

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
ESCUELA DE GRADUADOS  
CONCEPCIÓN-CHILE

MÉTODOS DE ONDELETES PARA ECUACIONES  
INTEGRALES DE FRONTERA Y EL ACOPLAMIENTO CON  
EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

*Tesis para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática*

**Cristian Gamaliel Pérez Toledo**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA  
2001



**MÉTODOS DE ONDELETES PARA ECUACIONES  
INTEGRALES DE FRONTERA Y EL ACOPLAMIENTO CON  
EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

**Cristian Gamaliel Pérez Toledo**

**Director de Tesis:** Freddy Paiva Véjar

**Director de Programa:** Rodolfo Araya Durán

**COMISIÓN EVALUADORA**

**Dra. Sônia M. Gomes**  
**Dr. Norbert Heuer**

**Dr. Reinhold Schneider**  
**Dr. Luis Salinas**

**COMISIÓN EXAMINADORA**

---

**Dra. Sônia M. Gomes**  
Universidade Estadual de Campinas  
Brasil

---

**Dr. Reinhold Schneider**  
Technische Universität Chemnitz  
Alemania

---

**Dr. Norbert Heuer**  
Universidad de Concepción  
Chile

---

**Dr. Luis Salinas**  
Universidad Técnica Federico Santa María  
Chile

---

**Dr. Freddy Paiva**  
Director de Tesis

**Fecha Examen de Grado:** \_\_\_\_\_

**Calificación:** \_\_\_\_\_

*Concepción–Marzo 2001*



*To the Almighty Savior, our Lord Jesus Christ,  
and to my parents for their prayers.*



# Agradecimientos

El autor reconoce y aprecia la valiosa ayuda de todas aquellas personas que hicieron posible la realización de este trabajo.

En particular, quiero agradecer a FREDDY PAIVA, mi director de tesis, por su amistad, paciencia, confianza, y apoyo constante en el desarrollo de este trabajo, y a GABRIEL GATICA, por su entusiasta e inspiradora labor como investigador.

Quisiera también expresar mi agradecimiento a REINHOLD SCHNEIDER y HELMUT HARBRECHT, por la acogida y ayuda prestada durante mis estadias en Alemania, donde parte de esta tesis fue llevada a cabo. Trabajar junto a ellos fue una gran y valiosa experiencia.

Finalmente, quiero dar las gracias a la Profesora SÔNIA M. GOMES y los Profesores REINHOLD SCHNEIDER, NORBERT HEUER y LUIS SALINAS, por evaluar este trabajo y aceptar formar parte del jurado.

Este trabajo fue financiado en parte por el Subprograma A de Análisis Numérico del FONDAP en Matemáticas Aplicadas y por el Servicio Alemán de Intercambio Académico (DAAD).



# Índice General

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Notaciones</b>	<b>3</b>
<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1 Ondettes en Análisis Numérico</b>	<b>9</b>
1.1 Introducción . . . . .	9
1.2 Descomposiciones Multiescala . . . . .	11
1.3 Caracterización de Espacios de Sobolev . . . . .	14
1.4 Precondicionamiento Multiescala . . . . .	17
<b>2 Formulación del Problema</b>	<b>21</b>
2.1 Introducción . . . . .	21
2.2 El Acoplamiento FEM-BEM . . . . .	23
2.3 Una Formulación Variacional Modificada . . . . .	26
2.4 Discretización para la Compresión de Matrices . . . . .	29
<b>3 Aproximación Biortogonal del Acoplamiento FEM-BEM</b>	<b>33</b>
3.1 Introducción . . . . .	33
3.2 Elección de la Base de Ondettes . . . . .	36
3.3 Compresión de Matrices . . . . .	36
3.3.1 Representación Multiescala de Operadores . . . . .	37
3.3.2 Tres Lemas Fundamentales . . . . .	39
3.3.3 Estrategias de Compresión . . . . .	44
3.3.4 Consistencia de las Estrategias de Compresión . . . . .	52
3.3.5 Complejidad de las Estrategias de Compresión . . . . .	56

3.4	Compresión de Matrices para el Acoplamiento FEM-BEM . . . . .	60
3.4.1	Compresión de la Forma Bilineal $B$ . . . . .	60
3.4.2	Consistencia . . . . .	64
3.4.3	Estabilidad, Convergencia y Complejidad . . . . .	68
3.5	Aspectos Computacionales . . . . .	71
3.5.1	Una Formulación Variacional Coercitiva . . . . .	71
3.5.2	Discretización y Cambio de Bases . . . . .	72
3.5.3	El Operador Hipersingular . . . . .	75
3.6	Precondicionamiento . . . . .	77
3.6.1	El Precondicionador BPX . . . . .	77
3.6.2	El Esquema Precondicionado . . . . .	79
3.6.3	La Transformación de Bramble-Pasciak . . . . .	81
3.7	Experimentos Numéricos . . . . .	87
	<b>Conclusiones</b>	<b>93</b>
	<b>A Bases de Ondelettes Biortogonales</b>	<b>95</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>
	<b>Índice de Figuras</b>	<b>105</b>
	<b>Índice de Tablas</b>	<b>107</b>

# Resumen

En esta tesis se estudia una Aproximación por *Ondelettes Biortogonales* del Acoplamiento del Método de Elementos Finitos con el Método de Elementos de Frontera para la resolución numérica de problemas exteriores bidimensionales en Teoría de Potencial.

Basados en esta aproximación, se propone una *Estrategia de Compresión de Matrices* para los términos de frontera la cual se ajusta completamente, con *Complejidad Lineal*, al orden de convergencia óptimo del Método de Galerkin. Además, haciendo uso de la propiedad de *estabilidad* de las bases de ondelettes en combinación con el conocido preconditionador BPX, se propone un esquema preconditionado el cual puede ser resuelto eficientemente por el método iterativo del Gradiente Conjugado.

Como modelo se considera el problema exterior de Dirichlet para la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Se discuten y analizan los aspectos teóricos y prácticos de la aplicación de los métodos de ondelettes al preconditionamiento y la compresión de matrices. En particular, las propiedades de aproximación, equivalencias de normas y momentos nulos de las bases de ondelettes, son completamente justificadas y explotadas en los análisis de consistencia, convergencia y complejidad de nuestra estrategia de compresión. Además, se presentan algunos experimentos numéricos que corroboran nuestros resultados.



# Notaciones

$L^2$	espacio de Lebesgue.
$H^s$	espacio de Sobolev.
$V_j$ y $\tilde{V}_j$	espacios de multiresolución.
$W_j$ y $\tilde{W}_j$	espacios de ondelette.
$f_{j,k} = 2^{j/2} f(2^j \cdot -k)$	dilatación y traslación de $f$ .
$f_\lambda$	forma abreviada de $f_{j,k}$ .
$\phi_\lambda$ y $\tilde{\phi}_\lambda$	funciones de escala biortogonales.
$\psi_\lambda$ y $\tilde{\psi}_\lambda$	ondelettes biortogonales.
$P_j, P_j^*, Q_j$ y $Q_j^*$	proyectores sobre $V_j, \tilde{V}_j, W_j$ y $\tilde{W}_j$ .
$\text{clos}_H A$	clausura de $A$ en la norma de $H$ .
$\text{span } A$	subespacio generado por $A$ .
$ A $	medida de Lebesgue de $A$ .
$\text{dist}(A, B)$	distancia entre $A$ y $B$ .
$\#A$	cardinalidad de $A$ .
$\text{supp } f$	soporte de $f$ .

Si  $A(u)$  y  $B(u)$  son funciones positivas de un conjunto  $u$  de parámetros, se usa la notación

$$A(u) \lesssim B(u)$$

para expresar que existe una constante  $C > 0$  independiente de los parámetros tal que  $A(u) \leq CB(u)$ . Y se usa la notación

$$A(u) \sim B(u)$$

para expresar que  $A(u) \lesssim B(u)$  y  $B(u) \lesssim A(u)$ .



# Introducción

Métodos de *ondelettes* para la discretización de operadores integrales producen matrices numéricamente ralas [1] y bien condicionadas [10]. Este concepto puede ser aplicado al desarrollo de métodos numéricos para ecuaciones integrales de frontera con ordenes de convergencia óptimo y complejidad lineal [13, 25].

