n) p_j^{n+1} \delta u_j^n
\end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_\Delta}{\partial u_j^n}, \delta u_j^n \right\rangle &= \frac{\partial J_\Delta}{\partial u_j^M}(u^M, a) \delta u_j^M + (p_j^n - p_j^{n+1}) \delta u_j^n - \nu D \left(2p_{j-1}^{n+1} + 2p_{j+1}^{n+1} - 4p_j^{n+1} \right) \frac{\delta u_j^n}{2} \\
&+ \{ \delta u_j^M p_j^M - \delta u_j^0 p_j^0 \} \\
&- 2\nu D \left\{ \left(p_1^{n+1} - p_0^{n+1} \right) \frac{\delta u_0^n}{2} - \left(p_K^{n+1} - p_{K-1}^{n+1} \right) \frac{\delta u_{K-1}^n}{2} \right\} \\
&- \Delta t \frac{\partial F}{\partial u_j^n}(t^n, a, u_j^n) p_j^{n+1} \delta u_j^n
\end{aligned}$$

aquí $u_j^0 = u_{j0}$ es un parámetro fijo y en consecuencia $\delta u_j^0 = 0$, por consiguiente:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_\Delta}{\partial u_j^n}, \delta u_j^n \right\rangle &= \left\{ \left(p_j^n - p_j^{n+1} \right) - \nu D \left(p_{j-1}^{n+1} + p_{j+1}^{n+1} - 2p_j^{n+1} \right) - \Delta t \frac{\partial F}{\partial u_j^n}(t^n, a, u_j^n) p_j^{n+1} \right\} \delta u_j^n \\
&+ \left\{ \frac{\partial J_\Delta}{\partial u_j^M}(u_j^M, a) + p_j^M \right\} \delta u_j^M \\
&- \nu D \left\{ \left(p_1^{n+1} - p_0^{n+1} \right) \delta u_0^n - \left(p_K^{n+1} - p_{K-1}^{n+1} \right) \delta u_{K-1}^n \right\}
\end{aligned}$$

De forma análoga que en el caso continuo se desea encontrar p_Δ tal que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\Delta}{\partial u_j^n}(u_\Delta, a, p_\Delta) = 0$$

luego p_Δ cumple con:

- $\left(p_j^n - p_j^{n+1} \right) - \nu D \left(p_{j-1}^{n+1} - 2p_j^{n+1} + p_{j+1}^{n+1} \right) - \Delta t \frac{\partial F}{\partial u_j^n}(t^n, a, u_j^n) p_j^{n+1} = 0$, para todo $j = 1, \dots, K-1$ y $n = 0, \dots, M-1$.
- $\frac{\partial J_\Delta}{\partial u_j^M}(u^M, a) + p_j^M = 0$, para todo $j = 1, \dots, K-1$.
- $\left(p_1^n - p_0^n \right) = 0 \wedge \left(p_K^n - p_{K-1}^n \right) = 0$, para todo $n = 0, \dots, M$.

esto es, p_Δ satisface el siguiente problema adjunto discreto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p_j^n - p_j^{n+1}}{\Delta t} = \frac{D}{2\Delta x^2} (p_{j-1}^{n+1} - 2p_j^{n+1} + p_{j+1}^{n+1}) + \frac{\partial F}{\partial u_j^n}(t^n, a, u_j^n) p_j^{n+1} \\ \text{para todo } j = 1, \dots, K-1 \text{ y } n = 0, \dots, M-1. \\ \\ p_j^M = -\frac{\partial J_\Delta}{\partial u_j^M}(u^M, a), \text{ para todo } j = 1, \dots, K-1. \\ \\ p_0^n = p_1^n \wedge p_{K-1}^n = p_K^n, \text{ para todo } n = 0, \dots, M. \end{array} \right. \quad (6.23)$$

el cual es un esquema de diferencias finitas explícito con condiciones finales y cuya restricción de estabilidad es $\frac{D\Delta t}{2\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$, en particular, si $\frac{D\Delta t}{2\Delta x^2} \leq \frac{1}{4}$ la solución no oscilará y si $\frac{D\Delta t}{2\Delta x^2} \leq \frac{1}{6}$ entonces se tiende a minimizar los errores por truncamiento (p. 891, [Chapra and Canale, 2006]).

Finalmente, como $u = u(a)$ entonces $\tilde{J}_\Delta(a) := J_\Delta(u^M, a)$ y el gradiente discreto con respecto al parámetro a :

$$\frac{\mathbf{d}\tilde{J}_\Delta(a)}{\mathbf{d}a} = \frac{\partial \mathcal{L}_\Delta(u_\Delta, a, p_\Delta)}{\partial a}$$

es:

$$\nabla_a \tilde{J}_\Delta(a) = \frac{\partial J_\Delta}{\partial a}(u^M, a) - \Delta t \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} \frac{\partial F}{\partial a}(t^n, a, u_j^n) p_j^{n+1} \quad (6.24)$$

aquí se considera la formulación variacional según (6.22), u_j^n es solución del problema directo discreto y p_j^n es solución del problema adjunto discreto.

b.2) Problema en estudio: Sea $\Omega_1 = [0, l_1] \subset \mathbb{R}$, $\Omega_2 = [l_2, L] \subset \mathbb{R}$ y $0 < l_2 < l_1 < L$.

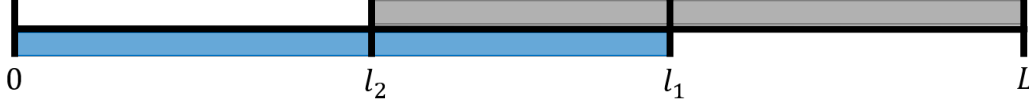


Figura 6.1: Intervalo de trabajo $[0, L]$. En azul Ω_1 y en negro Ω_2 .

$[0, l_1]$ se particiona de tal forma que $x_j = j\Delta x$ con $\Delta x > 0$, $j = 0, \dots, k_1$, $x_0 = 0$, $x_{k_2} = l_2$ y $x_{k_1} = l_1$ ($0 < k_2 < k_1$), por su parte $[l_2, L]$ se particiona de modo que $x_j = j\Delta x$ con $j = k_2, \dots, K$, $K = L/\Delta x$, $x_{k_2} = l_2$, $x_{k_1} = l_1$ y $x_K = L$ ($k_2 < k_1 < K$).

Por su parte, $[0, T]$ se divide en $M - 1$ subintervalos de la forma $[t^n, t^{n+1}]$ donde $\Delta t > 0$, $t^n = n\Delta t$ con $n = 0, \dots, M - 1$ tal que $M = T/\Delta t$, $t^0 = 0$ y $t^M = T$.

El problema directo discreto que se obtiene al aplicar el esquema Crank-Nicolson al problema (6.11)-(6.13) es:

- Para todo $j = 1, \dots, k_1 - 1$ y $n = 0, \dots, M - 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d_u \Delta t}{2\Delta x^2} u_{1_{j-1}}^{n+1} + \left(1 + \frac{d_u \Delta t}{\Delta x^2}\right) u_{1_j}^{n+1} - \frac{d_u \Delta t}{2\Delta x^2} u_{1_{j+1}}^{n+1} = \frac{d_u \Delta t}{2\Delta x^2} u_{1_{j-1}}^n \\ + \left(1 - \frac{d_u \Delta t}{\Delta x^2}\right) u_{1_j}^n + \frac{d_u \Delta t}{2\Delta x^2} u_{1_{j+1}}^n + \Delta t \left(-\frac{\beta_{bb}(t^n, a)}{N_1} u_{1_j}^n u_{2_j}^n + \gamma_b u_{2_j}^n \right). \\ \\ -\frac{d_u \Delta t}{2\Delta x^2} u_{2_{j-1}}^{n+1} + \left(1 + \frac{d_u \Delta t}{\Delta x^2}\right) u_{2_j}^{n+1} - \frac{d_u \Delta t}{2\Delta x^2} u_{2_{j+1}}^{n+1} = \frac{d_u \Delta t}{2\Delta x^2} u_{2_{j-1}}^n \\ + \left(1 - \frac{d_u \Delta t}{\Delta x^2}\right) u_{2_j}^n + \frac{d_u \Delta t}{2\Delta x^2} u_{2_{j+1}}^n + \Delta t \left(\frac{\beta_{bb}(t^n, a)}{N_1} u_{1_j}^n u_{2_j}^n - \gamma_b u_{2_j}^n \right). \end{array} \right. \quad (6.25)$$

con $u_{1_1}^n = u_{1_0}^n \wedge u_{1_{k_1}}^n = u_{1_{k_1-1}}^n$ y $u_{2_1}^n = u_{2_0}^n \wedge u_{2_{k_1}}^n = u_{2_{k_1-1}}^n$, para todo $n = 0, \dots, M$.

- Para todo $j = k_2 + 1, \dots, K - 1$ y $n = 0, \dots, M - 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} v_{1_{j-1}}^{n+1} + \left(1 + \frac{d_v \Delta t}{\Delta x^2}\right) v_{1_j}^{n+1} - \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} v_{1_{j+1}}^{n+1} = \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} v_{1_{j-1}}^n \\ + \left(1 - \frac{d_v \Delta t}{\Delta x^2}\right) v_{1_j}^n + \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} v_{1_{j+1}}^n + \Delta t \left\{ -\frac{\beta_{hh}}{N_2} v_{2_j}^n v_{1_j}^n - \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_{1_j}^n u_{2_j}^n \right\}. \\ \\ -\frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} v_{2_{j-1}}^{n+1} + \left(1 + \frac{d_v \Delta t}{\Delta x^2}\right) v_{2_j}^{n+1} - \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} v_{2_{j+1}}^{n+1} = \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} v_{2_{j-1}}^n \\ + \left(1 - \frac{d_v \Delta t}{\Delta x^2}\right) v_{2_j}^n + \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} v_{2_{j+1}}^n + \Delta t \left\{ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_{2_j}^n v_{1_j}^n + \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_{1_j}^n u_{2_j}^n - \gamma_h v_{2_j}^n \right\}. \\ \\ -\frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} v_{3_{j-1}}^{n+1} + \left(1 + \frac{d_v \Delta t}{\Delta x^2}\right) v_{3_j}^{n+1} - \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} v_{3_{j+1}}^{n+1} = \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} v_{3_{j-1}}^n \\ + \left(1 - \frac{d_v \Delta t}{\Delta x^2}\right) v_{3_j}^n + \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} v_{3_{j+1}}^n + \Delta t \gamma_h v_{2_j}^n. \end{array} \right. \quad (6.26)$$

con $v_{1_{k_2+1}}^n = v_{1_{k_2}}^n \wedge v_{1_K}^n = v_{1_{K-1}}^n$, $v_{2_{k_2+1}}^n = v_{2_{k_2}}^n \wedge v_{2_K}^n = v_{2_{K-1}}^n$, $v_{3_{k_2+1}}^n = v_{3_{k_2}}^n \wedge v_{3_K}^n = v_{3_{K-1}}^n$,
para todo $n = 0, \dots, M$.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_j^{n+1} = c_j^n + \Delta t \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_{1_j}^n v_{2_j}^n \end{array} \right. \quad (6.27)$$

Se define la solución del problema directo discreto (6.25)-(6.27) como $u_j^n = [u_{1_j}^n, u_{2_j}^n, v_{1_j}^n, v_{2_j}^n, v_{3_j}^n, c_j^n]^t$ (con $j = 0, \dots, K$ y $n = 0, \dots, M$), donde:

$$u_{1_j}^n = u_{2_j}^n = 0 \quad , \quad \text{cuando } j = k_1 + 1, \dots, K. \text{ y } n = 0, \dots, M.$$

$$v_{1_j}^n = v_{2_j}^n = v_{3_j}^n = c_j^n = 0 \quad , \quad \text{cuando } j = 0, \dots, k_2 - 1. \text{ y } n = 0, \dots, M.$$

y se denotará $u^M := (u_j^M)_{j=1}^K$.

Por otro lado, se define la función de costo discreta:

$$J_{\Delta}(u^M, a) := \frac{\Delta x}{L - l_2} \sum_{j=k_2}^K \left\{ Av_{3_j}^M + Bc_j^M \right\} + \varepsilon \left\{ (1 - \alpha)^2 + \gamma^2 \right\}$$

y por tanto el problema de optimización discreto queda:

$$\begin{cases} \text{mín} & J_{\Delta}(u^M, a) \\ a \in Q \\ \text{sujeto a:} & u_j^n \text{ satisface (6.25) - (6.27)} \end{cases} \quad (6.28)$$

De acuerdo a (6.23) y a A.2.3 (con p en lugar de λ), se obtiene que el problema adjunto discreto para el problema (6.28) es:

- Para todo $j = k_2 + 1, \dots, K - 1$ y $n = 0, \dots, M - 1$:

$$\begin{cases} p_{6_j}^n = p_{6_j}^{n+1} \\ p_{5_j}^n = \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} p_{5_{j-1}}^{n+1} + \left(1 - \frac{d_v \Delta t}{\Delta x^2}\right) p_{5_j}^{n+1} + \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} p_{5_{j+1}}^{n+1} \\ p_{4_j}^n = \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} p_{4_{j-1}}^{n+1} + \left(1 - \frac{d_v \Delta t}{\Delta x^2}\right) p_{4_j}^{n+1} + \Delta t \left\{ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_{1_j}^n \left(p_{4_j}^{n+1} + p_{6_j}^{n+1} - p_{3_j}^{n+1}\right) + \gamma_h \left(p_{5_j}^{n+1} - p_{4_j}^{n+1}\right) \right\} + \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} p_{4_{j+1}}^{n+1} \\ p_{3_j}^n = \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} p_{3_{j-1}}^{n+1} + \left(1 - \frac{d_v \Delta t}{\Delta x^2}\right) p_{3_j}^{n+1} + \Delta t \left\{ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_{2_j}^n \left(p_{4_j}^{n+1} + p_{6_j}^{n+1} - p_{3_j}^{n+1}\right) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} u_{2_j}^n \left(p_{4_j}^{n+1} - p_{3_j}^{n+1}\right) \right\} + \frac{d_v \Delta t}{2\Delta x^2} p_{3_{j+1}}^{n+1} \end{cases} \quad (6.29)$$

con condiciones de frontera:

$$p_{w_{k_2}}^n = p_{w_{k_2+1}}^n \wedge p_{w_{K-1}}^n = p_{w_K}^n, \text{ para todo } n = 0, \dots, M \text{ y } w \in \{3, 4, 5\}$$

condiciones finales: $p_{5_j}^M = -\frac{A\Delta x}{L-l_2}$, $p_{6_j}^M = -\frac{B\Delta x}{L-l_2}$ y $p_{3_j}^M = p_{4_j}^M = 0$.

y restricción de estabilidad: $\frac{d_v\Delta t}{2\Delta x^2} \leq \frac{1}{6}$.

- Para todo $j = 1, \dots, k_1 - 1$ y $n = 0, \dots, M - 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{2_j}^n = \frac{d_u\Delta t}{2\Delta x^2} p_{2_{j-1}}^{n+1} + \left(1 - \frac{d_u\Delta t}{\Delta x^2}\right) p_{2_j}^{n+1} + \\ \Delta t \left\{ \left(\frac{\beta_{bb}(t^n, a)}{N_1} u_{1_j}^n - \gamma_b\right) (p_{2_j}^{n+1} - p_{1_j}^{n+1}) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_{1_j}^n (p_{4_j}^{n+1} - p_{3_j}^{n+1}) \right\} + \frac{d_u\Delta t}{2\Delta x^2} p_{2_{j+1}}^{n+1} \\ \\ p_{1_j}^n = \frac{d_u\Delta t}{2\Delta x^2} p_{1_{j-1}}^{n+1} + \left(1 - \frac{d_u\Delta t}{\Delta x^2}\right) p_{1_j}^{n+1} + \Delta t \left\{ \frac{\beta_{bb}(t^n, a)}{N_1} u_{2_j}^n (p_{2_j}^{n+1} - p_{1_j}^{n+1}) \right\} + \frac{d_u\Delta t}{2\Delta x^2} p_{1_{j+1}}^{n+1} \end{array} \right. \quad (6.30)$$

con condiciones de frontera:

$$p_{w_0}^n = p_{w_1}^n \wedge p_{w_{k_1-1}}^n = p_{w_{k_1}}^n, \text{ para todo } n = 0, \dots, M \text{ y } w \in \{1, 2\}$$

condiciones finales: $p_{2_j}^M = p_{1_j}^M = 0$ y restricción de estabilidad: $\frac{d_u\Delta t}{2\Delta x^2} \leq \frac{1}{6}$.

Por último, se define la solución del problema adjunto discreto (6.29)-(6.30) como $p_j^n := [p_{1_j}^n, p_{2_j}^n, p_{3_j}^n, p_{2_j}^n, p_{3_j}^n, p_{4_j}^n]^t$ (con $j = 0, \dots, K$ y $n = 0, \dots, M$), donde:

$$p_{1_j}^n = p_{2_j}^n = 0 \quad , \quad \text{cuando } j = k_1 + 1, \dots, K. \text{ y } n = 0, \dots, M.$$

$$p_{3_j}^n = p_{4_j}^n = p_{5_j}^n = p_{6_j}^n = 0 \quad , \quad \text{cuando } j = 0, \dots, k_2 - 1. \text{ y } n = 0, \dots, M.$$

y por tanto el gradiente discreto de la función costo con respecto al parámetro a (de acuerdo a (6.24) y a A.2.3) queda como:

$$\nabla_a \tilde{J}_\Delta(a) = \begin{bmatrix} -2\varepsilon(1-\alpha) \\ 2\varepsilon\gamma \end{bmatrix} - \Delta t \sum_{j=1}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{M-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{N_1} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \alpha}(t^n, a) u_{1_j}^n u_{2_j}^n (p_{2_j}^{n+1} - p_{1_j}^{n+1}) \\ \frac{1}{N_1} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \gamma}(t^n, a) u_{1_j}^n u_{2_j}^n (p_{2_j}^{n+1} - p_{1_j}^{n+1}) \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Capítulo 7

Análisis de Sensibilidad

En el capítulo 4 y 5 se probó la existencia de la solución del modelo temporal y espacio-temporal respectivamente, y por tanto los problemas están bien definidos.

En este capítulo se analizará numéricamente la respuesta a la variación del parámetro a de las soluciones del modelo temporal y del modelo espacio-temporal, y la respuesta de las cantidades de interés (según cada modelo). Además se explicará la obtención del funcional con el cual se trabaja en cada uno de los problemas de optimización que se presentaron en el capítulo 6.

El modelo temporal tendrá como dominio el intervalo $[0, T]$ y el modelo espacio-temporal tendrá como dominio espacial a un subconjunto de \mathbb{R} $([0, L])$ y como dominio temporal a $[0, T]$.

7.1. Modelo Temporal

Recordar que:

- $u_1(t)$ y $u_2(t)$ es la cantidad de individuos susceptibles e infectados en el tiempo t , respectivamente, de la población H_1 .
- $v_1(t)$, $v_2(t)$ y $v_3(t)$ es la cantidad de individuos susceptibles, infectados y recuperados en el tiempo t , respectivamente, de la población H_2 .
- $c(t)$ es el término de incidencia en el tiempo t en la población H_2 .

a) Solución Numérica

Se resuelve el esquema (6.9) con condiciones iniciales $u_1^0 = 99.990$, $u_2^0 = 0.001$, $v_1^0 = 100$ y $v_2^0 = v_3^0 = c^0 = 0$ y los valores con los que se trabajará son:

- $T = 700$.
- Parámetros del modelo: $N_1 = N_2 = 100$, $\gamma_b = 0.1$, $\gamma_h = 0.1$, $\beta_{hh} = 0.2$, $\beta_{bh} = 0.3$.
- Parámetros de β_{bb} : $\tilde{\beta}_{bb} = 0.3$ y $[\alpha, \gamma, t_c] \in [0.05, 1] \times [0.05, 1] \times [5, 300]$.
- Parámetros del esquema numérico: $h = 0.05$ y $K = 14.000$.

los resultados numéricos se presentan a continuación:

Ejemplo 1: $\alpha = 0.3$, $\gamma = 0.2$, $t_c = 50$

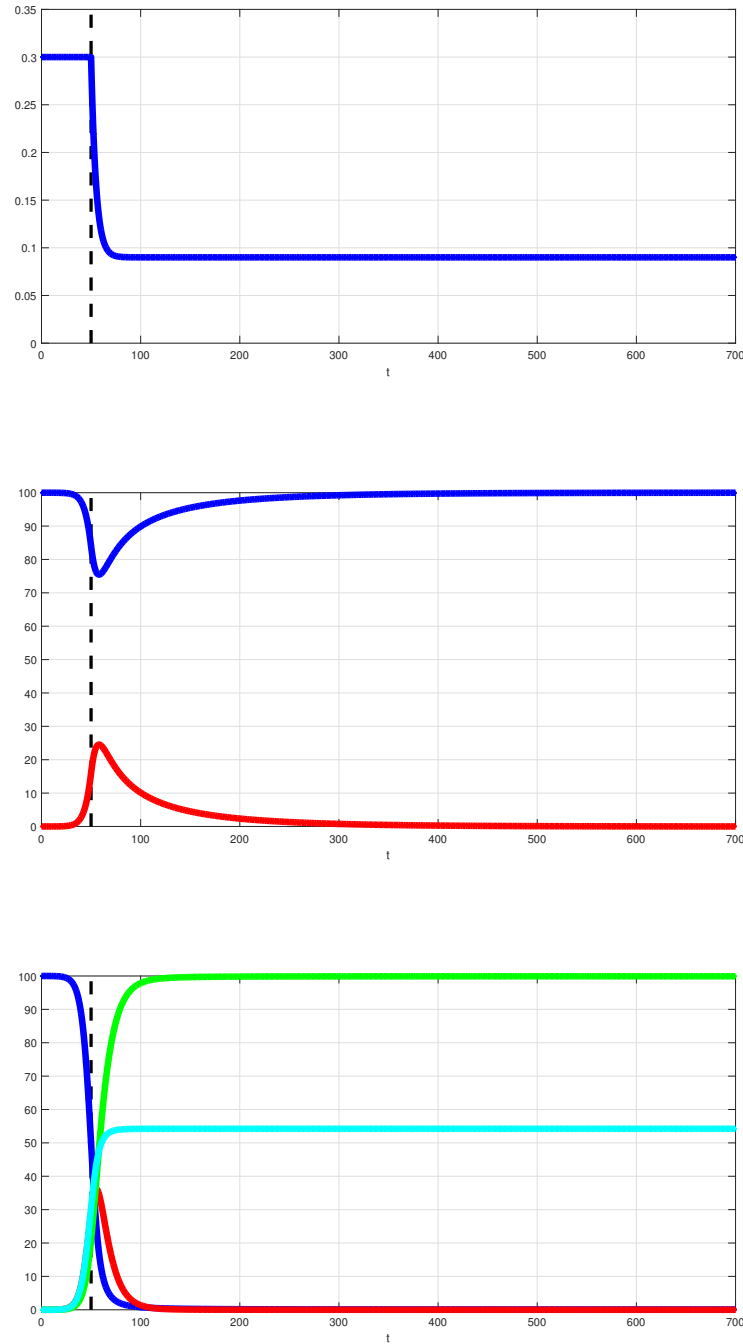


Figura 7.1: t_c (línea vertical punteada en negro). **Gráfico sup.:** β_{bb} en azul; **Gráfico centr.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

Ejemplo 2: $\alpha = 0.3$, $\gamma = 0.2$ y $t_c = 150$.

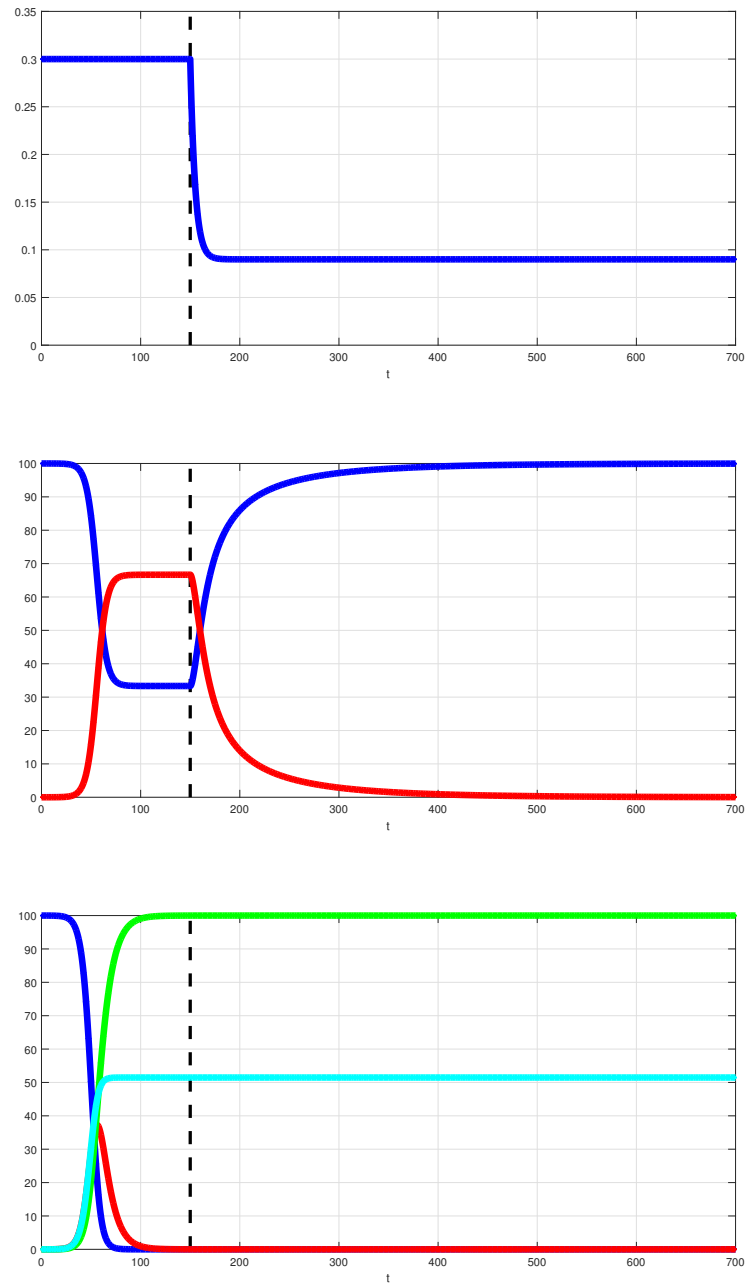


Figura 7.2: t_c (línea vertical punteada en negro). **Gráfico sup.:** β_{bb} en azul; **Gráfico centr.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

Ejemplo 3: $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.4$, $t_c = 60$

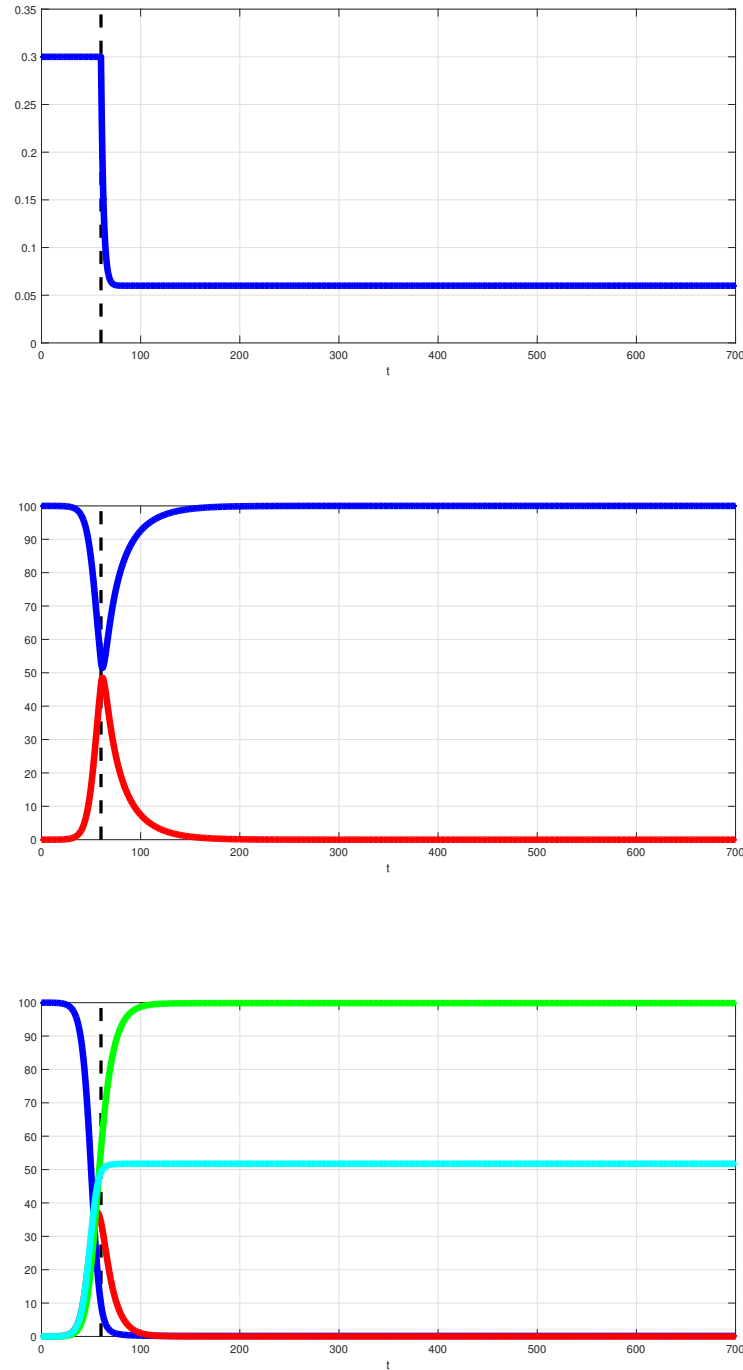


Figura 7.3: t_c (línea vertical punteada en negro). **Gráfico sup.:** β_{bb} en azul; **Gráfico centr.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

b) Cantidades de Interés

Las cantidades de interés (o indicadores) se definieron como:

- **Tasa de Ataque en Humanos:** $v_3(T)$.
- **Incidencia Acumulada en Humanos:** $c(T)$.
- **Cantidad Máxima de Humanos Infectados** - $\max_{t \in I} v_2(t)$: es la cantidad máxima de individuos infectados de la población H_2 considerando todo el periodo de duración de la enfermedad.
- **Tiempo de Extinción de la Enfermedad en Humanos** - t_{ex} : es el tiempo posterior a t_{max} y en donde la cantidad de humanos infectados es inferior a 1 (t_{max} es el tiempo en donde se alcanza la máxima cantidad de humanos infectados). Matemáticamente, t_{ex} se define como $t_{max} < t_{ex}$ y $v_2(t_{ex}) < 1$ donde t_{max} es $v_2(t_{max}) = \max_{t \in I} v_2(t)$.

Luego, para:

- $\alpha, \gamma \in \{0.05 + j0.0025 : j = 0, \dots, 380\}$
- $t_c \in \{5 + j5 : j = 0, \dots, 21\}$

se obtiene:

Tasa de Ataque de Humanos ($v_3(T)$):

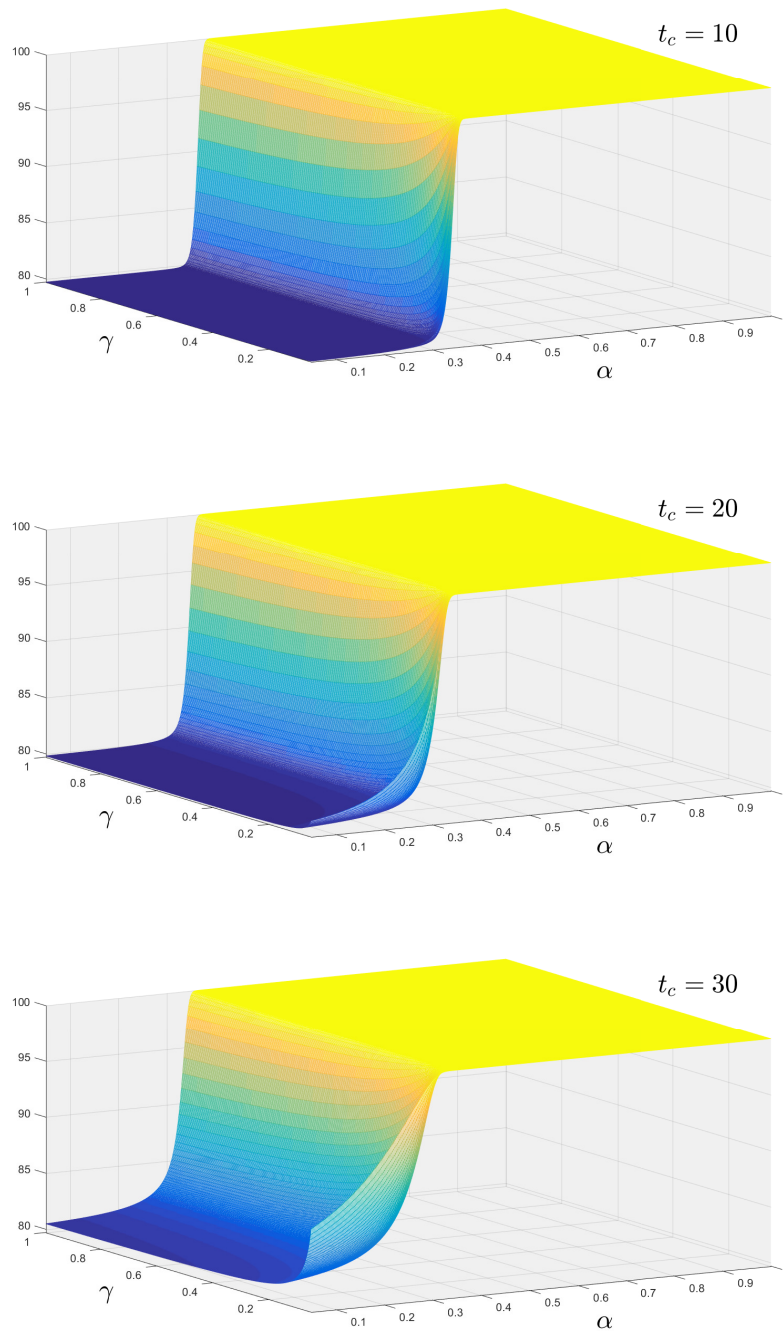


Figura 7.4: $t_c = 10$ (sup.), $t_c = 20$ (centr.) y $t_c = 30$ (inf.)