El método de elementos de frontera (BEM) es una importante herramienta para el tratamiento numérico de ecuaciones diferenciales parciales, ofreciendo, en particular, una formulación adecuada para problemas exteriores [14, 20]. Sin embargo, puesto que las formulaciones en términos de integrales de frontera requieren una solución fundamental del operador diferencial subyacente, el método excluye el tratamiento directo de problemas no lineales. Por otro lado, las discretizaciones usuales producen matrices numéricamente llenas cuya complejidad crece cuadráticamente con el número de incógnitas, lo cual implica que el método es demasiado costoso para grandes sistemas. En contraposición a lo anterior está el método de elementos finitos (FEM), ampliamente usado en ingeniería. Aquí las correspondientes discretizaciones producen matrices numéricamente ralas e inversibles con complejidad lineal por métodos iterativos. Además, el método de elementos finitos es fácilmente aplicable a problemas no lineales o problemas con coeficientes variables.

El acoplamiento del método de elementos finitos con el método de elementos de frontera, por condiciones de transmisión sobre una frontera artificial, se beneficia de las ventajas de ambos métodos [8, 19]. Además, la libertad en la elección de la frontera artificial permite considerar bases de *ondelettes* para la compresión de los respectivos términos de frontera. En este sentido, la compresión de matrices para el acoplamiento FEM-BEM requiere un tratamiento adecuado del proyector de Calderón [7], el cual es un operador fundamental en los métodos de elementos de frontera directos.

En esta tesis estudiamos una aproximación por *ondelettes biortogonales* del acoplamiento FEM-BEM para la resolución numérica de problemas exteriores bidimensionales en teoría de potencial.

El objetivo de la tesis consiste en desarrollar un esquema de Galerkin multiescala *estable* para la discretización y compresión de los operadores integrales en el acoplamiento FEM-BEM. Para ello proponemos una estrategia de compresión de matrices la cual se ajusta completamente, con complejidad lineal, al orden de convergencia óptimo del método de Galerkin. Además, haciendo uso de la propiedad de estabilidad de las bases de ondelettes en combinación con el conocido preconditionador BPX, proponemos un esquema preconditionado el cual puede ser resuelto eficientemente por el método iterativo del gradiente conjugado.

Como modelo consideramos el problema exterior de Dirichlet para la ecuación de Laplace en dos dimensiones, mientras que para el método de acoplamiento la formulación con dos ecuaciones integrales propuesta en [18], donde es probado que la respectiva forma bilineal es fuertemente elíptica y, por lo tanto, el esquema de Galerkin converge óptimamente. Además, para esta formulación introducimos una formulación variacional modificada, apropiada para fronteras definidas paramétricamente, la cual facilita el cálculo de los coeficientes matriciales.

Puesto que las funciones de elementos finitos y sus trazas no son dadas con respecto a bases de ondelettes, nuestra aplicación de los métodos de ondelettes al método de acoplamiento no es un procedimiento directo. En efecto, las trazas de las funciones de elementos finitos restringen la elección de las funciones bases sobre la frontera, y es necesario discretizar y comprimir tres operadores integrales, a saber, los operadores de capa simple, capa doble e hipersingular, los cuales actúan en espacios de Sobolev diferentes y, en consecuencia, deben ser discretizados en bases apropiadas. Asimismo, es fundamental que las bases a elegir sean de soporte compacto para disponer de la transformada rápida de ondelettes. De acuerdo a estas razones, elegimos para la aplicación de los métodos de ondelettes al acoplamiento FEM-BEM las bases de ondelettes biortogonales construidas en [6]. En este contexto, adaptamos y extendimos a la presente situación la estrategia de compresión de matrices propuesta en [13, 25]. Esto requirió solucionar varios problemas teóricos y prácticos. En particular, fue necesario analizar la discretización y compresión de los operadores en el método de Galerkin con espacios de multiresolución diferentes, lo cual condujo a resultados prácticos no predecibles a partir de la compresión de matrices tradicional. Por otro lado, una característica distintiva de la presente situación fue el análisis de consistencia no sólo sobre todos los niveles de discretización, sino también en la escala más fina de discretización y en la norma de los espacios de energía. Esto resultó ser crucial para mostrar la estabilidad de nuestra estrategia de compresión de matrices, es decir, para

mostrar la inversibilidad del operador comprimido asociado. Operador para el que desarrollamos un esquema preconditionado factible de resolver, muy eficientemente, por el método iterativo del gradiente conjugado.

Los contenidos de la tesis son los siguientes:

En el capítulo 1 se presentan y discuten los aspectos esenciales del uso de los métodos de *Ondelettes en Análisis Numérico*. Se introducen los fundamentos teóricos de la descomposición multiescala de espacios de Sobolev con respecto a bases de ondelettes. Se establecen las correspondientes estimaciones directas e inversas, y su conexión con la estabilidad de las transformaciones multiescala y las equivalencias de normas que conducen al diseño de preconditionadores eficientes.

El capítulo 2 se ocupa de la *Formulación del Problema*. En la sección 2.2 introducimos el problema modelo y su formulación variacional por el método de acoplamiento con dos ecuaciones integrales. En la sección 2.3, siguiendo una idea presentada en [20], usamos una parametrización de la frontera artificial para obtener una formulación variacional equivalente (ver la Proposición 2.3), la cual facilita el análisis del problema discreto de la sección 2.4 y en las bases de ondelettes biortogonales elegidas para la compresión de matrices, donde se indica como un esquema perturbado puede ser analizado usando el primer Lema de Strang.

El capítulo 3 es la parte central de esta tesis y en él desarrollamos la *Aproximación Biortogonal del Acoplamiento FEM-BEM*. En la sección 3.2 justificamos la elección de bases de ondelettes biortogonales para la compresión de matrices. Puesto que los operadores integrales involucrados en las ecuaciones del acoplamiento FEM-BEM son del tipo Calderón-Zygmund, el punto clave para la definición de las estrategias de compresión consiste en traducir la estimación estándar del Lema 3.1 al nivel discreto de los coeficientes de ondelettes. Luego, en base a estimaciones para el decaimiento de los coeficientes matriciales correspondientes a ondelettes con soportes disjuntos (Lema 3.2) y a ondelettes con soportes superpuestos (Lema 3.3) definimos una primera compresión (Definición 3.4) y una segunda compresión (Definición 3.7), respectivamente. El Teorema 3.9 estima la norma espectral de las correspondientes matrices residuales. En la subsección 3.3.4, los Teoremas 3.10 y 3.11 establecen que los parámetros de compresión elegidos según las Definiciones 3.4 y 3.7 garantizan la consistencia de las estrategias de compresión propuestas, ya sea sobre todos los niveles de discretización como también en la norma de los espacios de energía. En la subsección 3.3.5, el Teorema 3.12 establece la complejidad lineal de las estrategias de compresión de matrices, donde identificando las escalas en las cuales puede realizarse

la segunda compresión, observamos que nuestro análisis resulta muy simple, claro y general. En la sección 3.4 proponemos la estrategia de compresión de matrices para el acoplamiento FEM-BEM, para la cual analizamos la consistencia (subsección 3.4.2), y probamos la estabilidad (Lema 3.21), convergencia (Teorema 3.22) y complejidad (Teorema 3.23). Algunos aspectos computacionales son discutidos en la sección 3.5, donde introducimos una formulación variacional apropiada para la implementación computacional y mostramos que es suficiente calcular sólo dos matrices comprimidas correspondientes a los términos de frontera. La sección 3.6 es dedicada al estudio del preconditionamiento del esquema multiescala propuesto. Haciendo uso del preconditionador multiescala de la sección 1.4 y del conocido preconditionador BPX [3], proponemos un preconditionador para los esquemas simétrico y no simétrico asociados (Teorema 3.24). Además, usando una transformación del tipo Bramble-Pasciak [2], proponemos un esquema preconditionado, simétrico y definido positivo el cual puede ser resuelto por el método iterativo del gradiente conjugado. El Teorema 3.28 muestra que el sistema transformado es espectralmente equivalente a una matriz diagonal por bloques consistente de identidades y el preconditionador BPX. Finalmente, en la sección 3.7 se presentan algunos experimentos numéricos que confirman nuestros resultados.

El apéndice A contiene una breve introducción al concepto de análisis de multiresolución biortogonal mediante la descripción de las *Bases de Ondelettes Biortogonales* para  $L^2(\mathbb{R})$  construidas en [6].

# Capítulo 1

## Ondelettes en Análisis Numérico

En este capítulo se presentan algunos elementos de la teoría de ondelettes que están relacionados con el análisis numérico de los métodos de ondelettes, y más generalmente de los métodos multiescala, para el tratamiento numérico de problemas de valores de frontera elípticos.

### 1.1 Introducción

Los métodos multiescala han generado en los últimos años un enorme interés, tanto desde el punto de vista teórico como aplicado, siendo el método de ondelettes el que mayor impacto ha causado.

Una forma de visualizar los métodos multiescala es notando que muchos problemas, tales como el tratamiento numérico de ecuaciones de operadores, pueden ser formulados como el problema de aproximar una función  $f$  en un espacio  $H$  de dimensión infinita por funciones de algún subespacio  $V_j \subset H$ . Pero no importa lo fino que el nivel de discretización correspondiente a  $V_j$  sea elegido, una única escala de discretización no podrá, en general, expresar las propiedades intrínsecas de  $f$  que reflejen aquellas de  $H$ , el cual podría ser, por ejemplo, un espacio de Sobolev. Mucha más información puede ser encontrada usando *representaciones* de  $f$  que involucren la interacción de todas las escalas de discretización.

Cuando se tiene una sucesión creciente  $\{V_j\}$  de subespacios cerrados de  $H$

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset H, \tag{1.1}$$

tal que

$$\text{clos}_H \left( \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j \right) = H, \quad (1.2)$$

tales representaciones de  $f$  pueden ser obtenidas mediante *descomposiciones multiescala* del tipo

$$f = P_0 f + \sum_{j=0}^{\infty} (P_{j+1} - P_j) f, \quad (1.3)$$

donde cada  $P_j$  es un proyector uniformemente acotado de  $H$  sobre  $V_j$ , y los términos  $(P_{j+1} - P_j)f$  pueden ser vistos como detalles de  $f$  necesarios para pasar a escalas más finas de discretización. Para hacer uso práctico de la representación (1.3) es conveniente la determinación de una base para el subespacio complemento, no necesariamente ortogonal, de  $V_j$  en  $V_{j+1}$ , esto es,

$$W_j = (P_{j+1} - P_j)H = V_{j+1} \ominus V_j.$$

En particular, cuando los  $V_j$  son subespacios invariantes por traslaciones del espacio  $H = L^2(\mathbb{R})$ , generados por dilatación y traslación de una función de escala, uno arriba a la noción de análisis de multiresolución, y el elegir los  $P_j$  como proyectores ortogonales da lugar al concepto de ondelettes en el sentido clásico de funciones base para complemento ortogonal  $W_j$  de  $V_j$  en  $V_{j+1}$ .

En el campo del análisis numérico los métodos multiescala han sido usados exitosamente en

- el preconditionamiento de grandes sistemas provenientes de la discretización de ecuaciones diferenciales parciales elípticas,
- la aproximación adaptativa de funciones, permitiendo resolver singularidades aisladas con bajo costo computacional, y
- el preconditionamiento y la compresión de las matrices provenientes de la discretización de ecuaciones integrales.

De crucial importancia en la aplicación de los métodos de ondelettes a las tres tareas previamente mencionadas, es la posibilidad que estos tienen de caracterizar varias clases de regularidad, como por ejemplo Sobolev, Hölder y Besov, a partir de las propiedades numéricas de las descomposiciones multiescala (ver [5, 9, 22]).

## 1.2 Descomposiciones Multiescala

### Multiresolución y Estabilidad

Sea  $H$  un espacio de Hilbert con producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y norma asociada  $\|\cdot\|_H$ . Un *análisis de multiresolución* es por definición una sucesión creciente  $\{V_j\}$  de subespacios cerrados de  $H$  cuya unión es densa en  $H$ , es decir, se tiene (1.1) y (1.2). Los espacios  $V_j$  son definidos como

$$V_j := \text{clos}_H(\text{span } \Phi_j),$$

donde el conjunto  $\Phi_j := \{\phi_{j,k} \mid k \in \Delta_j\}$  es una base *estable* en el sentido que, uniformemente en  $j$ ,

$$\|\mathbf{c}_j\|_{\ell^2(\Delta_j)} \sim \|\Phi_j^\top \mathbf{c}_j\|_H, \quad (1.4)$$

para un conjunto de índices  $\Delta_j$  posiblemente infinito. Aquí, por abreviación,

$$\Phi_j^\top \mathbf{c}_j = \sum_{k \in \Delta_j} c_{j,k} \phi_{j,k} \quad (1.5)$$

es una notación para tratar la base  $\Phi_j$  como un vector cuyas componentes son las funciones bases  $\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j \cdot -k)$ , donde  $\phi$  es la *función de escala*.

En este contexto, los *espacios de ondelettes* son definidos identificando un complemento  $W_j$  para la descomposición

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (1.6)$$

y de la forma

$$W_j := \text{clos}_H(\text{span } \Psi_j),$$

donde el conjunto  $\Psi_j := \{\psi_{j,k} \mid k \in \Delta_j\}$  es una base estable en el sentido de (1.4).

Por otro lado, la propiedad (1.1) de inclusión creciente de los espacios  $V_j$  junto con la estabilidad (1.4) implican que la siguiente *ecuación de escala* o *refinamiento*

$$\phi_{j,k} = \sum_{l \in \Delta_{j+1}} h_{l,k}^j \phi_{j+1,l}$$

se verifica con un filtro  $\mathbf{h}_k^j := \{h_{l,k}^j\} \in \ell^2(\Delta_{j+1})$ . En la notación vectorial de (1.5) esto puede ser escrito como

$$\Phi_j^\top = \Phi_{j+1}^\top \mathbf{H}_j,$$

donde la *matriz de refinamiento*  $\mathbf{H}_j$  contiene los  $\mathbf{h}_k^j$  como columnas. Análogamente, la descomposición (1.6) implica que existe una matriz  $\mathbf{G}_j$  tal que

$$\Psi_j^\top = \Phi_{j+1}^\top \mathbf{G}_j.$$

Es conocido que la descomposición (1.6) es equivalente al hecho que la matriz  $\mathbf{F}_j := [\mathbf{H}_j \ \mathbf{G}_j]$  es inversible como una aplicación de  $\ell^2(\Delta_j) \times \ell^2(\Delta_j)$  en  $\ell^2(\Delta_{j+1})$ . Además, el conjunto  $\Phi_j \cup \Psi_j$  es una base estable de  $V_{j+1}$  si y sólo si

$$\|\mathbf{F}_j\|, \|\mathbf{F}_j^{-1}\| = O(1), \quad (1.7)$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma espectral (ver [9]).

Es conveniente escribir  $\mathbf{F}_j^{-1} = \tilde{\mathbf{F}}_j := [\tilde{\mathbf{H}}_j \ \tilde{\mathbf{G}}_j]^\top$ , para así tener la conocida relación entre filtros

$$\mathbf{F}_j \tilde{\mathbf{F}}_j = \mathbf{H}_j \tilde{\mathbf{H}}_j + \mathbf{G}_j \tilde{\mathbf{G}}_j = \mathbf{I},$$

y concluir que  $\mathbf{F}_j$  y  $\tilde{\mathbf{F}}_j$  realizan los correspondientes *cambios de bases*.