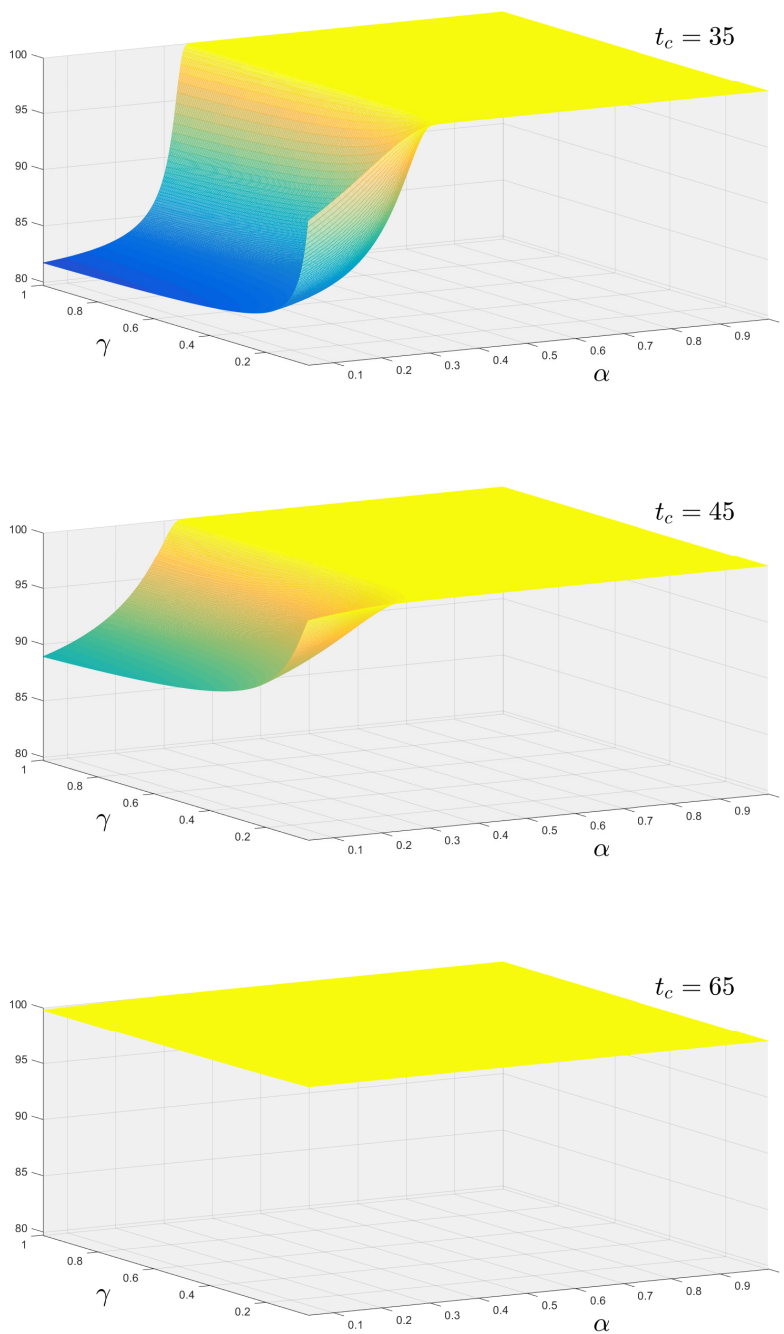


Figura 7.5: $t_c = 35$ (sup.), $t_c = 45$ (centr.) y $t_c = 65$ (inf.).

Se observa que mientras t_c crece: para $\alpha \geq 0.35$, $v_3(T)$ se mantiene constante ($v_3(T) = 100$) y para $\alpha < 0.35$, $v_3(T)$ crece hasta $v_3(T) = 100$.

Incidencia Acumulada de Humanos ($c(T)$):

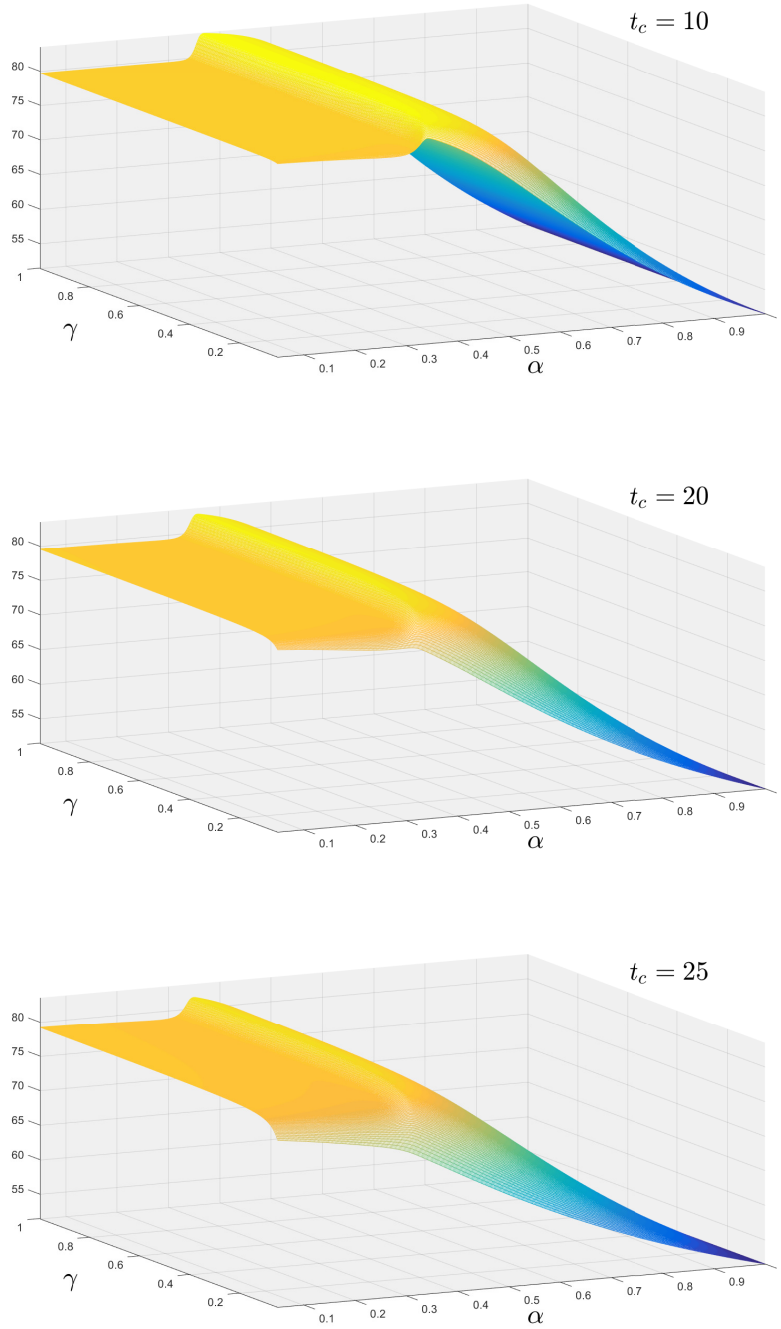


Figura 7.6: $t_c = 10$ (sup.), $t_c = 20$ (centr.) y $t_c = 25$ (inf.).

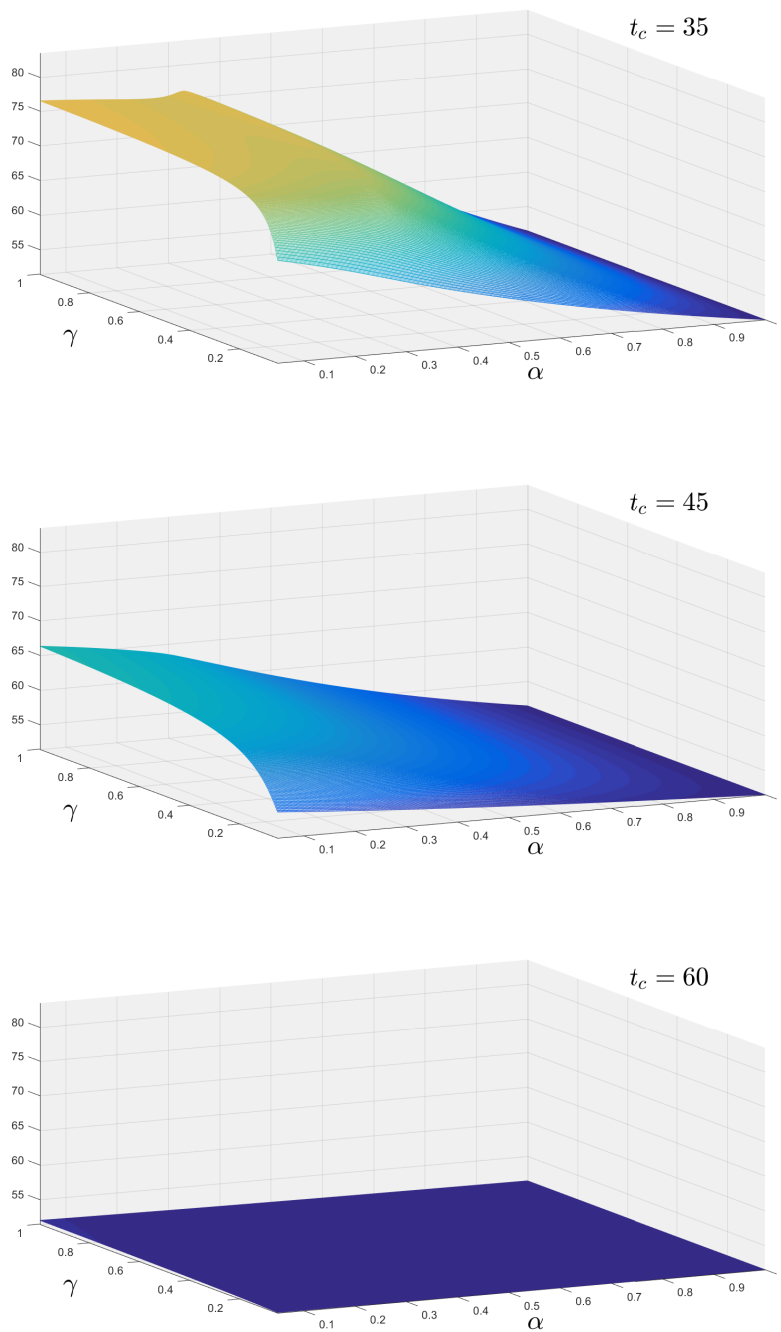


Figura 7.7: $t_c = 35$ (sup.), $t_c = 45$ (centr.) y $t_c = 60$ (inf.).

Por su parte, $c(T)$ disminuye y tiende a 51.4754 cuando t_c crece.

Cantidad Máxima de Humanos Infectados ($\max_{t \in I} v_2(t)$):

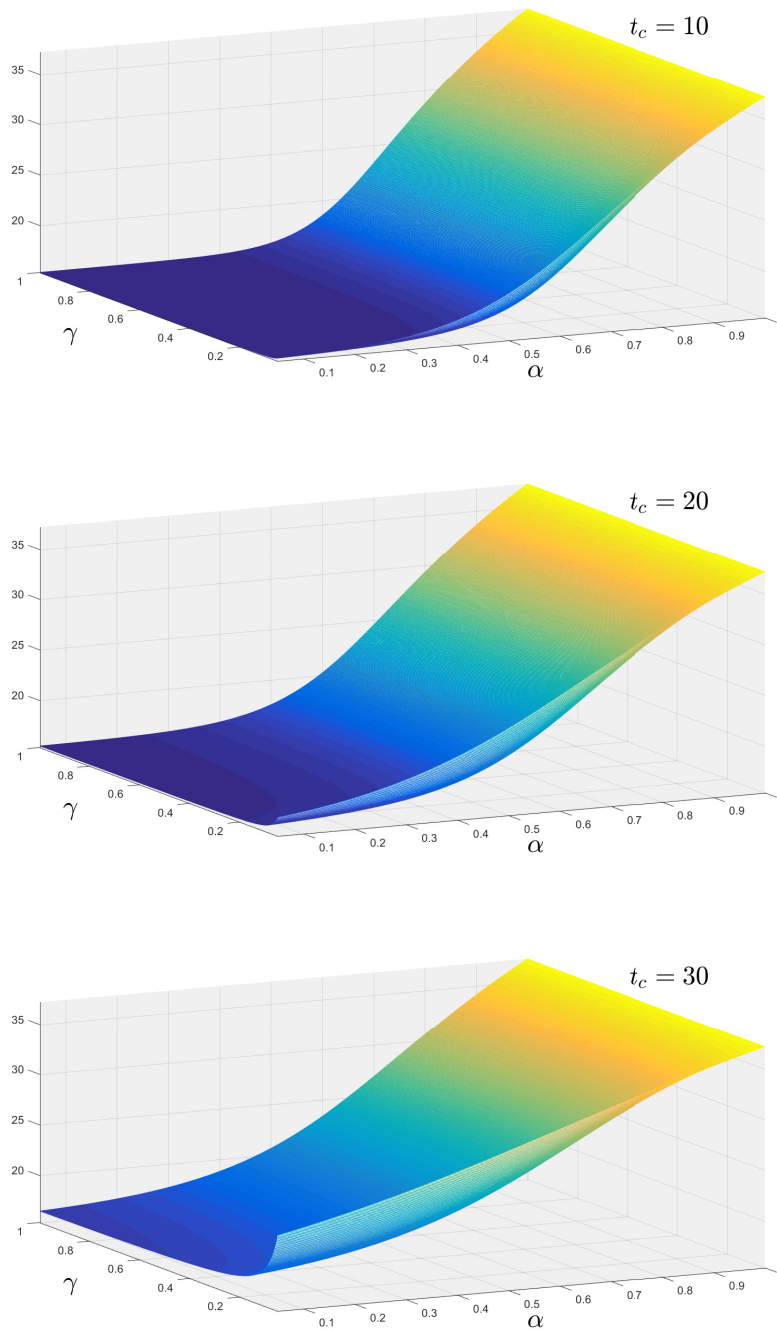


Figura 7.8: $t_c = 10$ (sup.), $t_c = 20$ (centr.) y $t_c = 30$ (inf.).

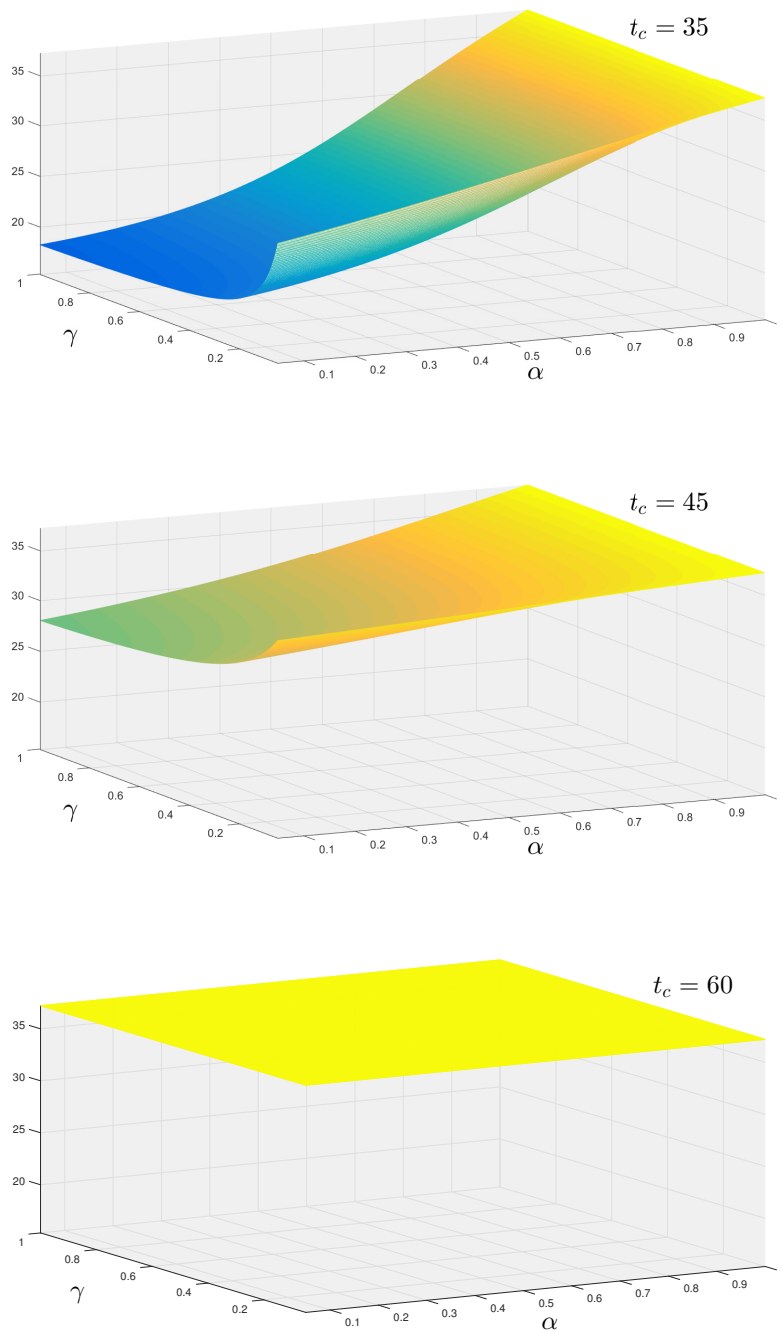
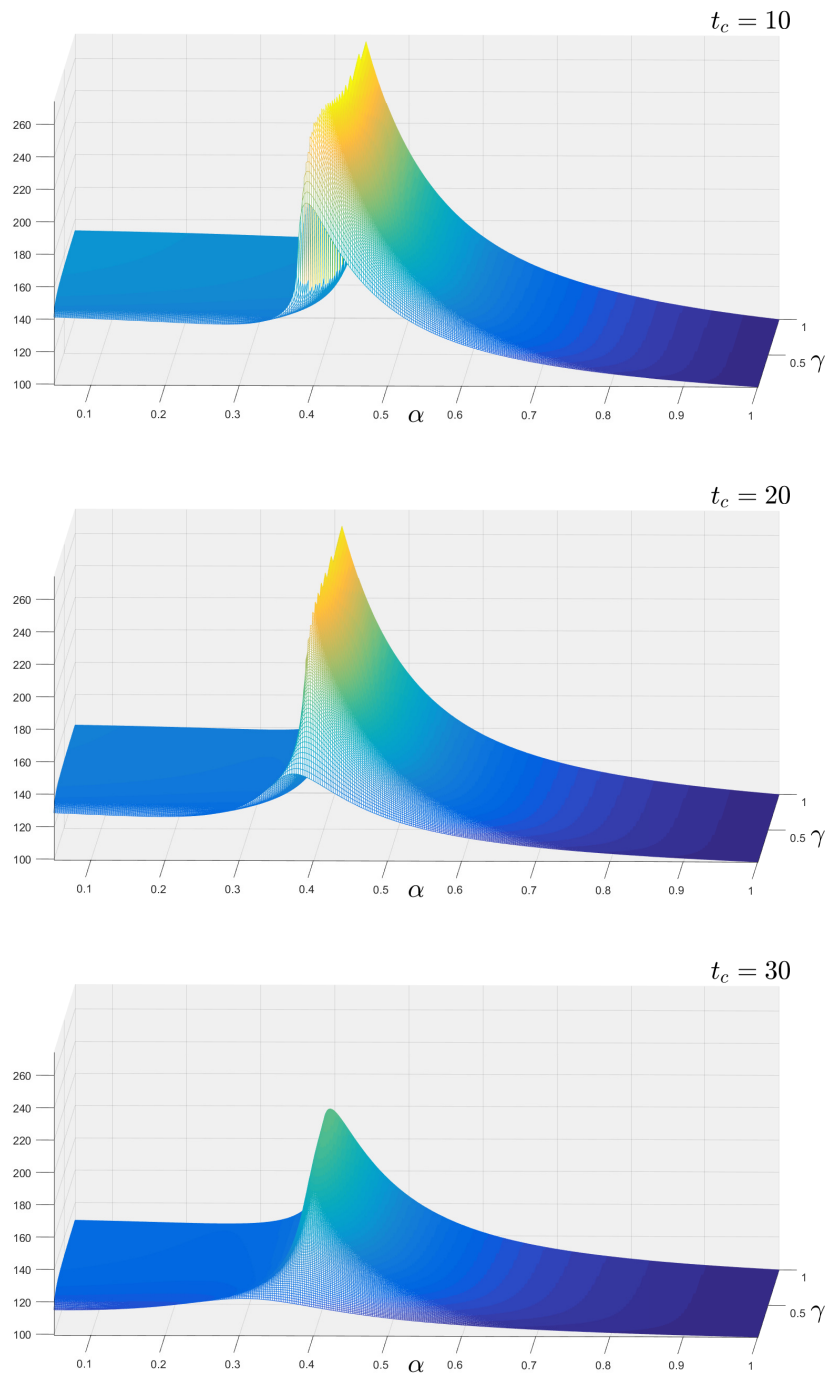


Figura 7.9: $t_c = 35$ (sup.), $t_c = 45$ (centr.) y $t_c = 60$ (inf.).

Aquí, $\max_{t \in I} v_2(t) \in [1, 37.2176]$ y mientras t_c crece $\max_{t \in I} v_2(t)$ tiende a su máximo valor.

Tiempo de Extinción de la Enfermedad en Humanos (t_{ex}):Figura 7.10: $t_c = 10$ (sup.), $t_c = 20$ (centr.) y $t_c = 30$ (inf.).

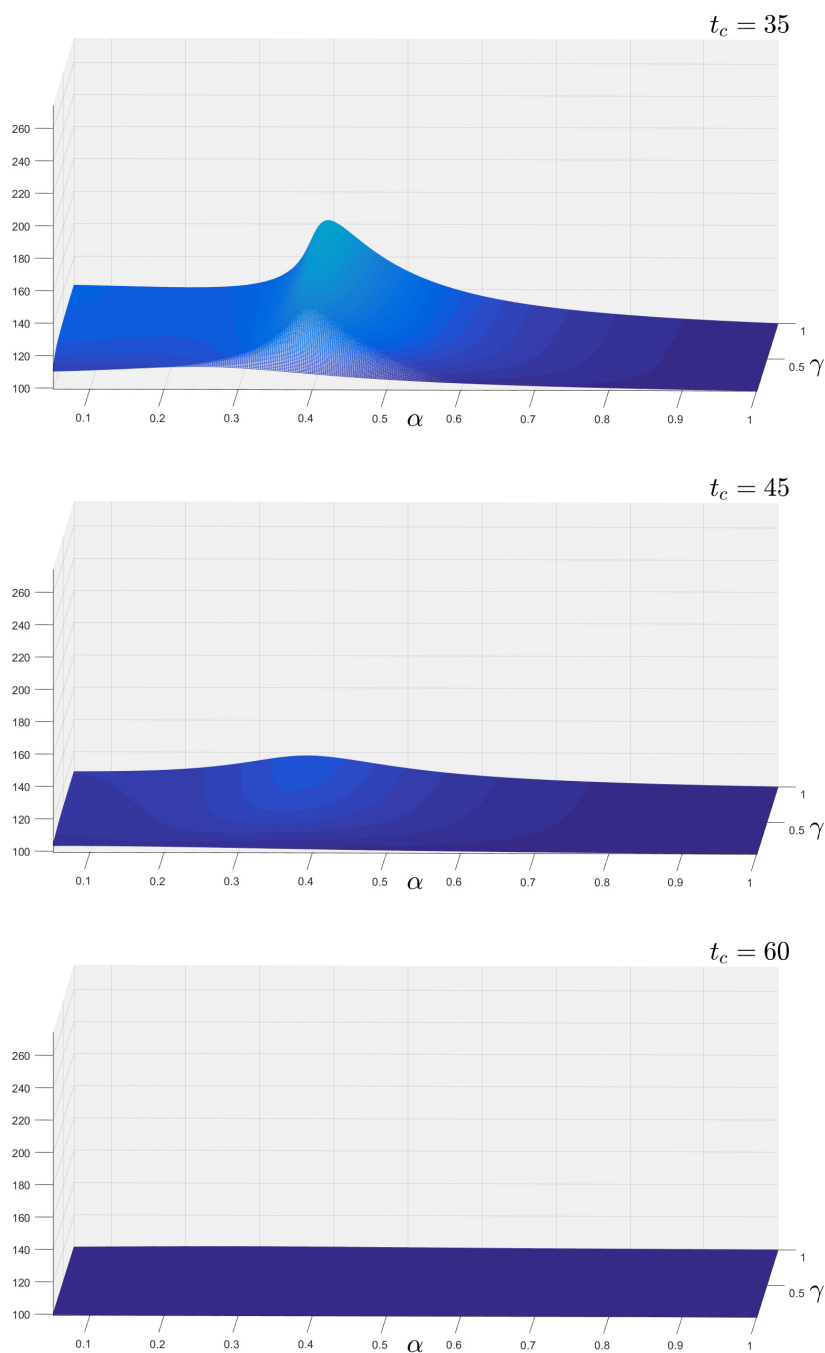


Figura 7.11: $t_c = 35$ (sup.), $t_c = 45$ (centr.) y $t_c = 60$ (inf.).

Por su parte, t_{ex} alcanza su máximo (274.8500) cuando $0.35 \leq \alpha \leq 0.5$ y $t_c = 10$. Mientras t_c crece, t_{ex} decrece hasta ser constante (99.4500) en todo el dominio de prueba.

Por consiguiente, se concluye que todas las cantidades de interés se ven afectadas por la variación de los parámetros α , γ y t_c .

c) Función Objetivo

La función objetivo propuesta inicialmente es:

$$J(u(T), a) = Av_3(T) + Bc(T) + C \max_{t \in [0, T]} v_2(t) + Dt_{ex} + \varepsilon g(a)$$

donde g es una función que debe aportar a la convexidad de J y se considerará, en un principio, como una combinación lineal de los siguientes términos: γ^2 , $(1 - \gamma)^2$, α^2 , $(1 - \alpha)^2$, t_c^{-2} y α^{-2} .

Tras diversas pruebas numéricas se define g como sigue:

$$g(a) = (1 - \alpha)^2 + \gamma^2$$

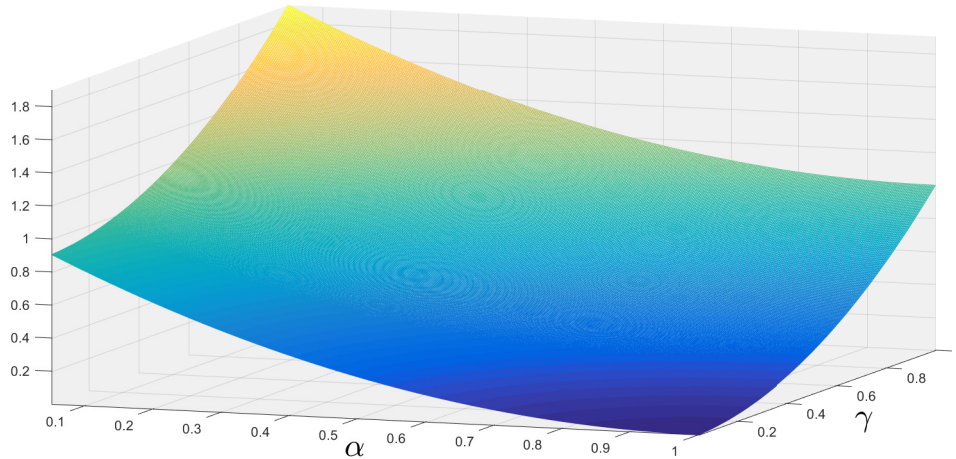


Figura 7.12: Función $g(a) = (1 - \alpha)^2 + \gamma^2$.

Considerando la respuesta de las cantidades de interés a la variación de a y la suavidad de las curvas obtenidas, se decide:

- No considerar t_{ex} como parte de la función costo.
- Considerar t_c como parámetro fijo que se escoge de manera que aporte a la convexidad de J . Luego la variable de control queda como $a := [\alpha, \gamma]^t$.

Por tanto, la tarea es escoger: t_c , A , B , C , D y ε de manera que aporten suavidad y convexidad a J en alguna región convexa del dominio de a (en este caso: $a \in [0.05, 0.7] \times [0.05, 0.7]$). Aquí, el criterio de elección de los parámetros mencionados obedece a otorgar propiedades de convexidad parcial a la función objetivo, sin embargo, la elección de éstos se podría regir con más fuerza por criterios epidemiológicos.

Ejemplos de parámetros y la función objetivo resultante se presentan a continuación:

Ejemplo 1:

$$J(u(T), a) = 2v_3(T) - 3c(T) + \max_{t \in [0, T]} v_2(t) + 45 \{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \text{ y } t_c = 15$$

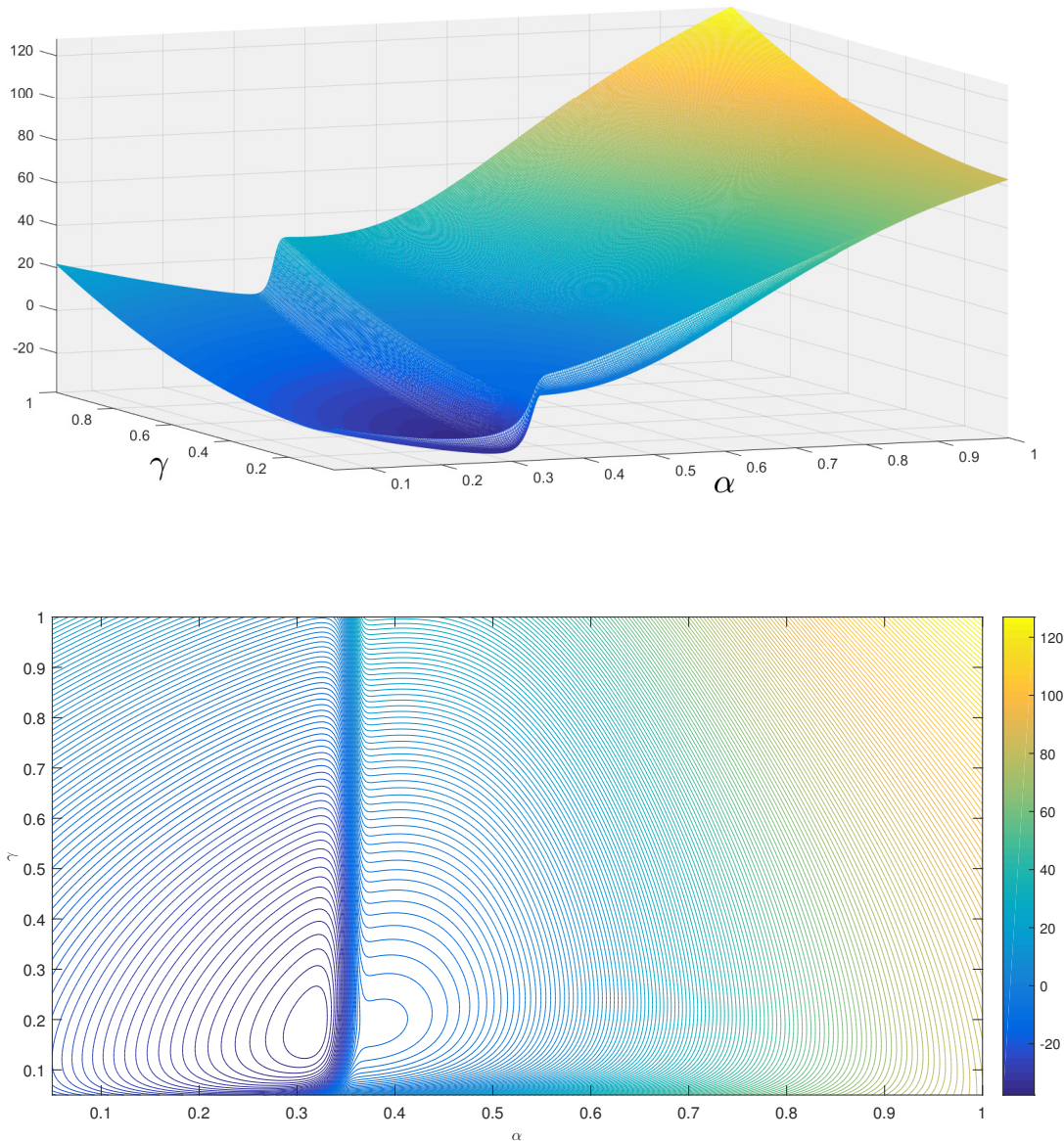


Figura 7.13: **Gráfico sup.:** Tridimensional, **Gráfico inf.:** Líneas de Contorno.

Ejemplo 2:

$$J(u(T), a) = 5v_3(T) + 2c(T) + 4 \max_{t \in [0, T]} v_2(t) + 10 \{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \text{ y } t_c = 35.$$

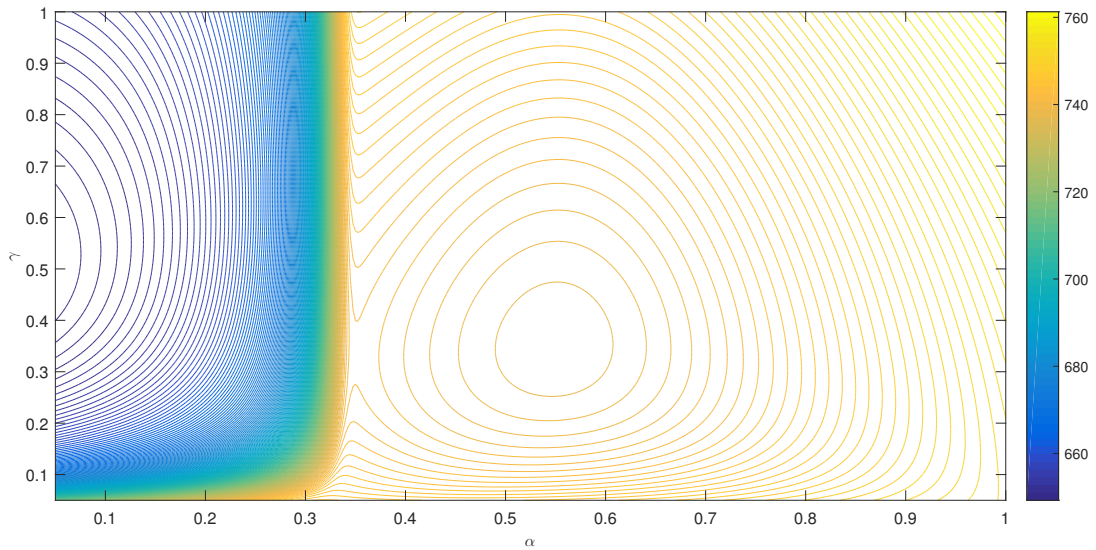
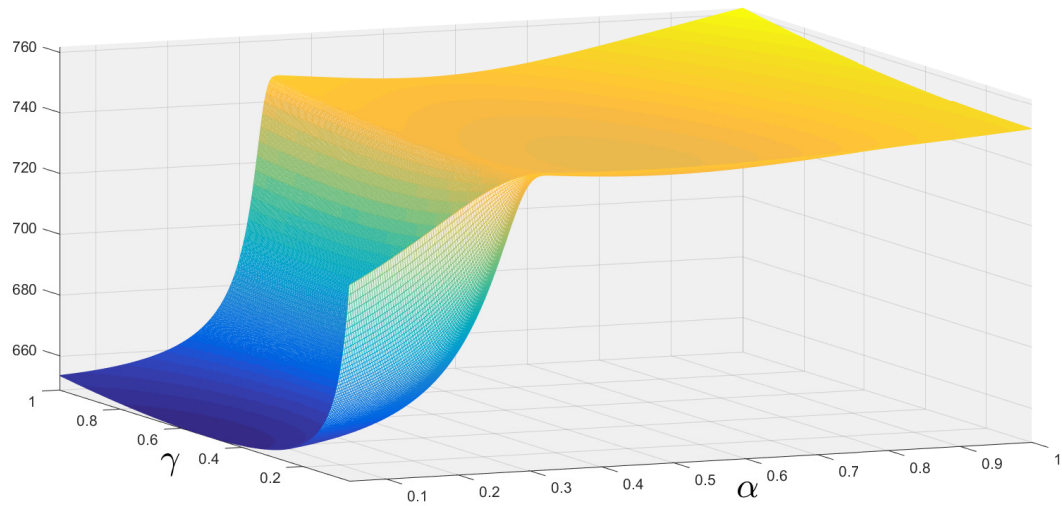


Figura 7.14: **Gráfico sup.:** Tridimensional, **Gráfico inf.:** Líneas de Contorno.

Ejemplo 3:

$$J(u(T), a) = 15v_3(T) + c(T) + 75 \{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \text{ y } t_c = 20$$

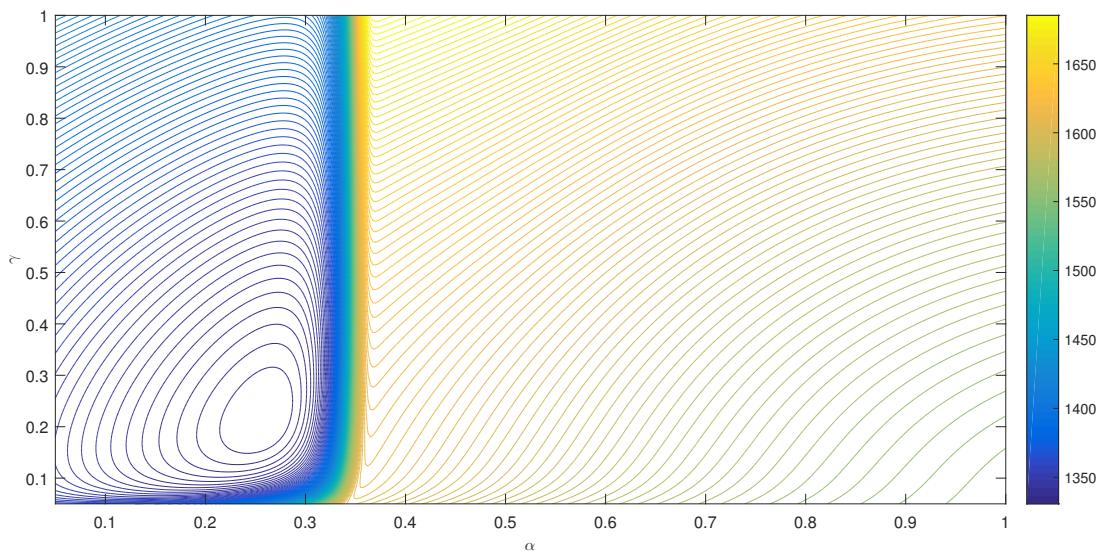
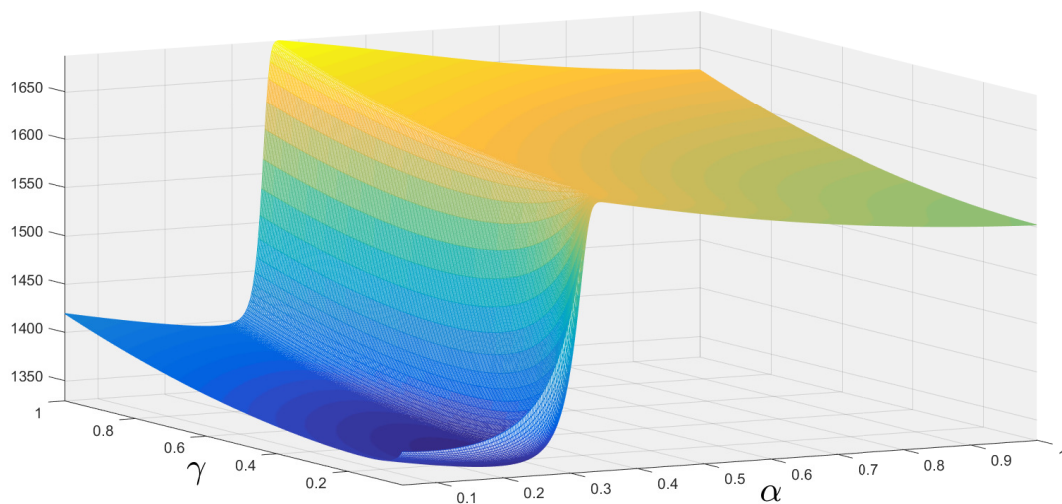


Figura 7.15: **Gráfico sup.:** Tridimensional, **Gráfico inf.:** Líneas de Contorno.

Por simplicidad, suavidad y convexidad parcial, la función costo J con la que se trabajará es la que se define en el ejemplo 3:

$$J(u(T), a) = 15v_3(T) + c(T) + 75 \{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \geq 0$$

con $t_c = 20$.

7.2. Modelo Espacio -Temporal

Recordar que:

- $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ es la densidad de individuos susceptibles e infectados, respectivamente, de la población H_1 .
- $v_1(x, t)$, $v_2(x, t)$ y $v_3(x, t)$ es la densidad de individuos susceptibles, infectados y recuperados, respectivamente, de la población H_2 .
- $c(x, t)$ es el término de incidencia en la población H_2 .

a) Solución Numérica

El dominio temporal y espacial serán respectivamente: $[0, T]$ y $[0, L]$, aquí $\Omega_1 = [0, l_1]$, $\Omega_2 = [l_2, L]$, $\tilde{\Omega} = [l_2, l_1]$, $0 < l_3 < l_2 < l_1 < L$ y los valores con los que se trabajará son: $T = 600$, $l_3 = 25$, $l_2 = 50$, $l_1 = 100$ y $L = 150$.



Figura 7.16: Intervalo de trabajo $[0, L]$. En azul dominio espacial de la población H_1 y en negro dominio espacial de la población H_2 .

El sistema de reacción-difusión compuesto por (6.11), (6.12) y (6.13) con condiciones iniciales:

$$u_1(x, 0) = \begin{cases} 99.990 & , x \in [0, l_3] \\ 100 & , x \in]l_3, l_1] \end{cases}, u_2(x, 0) = \begin{cases} 0.001 & , x \in [0, l_3] \\ 0 & , x \in]l_3, l_1] \end{cases}$$

$$v_1(x, 0) = 100, v_2(x, 0) = v_3(x, 0) = c(x, 0) = 0 \text{ para todo } x \in [l_2, L].$$

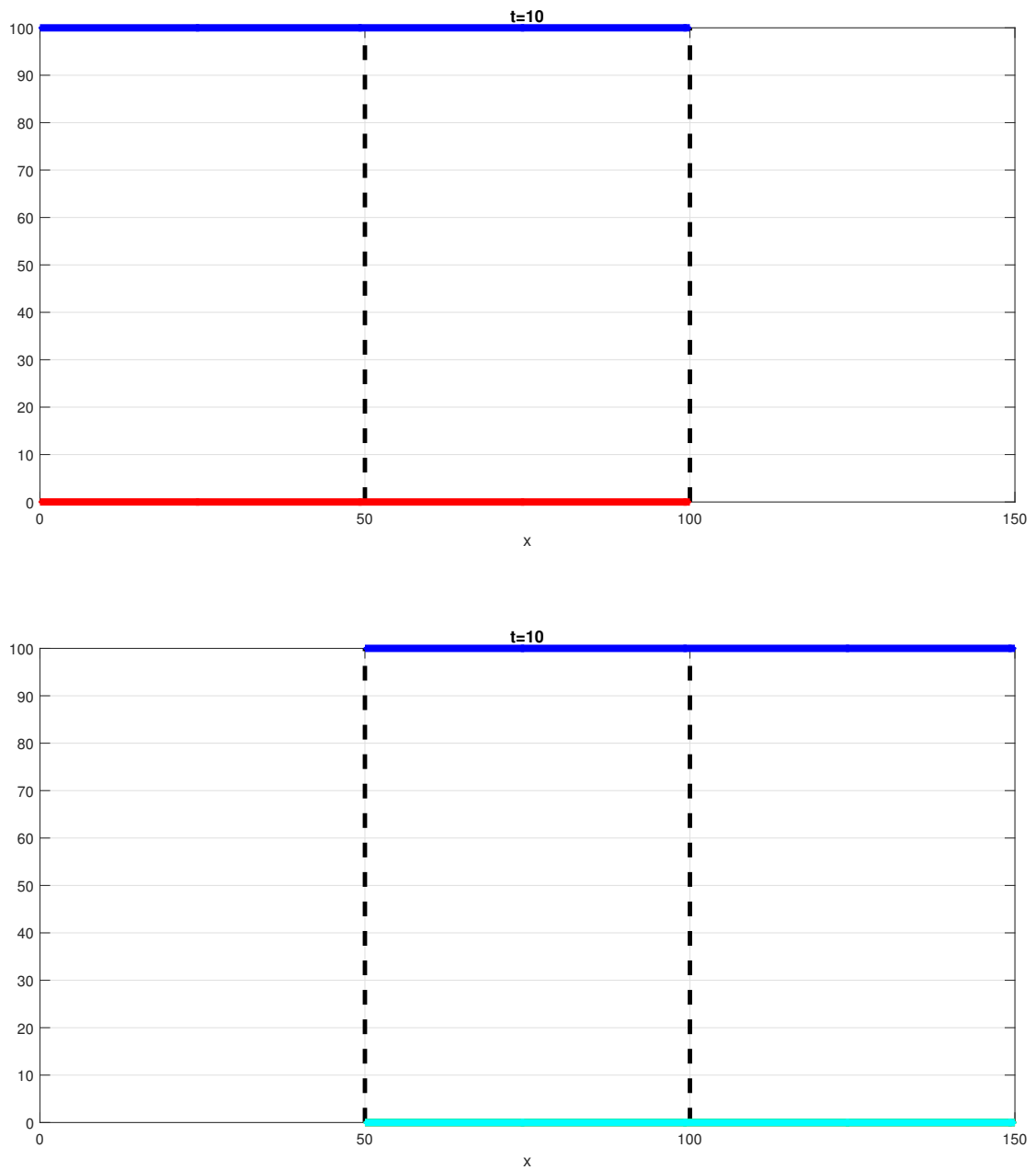
es resuelto numéricamente por el esquema de Crank-Nicolson obteniéndose el esquema numérico (6.25)-(6.27).

Los valores que se considerarán son:

- Parámetros del modelo: $d_u = d_v = 0.8$, $N_1 = N_2 = 100$, $\gamma_b = 0.1$, $\gamma_h = 0.1$, $\beta_{hh} = 0.2$, $\beta_{bh} = 0.3$.
- Parámetros de β_{bb} : $\tilde{\beta}_{bb} = 0.3$, $[\alpha, \gamma, t_c] \in [0.05, 0.6] \times [0.05, 0.6] \times [35, 160]$.
- Parámetros del esquema numérico: $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.1$, $K = 300$ y $M = 6000$.

los resultados numéricos se presentan a continuación:

a) Solución Numérica

Ejemplo 1: $\alpha = 0.3$, $\gamma = 0.4$, $t_c = 120$ Figura 7.17: Solución en $t = 10$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

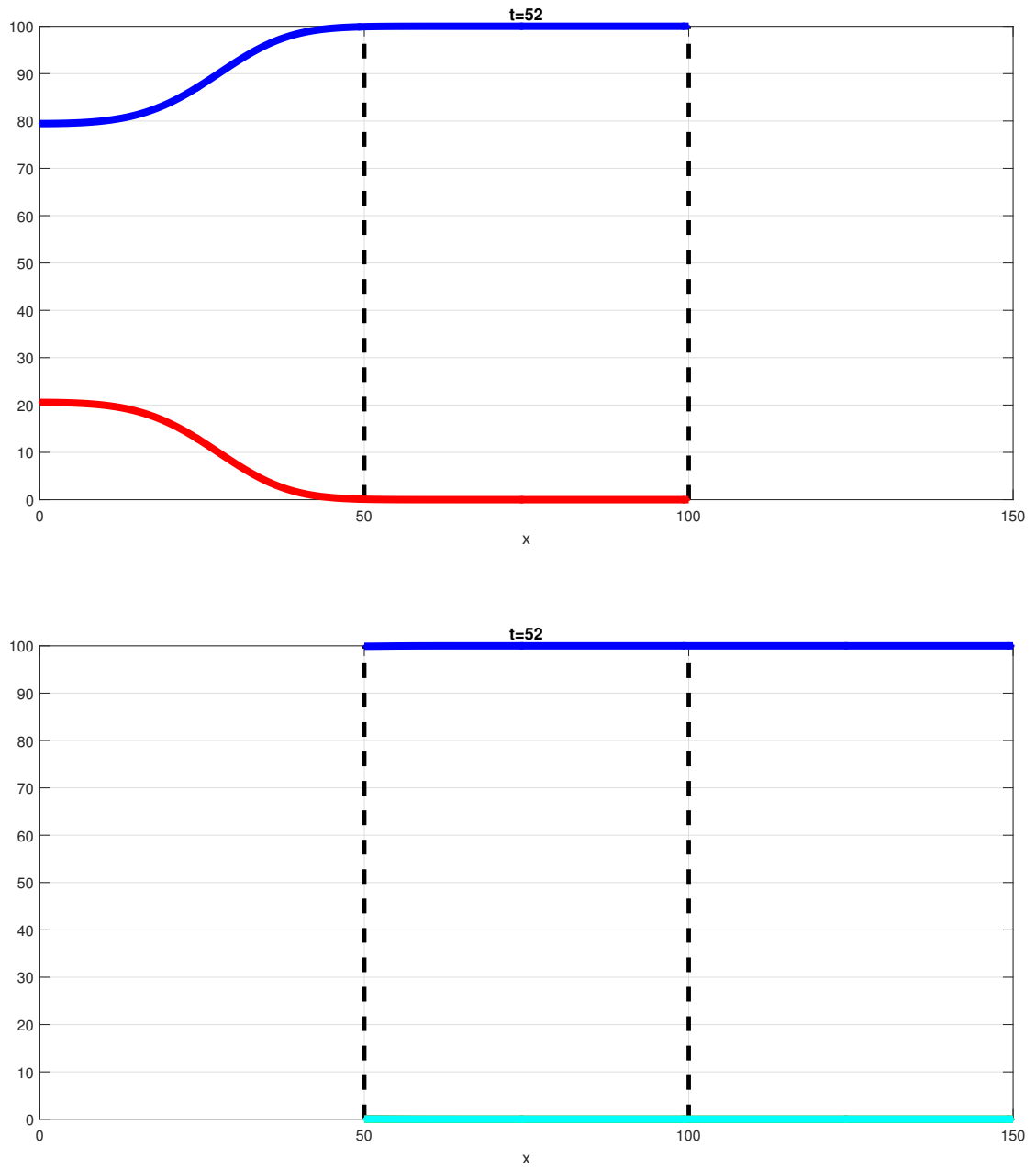


Figura 7.18: Solución en $t = 52$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

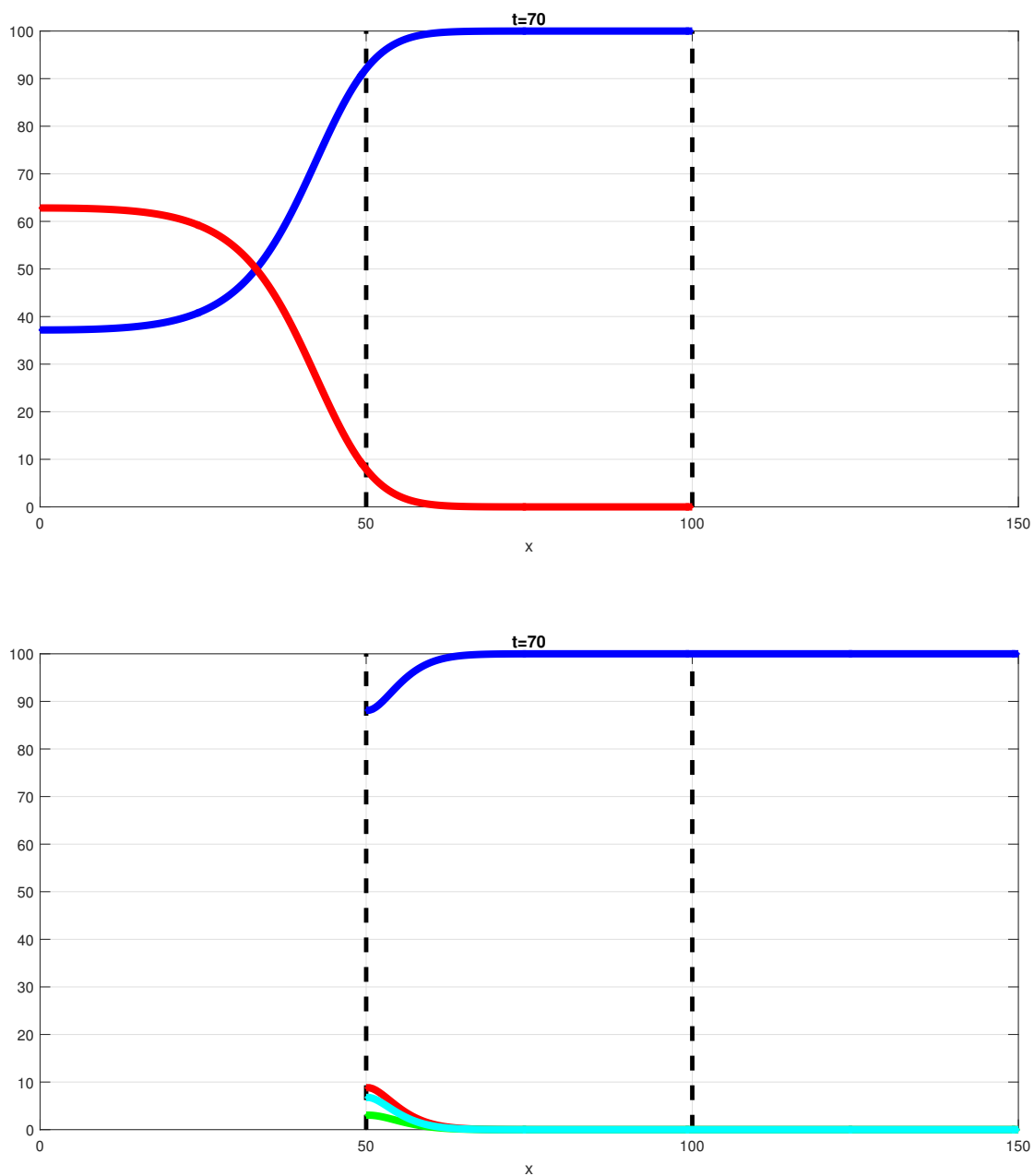


Figura 7.19: Solución en $t = 70$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

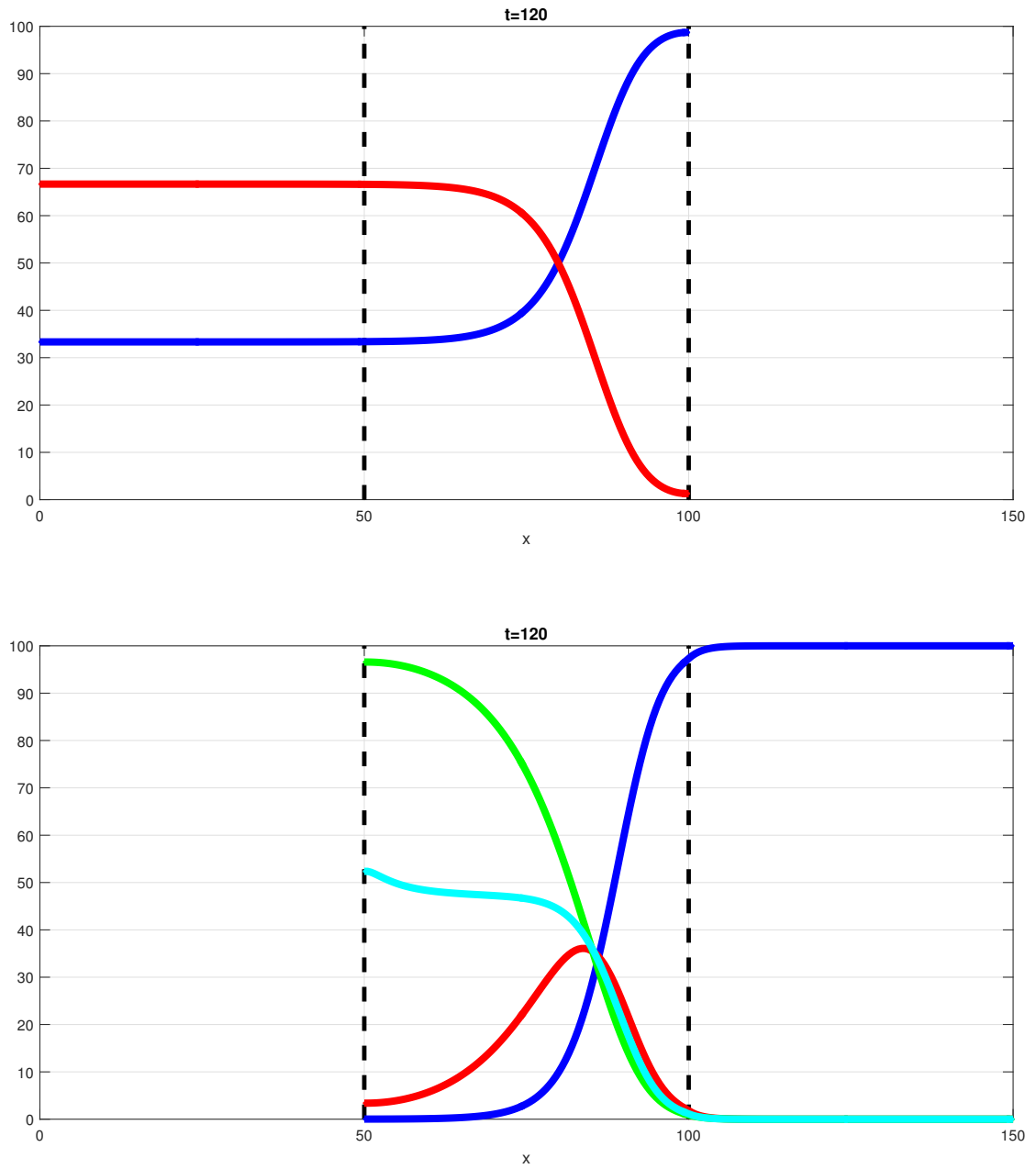


Figura 7.20: Solución en $t = 120$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

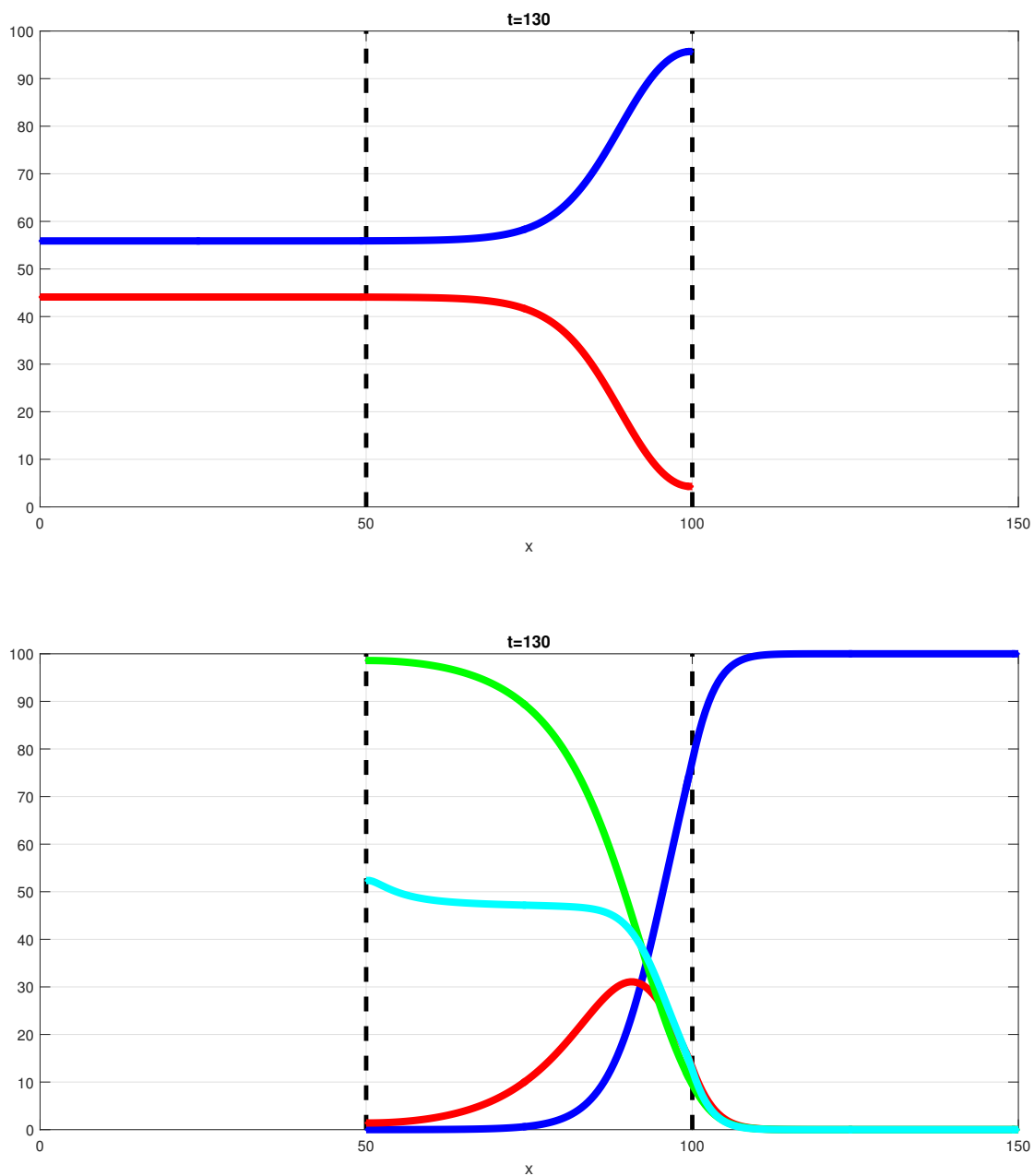


Figura 7.21: Solución en $t = 130$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