## Transformaciones Multiescala

Dada una función  $v_J \in V_J$ , la transformación de *descomposición*  $\mathbf{T}_J$  que toma los coeficientes  $\mathbf{c}_J$  en la representación en la escala  $J$

$$v_J = \Phi_J^\top \mathbf{c}_J, \quad (1.8)$$

y los lleva a los coeficientes  $\mathbf{d}_J := [\mathbf{c}_0 \ \mathbf{d}_0 \ \cdots \ \mathbf{d}_{J-1}]^\top$  en la representación multiescala

$$v_J = \Psi_J^\top \mathbf{d}_J = \Phi_0^\top \mathbf{c}_0 + \sum_{j=0}^{J-1} \Psi_j^\top \mathbf{d}_j, \quad (1.9)$$

con respecto a la base multiescala

$$\Psi_J := \bigcup_{j=-1}^{J-1} \Psi_j, \quad (1.10)$$

donde  $\Psi_{-1} := \Phi_0$ , puede ser realizada por un esquema piramidal mediante la *transformada rápida de ondelettes*. Alternativamente, definiendo las matrices de orden  $\#\Delta_J$

$$\mathbf{T}_{J,j} := \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de orden  $\#\Delta_J - \#\Delta_{j+1}$ , la transformación  $\mathbf{T}_J$  puede ser expresada como

$$\mathbf{T}_J = \mathbf{T}_{J,0} \cdots \mathbf{T}_{J,J-1}. \quad (1.11)$$

Similar estructura adquiere la transformación de *reconstrucción*  $\mathbf{T}_J^{-1}$  definida por  $\mathbf{c}_J = \mathbf{T}_J^{-1} \mathbf{d}_J$ , pero considerando las matrices  $\mathbf{F}_J$ .

Notar que en conexión con el tratamiento numérico de ecuaciones de operadores del tipo  $Lu = f$ , sólo la transformación  $\mathbf{T}_J$  es necesaria. En efecto, denotando por  $\mathbf{L}_{\Phi_J}$  y  $\mathbf{L}_{\Psi_J}$  las matrices de rigidez del operador  $L$  con respecto a las bases  $\Phi_J$  y  $\Psi_J$ , respectivamente, el sistema  $\mathbf{L}_{\Psi_J} \mathbf{d}_J = \mathbf{f}_J$  es equivalente a  $\mathbf{L}_{\Phi_J} \mathbf{c}_J = \mathbf{T}_J^\top \mathbf{f}_J$ , donde

$$\mathbf{L}_{\Phi_J} = \mathbf{T}_J^\top \mathbf{L}_{\Psi_J} \mathbf{T}_J \quad (1.12)$$

y  $\mathbf{d}_J = \mathbf{T}_J \mathbf{c}_J$ . Aquí, la transformación transpuesta  $\mathbf{T}_J^\top$  en (1.12) tiene la misma estructura de reconstrucción que  $\mathbf{T}_J^{-1}$ , no obstante usa los mismos filtros que la transformación de descomposición  $\mathbf{T}_J$ . En este contexto, es importante señalar que una implementación eficiente de los métodos de ondelettes sólo es posible si la aplicación de  $\mathbf{T}_J$  requiere un número de operaciones proporcional a  $\dim V_J = \#\Delta_J$ . En este caso, uno deduce de (1.11) que las transformaciones multiescala son eficientes si las matrices  $\tilde{\mathbf{F}}_j$  son uniformemente ralas.

Por otro lado, con respecto a las representaciones para  $v_J \in V_J$  dadas por (1.8) y (1.9), es relevante observar que el vector  $\mathbf{c}_J$  en (1.8) representa en muchos casos la localización geométrica del gráfico de  $v_J$ , a diferencia de los  $\mathbf{d}_j$  en (1.9) que tienen el carácter de variaciones o detalles. Luego, mientras que comúnmente todos los coeficientes en  $\mathbf{c}_J$  son significativos y necesarios para representar  $v_J$  exactamente, muchos de los coeficientes en  $\mathbf{d}_J$  pueden ser pequeños, y el reemplazar algunos de ellos por cero puede aún permitir una aproximación suficientemente exacta de  $v_J$ .

## Bases de Riesz y Biortogonalidad

La base complemento  $\Psi_j$  que da la descomposición (1.6) puede ser elegida de varias maneras, siendo el complemento ortogonal la elección clásica. Las ondelettes ortogonales son sin embargo difíciles de construir, y consideraciones prácticas inducen a veces a optar por otras alternativas. Por otro lado, aparte de la eficiencia, una restricción fundamental en la elección de la base complemento es la estabilidad sobre todos los niveles de las transformaciones multiescala. En este sentido, recordamos el siguiente resultado (ver [9]).

**Teorema 1.1.** *Las transformaciones multiescala  $\mathbf{T}_J$  definidas por (1.11) son uniformemente estables en el sentido que*

$$\|\mathbf{T}_J\|, \|\mathbf{T}_J^{-1}\| = O(1) \quad \text{cuando } J \rightarrow \infty, \quad (1.13)$$

si y sólo si el conjunto  $\Psi := \bigcup_{j=-1}^{\infty} \Psi_j$  es una base de Riesz de  $H$  y existe una base de Riesz biortogonal  $\tilde{\Psi} := \bigcup_{j=-1}^{\infty} \tilde{\Psi}_j$ , es decir,

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j',k'} \rangle = \delta_{(j,k),(j',k')}, \quad (1.14)$$

tal que toda función  $v \in H$  tiene expansiones únicas

$$v = \sum_{j=-1}^{\infty} \sum_{k \in \Delta_j} \langle v, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k} = \sum_{j=-1}^{\infty} \sum_{k \in \Delta_j} \langle v, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k},$$

y las siguientes equivalencias de normas se verifican

$$\|v\|_H^2 \sim \sum_{j=-1}^{\infty} \sum_{k \in \Delta_j} |\langle v, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle|^2 \sim \sum_{j=-1}^{\infty} \sum_{k \in \Delta_j} |\langle v, \psi_{j,k} \rangle|^2. \quad (1.15)$$

Resulta claro a partir de este teorema que la elección de la base complemento  $\Psi_j$  está seriamente restringida por la condición (1.13). En particular, (1.13) es una condición más fuerte que la estabilidad (1.7) del conjunto  $\Phi_j \cup \Psi_j$ , la cual es entendida sobre cada nivel  $j$ . La propiedad de base de Riesz (1.15), por el contrario, significa estabilidad sobre todos los niveles. Desafortunadamente, por otro lado, la biortogonalidad (1.14) resulta ser en general una condición necesaria pero no suficiente para garantizar la propiedad de base de Riesz. Condiciones suficientes serán dadas a continuación.

### 1.3 Caracterización de Espacios de Sobolev

Como hemos mencionado en la introducción de este capítulo, una de las propiedades más relevantes de los métodos de ondelettes es que ellos permiten caracterizar espacios de funciones [21]. La propiedad de base de Riesz (1.15), que aparece en conexión con la estabilidad de las transformaciones multiescala, es un caso especial dentro de un conjunto de relaciones similares sobre equivalencias de normas para ciertos rangos de espacios de Sobolev. Esta propiedad de los métodos de ondelettes juega un rol fundamental, tanto para la construcción de preconditionadores multiescala como en el análisis de consistencia en técnicas de compresión de matrices.

En lo que resta de este capítulo usaremos las siguientes notaciones. Dado  $s \in \mathbb{R}$ , por  $H^s(\Omega)$  denotaremos una escala de espacios de Sobolev definidos sobre  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\Omega = (0, 1)$ , o algún dominio acotado de  $\mathbb{R}^n$ , donde  $H^s(\Omega) := (H^{-s})^*(\Omega)$  para  $s < 0$ , y  $H^0(\Omega) := L^2(\Omega)$  provisto del producto interior  $\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} uv \, dx$ . Por extensión,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotará también el producto de dualidad entre  $H^s(\Omega)$  y  $H^{-s}(\Omega)$ . Además, referimos al apéndice para la definición de un análisis de multiresolución biortogonal.

### Estimaciones Directas e Inversas

Cuando ambos espacios  $V_j := \text{clos}_{L^2(\Omega)}(\text{span } \Phi_j)$  y  $\tilde{V}_j := \text{clos}_{L^2(\Omega)}(\text{span } \tilde{\Phi}_j)$  de un análisis de multiresolución biortogonal de  $L^2(\Omega)$  tienen algunas propiedades de aproximación y regularidad, expresadas en términos de estimaciones clásicas del tipo Jackson y Bernstein, entonces la propiedad de base de Riesz (1.15) se verifica [9].