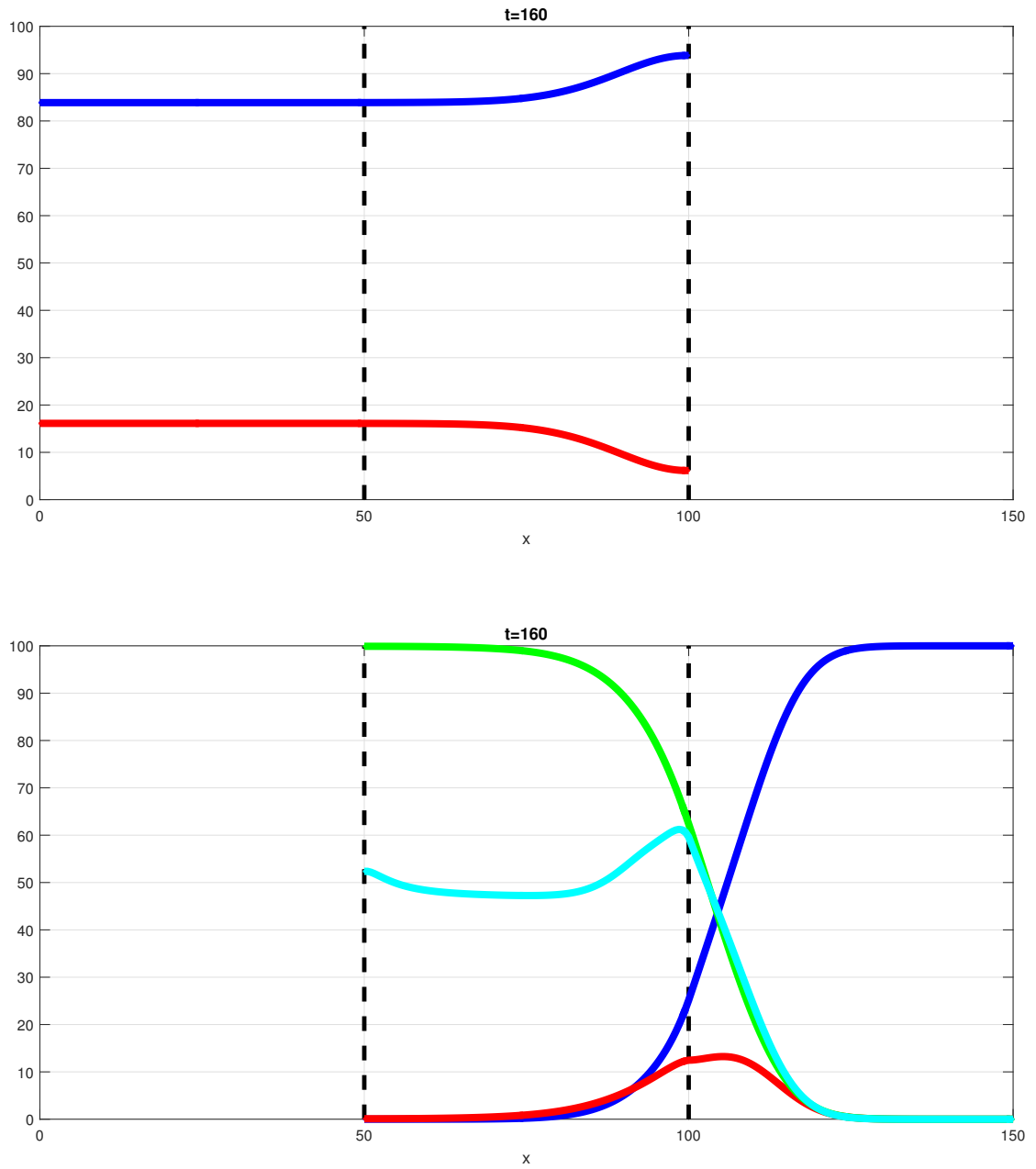


Figura 7.22: Solución en $t = 160$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

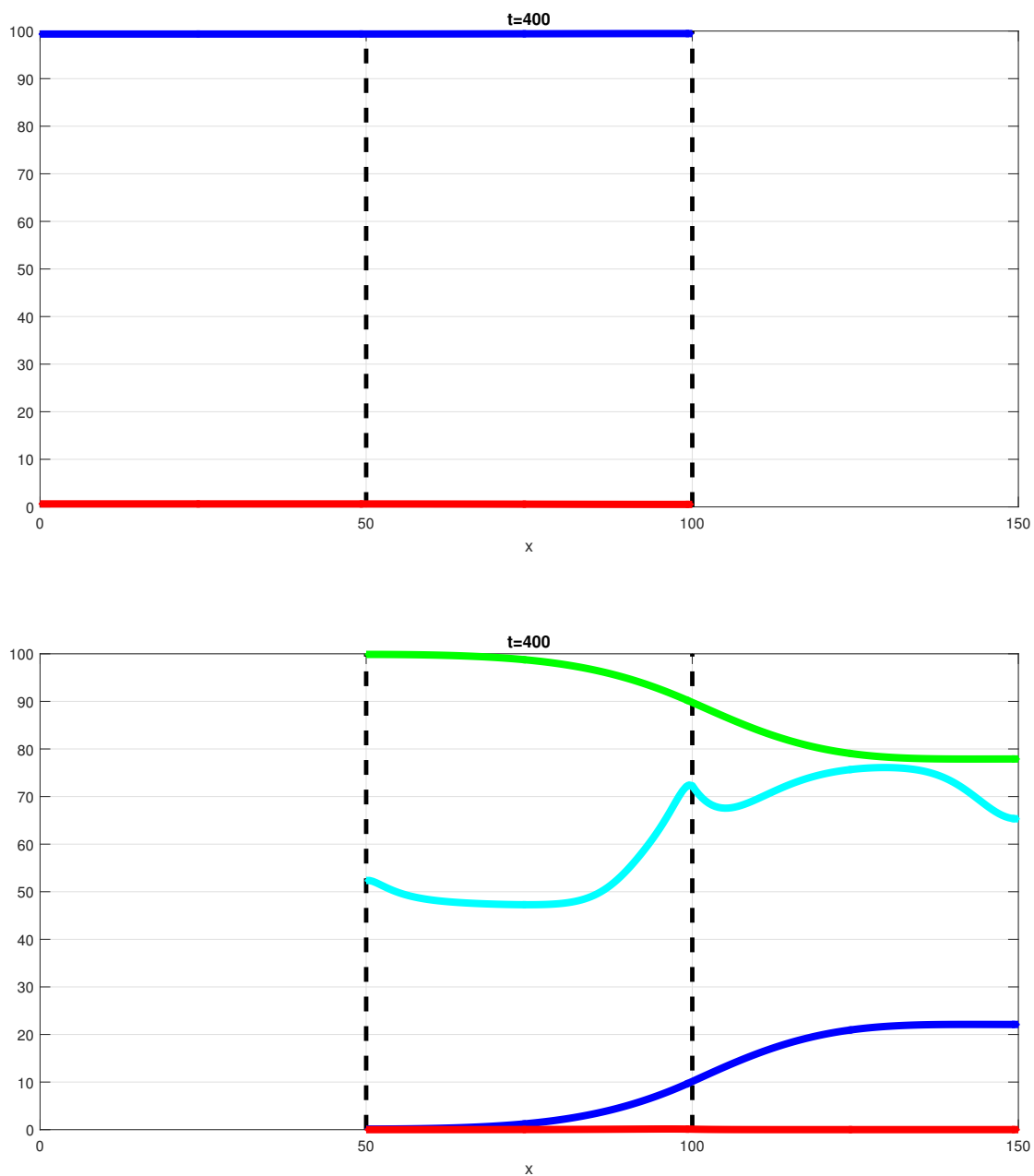


Figura 7.23: Solución en $t = 400$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

b) Cantidades de Interés

En este modelo las cantidades de interés se definen como integrales y se escoge considerarlas, en términos discretos, de la siguiente forma:

$$\int_{l_2}^L f(x, \cdot) dx \approx \sum_{i=k_2}^K f(x_i, \cdot) \Delta x$$

por otro lado, como $\Omega_2 = [l_2, L]$ entonces $|\Omega_2| = L - l_2$ y en consecuencia:

- **Tasa de Ataque Promedio en Humanos:**

$$\frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} v_3(x, T) dx \approx \frac{\Delta x}{L - l_2} \sum_{i=k_2}^K v_3(x_i, T).$$

- **Incidencia Acumulada Promedio en Humanos:**

$$\frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} c(x, T) dx \approx \frac{\Delta x}{L - l_2} \sum_{i=k_2}^K c(x_i, T).$$

- **Cantidad Máxima de Humanos Infectados:** es el máximo valor de la densidad promedio de humanos infectados durante todo el periodo de duración de la enfermedad

y se define como $\frac{1}{|\Omega_2|} \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega_2} v_2(x, t) dx \approx \frac{\Delta x}{L - l_2} \max_{n \in \{1, \dots, M\}} \sum_{i=k_2}^K v_2(x_i, t_n)$.

- **Tiempo de Extinción de la Enfermedad en Humanos:** es el tiempo t_{ex} superior a t_{max} y es tal que la densidad promedio sobre la región en la que se distribuye la población H_2 es menor que 1. En términos matemáticos, t_{ex} es el tiempo que

cumple con $t_{max} < t_{ex}$ y $\frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} v_2(x, t_{ex}) dx < 1$, donde t_{max} es $\int_{\Omega_2} v_2(x, t_{max}) dx = \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega_2} v_2(x, t) dx$.

Luego, para:

- $\alpha, \gamma \in \{0.05 + j0.0075 : j = 0, \dots, 74\}$
- $t_c \in \{35, 60, 85, 100, 125, 160\}$

se obtiene:

Tasa de Ataque en Humanos $\left(\frac{\Delta x}{L - l_2} \sum_{i=k_2}^K v_3(x_i, T) \right)$:

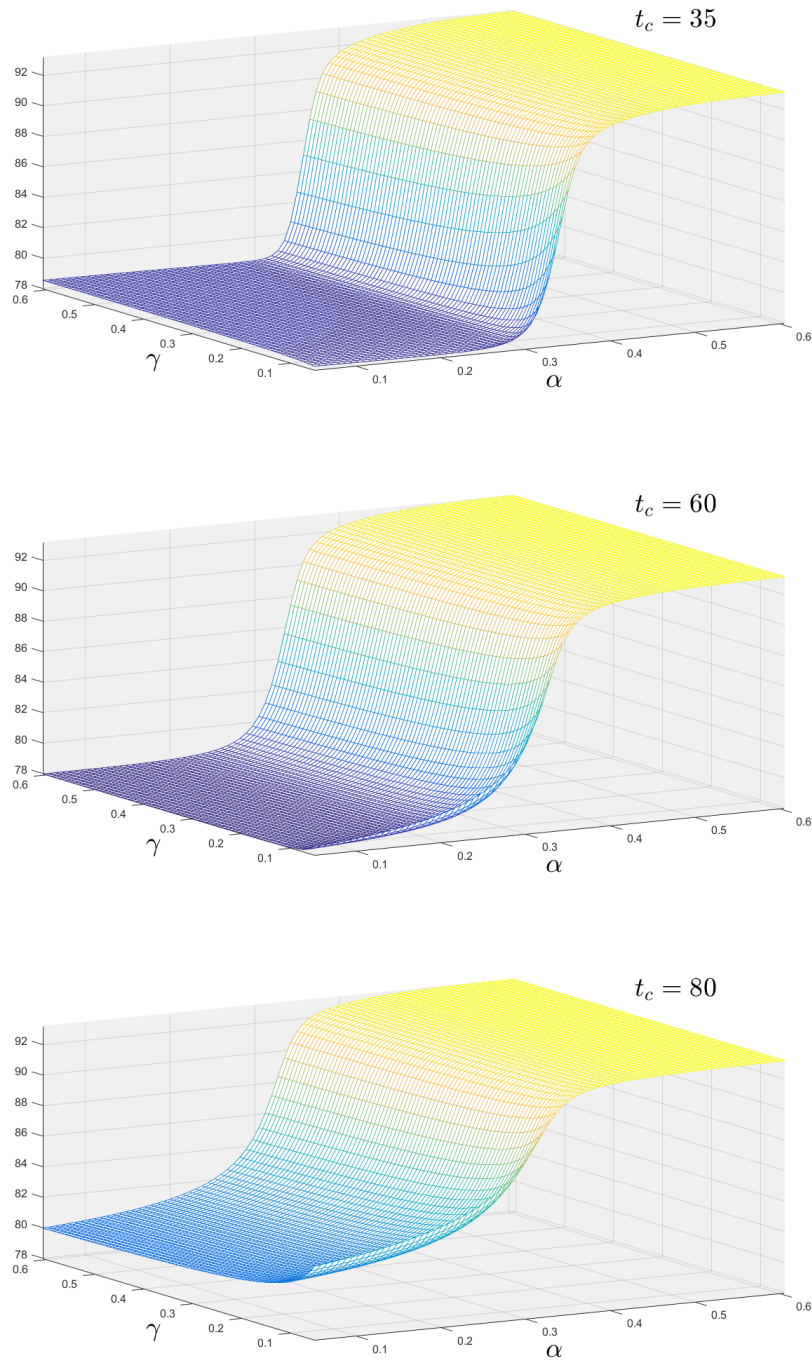


Figura 7.24: $t_c = 35$ (sup.), $t_c = 60$ (centr.) y $t_c = 80$ (inf.)

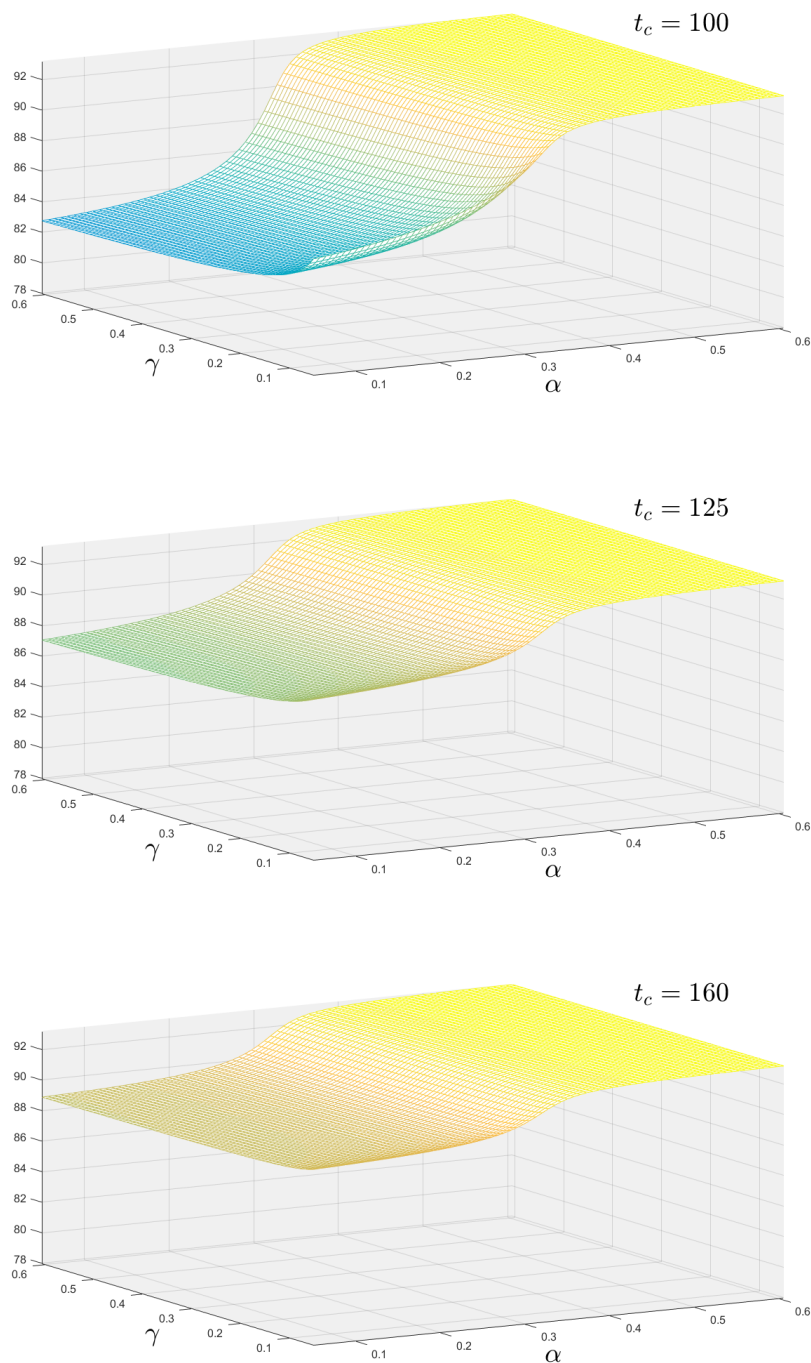


Figura 7.25: $t_c = 100$ (sup.), $t_c = 125$ (centr.) y $t_c = 160$ (inf.)

Conforme t_c crece: para $\alpha \geq 0.35$, la Tasa de Ataque Promedio en Humanos se mantiene constante (93.2121) y para $\alpha < 0.35$, la tasa crece desde 77.9483 hasta ser constante (93.2121) en todo la región de prueba.

Incidencia Acumulada en Humanos $\left(\frac{\Delta x}{L - l_2} \sum_{i=k_2}^K c(x_i, T) \right)$:

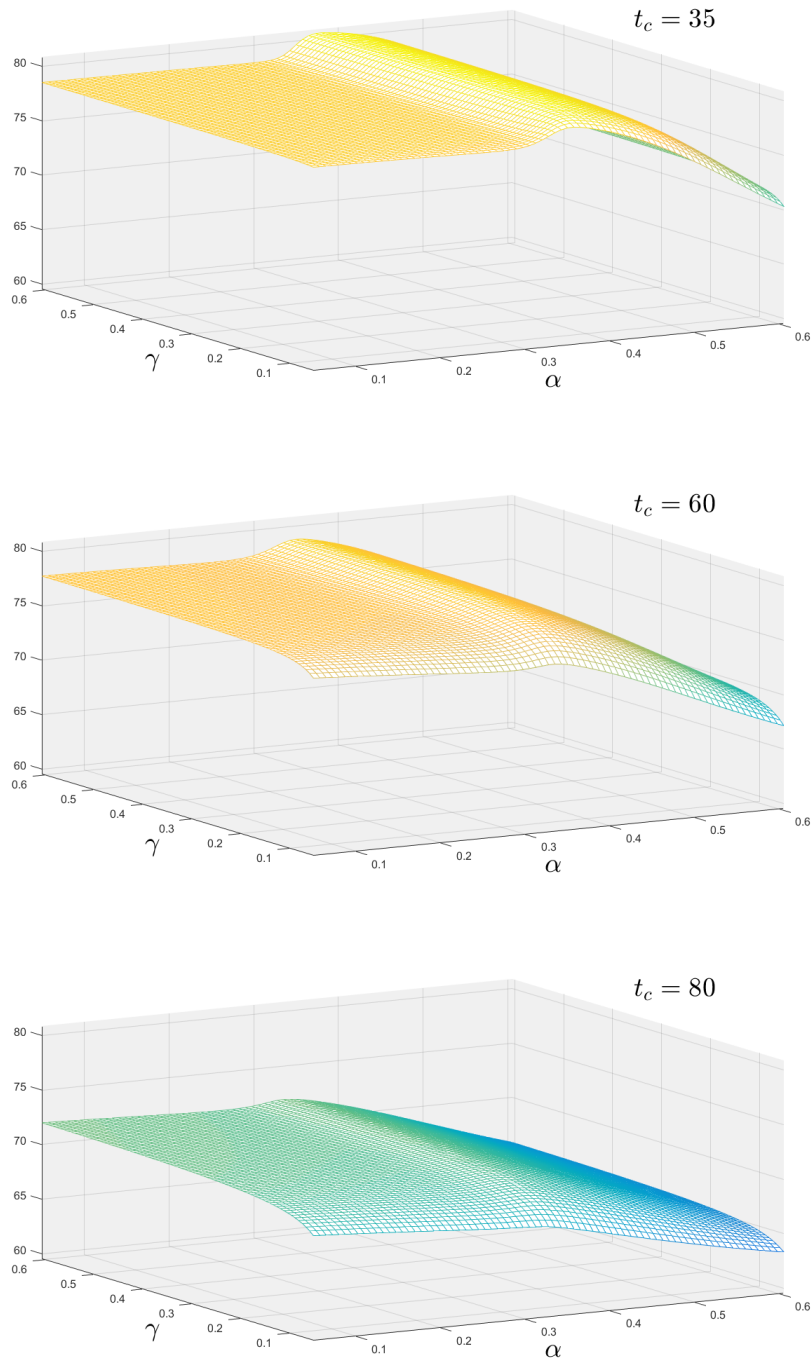


Figura 7.26: $t_c = 35$ (sup.), $t_c = 60$ (centro) y $t_c = 80$ (inf.)

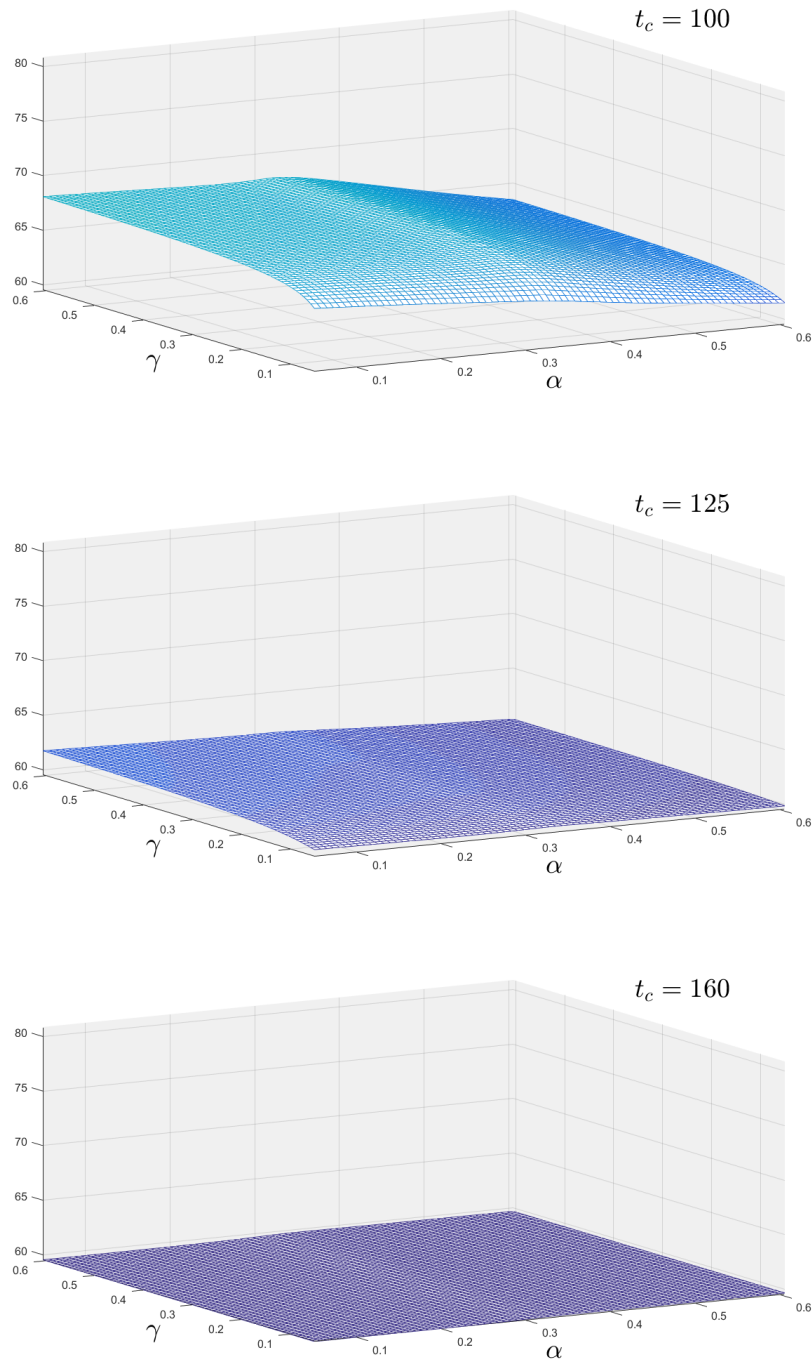


Figura 7.27: $t_c = 100$ (sup.), $t_c = 125$ (centro) y $t_c = 160$ (inf.)

La Incidencia Acumulada Promedio en Humanos decrece de 80.5125 hasta 59.5177 cuando t_c crece.

Cantidad Máxima de Humanos Infectados $\left(\frac{\Delta x}{L - l_2} \max_{n \in \{1, \dots, M\}} \sum_{i=k_2}^K v_2(x_i, t_n) \right)$:

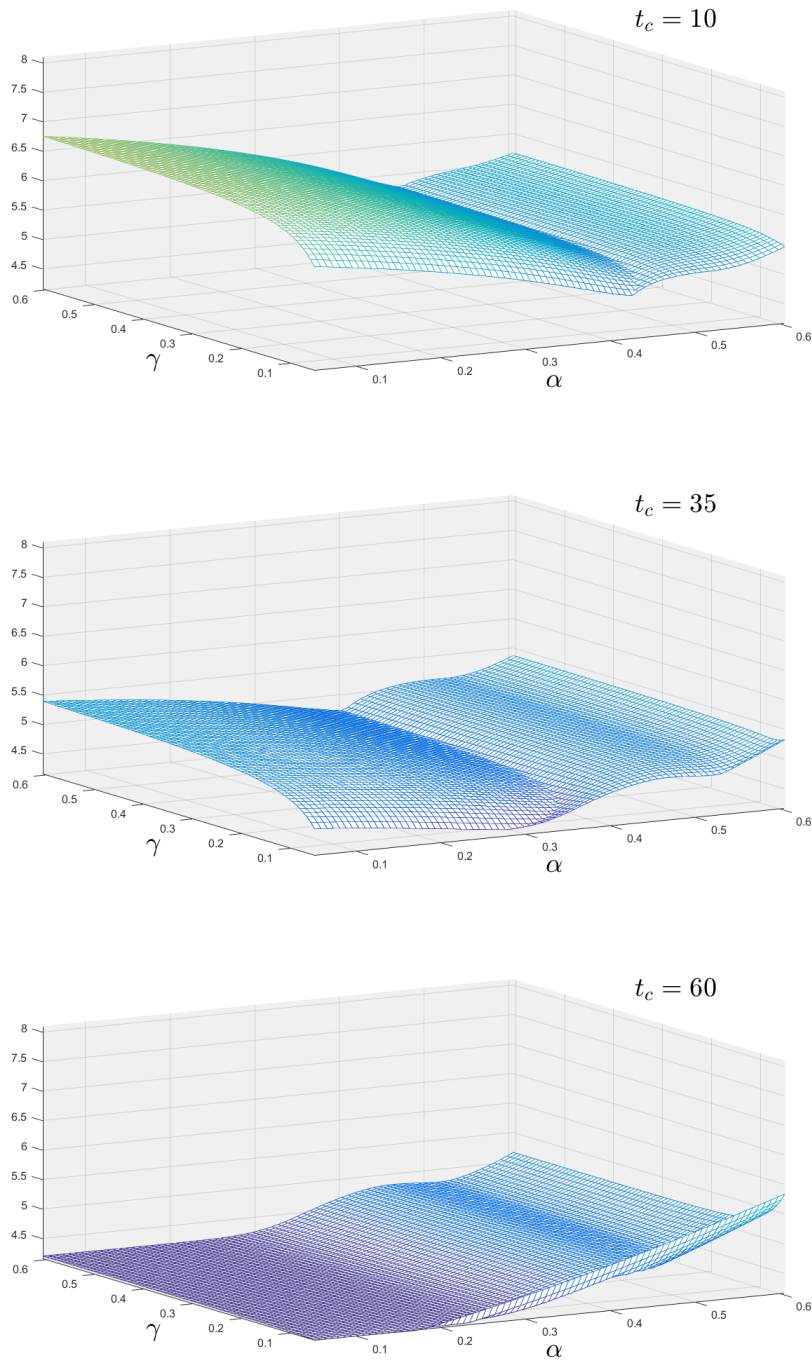


Figura 7.28: $t_c = 10$ (sup.), $t_c = 35$ (centro) y $t_c = 60$ (inf.)

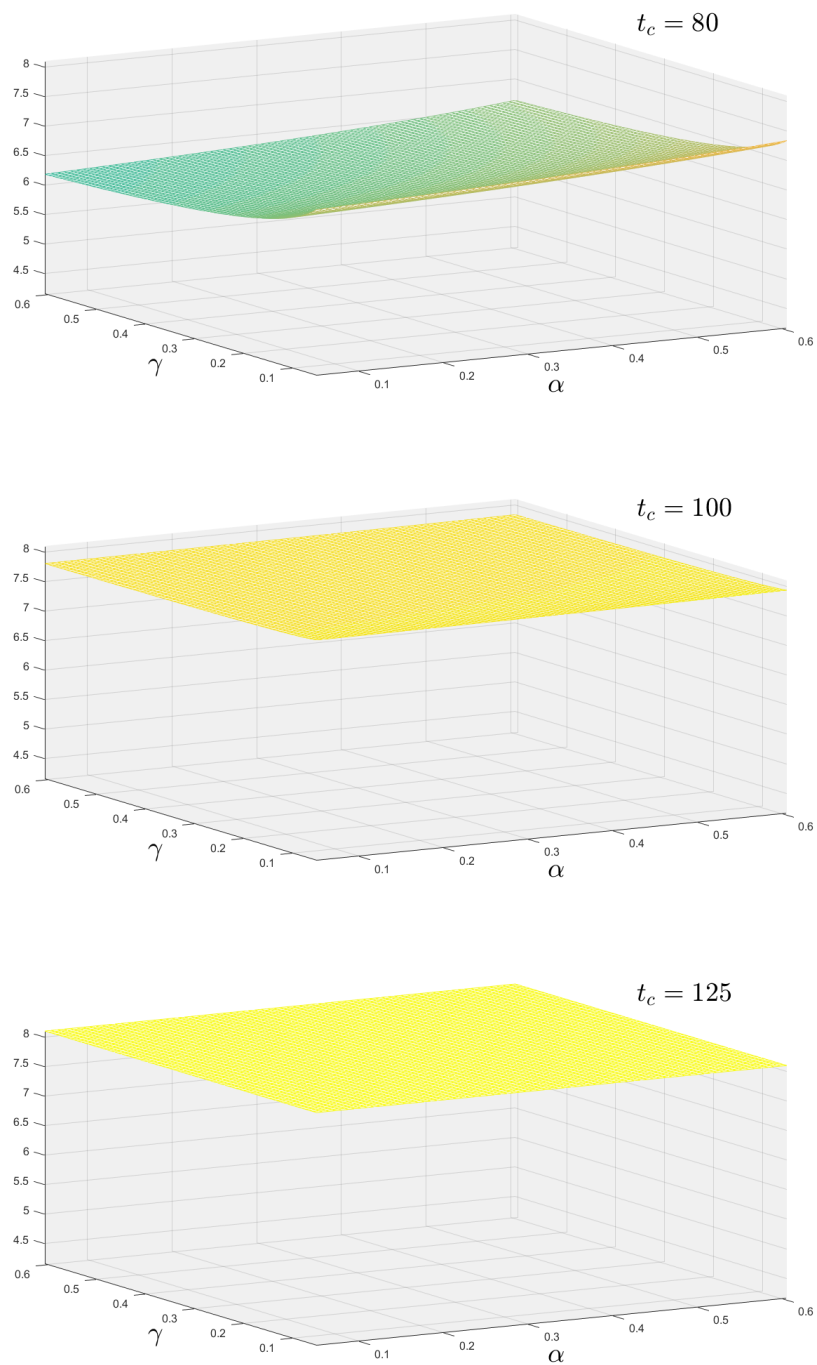


Figura 7.29: $t_c = 80$ (sup.), $t_c = 100$ (centro) y $t_c = 125$ (inf.)

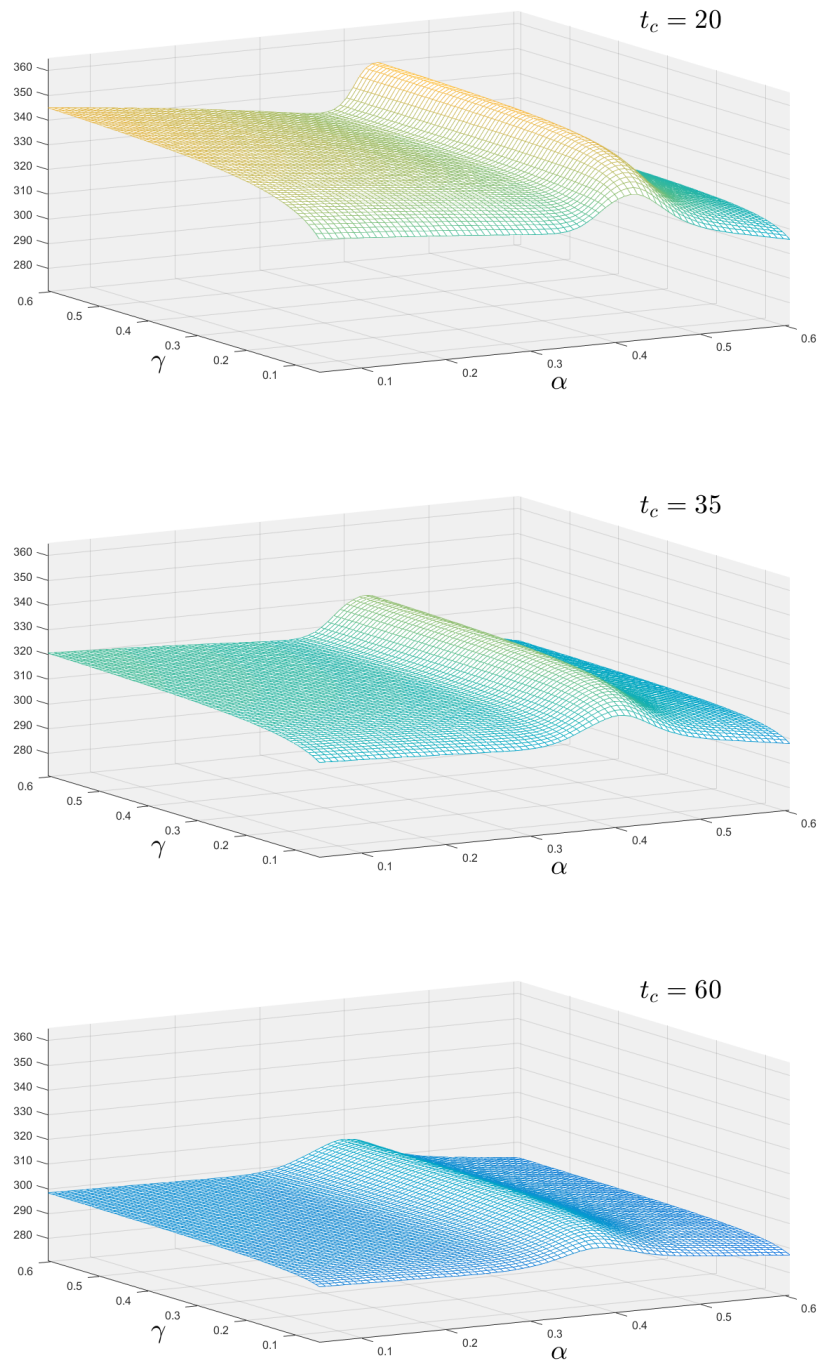
Tiempo de Extinción de la Enfermedad en Humanos:

Figura 7.30: $t_c = 20$ (sup.), $t_c = 35$ (centro) y $t_c = 60$ (inf.)

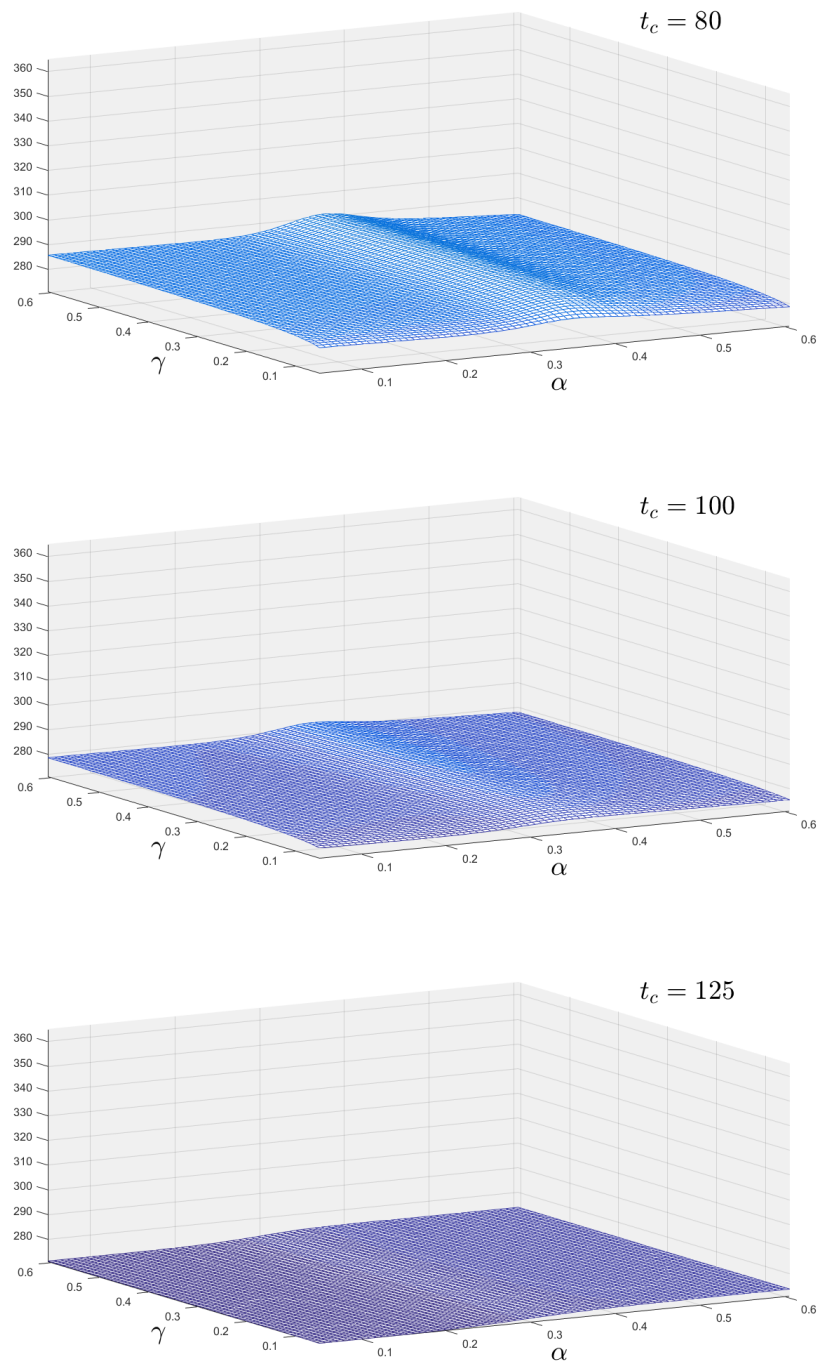


Figura 7.31: $t_c = 80$ (sup.), $t_c = 100$ (centro) y $t_c = 125$ (inf.)

t_{cx} del modelo espacio-temporal se comporta de manera similar al caso temporal.

Por tanto, las cantidades de interés son sensibles al parámetro de control.

c) Función Objetivo

En este caso la función objetivo propuesta inicialmente es:

$$J(u(\cdot, T), a) = \frac{1}{|\Omega_2|} \left(\int_{\Omega_2} \{Av_3(x, T) + Bc(x, T)\} dx + C \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega_2} v_2(x, t) dx \right) + Dt_{ex} + \varepsilon g(a)$$

donde g tiene el mismo objetivo que en la sección anterior. En vista de la respuesta de las cantidades de interés a la variación de a y considerando cierta suavidad en la curva obtenida, se decide:

- No considerar t_{ex} como parte de la función costo.
- Considerar t_c como parámetro fijo que se elegirá de manera que aporte a la convexidad de J y en consecuencia la variable de control queda como $a := [\alpha, \gamma]^t$.
- Mantener la definición de $g(a) = (1 - \alpha)^2 + \gamma^2$.

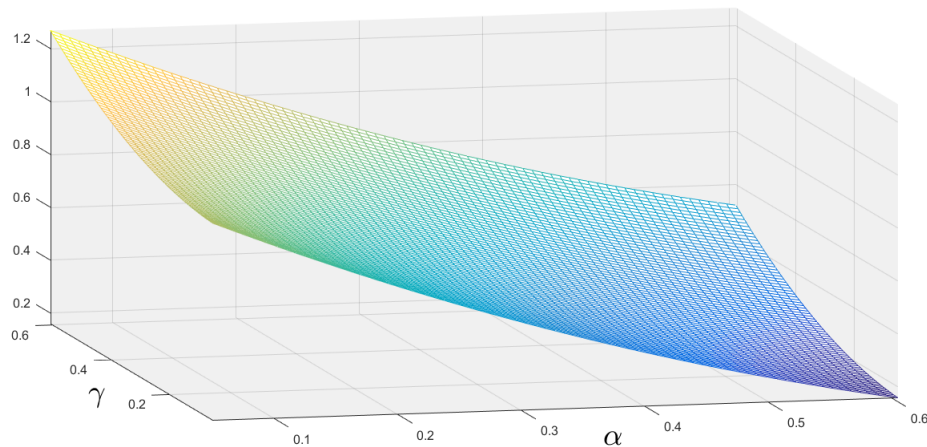


Figura 7.32: Función $g(a) = (1 - \alpha)^2 + \gamma^2$.

A través de ensayos numéricos se desea encontrar los valores de: t_c , A , B , C , D y ε tales que J sea suave y convexa en cierta región convexa de $[0.05, 0.6] \times [0.05, 0.6]$.

Ejemplo 1:

$$J(u(\cdot, T), a) = \frac{1}{|\Omega_2|} \left(\int_{\Omega_2} \{5v_3(x, T) + 6c(x, T)\} dx + 10 \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega_2} v_2(x, t) dx \right) + 60 \{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \text{ y } t_c = 80.$$

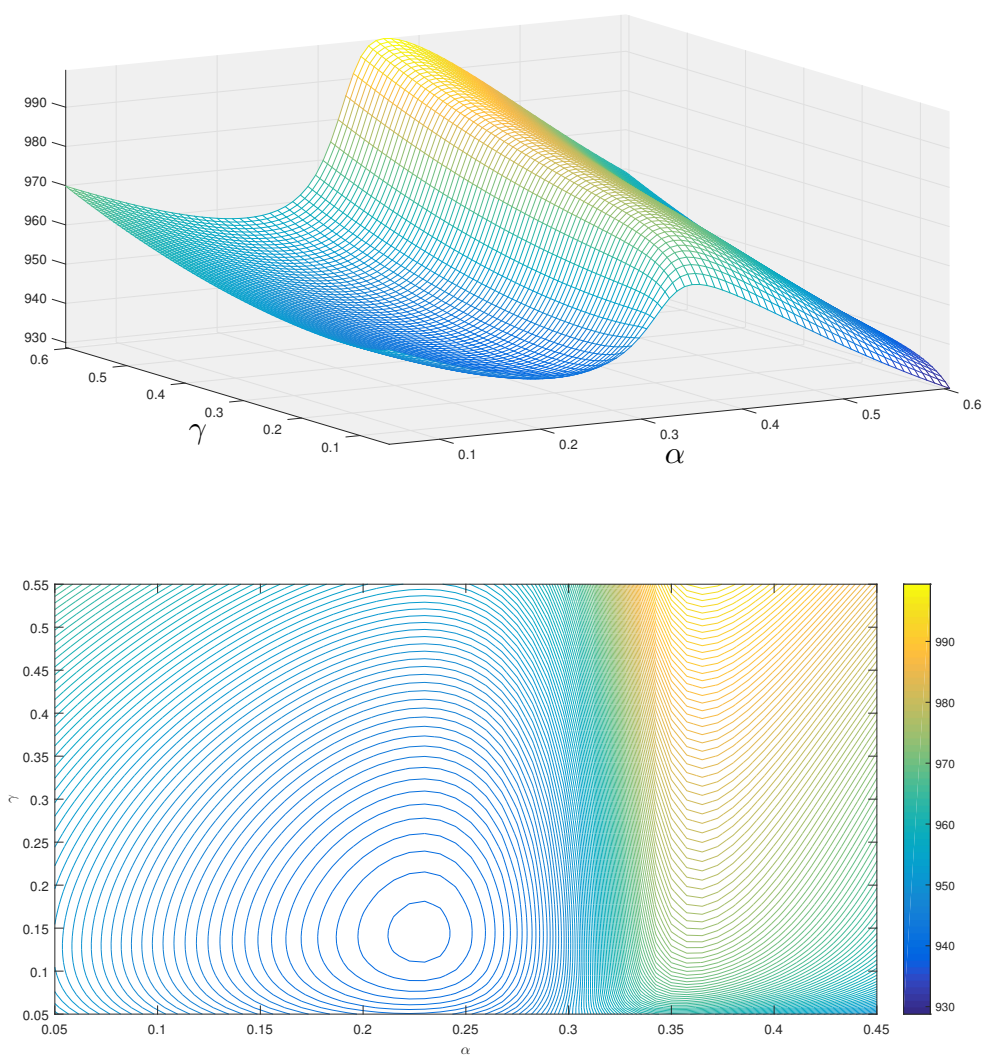


Figura 7.33: Gráfico sup.: Tridimensional, Gráfico inf.: Líneas de Contorno.

Ejemplo 2:

$$J(u(\cdot, T), a) = \frac{1}{|\Omega_2|} \left(\int_{\Omega_2} \{3v_3(x, T) + 5c(x, T)\} dx + 80 \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega_2} v_2(x, t) dx \right) + 90 \{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \text{ y } t_c = 100.$$

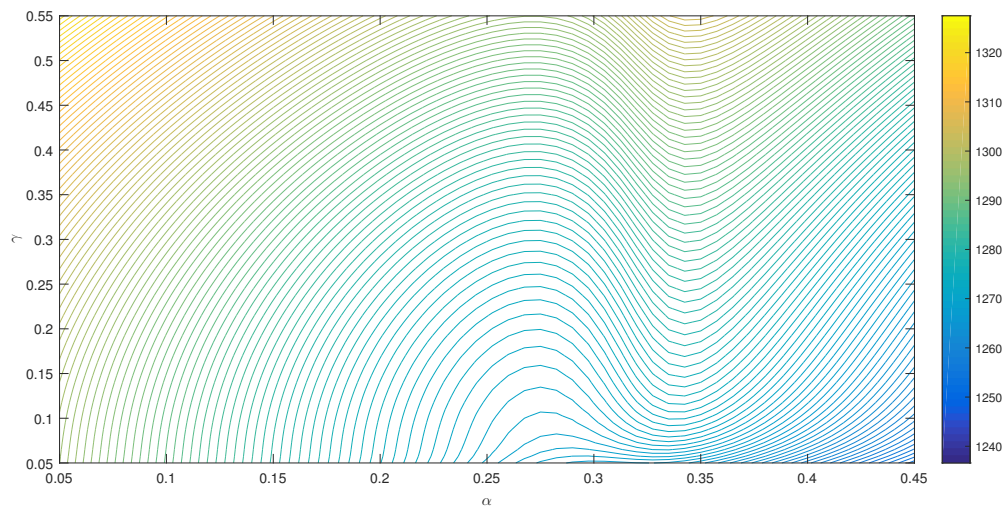
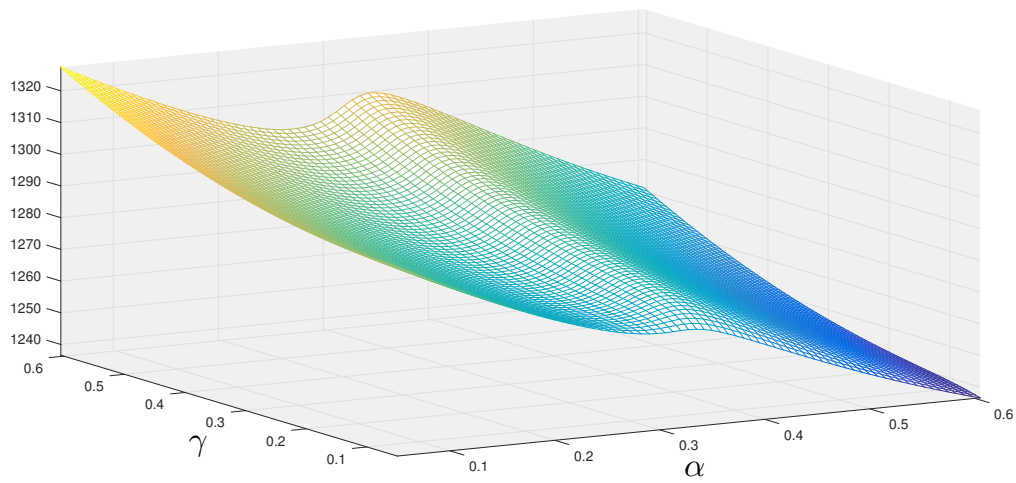


Figura 7.34: **Gráfico sup.:** Tridimensional, **Gráfico inf.:** Líneas de Contorno.

Ejemplo 3:

$$J(u(\cdot, T), a) = \frac{1}{|\Omega_2|} \left(\int_{\Omega_2} \{2v_3(x, T)\} dx + 80 \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega_2} v_2(x, t) dx \right) + 90 \{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\}$$

y $t_c = 60$.

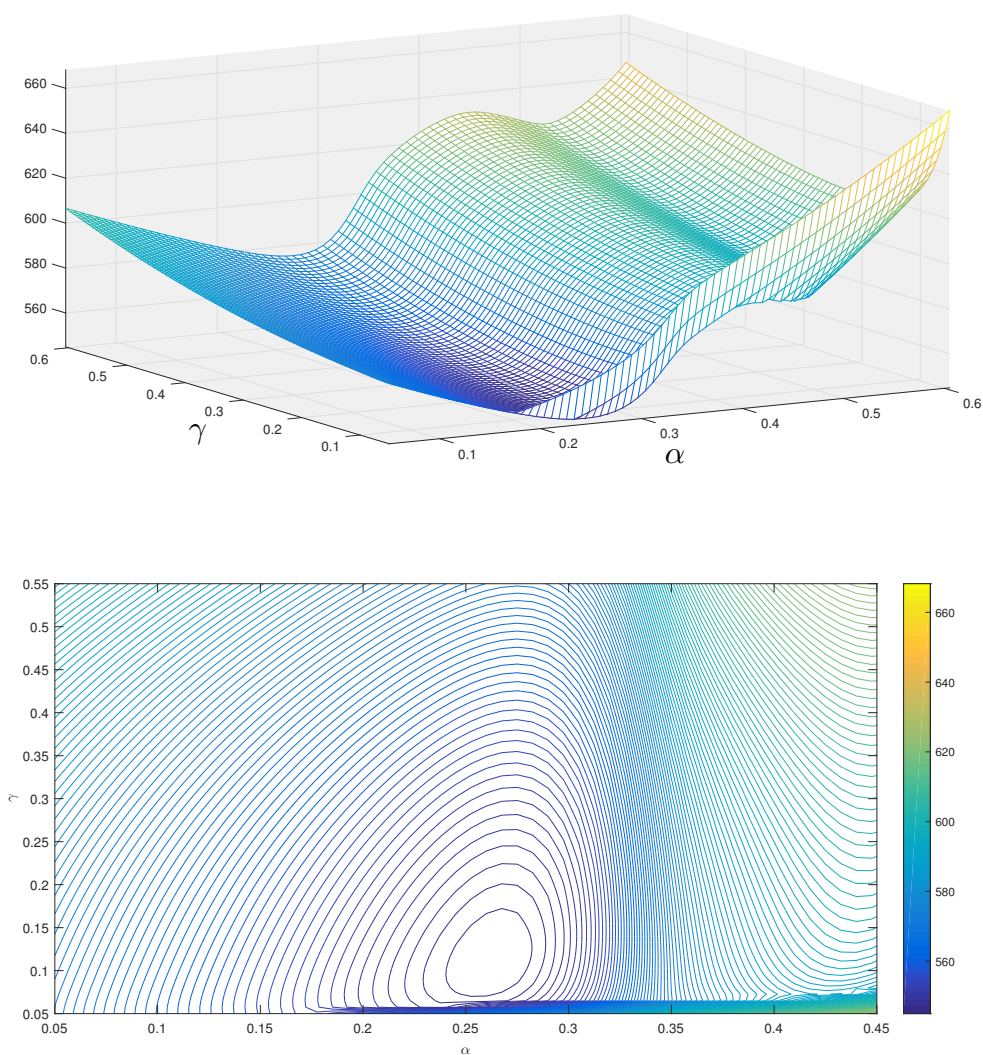


Figura 7.35: **Gráfico sup.:** Tridimensional, **Gráfico inf.:** Líneas de Contorno.

Ejemplo 4:

$$J(u(\cdot, T), a) = \frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} \{35v_3(x, T) + 8c(x, T)\} dx + 200 \{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \text{ y } t_c = 100.$$

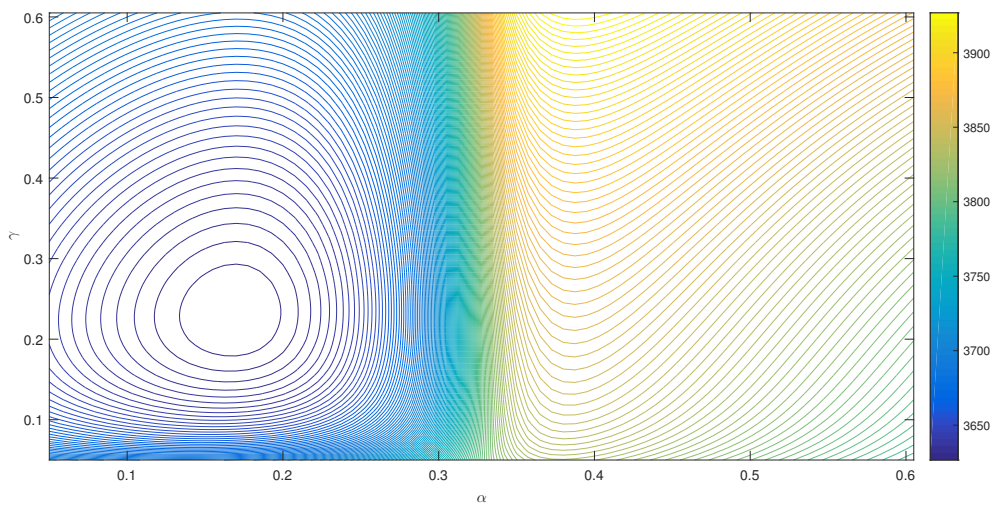
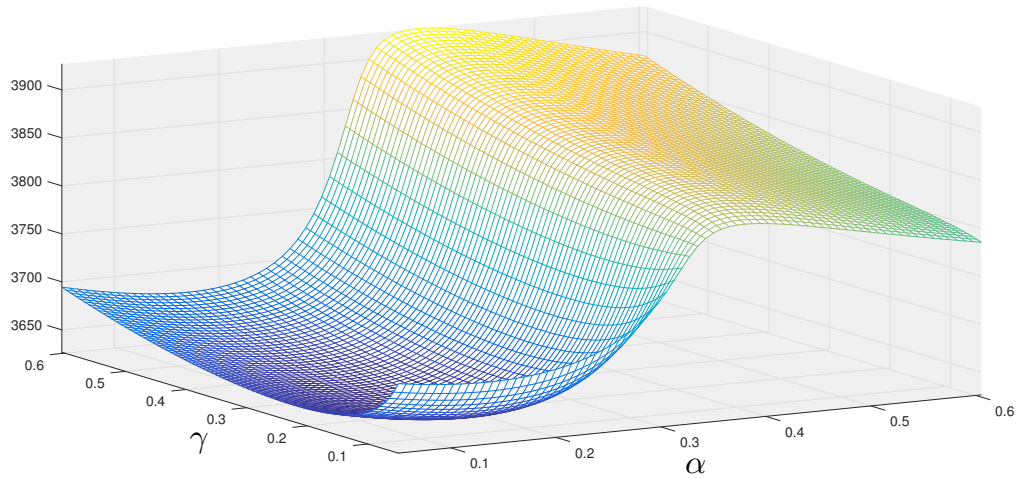


Figura 7.36: **Gráfico sup.:** Tridimensional, **Gráfico inf.:** Líneas de Contorno.

Se decide trabajar con la función costo definida en el ejemplo 4:

$$J(u(\cdot, T), a) = \frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} \{35v_3(x, T) + 8c(x, T)\} dx + 200 \{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \geq 0$$

aquí $t_c = 100$.

Capítulo 8

Resultados Numéricos - Optimización

Para encontrar el óptimo de los problemas de optimización presentado en el capítulo 6 se hará uso de la función *fmincon* de MATLAB la cual trabaja con métodos que se basan en el cálculo del gradiente, por defecto *fmincon* usa una aproximación por diferencias finitas del gradiente de la función objetivo, sin embargo, también es posible que trabaje con un gradiente proporcionado por el usuario. Los métodos con los que trabaja esta función son: Interior-Point Optimization, SQP and SQP-Legacy Optimization, Active-Set Optimization y Trust-Region-Reflective Optimization (para más detalles de cada algoritmo se puede visitar la página de MATLAB ¹).

En las siguientes secciones se comparan los resultados que se obtienen desde cada uno de los métodos con los que trabaja *fmincon*, los tres primeros aproximan el gradiente mientras que el último usa el gradiente entregado por el usuario, en este caso, se usará el gradiente discreto obtenido por medio del cálculo del lagrangiano.

¹<https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html#busp5fq> – 6

8.1. Optimización con restricciones EDO

Recordar que: $T = 700$, $h = 0.05$, $K = 14.000$, $N_1 = N_2 = 100$, $\gamma_b = 0.1$, $\gamma_h = 0.1$, $\beta_{hh} = 0.2$, $\beta_{bh} = 0.3$, $u_0 = [99.990, 0.001, 100, 0, 0, 0]$, $\tilde{\beta}_{bb} = 0.3$ y $[\alpha, \gamma] \in [0.05, 1] \times [0.05, 1]$.

En vista del capítulo 7 sección 1, se escoge la función costo:

$$\tilde{J}_h(a) := J_h(u^K, a) = Av_3^K + Bc^K + \varepsilon \{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \geq 0$$

aquí $A = 15$, $B = 1$, $\varepsilon = 75$ y $t_c = 20$.

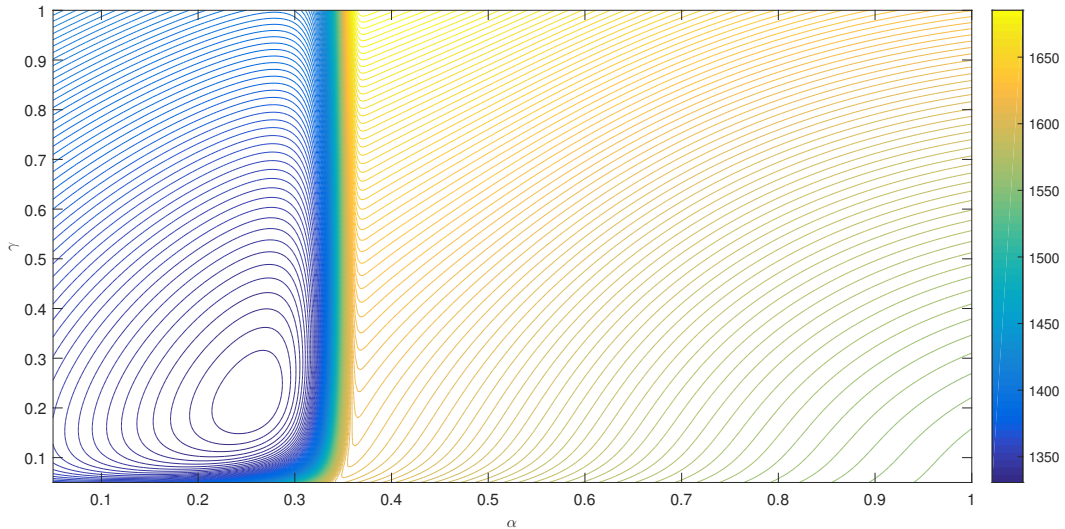


Figura 8.1: Gráfico de Líneas de Contorno de $\tilde{J}_h(a)$.

El problema de optimización discreto es:

$$\begin{cases} \min & \tilde{J}_h(a) \\ a \in Q & \\ \text{sujeto a: } & u^k \text{ satisfice (6.8)} \end{cases}$$

con problema adjunto asociado (6.9). Por otro lado, de (6.10) se obtiene que el gradiente discreto es:

$$\nabla_a \tilde{J}_h(a) = \begin{bmatrix} -2 \cdot 75(1 - \alpha) \\ 2 \cdot 75\gamma \end{bmatrix} + 0.05 \sum_{k=0}^{13999} \begin{bmatrix} \frac{1}{100} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \alpha}(t^k, a) u_1^k u_2^k (\lambda_2^{k+1} - \lambda_1^{k+1}) \\ \frac{1}{100} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \gamma}(t^k, a) u_1^k u_2^k (\lambda_2^{k+1} - \lambda_1^{k+1}) \end{bmatrix}$$

y se define una aproximación numérica del gradiente de \tilde{J}_h como sigue:

$$\Delta \tilde{J}_h(a) = \frac{1}{2\mathbf{h}} \begin{bmatrix} -\tilde{J}_h(\alpha + 2\mathbf{h}, \gamma) + 4\tilde{J}_h(\alpha + \mathbf{h}, \gamma) - 3\tilde{J}_h(\alpha, \gamma) \\ -\tilde{J}_h(\alpha, \gamma + 2\mathbf{h}) + 4\tilde{J}_h(\alpha, \gamma + \mathbf{h}) - 3\tilde{J}_h(\alpha, \gamma) \end{bmatrix}$$

donde $a = [\alpha, \gamma]^t$ y $\mathbf{h} > 0$.

A modo de ensayo numérico, se calcula $\nabla_a \tilde{J}_h$ y $\Delta \tilde{J}_h$ para distintos valores del parámetro a y se observa que si \mathbf{h} decrece entonces $\Delta \tilde{J}_h$ tiende a $\nabla_a \tilde{J}_h$.

$a = [\alpha, \gamma]^t$	$\nabla_a \tilde{J}_h(a)$	$\ \nabla_a \tilde{J}_h(a) - \Delta \tilde{J}_h(a)\ _2$		
		$\mathbf{h} = 0.1$	$\mathbf{h} = 0.01$	$\mathbf{h} = 0.001$
$\begin{bmatrix} 0.09 \\ 0.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -131.1674 \\ 119.5059 \end{bmatrix}$	18.4809	0.0215	1.9099×10^{-4}
$\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -123.6955 \\ 113.1281 \end{bmatrix}$	3.1562	6.0592	6.20299×10^{-4}
$\begin{bmatrix} 0.3425 \\ 0.68 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.06 \\ 0.0067 \end{bmatrix} \times 10^4$	8.08×10^3	4.2568×10^3	25.3872
$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.16 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -119.4079 \\ -0.2555 \end{bmatrix}$	70.4431	0.2911	0.0035
$\begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -112.2592 \\ 39.8824 \end{bmatrix}$	2.5716	0.0714	8.1584×10^{-4}
$\begin{bmatrix} 0.255 \\ 0.21 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4.1054 \\ -4.4516 \end{bmatrix}$	4.118×10^3	5.2445	0.0359

Cuadro 8.1: Comparación de $\nabla_a \tilde{J}_h$ con $\Delta \tilde{J}_h$ para distintos valores \mathbf{h} .

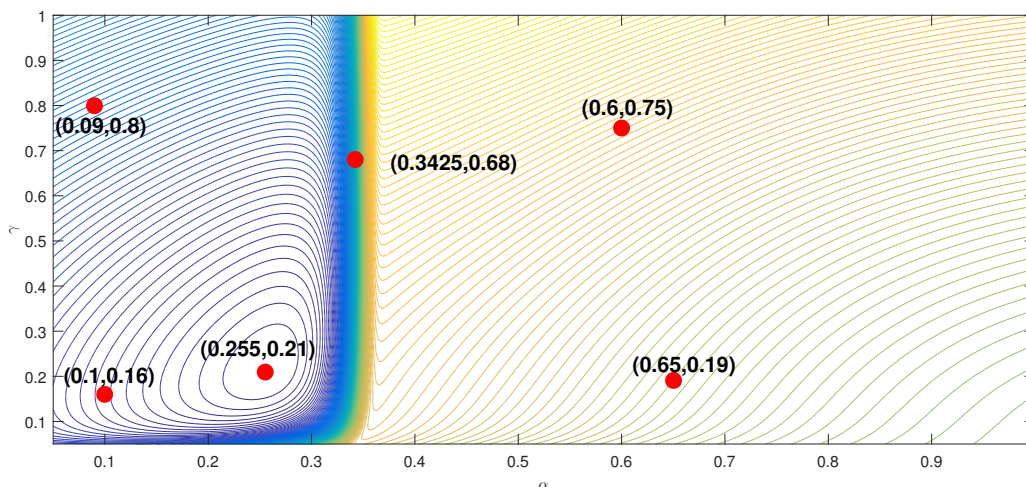


Figura 8.2: $\tilde{J}_h(a)$ y puntos de prueba.

Ahora, sea la región de búsqueda $Q = [0.08, 0.34] \times [0.1, 0.75]$ y el punto inicial $a_0 = [0.03, 0.7]^t$, los resultados obtenidos tras calcular el óptimo a través de los métodos: Interior Point (I-P), SQP, Active-Set (A-S) y Trust-Region-Reflective (T-R-R) (a este último se le proporciona el gradiente discreto) se presentan en la siguiente tabla:

Método	Óptimo (a_{opt})	$\nabla_a \tilde{J}_h(a_{opt})$	$\tilde{J}_\Delta(a_{opt})$	Iter.
I-P	0.25782659589 0.21966114660	0.00085449218 0.00173950195	1329.01902294	21
SQP	0.25782641012 0.21966145140	0.00108337402 0.00170898437	1329.01902294	18
A-S	0.257826182040741 0.219660062523856	0.000717163085938 0.001586914062500	1329.01902294	17
T-R-R	0.257826329563787 0.219660315387243	0.052580162 0.171951342	$\times 10^{-11}$ 1329.01902294	10

Cuadro 8.2: Resultados de los método de optimización (Iter: Iteraciones)

por tanto el óptimo se alcanza en $a_{opt} = \begin{bmatrix} 0.257826329563787 \\ 0.219660315387243 \end{bmatrix}$ y es $\tilde{J}_h(a_{opt}) = 1329.01902294$.