Una *estimación directa* o *del tipo Jackson* es aquella que cuantifica el orden de aproximación de los espacios  $V_j$  requiriendo que se satisfaga, uniformemente en  $j$ ,

$$\inf_{v_j \in V_j} \|v - v_j\|_{L^2(\Omega)} \lesssim 2^{-js} \|v\|_{H^s(\Omega)} \quad (1.16)$$

para todo  $v \in H^s(\Omega)$  y  $0 < s \leq d$ . Por otro lado, una *estimación inversa* o *del tipo Bernstein* es aquella que mide cierta regularidad, como por ejemplo Sobolev, de los espacios  $V_j$  requiriendo que se satisfaga, uniformemente en  $j$ ,

$$\|v_j\|_{H^s(\Omega)} \lesssim 2^{js} \|v_j\|_{L^2(\Omega)} \quad (1.17)$$

para todo  $v_j \in V_j$  y  $s < \eta$ , donde suponemos por simplicidad que  $\eta \leq d$ . Análogas estimaciones son requeridas para los espacios  $\tilde{V}_j$  con parámetros  $\tilde{d}$  y  $\tilde{\eta}$ .

Considerando los espacios de multiresolución biortogonal definidos en el apéndice, uno observa que la estimación (1.16) se verifica trivialmente para ambos  $V_j$  y  $\tilde{V}_j$ , ya que estos espacios tienen exactitud polinomial de ordenes  $d$  y  $\tilde{d}$ , respectivamente. Con respecto a la estimación (1.17), uno usa el hecho que cuando  $\phi \in L^2(\Omega)$  es una función de escala estable y de soporte compacto tal que  $\eta := \sup \{ s \mid \phi \in H^s(\Omega) \}$ , entonces (1.17) se verifica para todo  $s < \eta$ . Además, es conocido que  $\phi \in L^2(\Omega)$  implica  $\phi \in H^s(\Omega)$  para algún  $s > 0$  (ver [5]).

Bajo estos supuestos, los operadores

$$P_j := \sum_{k \in \Delta_j} \langle \cdot, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle \phi_{j,k} \quad (1.18)$$

definen, para  $-\tilde{\eta} < s < \eta$ , proyectores uniformemente acotados de  $H^s(\Omega)$  sobre  $V_j$  y satisfaciendo

$$P_{j'}P_j = P_{j'} \quad \text{para todo } j' \leq j. \quad (1.19)$$

Luego, utilizando estos operadores, los proyectores sobre los espacios de ondelettes  $W_j := \text{clos}_{L^2(\Omega)}(\text{span } \Psi_j)$  de un análisis de multiresolución biortogonal de  $L^2(\Omega)$  son definidos como

$$Q_j := P_{j+1} - P_j = \sum_{k \in \Delta_j} \langle \cdot, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (1.20)$$

En este punto, corresponde señalar que los respectivos operadores adjuntos  $P_j^*$  y  $Q_j^*$  son definidos con respecto al producto de dualidad  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , y que la propiedad de base de Riesz (1.15) puede ser expresada equivalentemente como

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \sim \sum_{j=-1}^{\infty} \|Q_j v\|_{L^2(\Omega)}^2 \sim \sum_{j=-1}^{\infty} \|Q_j^* v\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (1.21)$$

donde  $Q_{-1} := P_0$  y  $Q_{-1}^* := P_0^*$ .

Por otro lado, en vista de la estimación (1.16), es posible probar que los operadores  $P_j$  definidos por (1.18) satisfacen la propiedad de aproximación

$$\|v - P_j v\|_{H^s(\Omega)} \lesssim 2^{-j(t-s)} \|v\|_{H^t(\Omega)} \quad (1.22)$$

para todo  $v \in H^t(\Omega)$ ,  $-\tilde{d} \leq s < \eta$ ,  $s \leq t$  y  $-\tilde{\eta} < t \leq d$ . Asimismo, la estimación (1.17) permite probar la estimación inversa

$$\|v_j\|_{H^t(\Omega)} \lesssim 2^{j(t-s)} \|v_j\|_{H^s(\Omega)} \quad (1.23)$$

para todo  $v_j \in V_j$  y  $s \leq t < \eta$ . Análogas estimaciones verifican los operadores  $P_j^*$  y los espacios  $\tilde{V}_j$  (ver por ejemplo [12, 25]).

## Equivalencias de Normas para Espacios de Sobolev

Las descomposiciones multiescala en bases de ondelettes pueden ser usadas para caracterizar la regularidad de espacios de Sobolev en término de normas discretas para los coeficientes de ondelettes. El requerimiento básico es que los espacios de multiresolución verifiquen estimaciones directas (1.16) e inversas (1.17) apropiadas. Desde un punto de vista aplicado, tal caracterización es usada, por ejemplo, en el diseño y análisis de preconditionadores multiescala para ecuaciones de operadores elípticos. En este contexto, el siguiente teorema es clave (ver [9, 10]).

**Teorema 1.2.** Sean  $V_j$  y  $\tilde{V}_j$  los espacios de un análisis de multiresolución biortogonal de  $L^2(\Omega)$  satisfaciendo las estimaciones (1.16) y (1.17) para algunos  $d$ ,  $\eta$ ,  $\tilde{d}$  y  $\tilde{\eta}$ , respectivamente. Entonces, para los operadores  $Q_j$  definidos por (1.20) y el rango  $-\tilde{\eta} < s < \eta$ , la siguiente equivalencia de normas se verifica

$$\|v\|_{H^s(\Omega)}^2 \sim \sum_{j=-1}^{\infty} 2^{2js} \|Q_j v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (1.24)$$

para todo  $v \in H^s(\Omega)$ , y análogamente para los operadores  $Q_j^*$  y el rango  $-\eta < s < \tilde{\eta}$ .

Observar que para  $s = 0$  la equivalencia de normas (1.24) se reduce a la propiedad de base de Riesz escrita equivalentemente en (1.21). Por otro lado, definiendo los operadores de *traslación*

$$D^s := \sum_{j=-1}^{\infty} 2^{js} Q_j, \quad (1.25)$$

los cuales debido a la condición (1.19) satisfacen  $D^s D^t = D^{s+t}$ , se deduce que la equivalencia de normas (1.24) puede ser expresada como

$$\|D^s v\|_{H^t(\Omega)} \sim \|v\|_{H^{s+t}(\Omega)} \quad (1.26)$$

para todo  $v \in H^{s+t}(\Omega)$  y  $-\tilde{\eta} < s + t < \eta$ . Notar también que por (1.19) se tiene

$$(D^s)^{-1} = D^{-s} \quad \text{y} \quad (D^s)^* = \sum_{j=-1}^{\infty} 2^{js} Q_j^*. \quad (1.27)$$

Finalmente, es importante mencionar que estimaciones del tipo (1.24) se verifican para un rango más amplio de  $s$  en la forma de desigualdades. En efecto, se prueba en [25] que la siguiente estimación

$$\|D^s v\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|v\|_{H^s(\Omega)} \quad (1.28)$$

es válida para todo  $v \in H^s(\Omega)$  y  $-\tilde{\eta} < s < d$ .

## 1.4 Precondicionamiento Multiescala

Una de las aplicaciones más sobresalientes de los métodos de ondelettes al análisis numérico, es aquella que utiliza una matriz diagonal como preconditionador para obtener números de condición uniformemente acotados con respecto al nivel de discretización, esto es, para la solución rápida de sistemas lineales por métodos iterativos.

A modo de ilustración, sea  $L : H^\beta(\Omega) \rightarrow H^{\beta-r}(\Omega)$  un operador de orden  $r$ , acotado e inversible, esto es,

$$\|Lv\|_{H^{\beta-r}(\Omega)} \sim \|v\|_{H^\beta(\Omega)}. \quad (1.29)$$

El esquema de Galerkin para la solución de la ecuación  $Lu = f$ , es equivalente a encontrar  $u_J \in V_J$  tal que

$$L_J u_J = P_J^* f, \quad (1.30)$$

donde  $L_J := P_J^* L P_J$  es el operador de dimensión finita asociado a la matriz de rigidez  $\mathbf{L}_{\Phi_J}$  con respecto a la base  $\Phi_J$ . Se dice que el esquema (1.30) es  $(\beta, \beta - r)$ -estable si para todo  $v_J \in V_J$  se tiene

$$\|L_J v_J\|_{H^{\beta-r}(\Omega)} \sim \|v_J\|_{H^\beta(\Omega)}. \quad (1.31)$$

**Observación 1.3.** Para precisar lo anterior, observar que (1.31) se verifica cuando  $L$  es un operador simétrico y  $\mathcal{L}(\cdot, \cdot) := \langle L\cdot, \cdot \rangle$  es una forma bilineal simétrica, acotada y  $H^\beta(\Omega)$ -elíptica. Y más generalmente, cuando  $L$  es un operador inyectivo y satisface la desigualdad de Gårding, entonces (1.31) se verifica también. Además, bajo las hipótesis del Teorema 1.2, uno puede mostrar que el esquema de Galerkin (1.30) es  $(s, s - r)$ -estable para  $-d + r \leq s \leq \beta$ , y la diferencia  $u - u_J$  entre la solución exacta de  $Lu = f$  y la solución aproximada de (1.30), satisface la estimación de error

$$\|u - u_J\|_{H^s(\Omega)} \lesssim 2^{-j(t-s)} \|u\|_{H^t(\Omega)}$$

para todo  $u \in H^t(\Omega)$ ,  $-d + r \leq s < \eta$ ,  $s \leq t$  y  $\beta \leq t \leq d$ , dando de esta forma  $O(2^{-j(2d-r)})$  como orden de convergencia óptimo (ver por ejemplo [12]).

Veamos a continuación como las equivalencias de normas de la sección anterior, junto con la estabilidad del esquema de Galerkin, conducen a la construcción de un preconditionador para el problema discreto asociado a (1.30). Puesto que bajo la suposición (1.29) el operador  $L$  actúa como una traslación en la escala de espacios de Sobolev  $H^s(\Omega)$ , es razonable explotar el hecho que los operadores  $D^s$  definidos por (1.25) tienen este mismo efecto expresado en la equivalencia de normas (1.26). La idea es entonces elegir apropiadamente la escala  $s$  en estos operadores para ser capaces de cancelar el efecto de traslación producido por  $L$ . El siguiente teorema fija esa elección y muestra cómo cambios de escala diagonales en matrices de rigidez en bases de ondelettes producen matrices de sistema bien condicionadas (ver [5, 9, 10]).

**Teorema 1.4.** *Sea el esquema de Galerkin (1.30) estable en el sentido de (1.31) y los parámetros  $\eta$  y  $\tilde{\eta}$  en el Teorema 1.2 satisfaciendo  $-\tilde{\eta} < r/2 < \eta$ . Si  $\mathbf{L}_{\Psi_J}$  es la matriz de rigidez del operador  $L$  con respecto a la base multiescala  $\Psi_J$  definida por (1.10) y  $\mathbf{D}_J^s$  es la matriz diagonal definida por*

$$\mathbf{D}_J^s := [2^{js} \delta_{\lambda', \lambda}]_{\lambda', \lambda \in \nabla_J}, \quad (1.32)$$

con el conjunto de índices  $\nabla_J := \{ \lambda = (j, k) \mid -1 \leq j < J, k \in \Delta_j \}$ , entonces

$$\text{cond}(\mathbf{D}_J^{-r/2} \mathbf{L}_{\Psi_J} \mathbf{D}_J^{-r/2}) = O(1) \quad \text{cuando } J \rightarrow \infty,$$

donde  $\text{cond}(\mathbf{A}) := \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$  y  $\|\cdot\|$  es la norma espectral.

*Demostración.* Esta es una consecuencia inmediata de las equivalencias de normas para las descomposiciones multiescala. En efecto, definiendo en analogía a (1.25) los operadores de traslación

$$D_J^s := \sum_{j=-1}^{J-1} 2^{js} Q_j, \quad (1.33)$$

obtenemos para todo  $v_J \in V_J$

$$\begin{aligned} \|v_J\|_{L^2(\Omega)} &\sim \|D_J^{-r/2} v_J\|_{H^{r/2}(\Omega)} && \text{por (1.26) y (1.27),} \\ &\sim \|L_J D_J^{-r/2} v_J\|_{H^{-r/2}(\Omega)} && \text{por (1.31),} \\ &\sim \|(D_J^{-r/2})^* L_J D_J^{-r/2} v_J\|_{L^2(\Omega)} && \text{por (1.26) y (1.27).} \end{aligned}$$

Esto muestra que los operadores  $(D_J^{-r/2})^* L_J D_J^{-r/2} : V_J \rightarrow \tilde{V}_J$  son uniformemente acotados e inversibles en  $L^2(\Omega)$ . Además, es directo comprobar que la representación matricial de estos operadores con respecto a la base multiescala  $\Psi_J$  es dada por  $\mathbf{D}_J^{-r/2} \mathbf{L}_{\Psi_J} \mathbf{D}_J^{-r/2}$ .  $\square$



# Capítulo 2

## Formulación del Problema

En este capítulo se presentan las ecuaciones del acoplamiento FEM-BEM como base para una nueva y relevante aplicación de los métodos de ondelettes al tratamiento numérico de ecuaciones de operadores elípticos. Se destaca en esta presentación el uso de una parametrización de la frontera artificial para escribir una formulación equivalente del método de acoplamiento, la cual simplifica el análisis del problema discreto y el posterior empleo de los métodos de ondelettes.

### 2.1 Introducción

La idea de resolver numéricamente por métodos de elementos finitos un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales junto con ecuaciones integrales es llamado el acoplamiento FEM-BEM [8, 14, 18, 19]. La solución aproximada obtenida por el método de acoplamiento se caracteriza por ser la solución exacta de un problema diferencial, la cual es parametrizada por un conjunto finito de parámetros definidos sobre un dominio acotado, los elementos finitos, y sobre una frontera artificial, los elementos de frontera. Este método es también aplicable a problemas no lineales, o problemas con coeficientes variables, bajo la suposición que al exterior de alguna región la ecuación que rige al problema posee una solución fundamental [14].

En el presente trabajo sólo consideramos problemas de valores de frontera exteriores. Ciertamente, para problemas exteriores, el método de integral de frontera es muy adecuado debido a que evita la discretización de dominios no acotados. Además, puesto que en el acoplamiento la formulación integral de frontera es llevada a cabo sobre una interfaz artificial  $\Gamma$ , uno observa que la formulación integral representa la relación entre los datos de frontera de Dirichlet y Neumann para la ecuación exterior.

En este sentido, lo anterior puede ser visto como condiciones de frontera artificiales, las cuales son exactas pero no locales. Este hecho da lugar a la conocida desventaja de los métodos de integral de frontera, la cual es producir discretizaciones con matrices numéricamente llenas. En particular, un problema que aquí es resuelto para el acoplamiento FEM-BEM (ver el capítulo 3).

Por otro lado, es importante mencionar que existen en la literatura varias formulaciones del acoplamiento. De entre todas las formulaciones, aquí hemos elegido una que no restringe la elección de la frontera artificial  $\Gamma$ , y para la cual el método de Galerkin es conocido ser estable. Más concretamente, la formulación elegida consiste en añadir una ecuación integral para la derivada normal [8, 18]. Otras formulaciones exigen interfaces particulares como un círculo, y para ellas el operador de Steklov-Poincaré es conocido explícitamente.