El método Trust-Region-Reflective tuvo mejor rendimiento, el gradiente en el óptimo es el más cercano al vector nulo y demora menos iteraciones en encontrarlo.

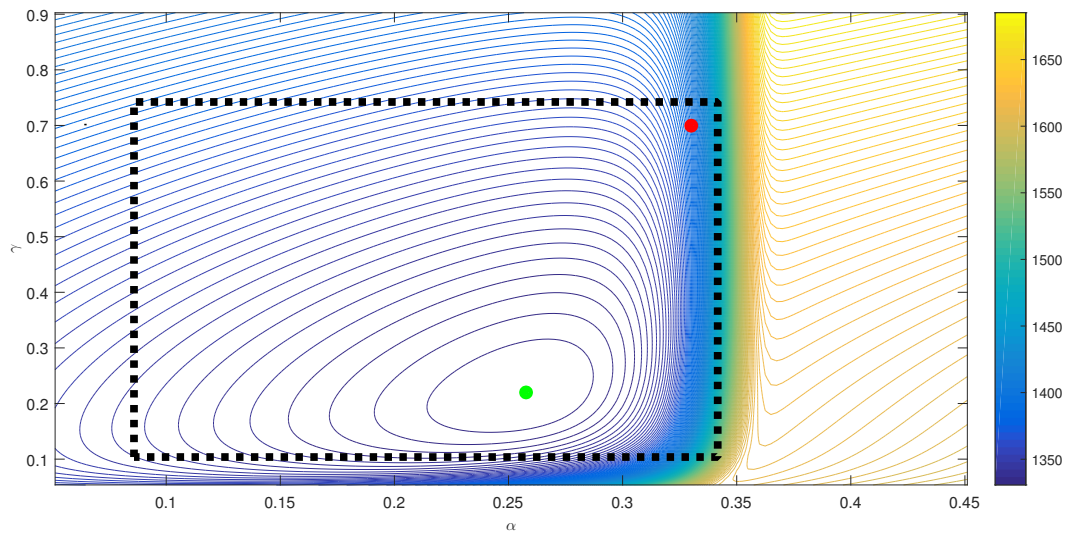
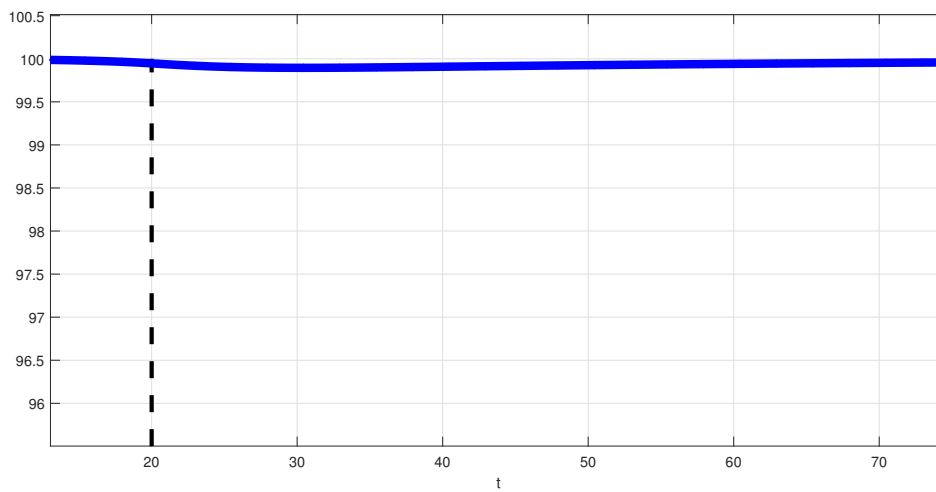


Figura 8.3: $\tilde{J}_h(a)$, región de búsqueda Q (líneas punteada negra), a_0 (rojo) y a_{opt} (verde).

Por último, las variables de estado en el óptimo son:



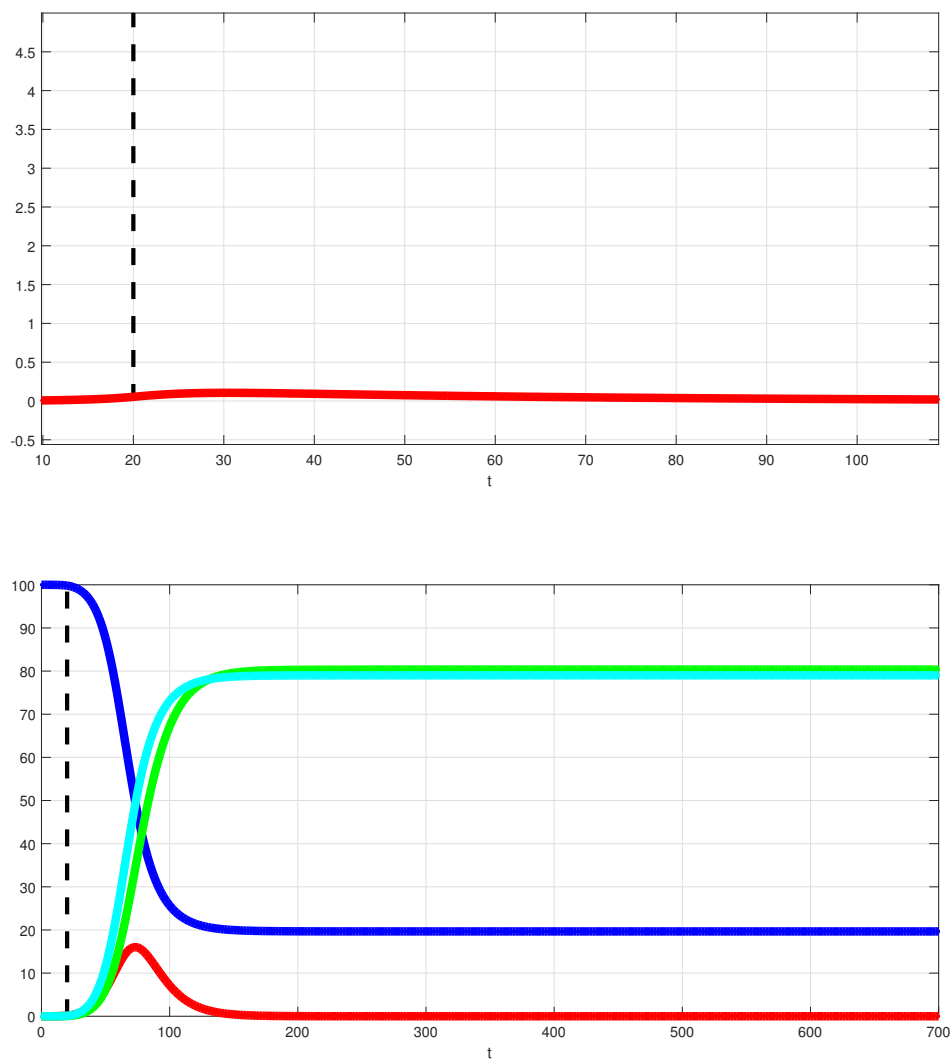


Figura 8.4: **Gráfico sup.:** u_1 , **Gráfico centr.:** u_2 , **Gráfico inf.:** v_1 (azul), v_2 (rojo), v_3 (verde) y c (celestre), en a_{opt} y $t_c = 20$.

8.2. Optimización con restricciones EDP

Recordar que: $l_3 = 25$, $l_2 = 50$, $l_1 = 100$, $k_1 = 201$, $L = 150$, $T = 600$, $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.1$, $K = 300$, $M = 6000$, $d_u = d_v = 0.8$, $N_1 = N_2 = 100$, $\gamma_b = 0.1$, $\gamma_h = 0.1$, $\beta_{hh} = 0.2$, $\beta_{bh} = 0.3$, $\tilde{\beta}_{bb} = 0.3$, $[\alpha, \gamma] \in [0.05, 0.6] \times [0.05, 0.6]$ y condiciones iniciales:

$$u_1(x, 0) = \begin{cases} 99.990 & , x \in [0, l_3] \\ 100 & , x \in]l_3, l_1] \end{cases}, u_2(x, 0) = \begin{cases} 0.001 & , x \in [0, l_3] \\ 0 & , x \in]l_3, l_1] \end{cases}$$

$$v_1(x, 0) = 100, v_2(x, 0) = v_3(x, 0) = c(x, 0) = 0 \text{ para todo } x \in [l_2, L].$$

Como se mencionó en el capítulo 7 sección 2, la función costo con la que se trabajará es:

$$\tilde{J}_\Delta(a) := J_\Delta(u^M, a) = \frac{0.5}{100} \int_{50}^{150} \{Av_3(x, T) + Bc(x, T)\} dx + \varepsilon \{(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\} \geq 0$$

aquí $A = 35$, $B = 8$, $\varepsilon = 200$ y $t_c = 100$.

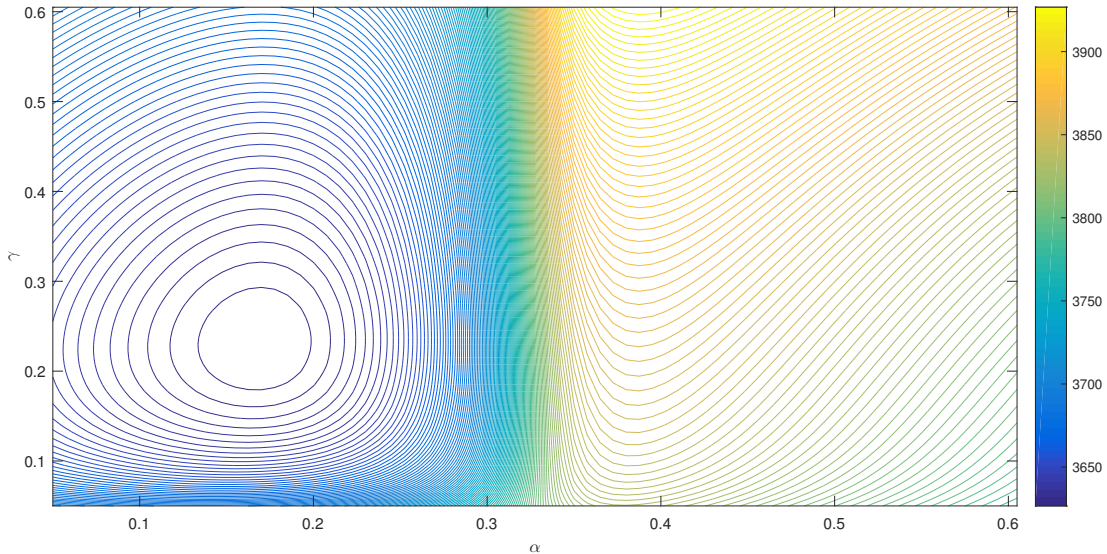


Figura 8.5: Gráfico de Líneas de Contorno de $\tilde{J}_\Delta(a)$.

El problema directo discreto es el esquema numérico (6.25)-(6.27) y el problema de optimización discreto es:

$$\begin{cases} \text{mín} & \tilde{J}_\Delta(a) \\ a \in Q & \\ \text{s.a:} & u_j^n \text{ satisfice (6.25) - (6.27)} \end{cases}$$

por tanto, el problema adjunto discreto es (6.29)-(6.30) con $A = 35$ y $B = 8$. Luego, en virtud de (6.31), el gradiente discreto queda:

$$\nabla_a J_\Delta(a) = \begin{bmatrix} -2 \cdot 200(1 - \alpha) \\ 2 \cdot 200\gamma \end{bmatrix} - 0.1 \sum_{j=1}^{200} \sum_{n=0}^{5999} \begin{bmatrix} \frac{1}{100} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \alpha}(t^n, a) u_{1_j}^n u_{2_j}^n \{p_{2_j}^{n+1} - p_{1_j}^{n+1}\} \\ \frac{1}{100} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \gamma}(t^n, a) u_{1_j}^n u_{2_j}^n \{p_{2_j}^{n+1} - p_{1_j}^{n+1}\} \end{bmatrix}$$

De manera análoga a la sección anterior, se define una aproximación numérica del gradiente de \tilde{J}_Δ como:

$$\Delta \tilde{J}_\Delta(a) = \frac{1}{2\mathbf{h}} \begin{bmatrix} -\tilde{J}_\Delta(\alpha + 2\mathbf{h}, \gamma) + 4\tilde{J}_\Delta(\alpha + \mathbf{h}, \gamma) - 3\tilde{J}_\Delta(\alpha, \gamma) \\ -\tilde{J}_\Delta(\alpha, \gamma + 2\mathbf{h}) + 4\tilde{J}_\Delta(\alpha, \gamma + \mathbf{h}) - 3\tilde{J}_\Delta(\alpha, \gamma) \end{bmatrix}$$

donde $a = [\alpha, \gamma]^t$ y $\mathbf{h} > 0$. Además, se calcula $\nabla_a \tilde{J}_\Delta$ y $\Delta \tilde{J}_\Delta$ para distintos valores del parámetro a :

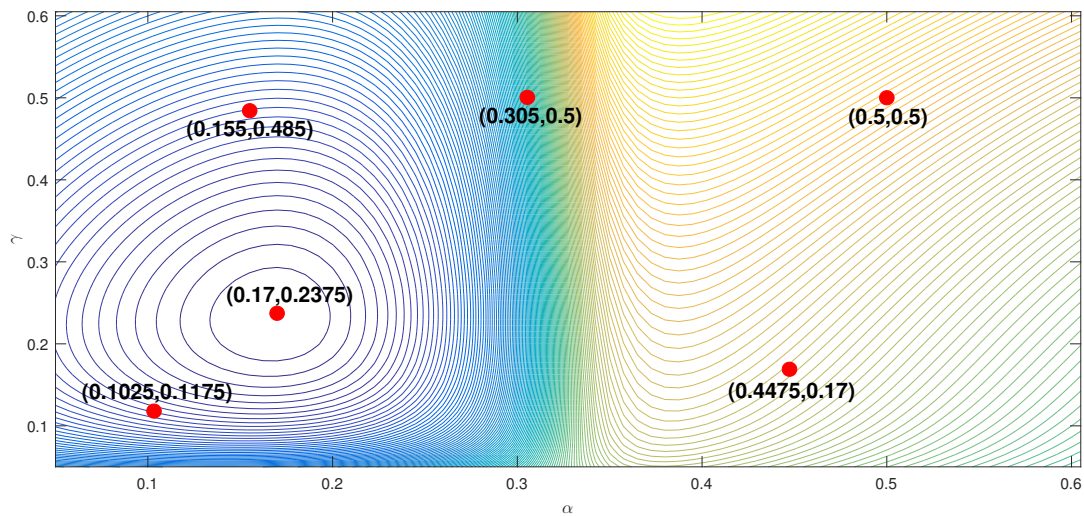


Figura 8.6: $\tilde{J}_\Delta(a)$ y puntos de prueba.

$a = [\alpha, \gamma]^t$	$\nabla_a \tilde{J}_\Delta(a)$		$\frac{\ \nabla_a \tilde{J}_\Delta(a) - \Delta \tilde{J}_\Delta(a)\ _2}{\ \nabla_a \tilde{J}_\Delta(a)\ _2} \times 100\%$			
			$\ \nabla_a \tilde{J}_\Delta(a)\ _2$			
			$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$	
0.155 0.485		-73.7547 177.4655	3.3944	0.0926	0.1004	
0.305 0.5		2.5637 0.1914	$\times 10^3$	0.1237	0.2107	0.1541
0.5 0.5		-273.5504 205.5533	0.0518	0.0143	0.0133	
0.17 0.2375		-19.6416 22.0820	12.8904	0.8969	0.9615	
0.1025 0.1175		-161.2290 -241.7659	1.0562	0.1385	0.1508	
0.4475 0.17		-256.2728 116.5595	0.0418	0.0725	0.0762	

Cuadro 8.3: Comparación de $\nabla_a \tilde{J}_\Delta$ con $\Delta \tilde{J}_\Delta$ para distintos valores h .

Esta vez, la región de búsqueda es $Q = [0.07, 0.3] \times [0.07, 0.5]$ y el punto inicial $a_0 = [0.08, 0.4775]^t$, los resultados obtenidos tras calcular el óptimo a través de los métodos: Interior Point (I.P), SQP, Active-Set (A-S) y Trust-Region-Reflective (T-R-R), a este último se le proporciona el gradiente discreto, se presentan en la siguiente tabla:

Método	Óptimo (a_{opt})		$\nabla_a \tilde{J}_\Delta(a_{opt})$		$\tilde{J}_\Delta(a_{opt})$	Iter.
I. P	0.16865677185 0.23134813645		-0.03051757812 0.33569335937	$\times 10^{-3}$	3626.59667442	19
SQP	0.16865677042 0.23134809833		0.45776367187 0.33569335937	$\times 10^{-3}$	3626.59667442	14
A-S	0.16865687899 0.23134795848		0.76293945312 -0.0915527343	$\times 10^{-3}$	3626.59667442	8
T-R-R	0.17568826394 0.22473384552		1.93442846452 7.96445833452		3626.72359931	17

Cuadro 8.4: Resultados de los métodos de optimización (Iter: Iteraciones)

se escoge a $a_{opt} = \begin{bmatrix} 0.16865677185 \\ 0.23134813645 \end{bmatrix}$ como óptimo y su valor es $\tilde{J}_\Delta(a_{opt}) = 3626.59667442$.

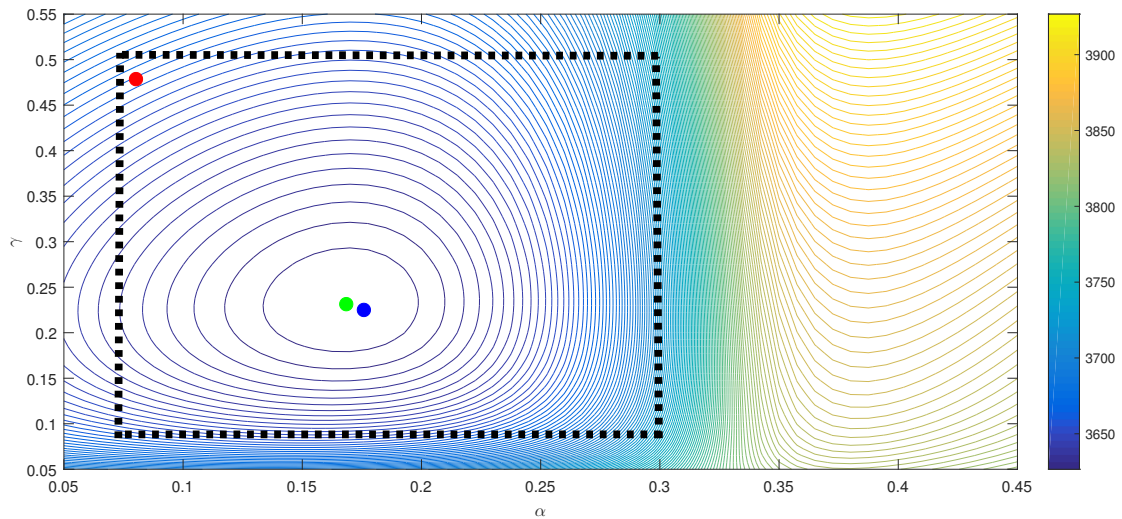


Figura 8.7: $\tilde{J}_\Delta(a)$, región de búsqueda Q (líneas punteada negra), a_0 (rojo), a_{opt} escogido (verde) y a_{opt} entregado considerando el gradiente discreto (azul).

Las variables de estado en el óptimo son:

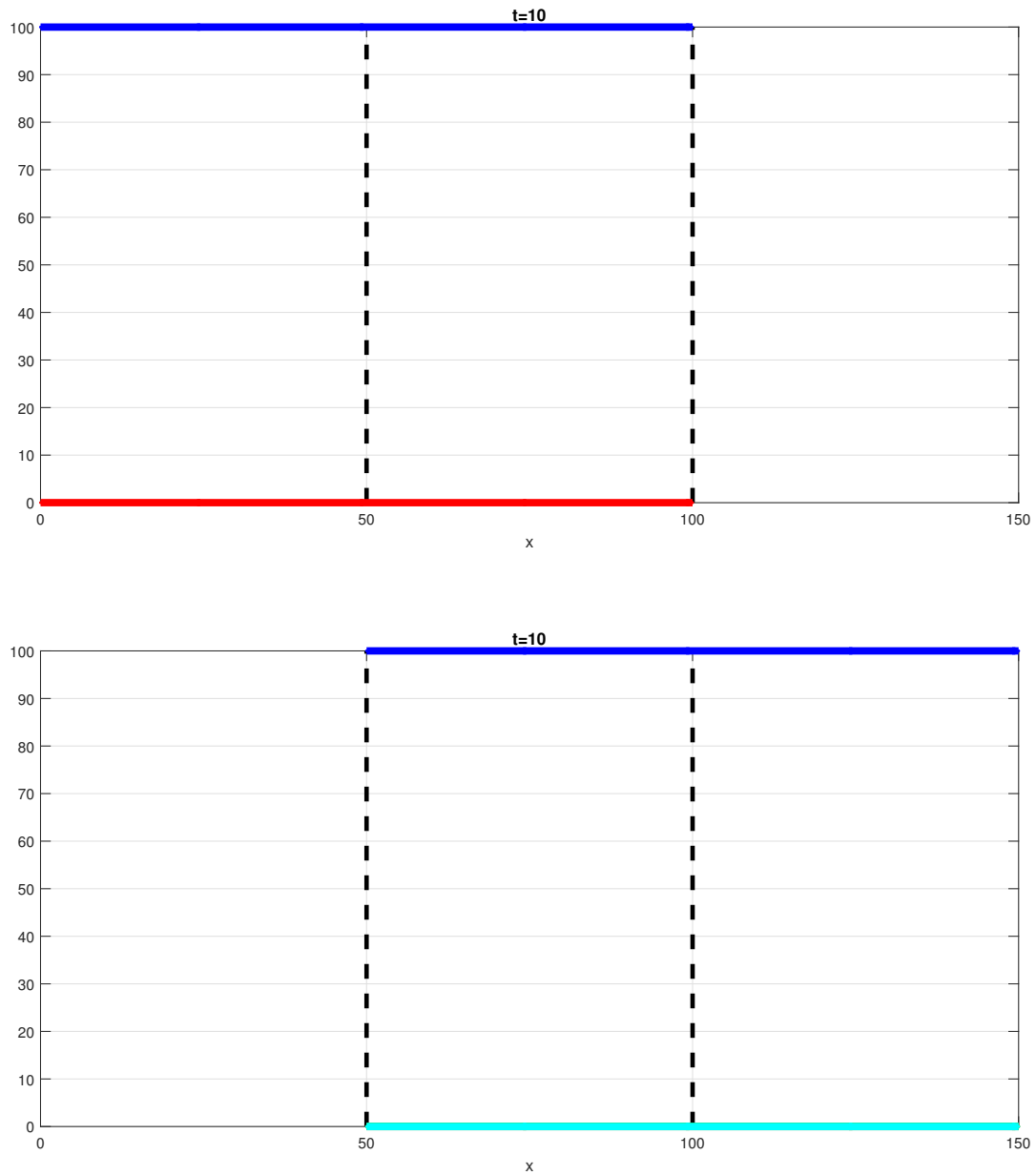


Figura 8.8: Solución en $t = 10$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

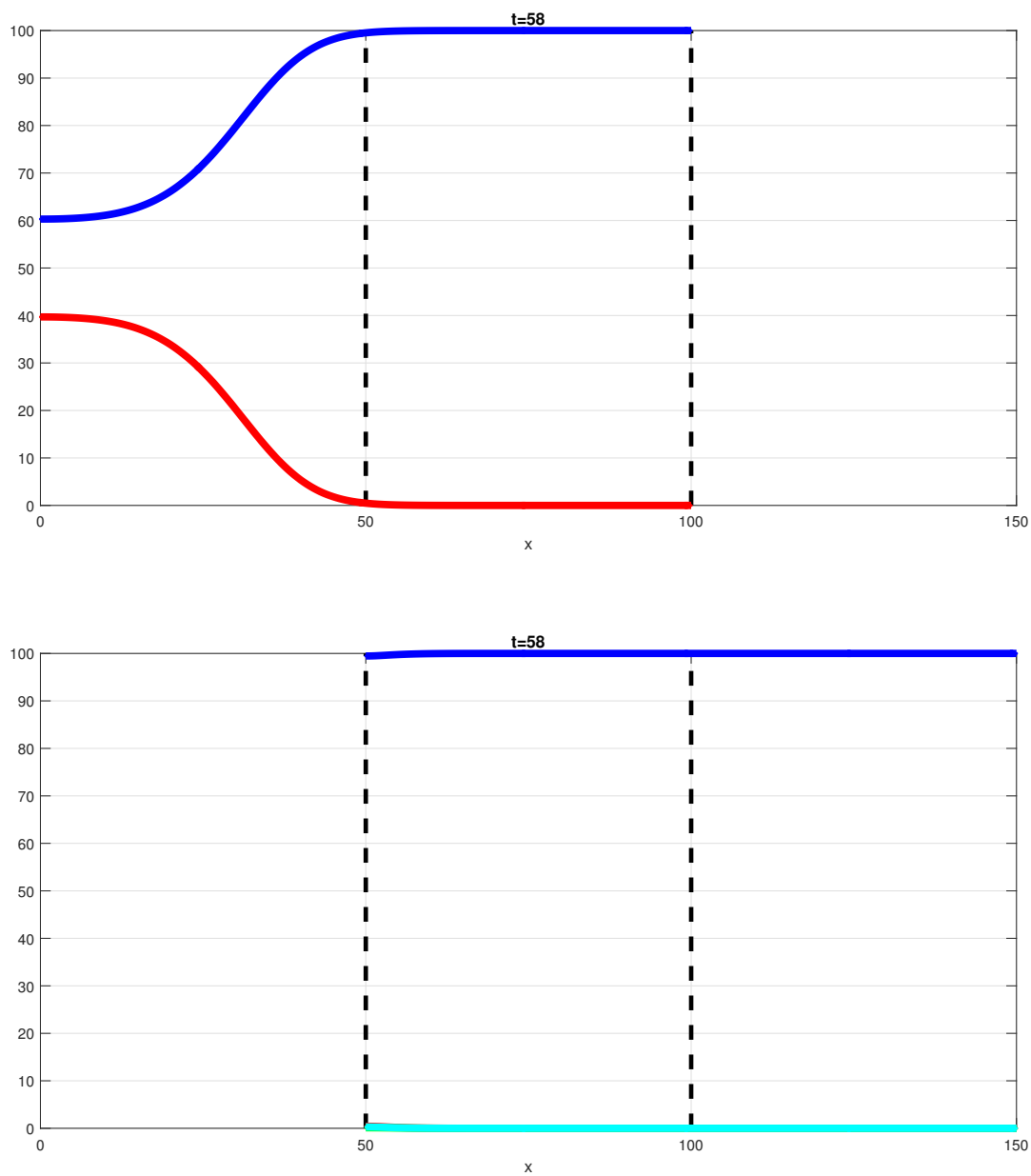


Figura 8.9: Solución en $t = 58$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

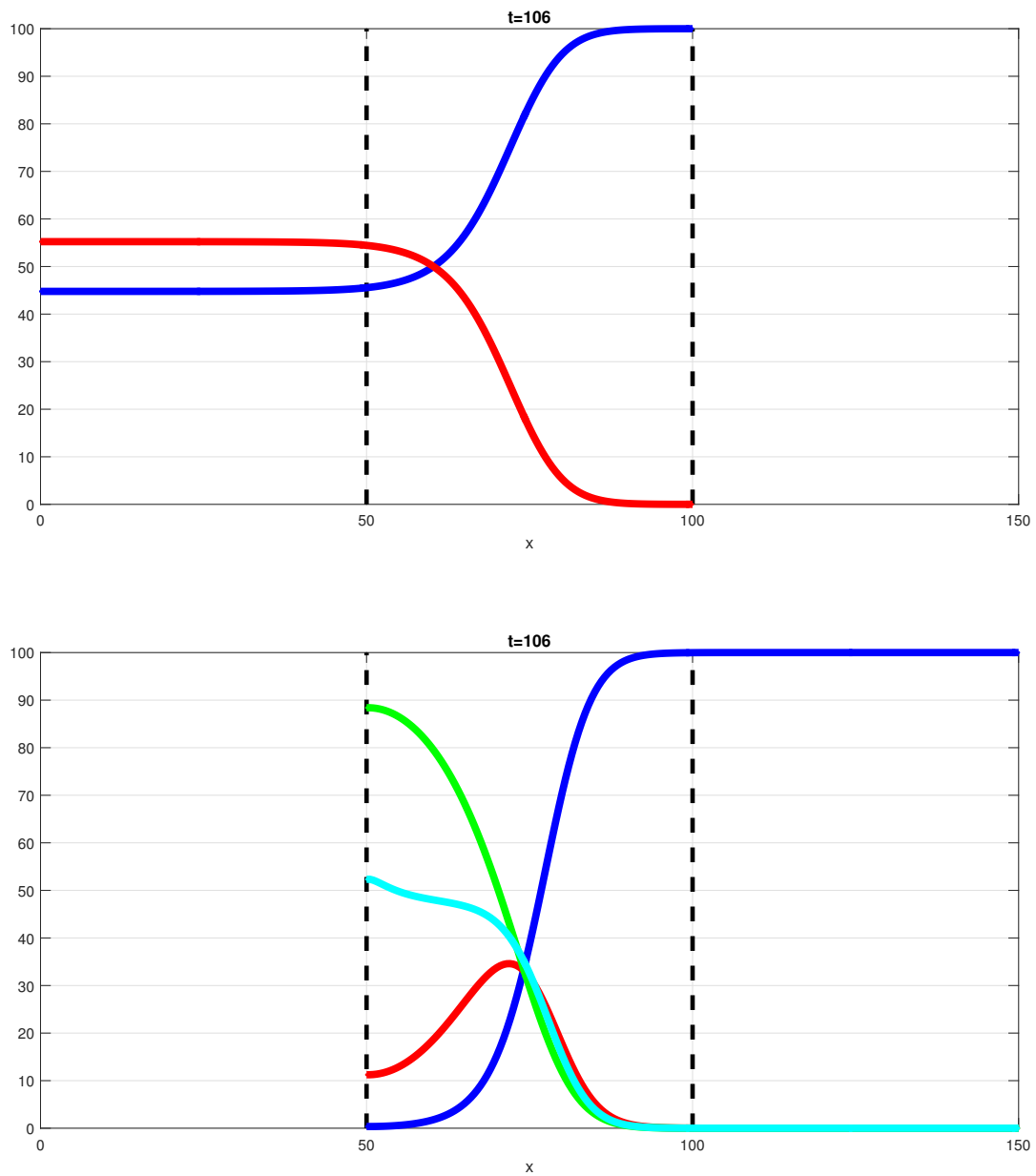


Figura 8.10: Solución en $t = 106$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