En este contexto, el tratamiento numérico estándar de las ecuaciones del acoplamiento considera operadores definidos sobre la frontera  $\Gamma$ , y bases para los espacios discretos definidas sobre la misma frontera. Con el fin de simplificar el análisis del problema discreto y nuestra aplicación de los métodos de ondelettes en el capítulo 3, haremos uso de una parametrización de la frontera  $\Gamma$  para transformar la formulación variacional del problema original en una equivalente. Más precisamente, la incógnita sobre la frontera (en este caso la derivada normal) será substituida por una nueva incógnita sobre el intervalo  $I := (0, 1)$ , y los operadores integrales de frontera usuales serán reemplazados por otros más simples actuando entre espacios de Sobolev 1-periódicos, y heredando de los primeros todas sus propiedades, tales como simetría, orden, etc. Las ventajas del uso de esta parametrización pueden ser observadas en la Proposición 2.3, donde en particular la identidad (2.17) jugará un rol fundamental en la implementación del método de acoplamiento discretizado en bases de ondelettes. Esto debido a que, similar a una discretización usual por elementos finitos, sólo se requerirá la discretización de dos operadores integrales. Por otro lado, en la nueva formulación el cálculo de los coeficientes matriciales es más fácil de implementar.

La organización del capítulo es como sigue. En la sección 2 se presenta el problema modelo y su formulación variacional por el método de acoplamiento. En la sección 3 se introduce la nueva formulación variacional para el método de acoplamiento con dos ecuaciones integrales. Finalmente, en la sección 4 se revisa el método de Galerkin usando elementos finitos curvos y se discretiza el problema para la posterior comprensión de matrices en el capítulo 3. Además, se indica como un esquema perturbado puede ser analizado usando el primer Lema de Strang.

## 2.2 El Acoplamiento FEM-BEM

### El Problema Modelo

Consideramos como modelo el problema exterior de Dirichlet para la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Sea  $\Omega_0$  un dominio acotado y simplemente conexo en  $\mathbb{R}^2$  con frontera Lipschitz  $\Gamma_0 := \partial\Omega_0$ . Luego, dada una función  $f \in L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_0)$  de soporte compacto, buscamos  $u$  tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_0, \\ u &= 0 && \text{sobre } \Gamma_0, \\ u(x) &= O(1) && \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.1)$$

De acuerdo a las hipótesis sobre  $f$ , podemos elegir un dominio convexo y acotado  $\Omega_1$  (con frontera regular  $\Gamma := \partial\Omega_1$ ) conteniendo  $\bar{\Omega}_0$  y  $\text{supp } f$ . De esta manera, la frontera  $\Gamma$  divide  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_0$  en una región anular  $\Omega$  (acotada por  $\Gamma_0$  y  $\Gamma$ ) y un dominio exterior no acotado  $\Omega^+ := \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_1$  (ver la Figura 2.1).

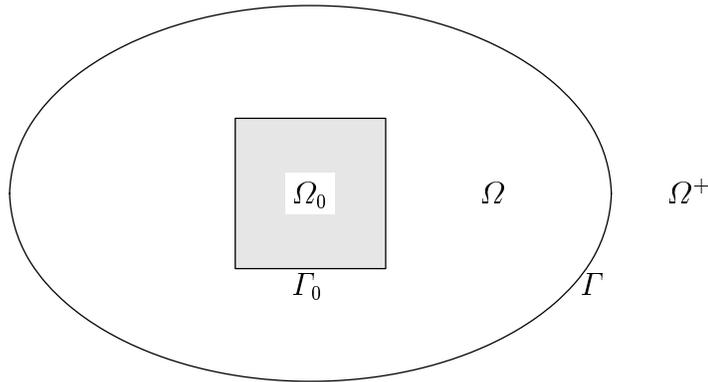


Figura 2.1: Geometría del problema modelo.

En consecuencia, es posible separar el problema (2.1) y escribirlo, equivalentemente, como un problema interior en  $\Omega$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \Omega, \\ u &= 0 && \text{sobre } \Gamma_0, \end{aligned}$$

y un problema exterior en  $\Omega^+$

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{en } \Omega^+, \\ u(x) &= O(1) && \text{cuando } |x| \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{2.2}$$

acoplados por las condiciones de transmisión

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \Omega}} u(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \Omega^+}} u(x) && \text{para todo } y \in \Gamma, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \Omega}} \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \Omega^+}} \frac{\partial u}{\partial \nu_y} u(x) && \text{para todo } y \in \Gamma, \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde  $\nu_y$  denota la normal unitaria exterior a  $\Omega$  en  $y \in \Gamma$ .

A continuación, usando la formula de representación de Green y el comportamiento asintótico de  $u$  en el infinito, obtenemos para todo  $x \in \Omega^+$

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x, y) \right\} u(y) ds_y - \int_{\Gamma} E(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) ds_y + c, \tag{2.4}$$

donde  $E(x, y) := -\frac{1}{2\pi} \log |x - y|$  es la solución fundamental de la ecuación de Laplace en dos dimensiones y  $c := \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x)$  es una constante. En vista de las condiciones de salto de los correspondientes potenciales, tomando el límite en (2.4) desde el dominio exterior  $\Omega^+$  a la frontera  $\Gamma$  y definiendo  $p := \frac{\partial u}{\partial \nu}$ , obtenemos sobre  $\Gamma$  la ecuación integral

$$u = \left(\frac{1}{2} + K\right)u - Vp + c,$$

donde  $V$  y  $K$  son, respectivamente, los operadores integrales de frontera de *capa simple* y *capa doble* definidos por

$$(Vp)(x) := \int_{\Gamma} E(x, y)p(y) ds_y, \tag{2.5}$$

$$(Ku)(x) := \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x, y) \right\} u(y) ds_y. \tag{2.6}$$

Con el fin de obtener un esquema de Galerkin estable sin restricciones adicionales, es conveniente considerar la ecuación integral

$$p = -Wu + \left(\frac{1}{2} - K^*\right)p,$$

la cual se obtiene de (2.4) por derivación. Los operadores integrales de frontera  $K^*$  y  $W$  son, respectivamente, el operador *adjunto del doble* y el operador *hipersingular*

definidos por

$$(K^*p)(x) := \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu_x} E(x, y) \right\} p(y) ds_y, \quad (2.7)$$

$$(Wu)(x) := -\frac{\partial}{\partial \nu_x} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu_x} E(x, y) \right\} u(y) ds_y. \quad (2.8)$$

El siguiente lema será también requerido (ver por ejemplo [14]).

**Lema 2.1.** *Sea  $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^1(\bar{\Omega}^+)$  la solución del problema exterior (2.2) con  $u$  prescrito sobre  $\Gamma$ . Entonces  $\int_{\Gamma} p(x) ds_x = 0$ .*

Finalmente, las condiciones de transmisión (2.3), las formulas anteriores y el Lema 2.1 conducen al siguiente problema no local: *Encontrar  $(u, p, c)$  tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \Omega, \\ u &= 0 && \text{sobre } \Gamma_0, \\ \left(\frac{1}{2} - K\right)u + Vp &= c && \text{sobre } \Gamma, \\ -Wu + \left(\frac{1}{2} - K^*\right)p &= p && \text{sobre } \Gamma, \\ \int_{\Gamma} p(x) ds_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

El problema (2.9) es conocido como la *formulación con dos ecuaciones integrales* para acoplamiento FEM-BEM, y es equivalente al problema original (2.1) (ver [8, 18]).

## La Formulación Variacional

Para el procedimiento usual de acoplamiento, uno aplica el método de elementos finitos al dominio acotado  $\Omega$  y el método de elementos de frontera al dominio no acotado  $\Omega^+$ . A continuación, con el fin de proveer la formulación variacional de (2.9), introducimos algunas notaciones y recordamos un resultado fundamental.

Para  $m$  entero y  $s \in \mathbb{R}$ , denotamos por  $H^m(\Omega)$  y  $H^s(\Gamma)$  los espacios de Sobolev usuales provistos con las normas  $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$  y  $\|\cdot\|_{H^s(\Gamma)}$ , respectivamente. El producto de dualidad entre  $H^s(\Gamma)$  y  $H^{-s}(\Gamma)$  es denotado por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , el cual extiende el producto interior  $\int_{\Gamma} u(x)v(x) ds_x$  para  $u, v \in L^2(\Gamma)$ . Además, definimos los siguientes subespacios

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &:= \{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \}, \\ H_0^{-1/2}(\Gamma) &:= \{ q \in H^{-1/2}(\Gamma) \mid \langle 1, q \rangle = 0 \}. \end{aligned}$$

El siguiente resultado recuerda las principales propiedades de continuidad de los operadores  $V$ ,  $K$ ,  $K^*$  y  $W$  cuando actúan entre espacios de Sobolev  $H^s(\Gamma)$  (ver [7]).