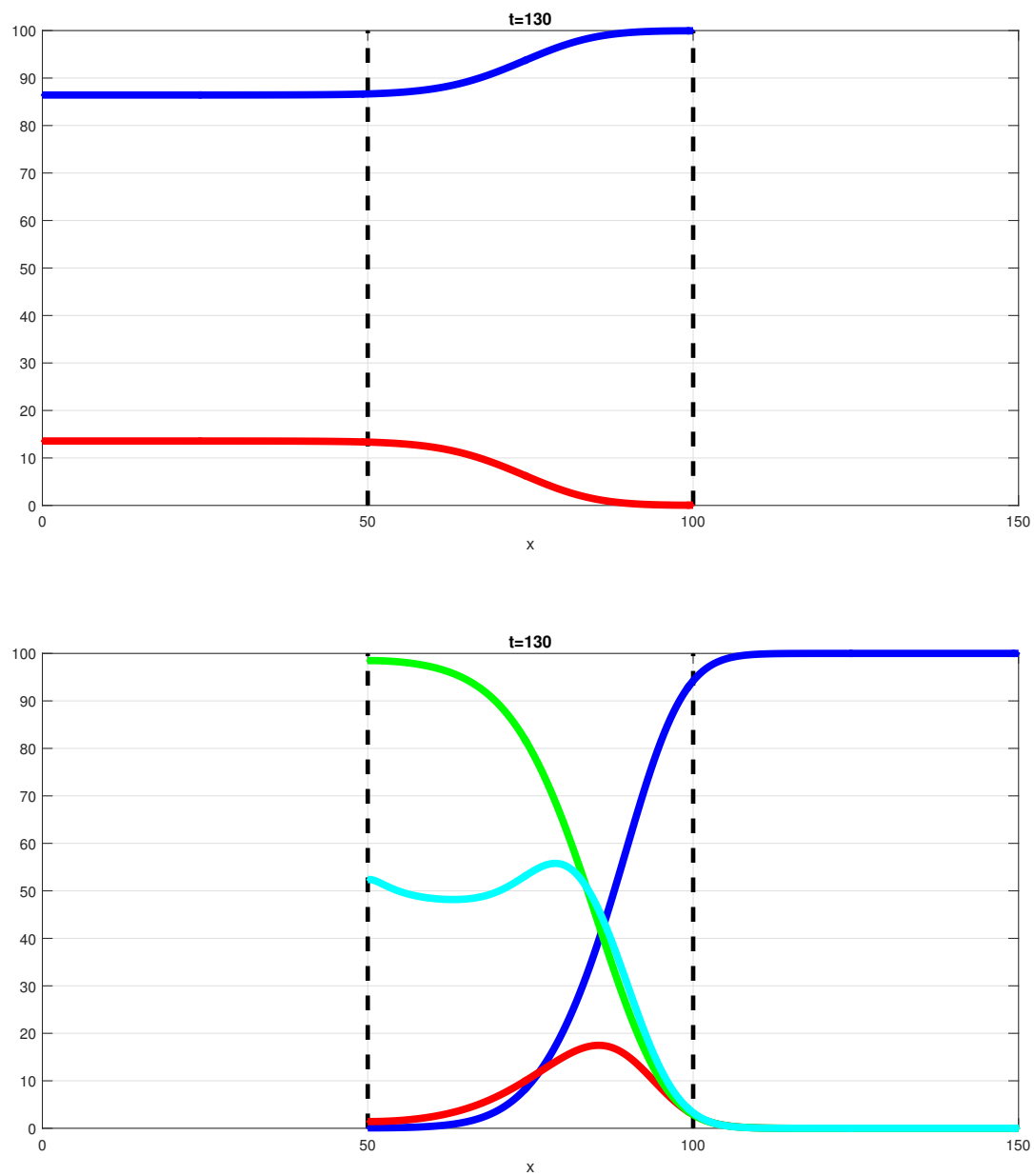


Figura 8.11: Solución en $t = 130$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

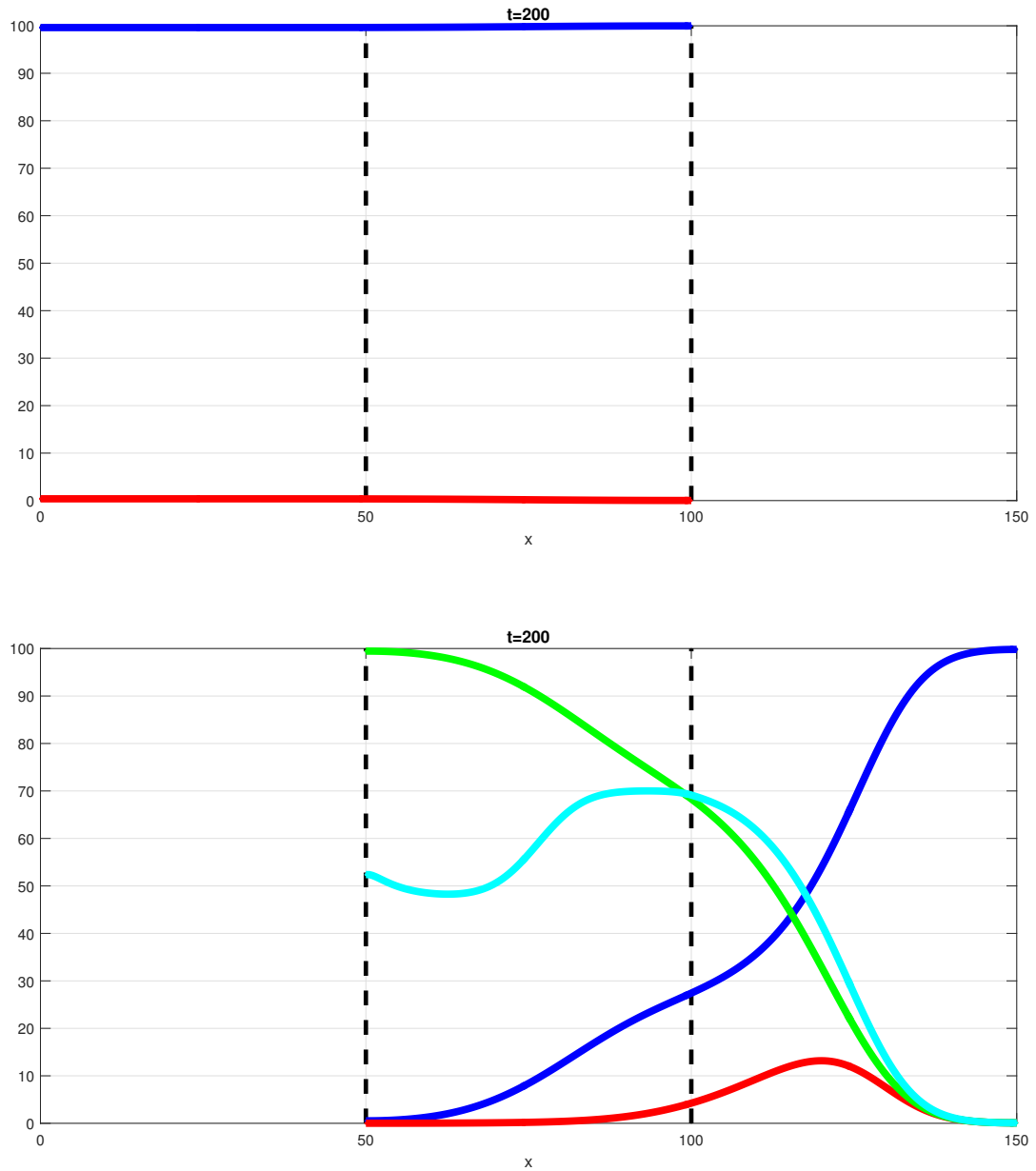


Figura 8.12: Solución en $t = 200$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

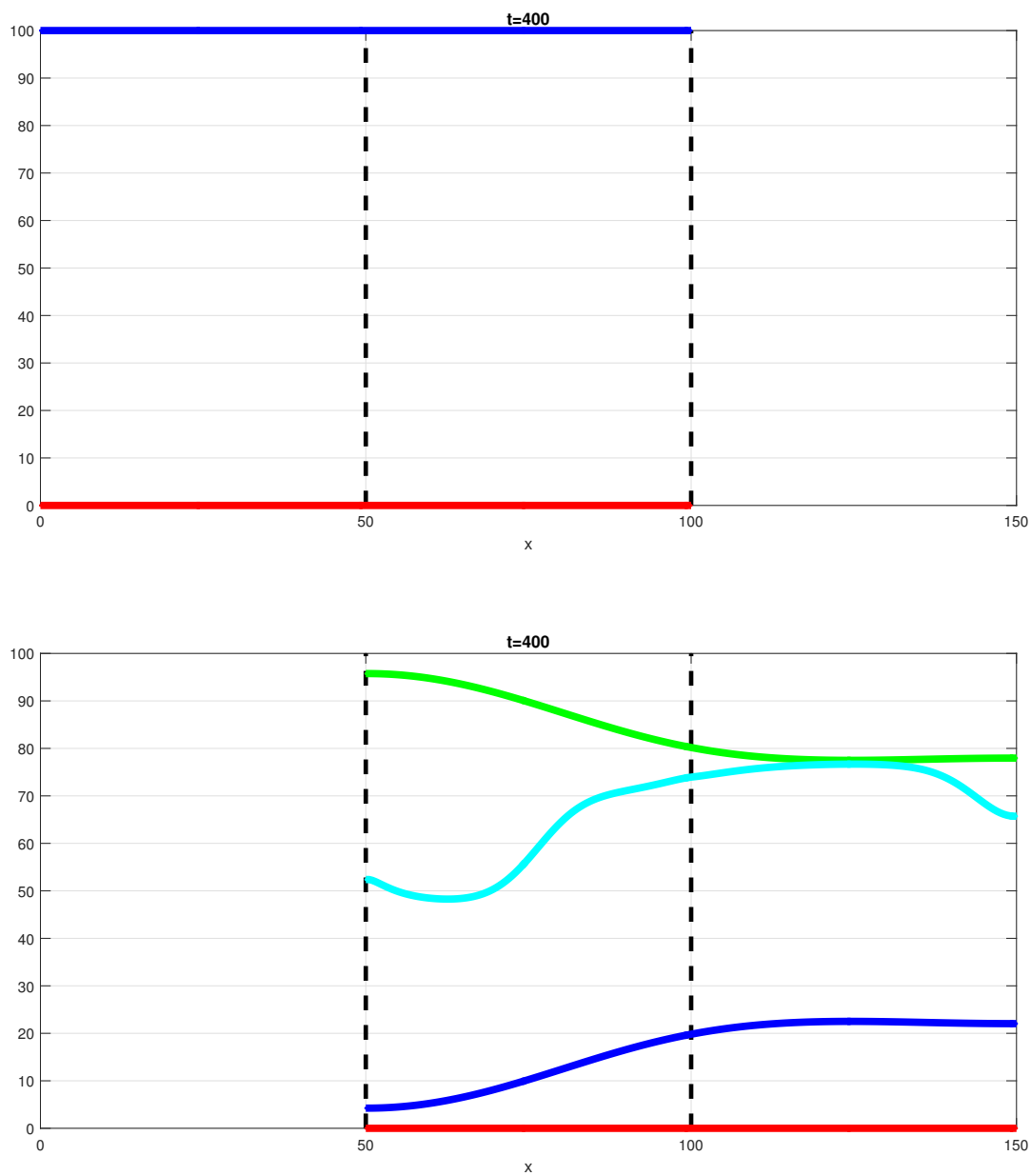


Figura 8.13: Solución en $t = 400$. **Gráfico sup.:** u_1 en azul y u_2 en rojo; **Gráfico inf.:** v_1 en azul, v_2 en rojo, v_3 en verde y c en celeste.

Capítulo 9

Conclusiones

El conjunto de ecuaciones propuesto tiene por objetivo modelar un escenario epidemiológico simple en donde sólo se consideran a lo más 3 compartimentos o clases, coeficientes de difusión y coeficientes de contagio constantes salvo el coeficiente de contagio de la población H_1 , el que sólo depende de la variable temporal y de los parámetros $a = [\alpha, \gamma, t_c]^t$.

En este trabajo se mostró que el modelo propuesto está bien definido, en particular, los trabajos de [Apreutesei, 2012] y [Zhou et al., 2019], y la teoría de C_0 -semigrupo proporcionaron herramientas útiles para probar existencia, unicidad y dependencia con respecto al parámetro a considerando que el dominio espacial estaba conformado por dos regiones. Además la teoría de C_0 -semigrupo entregó una forma explícita de la solución, que junto a las propiedades de F , a las características de $\beta_{bb}(t, a)$ y J , ayudó a probar la existencia del óptimo y la existencia de la solución de los problemas adjuntos.

El análisis numérico de la respuesta de las soluciones y de las cantidades de interés al parámetro de control entrega que ambas se ven afectadas a la variación de éste. Dada la respuesta de las cantidades de interés se decidió considerar a t_c como parámetro fijo y considerar $[\alpha, \gamma]^t$ como parámetro que participa en el problema de optimización. La definición de la función objetivo, es decir, la elección de los coeficientes: A, B, C, D, ε , de la función g y t_c obedece a otorgar propiedades de convexidad parcial en términos de cómo se ve la función y por esa razón es que se pudo haber escogido cualquier otra función que tuviera esas características, asimismo, la elección de la función objetivo pudo haber considerado mayormente criterios epidemiológicos.

Por otra parte, la obtención del gradiente discreto fue útil para el problema de optimización asociado al modelo temporal, sin embargo, no tuvo el mismo efecto para el caso del modelo espacio-temporal. Para el modelo temporal se logró encontrar el óptimo y el método al que se le proporcionó el gradiente discreto tuvo mejor rendimiento (el óptimo que se obtu-

vo tiene el gradiente más pequeño y el método demoró menos iteraciones en encontrarlo), por tanto trabajar con el gradiente discreto fue una ventaja. No obstante, en el modelo espacio-temporal no se logró un buen resultado, el óptimo entregado por el método T-R-R (método que utiliza el gradiente discreto) es mayor al entregado por los otros. Este problema puede deberse a los errores de redondeo de la solución numérica del problema directo y adjunto los que se transfieren al gradiente discreto, sin embargo, no se tiene seguridad de ello.

Posibles trabajos futuros son:

- Establecer las condiciones de optimalidad para el problema de optimización.
- Mostrar convergencia de los métodos numéricos utilizados para resolver los problemas directos y adjuntos.
- Implementar un método de optimización basado en el gradiente discreto y mostrar convergencia del mismo.
- Encontrar el gradiente discreto y resolver el problema de optimización considerando dimensión espacial 2.

Anexo A

A.1) Modelo Temporal

Recordar que: $\beta_{bb} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\beta_{bb}(t, a) = \begin{cases} \tilde{\beta}_{bb} & , \text{ si } t \leq t_c \\ \tilde{\beta}_{bb} \left(\alpha + (1 - \alpha)e^{-\gamma(t-t_c)} \right) & , \text{ si } t > t_c \end{cases}$$

y $G : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$:

$$G(t, a, u) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1(t) u_2(t) + \gamma_b u_2(t) \\ \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1(t) u_2(t) - \gamma_b u_2(t) \\ -\frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(t) v_2(t) - \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1(t) u_2(t) \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(t) v_2(t) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1(t) u_2(t) - \gamma_h v_2(t) \\ \gamma_h v_2(t) \end{bmatrix}$$

donde $a \in Q \subset \mathbb{R}^3$, $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^5$ y $u := [u_1, u_2, v_1, v_2, v_3]^t$.

A.1.1) $\beta_{bb}(t, a)$ es continua en $(t, a) \in [0, \infty) \times Q$

Para $(t, [\alpha, \gamma, t_c]^t) \in [0, \infty) \times Q$, las funciones: e , $-\gamma(t - t_c)$, $(1 - \alpha)$ y α son funciones continuas y por tanto $\widetilde{\beta}_{bb}(\alpha + (1 - \alpha)e^{-\gamma(t-t_c)})$ es continua en $[0, \infty) \times Q$.

Por otro lado, para a fijo, si $t \rightarrow t_c$ entonces $\beta_{bb}(t, a) \rightarrow \widetilde{\beta}_{bb}$ y en consecuencia $\beta_{bb}(t, a)$ es continua.

A.1.2) Continuidad de $G(t, u)$

Para $t \geq 0$ y $a \in Q$, G es continua puesto que β_{bb} es continua (A.1.1). Como $f(u, v) = u$ y $g(u, v) = v$ son funciones continuas en u y G se define como multiplicación y sumas de f y g , entonces G es continua en u .

A.1.3) G es localmente Lipschitz continua en u para todo $t \geq 0$

En este caso, G se dice localmente Lipschitz continua en u para todo $t \geq 0$, si para $N > 0$, existe $L := L(N) > 0$, tal que:

$$\|G(t, a, u) - G(t, a, v)\|_{\mathbb{R}^5} \leq L\|u - v\|_{\mathbb{R}^5} \quad (*)$$

cuando $\|u\|_{\mathbb{R}^5} \leq N$, $\|v\|_{\mathbb{R}^5} \leq N$, $t \geq 0$ y $a \in Q$ fijo.

Ahora, sea $v = (v_i)_{i=1}^5$, $u = (u_i)_{i=1}^5 \in \mathbb{R}^5$, $F = (F_i)_{i=1}^5$, $t \geq 0$ y $a \in Q$. Para probar (*) se procede como en (A.1.5) considerando $a_1 = a_2$.

A.1.4) Propiedad de G

Sea $v \in \mathbb{R}^5$ y se define la norma:

$$\|v\|_{\mathbb{R}^5} = \text{máx}\{|v_i| : i = 1, \dots, 5\}$$

Sea $N > 0$, $v = (v_i)_{i=1}^5$ y $u = (u_i)_{i=1}^5 \in \mathbb{R}^5$, $G = (G_i)_{i=1}^5$ y suponga que $\|u\|_{\mathbb{R}^5} \leq N$, $\|v\|_{\mathbb{R}^5} \leq N$ (es decir, para todo $i = 1, \dots, 5$ se tiene $|v_i| \leq N$). Sea además $t \geq 0$ y $a_1 \neq a_2 \in Q$:

$$\blacksquare \left| G_1(t, a_1, u) - G_1(t, a_2, v) \right| = \left| -\frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} u_1 u_2 + \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_1 v_2 + \gamma_b(v_2 - u_2) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_1 v_2 - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} u_1 u_2 \right| + \gamma_b |v_2 - u_2| \\
&= \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_2 (v_1 - u_1) + u_1 \left(\frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_2 - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} u_2 \right) \right| \\
&\quad + \gamma_b |v_2 - u_2| \\
&\leq \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} \right| |v_2| |v_1 - u_1| + |u_1| \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_2 - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} u_2 \right| |u_2| \\
&\quad + \gamma_b |v_2 - u_2|
\end{aligned}$$

Como $|u_1| \leq N$, $|v_2| \leq N$ y $|\beta_{bb}(t, z)| \leq \tilde{\beta}_{bb}$ para todo $t \geq 0$ y $z \in Q$ (por definición de β_{bb}) entonces:

$$\leq \frac{\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} N |v_1 - u_1| + N \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_2 - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} u_2 \right| + \gamma_b |v_2 - u_2|$$

aquí:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_2 - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} u_2 \right| &= \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_2 - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} u_2 + \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} v_2 - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} v_2 \right| \\
&= \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} (v_2 - u_2) - v_2 \left(\frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} \right) \right| \\
&\leq \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} \right| |v_2 - u_2| + |v_2| \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} \right| \\
&\leq \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} \right| |v_2 - u_2| + N \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} \right|
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\left| G_1(t, a_1, u) - G_1(t, a_2, v) \right| &\leq \frac{\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} N |v_1 - u_1| + \left(\frac{\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} N + \gamma_b \right) |v_2 - u_2| \\
&\quad + \frac{N}{N_1} |\beta_{bb}(t, a_2) - \beta_{bb}(t, a_1)| \\
&\leq \left(\frac{\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} N + \gamma_b \right) \|v - u\|_{\mathbb{R}^5} + \frac{N}{N_1} |\beta_{bb}(t, a_2) - \beta_{bb}(t, a_1)|
\end{aligned}$$

- De manera análoga se obtiene que:

$$\left| G_2(t, a_1, u) - G_2(t, a_2, v) \right| \leq \left(\frac{\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} N + \gamma_b \right) \|v - u\|_{\mathbb{R}^5} + \frac{N}{N_1} |\beta_{bb}(t, a_2) - \beta_{bb}(t, a_1)|$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \left| G_3(t, a_1, u) - G_3(t, a_2, v) \right| &\leq \left| \frac{\beta_{hh}}{N_2} u_3 u_4 - \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_3 v_4 \right| + \left| \frac{\beta_{bh}}{N_2} u_3 u_2 - \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_3 v_2 \right| \\ &\leq \frac{\beta_{hh}}{N_2} |u_3 u_4 - v_3 v_4| + \frac{\beta_{bh}}{N_2} |u_3 u_2 - v_3 v_2| \end{aligned}$$

aquí:

$$|u_3 u_4 - v_3 v_4| = |u_3 u_4 - v_3 v_4 + v_3 u_4 - v_3 u_4| \leq |u_3 - v_3| |u_4| + |u_4 - v_4| |v_3|$$

Como $|v_3| \leq N$ y $|u_4| \leq N$ entonces:

$$\leq N \left(|u_3 - v_3| + |u_4 - v_4| \right)$$

de forma análoga, se tiene:

$$|u_3 u_2 - v_3 v_2| \leq N \left(|u_3 - v_3| + |u_2 - v_2| \right)$$

por tanto:

$$\left| G_3(t, a_1, u) - G_3(t, a_2, v) \right| \leq \frac{\beta_{hh}}{N_2} N \left(|u_3 - v_3| + |u_4 - v_4| \right) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} N \left(|u_3 - v_3| + |u_2 - v_2| \right)$$

Sea $R_1 := \frac{N}{N_2} \max \{ \beta_{hh}, \beta_{bh} \}$:

$$\begin{aligned} &\leq R_1 \left(2|u_3 - v_3| + |u_4 - v_4| + |u_2 - v_2| \right) \\ &\leq 4R_1 \|u - v\|_{\mathbb{R}^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \left| G_4(t, a_1, u) - G_4(t, a_2, v) \right| &\leq \frac{\beta_{hh}}{N_2} |u_3 u_4 - v_3 v_4| + \frac{\beta_{bh}}{N_2} |u_3 u_2 - v_3 v_2| + \gamma_b |v_4 - u_4| \\ &\leq \frac{\beta_{hh}}{N_2} N \left(|u_3 - v_3| + |u_4 - v_4| \right) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} N \left(|u_3 - v_3| + |u_2 - v_2| \right) \\ &\quad + \gamma_b |v_4 - u_4| \end{aligned}$$

Sea $R_2 := \max \left\{ \frac{\beta_{hh}}{N_2} N, \frac{\beta_{bh}}{N_2} N, \gamma_b \right\}$:

$$\leq 5R_2 \|u - v\|_{\mathbb{R}^5}$$

$$\blacksquare \left| G_5(t, a_1, u) - G_5(t, a_2, v) \right| \leq \gamma_b \|u - v\|_{\mathbb{R}^5}$$

- Por último, sea $L = \max \left\{ \frac{\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} N + \gamma_b, 4R_1, 5R_2 \right\}$ y $C = \frac{N}{N_1}$, luego se tiene que para todo $j = 1, \dots, 5$:

$$(\forall t \geq 0) \left| G_j(t, a_1, u) - G_j(t, a_2, v) \right| \leq L \|u - v\|_{\mathbb{R}^5} + C |\beta_{bb}(t, a_1) - \beta_{bb}(t, a_2)|$$

y por lo tanto:

$$(\forall t \geq 0) \left\| G(t, a_1, u) - G(t, a_2, v) \right\|_{\mathbb{R}^5} \leq L \|u - v\|_{\mathbb{R}^5} + C |\beta_{bb}(t, a_1) - \beta_{bb}(t, a_2)|$$

A.1.5) Desigualdad de Gronwall Generalizada

Si:

$$u(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^t \kappa(s) u(s) ds \quad , \quad t \in [t_0, T)$$

donde todas las funciones involucradas son funciones reales y continuas en $[t_0, T)$, $T \leq \infty$ y $\kappa(t) \geq 0$, entonces:

$$u(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^t h(s) \kappa(s) e^{\left(\int_s^t \kappa(\tau) d\tau \right)} ds \quad , \quad t \in [t_0, T)$$

[?], p.14.

A.2) Optimización con restricciones EDO

A.2.1) Propiedad de F

Sea $v \in \mathbb{R}^6$, se define la norma en \mathbb{R}^6 como:

$$\|v\|_{\mathbb{R}^6} = \max\{|v_i| : i = 1, \dots, 6\}$$

Sea $v = (v_i)_{i=1}^6, u = (u_i)_{i=1}^6 \in \mathbb{R}^6$. Considere $F(t, a, u) = \left[G(t, a, u), \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 v_2 \right]^t$, $F = (F_i)_{i=1}^6$ y $a_1 \neq a_2 \in Q$, luego por propiedad de G (A.1.4) y:

$$(\forall t \geq 0) \left| F_6(t, a_1, u) - F_6(t, a_2, v) \right| \leq \frac{\beta_{hh}}{N_2} N \left(|u_2(t) - v_2(t)| + |u_1(t) - v_1(t)| \right)$$

se obtiene que existen $L > 0$ y $C > 0$ tales que:

$$(\forall t \geq 0) \left\| F(t, a_1, u) - F(t, a_2, v) \right\|_{\mathbb{R}^6} \leq L \|u - v\|_{\mathbb{R}^6} + C |\beta_{bb}(t, a_1) - \beta_{bb}(t, a_2)|$$

A.2.2) $\frac{\partial \beta_{bb}}{\partial a}$

$$\frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \alpha}(t, a) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } t \leq t_c \\ \tilde{\beta}_{bb}(1 - e^{-\gamma(t-t_c)}) & , \text{ si } t > t_c \end{cases}$$

$$\frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \gamma}(t, a) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } t \leq t_c \\ -\tilde{\beta}_{bb}(t - t_c)(1 - \alpha)e^{-\gamma(t-t_c)} & , \text{ si } t > t_c \end{cases}$$

$$\frac{\partial \beta_{bb}}{\partial t_c}(t, a) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } t \leq t_c \\ \tilde{\beta}_{bb}\gamma(1 - \alpha)e^{-\gamma(t-t_c)} & , \text{ si } t > t_c \end{cases}$$

aquí $\frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \alpha}(t, a)$ y $\frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \gamma}(t, a)$ son continuas con respecto t pero $\frac{\partial \beta_{bb}}{\partial t_c}(t, a)$ no lo es, no obstante, las tres funciones son continuas en a .

A.2.3) $\frac{\partial F}{\partial u}$ y $\frac{\partial F}{\partial a}$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1}u_2 & -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1}u_1 + \gamma_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1}u_2 & \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1}u_1 - \gamma_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_{bh}}{N_2}v_1 & -\frac{\beta_{hh}}{N_2}v_2 - \frac{\beta_{bh}}{N_2}u_2 & -\frac{\beta_{hh}}{N_2}v_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_{bh}}{N_2}v_1 & \frac{\beta_{hh}}{N_2}v_2 + \frac{\beta_{bh}}{N_2}u_2 & \frac{\beta_{hh}}{N_2}v_1 - \gamma_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_{hh}}{N_2}v_2 & \frac{\beta_{hh}}{N_2}v_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\Leftrightarrow

$$\frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u)^t \lambda = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_2 & \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 + \gamma_b & \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 - \gamma_b & -\frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1 & \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2 - \frac{\beta_{bh}}{N_2} u_2 & \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2 + \frac{\beta_{bh}}{N_2} u_2 & 0 & \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 & \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 - \gamma_h & \gamma_h & \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix}$$

\Leftrightarrow

$$\frac{\partial F}{\partial u}(t, a, u)^t \cdot \lambda = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \\ \left(\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 - \gamma_b \right) (\lambda_2 - \lambda_1) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1 (\lambda_4 - \lambda_3) \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2 (\lambda_4 + \lambda_6 - \lambda_3) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} u_2 (\lambda_4 - \lambda_3) \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 (\lambda_4 + \lambda_6 - \lambda_3) + \gamma_h (\lambda_5 - \lambda_4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y:

$$\frac{\partial J}{\partial u}(u(t), a) \Big|_{t=T} = [0, 0, 0, 0, A, B]^t$$

por lo tanto el problema adjunto queda como:

$$\begin{bmatrix} -\frac{d\lambda_1}{dt}(t) \\ -\frac{d\lambda_2}{dt}(t) \\ -\frac{d\lambda_3}{dt}(t) \\ -\frac{d\lambda_4}{dt}(t) \\ -\frac{d\lambda_5}{dt}(t) \\ -\frac{d\lambda_6}{dt}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_2(t) (\lambda_2(t) - \lambda_1(t)) \\ \left(\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1(t) - \gamma_b \right) (\lambda_2(t) - \lambda_1(t)) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1(t) (\lambda_4(t) - \lambda_3(t)) \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2(t) (\lambda_4(t) + \lambda_6(t) - \lambda_3(t)) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} u_2(t) (\lambda_4(t) - \lambda_3(t)) \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(t) (\lambda_4(t) + \lambda_6(t) - \lambda_3(t)) + \gamma_h (\lambda_5(t) - \lambda_4(t)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\lambda_1(T), \lambda_2(T), \lambda_3(T), \lambda_4(T), \lambda_5(T), \lambda_6(T)]^t = [0, 0, 0, 0, A, B]^t$$

y haciendo $\hat{t} = T - t$ (y por tanto $d\hat{t} = -dt$) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\lambda_1}{dt}(\hat{t}) \\ \frac{d\lambda_2}{dt}(\hat{t}) \\ \frac{d\lambda_3}{dt}(\hat{t}) \\ \frac{d\lambda_4}{dt}(\hat{t}) \\ \frac{d\lambda_5}{dt}(\hat{t}) \\ \frac{d\lambda_6}{dt}(\hat{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{bb}(\hat{t}, a)}{N_1} u_2(\hat{t}) (\lambda_2(\hat{t}) - \lambda_1(\hat{t})) \\ \left(\frac{\beta_{bb}(\hat{t}, a)}{N_1} u_1(\hat{t}) - \gamma_b \right) (\lambda_2(\hat{t}) - \lambda_1(\hat{t})) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1(\hat{t}) (\lambda_4(\hat{t}) - \lambda_3(\hat{t})) \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_2(\hat{t}) (\lambda_4(\hat{t}) + \lambda_6(\hat{t}) - \lambda_3(\hat{t})) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} u_2(\hat{t}) (\lambda_4(\hat{t}) - \lambda_3(\hat{t})) \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(\hat{t}) (\lambda_4(\hat{t}) + \lambda_6(\hat{t}) - \lambda_3(\hat{t})) + \gamma_h (\lambda_5(\hat{t}) - \lambda_4(\hat{t})) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\lambda_1(0), \lambda_2(0), \lambda_3(0), \lambda_4(0), \lambda_5(0), \lambda_6(0)]^t = [0, 0, 0, 0, A, B]^t$$

con $0 \leq \hat{t} \leq T$. Por otro lado:

$$\frac{\partial F}{\partial a}(t, a, u) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{N_1} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \alpha}(t, a) u_1 u_2 & -\frac{1}{N_1} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \gamma}(t, a) u_1 u_2 & -\frac{1}{N_1} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial t_c}(t, a) u_1 u_2 \\ \frac{1}{N_1} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \alpha}(t, a) u_1 u_2 & \frac{1}{N_1} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \gamma}(t, a) u_1 u_2 & \frac{1}{N_1} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial t_c}(t, a) u_1 u_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego:

$$\frac{\partial F}{\partial a}(t, a, u)^t \cdot \lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{N_1} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \alpha}(t, a) u_1 u_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \\ \frac{1}{N_1} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial \gamma}(t, a) u_1 u_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \\ \frac{1}{N_1} \frac{\partial \beta_{bb}}{\partial t_c}(t, a) u_1 u_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \end{bmatrix}$$

además:

$$\frac{\partial J}{\partial a}(u(t), a) \Big|_{t=T} = [-2\varepsilon(1 - \alpha), 2\varepsilon\gamma, 0]^t$$

Anexo B

B.1) Modelo Espacio - Temporal

B.1.1) Propiedad 1

Sea $X = [L^2(\Omega_1)]^2$ el espacio de Banach con norma:

$$\|u\|_X = \sup\{\|u_j\| : j = 1, 2\}$$

con $u := (u_j)_{j=1}^2 \in X$ y $\|u_j\| := \left(\int_{\Omega_1} |u_j(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ para todo $j = 1, 2$.

Además, sea $a \in Q$ fijo, se define $F : [0, T] \times X \rightarrow X$:

$$F(t, a, u) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 u_2 + \gamma_b u_2 \\ \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1 u_2 - \gamma_b u_2 \end{bmatrix}$$

donde $u := (u_j)_{j=1}^2 \in X$, $F := (F_i)_{i=1}^2$ y para $x \in \Omega_1$:

$$[F(t, a, u)](x) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1(x) u_2(x) + \gamma_b u_2(x) \\ \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_1(x) u_2(x) - \gamma_b u_2(x) \end{bmatrix}$$

entonces F es continua y medible en $t \in [0, T]$.

Sea $N > 0$ suficientemente grande, a partir de F se define F^N como sigue:

- si $|u_i(x, t)| \leq N$ entonces u_i no sufre cambio alguno en F_j .
- si $u_i(x, t) > N$ entonces u_i se sustituye por N en F_j .
- si $u_i(x, t) < -N$ entonces u_i se sustituye por $-N$ en F_j .

para $i, j \in \{1, 2\}$, luego se tienen los siguientes casos para F_j^N ($j = 1, 2$):

- Si para todo $i = 1, 2$: $|u_i(x)| \leq N$ entonces para $u, v \in X$, $t \in [0, T]$ y $x \in \Omega_1$:

$$\begin{aligned}
 |[F_1^N(t, a, u)](x) - [F_1^N(t, a, v)](x)| &= \left| -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1}u_1(x)u_2(x) + \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1}v_1(x)v_2(x) \right. \\
 &\quad \left. + \gamma_b(u_2(x) - v_2(x)) \right| \\
 &\leq \left| \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1}v_1(x)v_2(x) - \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1}u_1(x)u_2(x) \right| + \gamma_b |u_2(x) - v_2(x)| \\
 &\leq \left| \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} \right| |v_1(x)v_2(x) - u_1(x)u_2(x)| + \gamma_b |u_2(x) - v_2(x)| \\
 &\leq \left| \frac{\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} \right| |v_1(x)v_2(x) - u_1(x)u_2(x)| + \gamma_b |u_2(x) - v_2(x)|
 \end{aligned}$$

aquí:

$$\begin{aligned}
 |v_1(x)v_2(x) - u_1(x)u_2(x)| &= |v_1(x)v_2(x) - u_1(x)u_2(x) + u_1(x)v_2(x) - u_1(x)v_2(x)| \\
 &\leq |v_1(x) - u_1(x)||v_2(x)| + |v_2(x) - u_2(x)||u_1(x)| \\
 &\leq N \left(|v_1(x) - u_1(x)| + |v_2(x) - u_2(x)| \right)
 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\left| [F_1^N(t, a, u)](x) - [F_1^N(t, a, v)](x) \right| \leq \frac{\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} N |v_1(x) - u_1(x)| + \left(\frac{\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} N + \gamma_b \right) |v_2(x) - u_2(x)|$$

si $L_1 = \left(\frac{\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} N + \gamma_b \right)$, entonces:

$$\leq L_1 \left(|v_1(x) - u_1(x)| + |v_2(x) - u_2(x)| \right)$$

así:

$$\begin{aligned} \left| [F_1^N(t, a, u)](x) - [F_1^N(t, a, v)](x) \right|^2 &\leq L_1^2 \left(|v_1(x) - u_1(x)| + |v_2(x) - u_2(x)| \right)^2 \\ &\leq L_1^2 |v_1(x) - u_1(x)|^2 + 2L_1 |v_1(x) - u_1(x)| |v_2(x) - u_2(x)| + L_1^2 |v_2(x) - u_2(x)|^2 \end{aligned}$$

por desigualdad de Young:

$$|v_1(x) - u_1(x)| |v_2(x) - u_2(x)| \leq \frac{1}{2} |v_1(x) - u_1(x)|^2 + \frac{1}{2} |v_2(x) - u_2(x)|^2$$

luego:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \left| [F_1^N(t, a, u)](x) - [F_1^N(t, a, v)](x) \right|^2 dx &\leq (L_1^2 + L_1) \int_{\Omega_1} |v_1(x) - u_1(x)|^2 dx \\ &\quad + (L_1^2 + L_1) \int_{\Omega_1} |v_2(x) - u_2(x)|^2 dx \end{aligned}$$

por tanto:

$$\|F_1^N(t, a, u) - F_1^N(t, a, v)\| \leq \sqrt{L_1^2 + L_1} (\|v_1 - u_1\| + \|v_2 - u_2\|)$$

\Rightarrow

$$\|F_1^N(t, a, u) - F_1^N(t, a, v)\| \leq 2\sqrt{L_1^2 + L_1} \|v - u\|_X$$

de forma análoga se tiene:

$$\|F_2^N(t, a, u) - F_2^N(t, a, v)\| \leq 2\sqrt{L_2^2 + L_2} \|v - u\|_X$$

y en consecuencia:

$$\|F^N(t, a, u) - F^N(t, a, v)\|_X \leq L \|u - v\|_X$$

con $L = \max\{2\sqrt{L_i^2 + L_i} : i = 1, 2\} > 0$.

- Si $|u_i(x)| \leq N \wedge (u_j(x) > N \vee u_j(x) < -N)$ para $i \neq j \in \{1, 2\}$, entonces para $k = 1, 2$: F_k^N es una función lineal de la forma:

$$\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} c^N w \text{ o } \frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} c^N w + d^N$$

o es una función de la forma $\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} c^N$, con $c^N, d^N \in \mathbb{R}$ y $w \in \{u_1, u_2\}$. Por lo tanto es Lipschitz continua en $w \in X$ uniformemente con respecto a $t \in [0, T]$.

Así, $F_j^N(t, u)$ es Lipschitz continua en $u \in X$ uniformemente con respecto a $t \in [0, T]$ ($j = 1, 2$).

B.1.2) Propiedad de \tilde{f}_1^N

Sea $N > 0$, u_2 solución del problema (PT.1) y $g(t, u_1, u_2) = -\frac{\beta_{bb}(t, a)}{N_1} u_2 u_1$. Si g se redefine como sigue:

- si $|u_i(x, t)| \leq N$ entonces u_i no sufre cambio alguno en g .
- si $u_i(x, t) > N$ entonces u_i se sustituye por N en g .
- si $u_i(x, t) < -N$ entonces u_i se sustituye por $-N$ en g .

para $i = 1, 2$ y se denota por \tilde{f}_1^N , entonces procediendo como en B.1.1 se concluye que \tilde{f}_1^N es Lipschitz continua en X uniformemente con respecto a $t \in [0, T]$. Por otro lado, si $u_2 \geq 0$ entonces $\tilde{f}_1^N \leq f_1^N$ donde f_1^N se define como en el teorema 5.3.1.

B.1.3) Propiedad 2

Sea $a_1, a_2 \in Q$, $a_1 \neq a_2$, y $v = (v_i)_{i=1}^2$ y $u = (u_i)_{i=1}^2 \in X = [L^2(\Omega_1)]^2$ soluciones del problema (6.4), entonces (por teorema 5.3.1) u, v son funciones no negativas y existe $N > 0$ (independiente de $a \in Q$) tal que $0 \leq v_i(x, t) \leq N$ y $0 \leq u_i(x, t) \leq N$ para todo $(x, t) \in \Omega_{1,T}$. Sea además $t \in [0, T]$ y $x \in \Omega_1$:

$$\begin{aligned}
& \left| [F_1(t, a_1, u)](x) - [F_1(t, a_2, v)](x) \right| = \left| -\frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} u_1(x) u_2(x) + \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_1(x) v_2(x) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \gamma_b(u_2(x) - v_2(x)) \right| \\
& \leq \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_1(x) v_2(x) - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} u_1(x) u_2(x) \right| + \gamma_b |v_2(x) - u_2(x)| \\
& = \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_2(x) (v_1(x) - u_1(x)) + u_1(x) \left(\frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_2(x) - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} u_2(x) \right) \right| \\
& \quad + \gamma_b |v_2(x) - u_2(x)| \\
& \leq \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} \right| |v_2(x)| |v_1(x) - u_1(x)| + |u_1(x)| \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_2(x) - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} u_2(x) \right| \\
& \quad + \gamma_b |v_2(x) - u_2(x)|
\end{aligned}$$

como $u_i(x) \leq N$, $v_i(x) \leq N$ y $|\beta_{bb}(t, z)| \leq \tilde{\beta}_{bb}$ para todo $t \geq 0$ y $z \in Q$ entonces:

$$\leq \frac{\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} N |v_1(x) - u_1(x)| + N \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_2(x) - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} u_2(x) \right| + \gamma_b |v_2(x) - u_2(x)|$$

aquí:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_2(x) - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} u_2(x) \right| = \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} v_2(x) - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} u_2(x) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} v_2(x) - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} v_2(x) \right| \\
& = \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} (v_2(x) - u_2(x)) - v_2(x) \left(\frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} - \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} \right) \right| \\
& \leq \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} \right| |v_2(x) - u_2(x)| + |v_2(x)| \left| \frac{\beta_{bb}(t, a_2)}{N_1} - \frac{\beta_{bb}(t, a_1)}{N_1} \right| \\
& \leq \frac{\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} |v_2(x) - u_2(x)| + \frac{N}{N_1} \left| \beta_{bb}(t, a_2) - \beta_{bb}(t, a_1) \right|
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left| [F_1(t, a_1, u)](x) - [F_1(t, a_2, v)](x) \right| &\leq \frac{\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} N |v_1(x) - u_1(x)| + \left(\frac{N\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} + \gamma_b \right) |v_2(x) - u_2(x)| \\ &\quad + \frac{N}{N_1} |\beta_{bb}(t, a_2) - \beta_{bb}(t, a_1)| \end{aligned}$$

$$\text{sea } L_1 = \text{máx} \left\{ \frac{\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} N, \frac{N\tilde{\beta}_{bb}}{N_1} + \gamma_b, \frac{N}{N_1} \right\}:$$

$$\begin{aligned} \left| [F_1(t, a_1, u)](x) - [F_1(t, a_2, v)](x) \right| &\leq L_1 (|v_1(x) - u_1(x)| + |v_2(x) - u_2(x)| \\ &\quad + |\beta_{bb}(t, a_2) - \beta_{bb}(t, a_1)|) \end{aligned}$$

Considere $a, b, c \geq 0$, resolviendo el trinomio al cuadrado y haciendo uso de la desigualdad de Young se obtiene:

$$(a + b + c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$$

por tanto:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \left| [F_1(t, a_1, u)](x) - [F_1(t, a_2, v)](x) \right|^2 dx &\leq \\ 3L_1^2 \left(\int_{\Omega_1} |v_1(x) - u_1(x)|^2 dx + \int_{\Omega_1} |v_2(x) - u_2(x)|^2 dx \right) &+ 3L_1^2 \int_{\Omega_1} |\beta_{bb}(t, a_2) - \beta_{bb}(t, a_1)| dx \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\|F_1(t, a_1, u) - F_1(t, a_2, v)\| \leq 3L_1^2 \|v - u\|_X + 3L_1^2 |\beta_{bb}(t, a_2) - \beta_{bb}(t, a_1)| |\Omega_1|$$

sea $L_2 = \text{máx} \{3L_1^2, 3L_1^2 |\Omega_1|\}$ ($|\Omega_1| < \infty$, pues Ω_1 es acotado)

$$\|F_1(t, a_1, u) - F_1(t, a_2, v)\| \leq L_2 \|v - u\|_X + L_2 |\beta_{bb}(t, a_2) - \beta_{bb}(t, a_1)|$$

De manera análoga se obtiene que:

$$\|F_2(t, a_1, u) - F_2(t, a_2, v)\| \leq L_2 \|v - u\|_X + L_2 |\beta_{bb}(t, a_2) - \beta_{bb}(t, a_1)|$$

Por lo tanto, para todo $t \in [0, T]$:

$$\|F(t, a, u) - F(t, a, v)\|_X \leq L \|u - v\|_X + L |\beta_{bb}(t, a_1) - \beta_{bb}(t, a_2)|$$

con $L = L_2 > 0$ (constante que no depende de $a \in Q$).

B.1.4) Propiedad 3

Sea $X = [L^2(\Omega_2)]^3$ el espacio de Banach con norma:

$$\|u\|_X = \sup\{\|u_j\| : j = 1, 2, 3\}$$

con $u := (u_j)_{j=1}^3 \in X$ y $\|u_j\| := \left(\int_{\Omega_2} |u_j(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ para todo $j = 1, 2, 3$.

Además, sea $a \in Q$ fijo, se define $F : [0, T] \times X \rightarrow X$:

$$F(t, a, u) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 v_2 - \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2(t) v_1 \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1 v_2 - \gamma_h v_2 + \frac{\beta_{bh}}{N_2} v_1 \bar{u}_2(t) \\ \gamma_h v_2 \end{bmatrix}$$

donde $v := (v_j)_{j=1}^3 \in X$, $\bar{u}_2 \in C([0, T]; L^2(\Omega_2))$, $F := (F_i)_{i=1}^3$ y para $x \in \Omega_2$:

$$[F(t, a, u)](x) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(x) v_2(x) - \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2(x, t) v_1(x) \\ \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(x) v_2(x) - \gamma_h v_2(x) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2(x, t) v_1(x) \\ \gamma_h v_2(x) \end{bmatrix}$$

entonces F está bien definida, F es continua y medible en $t \in [0, T]$.

Sea $N > 0$ suficientemente grande, a partir de F (notar que en su definición sólo interviene v_1 y v_2) se define F^N como sigue:

- si $|v_i(x, t)| \leq N$ entonces v_i no sufre cambio alguno en F_j .
- si $v_i(x, t) > N$ entonces v_i se sustituye por N en F_j .
- si $v_i(x, t) < -N$ entonces v_i se sustituye por $-N$ en F_j .

para $i = 1, 2$ y $j = 1, 2, 3$, luego se tienen los siguientes casos para F_j^N :

- Si para todo $i = 1, 2$: $|v_i(x)| \leq N$, entonces para $u, v \in X$, $t \in [0, T]$ y $x \in \Omega_2$:

$$\begin{aligned} |[F_1^N(t, a, u)](x) - [F_1^N(t, a, v)](x)| &= \left| \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(x) v_2(x) - \frac{\beta_{hh}}{N_2} u_1(x) u_2(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2(x, t) v_1(x) - \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2(x, t) u_1(x) \right| \\ &\leq \left| \frac{\beta_{hh}}{N_2} \right| |v_1(x) v_2(x) - u_1(x) u_2(x)| + \left| \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2(x, t) \right| |v_1(x) - u_1(x)| \end{aligned}$$

como $\bar{u}_2(x, t) \in L^\infty(\Omega_{2,T})$ entonces:

$$\leq \left| \frac{\beta_{hh}}{N_2} \right| |v_1(x) v_2(x) - u_1(x) u_2(x)| + \left| \frac{\beta_{bh}}{N_2} \right| \|\bar{u}_2\|_{L^\infty(\Omega_{2,T})} |v_1(x) - u_1(x)|$$

aquí:

$$\begin{aligned} |v_1(x) v_2(x) - u_1(x) u_2(x)| &= |v_1(x) v_2(x) - u_1(x) u_2(x) + u_1(x) v_2(x) - u_1(x) v_2(x)| \\ &\leq |v_1(x) - u_1(x)| |v_2(x)| + |v_2(x) - u_2(x)| |u_1(x)| \\ &\leq N \left(|v_1(x) - u_1(x)| + |v_2(x) - u_2(x)| \right) \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
|F_1^N(t, a, u)(x) - F_1^N(t, a, v)(x)| &\leq \left(\frac{\beta_{hh}}{N_2} N + \frac{\beta_{bh}}{N_2} \|\bar{u}_2\|_{L^\infty(\Omega_2, T)} \right) |v_1(x) - u_1(x)| \\
&\quad + \frac{\beta_{hh}}{N_2} N |v_2(x) - u_2(x)|
\end{aligned}$$

sea $L_1 = \frac{\beta_{hh}}{N_2} N + \frac{\beta_{bh}}{N_2} \|\bar{u}_2\|_{L^\infty(\Omega_2, T)}$:

$$|[F_1^N(t, a, u)(x) - F_1^N(t, a, v)(x)]| \leq L_1 (|v_1(x) - u_1(x)| + |v_2(x) - u_2(x)|)$$

y procediendo como en B.1.1 se obtiene:

$$\|F_1^N(t, a, u) - F_1^N(t, a, v)\| \leq 2\sqrt{L_1^2 + L_1} \|v - u\|_X$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
|[F_2^N(t, a, u)(x) - F_2^N(t, a, v)(x)]| &= \left| \frac{\beta_{hh}}{N_2} u_1(x)u_2(x) - \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(x)v_2(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2(x, t)u_1(x) - \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2(x, t)v_1(x) \right| \\
&\quad + \gamma_h |v_2(x) - u_2(x)| \\
&\leq \left| \frac{\beta_{hh}}{N_2} \right| |u_1(x)u_2(x) - v_1(x)v_2(x)| + \left| \frac{\beta_{bh}}{N_2} \right| \|\bar{u}_2\|_{L^\infty(\Omega_2, T)} |u_1(x) - v_1(x)| \\
&\quad + \gamma_h |v_2(x) - u_2(x)| \\
&\leq \left| \frac{\beta_{hh}}{N_2} \right| N (|v_1(x) - u_1(x)| + |v_2(x) - u_2(x)|) \\
&\quad + \left| \frac{\beta_{bh}}{N_2} \right| \|\bar{u}_2\|_{L^\infty(\Omega_2, T)} |u_1(x) - v_1(x)| + \gamma_h |v_2(x) - u_2(x)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\left| \frac{\beta_{hh}}{N_2} \right| N + \left| \frac{\beta_{bh}}{N_2} \right| \|\bar{u}_2\|_{L^\infty(\Omega_2, T)} \right) |v_1(x) - u_1(x)| \\ &\quad + \left(\left| \frac{\beta_{hh}}{N_2} \right| N + \gamma_h \right) |v_2(x) - u_2(x)| \end{aligned}$$

si $L_2 = \frac{\beta_{hh}}{N_2} N + \max \left\{ \frac{\beta_{bh}}{N_2} \|\bar{u}_2\|_{L^\infty(\Omega_2, T)}, \gamma_h \right\}$ entonces:

$$|[F_2^N(t, a, u)](x) - [F_2^N(t, a, v)](x)| \leq L_2 \left(|v_1(x) - u_1(x)| + |v_2(x) - u_2(x)| \right)$$

\Rightarrow

$$\|F_2^N(t, a, u) - F_2^N(t, a, v)\| \leq 2\sqrt{L_2^2 + L_2} \|u - v\|_X$$

Por último:

$$|[F_3^N(t, a, u)](x) - [F_3^N(t, a, v)](x)| \leq L_3 |u_2(x) - v_2(x)|$$

donde $L_3 = \gamma_b$, por lo tanto:

$$\|F_3^N(t, a, u) - F_3^N(t, a, v)\| \leq L_3 \|u - v\|_X$$

y en consecuencia:

$$\|F^N(t, a, u) - F^N(t, a, v)\|_X \leq L \|u - v\|_X$$

con $L = \max \left\{ L_3^2, 2\sqrt{L_1^2 + L_1}, 2\sqrt{L_2^2 + L_2} \right\} > 0$.

- Si $|v_i(x)| \leq N \wedge (v_j(x) > N \vee v_j(x) < -N)$ para $i \neq j \in \{1, 2\}$, entonces F_k^N ($k = 1, 2, 3$) es una función lineal o constante de la forma:
 - $F_k^N = (c^N + d^N \bar{u}_2) v_1 + r^N$, $F_k^N = c^N v_2 + d^N \bar{u}_2$ o $F_k^N = c^N + d^N \bar{u}_2$ ($k = 1, 2$).
 - $F_3^N = c^N$ o $F_3^N = \gamma_b v_2$.

aquí c^N, d^N, r^N representan números reales que dependen de N (no necesariamente son los mismos en cada F_k^N). Así, $F_j^N(t, u)$ es Lipschitz continua en $u \in X$ uniformemente con respecto a $t \in [0, T]$ ($j = 1, 2, 3$).

B.1.5) Propiedad de \tilde{f}_2^N

Sea $N > 0$, v_1 solución del problema (PT.1), \tilde{u}_2 según el teorema 5.3.3 y $g(t, v_1, v_2) = \left(\frac{\beta_{hh}}{N_2}v_1 - \gamma_b\right)v_2$. Si g se redefine como sigue:

- si $|v_i(x, t)| \leq N$ entonces v_i no sufre cambio alguno en g .
- si $v_i(x, t) > N$ entonces v_i se sustituye por N en g .
- si $v_i(x, t) < -N$ entonces v_i se sustituye por $-N$ en g .

para $i = 1, 2$ y se denota por \tilde{f}_2^N , entonces \tilde{f}_2^N es Lipschitz continua en X uniformemente con respecto a $t \in [0, T]$ (proceder como en B.1.4). Por otro lado, si $v_1 \geq 0$ entonces $\tilde{f}_2^N \leq f_2^N$ donde f_2^N se define como en el teorema 5.3.3 (aquí $\tilde{u}_2 \geq 0$ en $\Omega_2 \times (0, T)$).

B.1.6) Propiedad 4

Sea $a_1, a_2 \in Q$, $a_1 \neq a_2$, $v = (v_i)_{i=1}^3$ y $u = (u_i)_{i=1}^3 \in X = [L^2(\Omega_1)]^3$ soluciones del problema (P.2), entonces (por teorema 5.3.4) u, v son funciones no negativas y existe $N > 0$ (independiente de $a \in Q$) tal que $0 \leq v_i(x, t) \leq N$ y $0 \leq u_i(x, t) \leq N$ para todo $(x, t) \in \Omega_{2,T}$.

Sea $\bar{u}_2^j(x, t)$ asociado a_j , $t \in [0, T]$ y $x \in \Omega_2$:

$$\begin{aligned} \left| [F_1(t, a_1, u)](x) - [F_1(t, a_2, v)](x) \right| &= \left| -\frac{\beta_{hh}}{N_2}u_1(x)u_2(x) + \frac{\beta_{hh}}{N_2}v_1(x)v_2(x) \right. \\ &\quad \left. -\frac{\beta_{bh}}{N_2}\bar{u}_2^1(x, t)u_1(x) + \frac{\beta_{bh}}{N_2}\bar{u}_2^2(x, t)v_1(x) \right| \\ &\leq \frac{\beta_{hh}}{N_2}|v_1(x)v_2(x) - u_1(x)u_2(x)| + \frac{\beta_{bh}}{N_2}|\bar{u}_2^2(x, t)v_1(x) - \bar{u}_2^1(x, t)u_1(x)| \end{aligned}$$

aquí

- $|v_1(x)v_2(x) - u_1(x)u_2(x)| \leq |v_1(x) - u_1(x)| + |v_2(x) - u_2(x)|$
- $|\bar{u}_2^2(x, t)v_1(x) - \bar{u}_2^1(x, t)u_1(x)| \leq |v_1(x) - u_1(x)| + |\bar{u}_2^2(x, t) - \bar{u}_2^1(x, t)|$

por tanto, si $L_1 = \max \left\{ \frac{\beta_{hh}}{N_2}, \frac{\beta_{bh}}{N_2} \right\} > 0$ entonces:

$$\begin{aligned} \left| [F_1(t, a_1, u)](x) - [F_1(t, a_2, v)](x) \right| &\leq 2L_1 (|v_1(x) - u_1(x)| + |v_2(x) - u_2(x)|) \\ &\quad + |\bar{u}_2^2(x, t) - \bar{u}_2^1(x, t)| \end{aligned}$$

y en consecuencia existe $L_2 > 0$ tal que:

$$\|F_1(t, a_1, u) - F_1(t, a_2, v)\| \leq L_2 \|v - u\|_X + \|\bar{u}_2^2(t) - \bar{u}_2^1(t)\|_{L^2(\Omega_2)}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \left| [F_2(t, a_1, u)](x) - [F_2(t, a_2, v)](x) \right| &= \left| -\frac{\beta_{hh}}{N_2} u_1(x) u_2(x) + \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(x) v_2(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2^1(x, t) u_1(x) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2^2(x, t) v_1(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2^1(x, t) u_1(x) + \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2^2(x, t) v_1(x) \right| \\ &\leq \frac{\beta_{hh}}{N_2} |v_1(x) v_2(x) - u_1(x) u_2(x)| + \frac{\beta_{bh}}{N_2} |\bar{u}_2^2(x, t) v_1(x) - \bar{u}_2^1(x, t) u_1(x)| \end{aligned}$$

aquí

- $|v_1(x) v_2(x) - u_1(x) u_2(x)| \leq |v_1(x) - u_1(x)| + |v_2(x) - u_2(x)|$
- $|\bar{u}_2^2(x, t) v_1(x) - \bar{u}_2^1(x, t) u_1(x)| \leq |v_1(x) - u_1(x)| + |\bar{u}_2^2(x, t) - \bar{u}_2^1(x, t)|$

por tanto, si $L_1 = \max \left\{ \frac{\beta_{hh}}{N_2}, \frac{\beta_{bh}}{N_2} \right\} > 0$ entonces:

$$\begin{aligned} \left| [F_1(t, a_1, u)](x) - [F_1(t, a_2, v)](x) \right| &\leq 2L_1 (|v_1(x) - u_1(x)| + |v_2(x) - u_2(x)|) \\ &\quad + |\bar{u}_2^2(x, t) - \bar{u}_2^1(x, t)| \end{aligned}$$

y en consecuencia existe $L_2 > 0$ tal que:

$$\|F_1(t, a_1, u) - F_1(t, a_2, v)\| \leq L_2 \|v - u\|_X + L_2 \|\bar{u}_2^1(t) - \bar{u}_2^2(t)\|_{L^2(\Omega_2)}$$

Por otro lado:

$$\left| [F_2(t, a_1, u)](x) - [F_2(t, a_2, v)](x) \right| = \left| \frac{\beta_{hh}}{N_2} u_1(x) u_2(x) - \frac{\beta_{hh}}{N_2} v_1(x) v_2(x) \right|$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2^1(x, t) u_1(x) - \frac{\beta_{bh}}{N_2} \bar{u}_2^2(x, t) v_1(x) \\
& + \gamma_h (v_2(x) - u_2(x)) \Big| \\
\leq & \frac{\beta_{hh}}{N_2} |u_1(x) u_2(x) - v_1(x) v_2(x)| + \frac{\beta_{bh}}{N_2} |\bar{u}_2^1(x, t) u_1(x) - \bar{u}_2^2(x, t) v_1(x)| + \gamma_h |v_2(x) - u_2(x)|
\end{aligned}$$

aquí

- $|u_1(x) u_2(x) - v_1(x) v_2(x)| \leq |u_1(x) - v_1(x)| + |u_2(x) - v_2(x)|$
- $|\bar{u}_2^1(x, t) u_1(x) - \bar{u}_2^2(x, t) v_1(x)| \leq |u_1(x) - v_1(x)| + |\bar{u}_2^1(x, t) - \bar{u}_2^2(x, t)|$

por tanto, si $L_3 = \max \left\{ \frac{\beta_{hh}}{N_2} + \gamma_h, \frac{\beta_{hh}}{N_2} + \frac{\beta_{bh}}{N_2} \right\} > 0$ entonces:

$$\begin{aligned}
\left| [F_2(t, a_1, u)](x) - [F_2(t, a_2, v)](x) \right| & \leq 2L_3 (|u_1(x) - v_1(x)| + |u_2(x) - v_2(x)| \\
& + |\bar{u}_2^1(x, t) - \bar{u}_2^2(x, t)|)
\end{aligned}$$

y en consecuencia existe $L_4 > 0$ tal que:

$$\|F_2(t, a_1, u) - F_2(t, a_2, v)\| \leq L_4 \|v - u\|_X + L_4 \|\bar{u}_2^1(t) - \bar{u}_2^2(t)\|_{L^2(\Omega_2)}$$

Por último:

$$\left| [F_3(t, a_1, u)](x) - [F_3(t, a_2, v)](x) \right| \leq \gamma_h |u_2(x) - v_2(x)|$$

\Rightarrow

$$\|F_3(t, a_1, u) - F_3(t, a_2, v)\| \leq \gamma_h^2 \|u_2 - v_2\|_X$$

\Rightarrow

$$\|F_3(t, a_1, u) - F_3(t, a_2, v)\| \leq \gamma_h^2 \|u_2 - v_2\|_X + \gamma_h \|\bar{u}_2^1(t) - \bar{u}_2^2(t)\|_{L^2(\Omega_2)}$$

y en consecuencia existe $L > 0$ (independiente de $a \in Q$) tal que:

$$\|F(t, a_1, u) - F(t, a_2, v)\|_X \leq L \|v - u\|_X + L \|\bar{u}_2^1(t) - \bar{u}_2^2(t)\|_{L^2(\Omega_2)}$$

Bibliografía

- [Anaya et al., 2015] Anaya, V., Bendahmane, M., Langlais, M., and Sepúlveda, M. (2015). A convergent finite volume method for a model of indirectly transmitted diseases with nonlocal cross-diffusion. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(2):132–157.
- [Anaya et al., 2009] Anaya, V., Bendahmane, M., and Sepúlveda, M. (2009). A numerical analysis of reaction-diffusion system modeling the dynamics of growth tumors. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 20(5):732–758.
- [Apreutesei, 2012] Apreutesei, N. (2012). An optimal control problem for a pest, predator and plant system. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, (13):1391–1400.
- [Barbu, 1989] Barbu, V. (1989). *Mathematical Methods in Optimization of Differential Systems*. Springer Science+Business Media, Bucharest.
- [Berres et al., 2005] Berres, S., Bürger, R., Coronel, A., and Sepúlveda, M. (2005). Numerical identification of parameters for strongly degenerate convection-diffusion modelling centrifugation of flocculated suspensions. *Applied Numerical Mathematics*, pages 311–337.
- [Brauer and Castillo-Chávez, 2012] Brauer, F. and Castillo-Chávez (2012). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, volume 40 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag New York, 2nd edition.
- [Bürger et al., 2016] Bürger, R., Chowell, G., Gavilán, E., Mulet, P., and Villada, L. (2016). Modelling the spatial-temporal evolution of the 2009 a-h1n1 influenza pandemic in chile. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 13(1):43–65.
- [Bürger et al., 2018] Bürger, R., Chowell, G., Gavilán, E., Mulet, P., and Villada, L. (2018). Numerical solution of a spatio-temporal gender-structured model for hantavirus infection in rodents. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 15(1):95–123.
- [Bürger et al., 2021] Bürger, R., Chowell, G., and Lara-Diaz, L. (2021). Measuring differences between phenomenological growth models applied to epidemiology. *Mathematical Biosciences*, 334(108558):15.

- [Britton, 2003] Britton, N. (2003). *Essential Mathematical Biology*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London.
- [Cantrell and Cosner, 2003] Cantrell, R. and Cosner, C. (2003). *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*. John Wiley & Sons, Ltd.
- [Chapra and Canale, 2006] Chapra, S. and Canale, R. (2006). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. McGraw-Hill Interamericana.
- [Chavent, 2009] Chavent, G. (2009). *Nonlinear Least Square for Inverse Problems*. Springer Dordrecht Heidelberg London New York.
- [Chowell et al., 2009] Chowell, G., Hyman, J., Bettencourt, L., and Castillo-Chávez, C., editors (2009). *Mathematical and Statistical Estimation Approaches in Epidemiology*. Springer Netherlands.
- [Coronel et al., 2019] Coronel, A., Huancas, F., and Sepúlveda, M. (2019). Identification of space distributed coefficients in an indirectly transmitted diseases model. *Inverse Problems*, 35(115001):20.
- [Fuentes and del Prado, 2013] Fuentes, M. and del Prado, N. (2013). Medidas de frecuencia y de asociación en epidemiología clínica. *Anales de Pediatría Continuada*, 11(6):346–349.
- [Hinze et al., 2009] Hinze, M., Pinnau, R., Ulbrich, M., and Ulbrich, S. (2009). *Optimization with PDE Constraints*. Springer.
- [Kermack and McKendrick, 1927] Kermack, W. and McKendrick, A. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society*, 115(772):700–721.
- [Kierstead and Slobodkin, 1953] Kierstead, H. and Slobodkin, L. (1953). The size of water masses containing plankton bloom. *Journal of Marine Research*, 12:141–147.
- [Li, 2018] Li, M. Y. (2018). *An Introduction to Mathematical Modeling of Infectious Diseases*, volume 2 of *Mathematics of Planet Earth*. Springer International Publishing.
- [Lions and Magenes, 1972] Lions, J. and Magenes, E. (1972). *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, volume 1. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [Ma and Xia, 2008] Ma, S. and Xia, Y. (2008). *Mathematical Understanding of Infectious Disease Dynamics*, volume 16 of *Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore*. World Scientific Publishing Company.
- [Martin and Smith, 1990] Martin, R. and Smith, H. (1990). Abstract functional differential equations and reaction-diffusion systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, pages 1–44.

- [Ministerio de Salud del Perú, 2001] Ministerio de Salud del Perú (2001). Programa de especialización de epidemiología de campo, fascículo 2, (peru/minsa/oge-00/013).
- [Moreno-Altamirano et al., 2000] Moreno-Altamirano, A., López-Moreno, S., and Corcho-Berdugo, A. (2000). Principales medidas en epidemiología. *Salud Pública de México*, 42(4):337–348.
- [Murray, 2002] Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology*, volume 17 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag New York, 3 edition.
- [Okubo and Levin, 2001] Okubo, A. and Levin, S. A. (2001). *Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives*, volume 14 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag New York, 2nd edition.
- [Pazy, 1983] Pazy, A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [Skellam, 1951] Skellam, J. (1951). Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika*, 38:196–218.
- [Vaughan and Morrow, 1989] Vaughan, J. and Morrow, R. (1989). *Manual of Epidemiology for District Health Management*. World Health Organization.
- [Vrabie, 2003] Vrabie, I. (2003). *C_0 Semigroups and Applications*. North-Holland.
- [Zhou et al., 2019] Zhou, M., Xiang, H., and Li, Z. (2019). Optimal control strategies for a reaction-diffusion epidemic system. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, (46):446–464.