**Lema 2.2.** *Sea  $\Gamma$  una frontera Lipschitz. Entonces los operadores integrales de frontera definidos por (2.5)-(2.8) son continuos en los siguientes espacios*

$$\begin{aligned} V : H^{-1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma), & K : H^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \\ K^* : H^{-1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), & W : H^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

Observar que el lema claramente indica que  $V$  y  $W$  son operadores pseudodiferenciales de ordenes menos uno y uno, respectivamente, mientras que  $K$  y  $K^*$  son operadores pseudodiferenciales de orden cero, mutuamente adjuntos con respecto al producto de dualidad entre  $H^{1/2}(\Gamma)$  y  $H^{-1/2}(\Gamma)$ .

Sea  $H := H_0^1(\Omega) \times H_0^{-1/2}(\Gamma)$ . Ahora estamos en condiciones de proveer la formulación variacional para el problema acoplado (2.9): *Encontrar  $(u, p) \in H$  tal que*

$$A((u, p), (v, q)) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \text{para todo } (v, q) \in H, \quad (2.10)$$

donde  $A : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  es la forma bilineal continua y  $H$ -elíptica, introducida en [18] y definida por

$$\begin{aligned} A((u, p), (v, q)) &:= a(u, v) - \frac{1}{2} \langle v, p \rangle + \langle v, Wu \rangle + \langle Kv, p \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle u, q \rangle - \langle Ku, q \rangle + \langle Vp, q \rangle, \end{aligned} \quad (2.11)$$

con  $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ . Se sigue que la existencia y unicidad de  $(u, p) \in H$  solución de (2.10) son dadas por el Lema de Lax-Milgram.

## 2.3 Una Formulación Variacional Modificada

Siguiendo una idea presentada en [20], en esta sección introducimos una formulación variacional equivalente a (2.10), la cual consiste, esencialmente, en reemplazar la incógnita  $p$  definida sobre la frontera  $\Gamma$  por una nueva incógnita definida sobre el intervalo  $I := (0, 1)$ . De esta forma, tal como veremos, la nueva formulación simplifica el esquema de Galerkin como también el posterior el empleo de los métodos de ondelettes en el capítulo 3.

Supondremos en todo lo que sigue, que la frontera regular  $\Gamma$  es parametrizada por una función  $C^\infty$  y 1-periódica  $\gamma : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$\alpha(t) := |\gamma'(t)| > 0 \quad \text{para todo } t \in \bar{I} = [0, 1].$$

Con la ayuda de esta parametrización podemos definir, para  $s \geq 0$ , el espacio de Sobolev 1-periódico

$$H^s(I) := \{ \omega \in L^2(I) \mid \omega \circ \gamma^{-1} \in H^s(\Gamma) \}$$

provisto con la norma  $\|\omega\|_{H^s(I)} := \|\omega \circ \gamma^{-1}\|_{H^s(\Gamma)}$ . Definimos luego  $H^s(I) := (H^{-s})^*(I)$  para  $s < 0$ , y denotamos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto de dualidad entre  $H^s(I)$  y  $H^{-s}(I)$  con respecto al producto interior  $\int_I \mu(t)\omega(t) dt$  para  $\mu, \omega \in L^2(I)$ . Sea además el siguiente subespacio

$$H_0^{-1/2}(I) := \{ \rho \in H^{-1/2}(I) \mid \langle 1, \rho \rangle = 0 \}.$$

A continuación, con el espacio producto  $M := H^{1/2}(I) \times H_0^{-1/2}(I)$ , sean las formas bilineales  $b : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  y  $B : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$b((\mu, \sigma), (\omega, \rho)) := \frac{1}{2} \langle \mu, \rho \rangle - \frac{1}{2} \langle \omega, \sigma \rangle, \quad (2.12)$$

$$B((\mu, \sigma), (\omega, \rho)) := \langle \omega, W\mu \rangle + \langle K\omega, \sigma \rangle - \langle K\mu, \rho \rangle + \langle V\sigma, \rho \rangle, \quad (2.13)$$

donde  $V : H^{-1/2}(I) \rightarrow H^{1/2}(I)$ ,  $K : H^{1/2}(I) \rightarrow H^{1/2}(I)$  y  $W : H^{1/2}(I) \rightarrow H^{-1/2}(I)$  son los operadores integrales 1-periódicos definidos por

$$\begin{aligned} (V\sigma)(s) &:= \int_I E(\gamma(s), \gamma(t)) \sigma(t) dt, \\ (K\omega)(s) &:= \int_I \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu_{y=\gamma(t)}} E(\gamma(s), \gamma(t)) \alpha(t) \right\} \omega(t) dt, \\ (W\mu)(s) &:= \int_I \left\{ -\frac{\partial}{\partial \nu_{x=\gamma(s)}} \frac{\partial}{\partial \nu_{y=\gamma(t)}} E(\gamma(s), \gamma(t)) \alpha(s) \alpha(t) \right\} \mu(t) dt, \end{aligned} \quad (2.14)$$

y relacionados con los clásicos operadores integrales de frontera  $V$ ,  $K$  y  $W$  por medio de las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \langle Vp, q \rangle &= \langle V(p \circ \gamma) \alpha, (q \circ \gamma) \alpha \rangle, \\ \langle Kv, p \rangle &= \langle K(v \circ \gamma), (p \circ \gamma) \alpha \rangle, \\ \langle v, Wu \rangle &= \langle v \circ \gamma, W(u \circ \gamma) \rangle, \end{aligned} \quad (2.15)$$

para todo  $u, v \in H^{1/2}(\Gamma)$  y  $p, q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ .

Estas definiciones serán constantemente utilizadas en el capítulo 3. En particular, las definiciones de las formas bilineales  $b$  y  $B$  dadas en (2.12) y (2.13), respectivamente, nos permiten expresar la forma bilineal  $A$  como establecemos en la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.** Sean  $A$ ,  $b$  y  $B$  dadas por (2.11), (2.12) y (2.13), respectivamente. Entonces se verifica la igualdad

$$\begin{aligned} A((u, p), (v, q)) &= a(u, v) + b\left((u \circ \gamma, (p \circ \gamma)\alpha), (v \circ \gamma, (q \circ \gamma)\alpha)\right) \\ &\quad + B\left((u \circ \gamma, (p \circ \gamma)\alpha), (v \circ \gamma, (q \circ \gamma)\alpha)\right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

para todo  $(u, p), (v, q) \in H$ . Además, es válida la siguiente identidad

$$\langle \omega, W\mu \rangle = \langle V\mu', \omega' \rangle \quad (2.17)$$

para todo  $\mu, \omega \in H^{1/2}(I)$ , donde  $'$  indica derivación.

*Demostración.* Puesto que  $u \in H^1(\Omega)$  implica  $u \circ \gamma \in H^{1/2}(I)$  y  $p \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$  implica  $(p \circ \gamma)\alpha \in H_0^{-1/2}(I)$ , es directo comprobar usando las identidades en (2.15) que (2.16) se verifica. Por otro lado, no es difícil ver que la siguiente relación se satisface

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} E(\gamma(s), \gamma(t)) = -\frac{\partial}{\partial \nu_{x=\gamma(s)}} \frac{\partial}{\partial \nu_{y=\gamma(t)}} E(\gamma(s), \gamma(t)) \alpha(s) \alpha(t).$$

Luego, integrando por partes obtenemos (2.17). □

En base a este resultado, de ahora en adelante consideramos el espacio producto  $H := H_0^1(\Omega) \times H_0^{-1/2}(I)$  y la forma bilineal  $A : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\begin{aligned} A((u, \sigma), (v, \rho)) &:= a(u, v) + b((u \circ \gamma, \sigma), (v \circ \gamma, \rho)) \\ &\quad + B((u \circ \gamma, \sigma), (v \circ \gamma, \rho)). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Así, substituyendo en la formulación variacional (2.10) la incógnita  $p \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$  por la nueva incógnita  $\sigma := (p \circ \gamma)\alpha \in H_0^{-1/2}(I)$ , la Proposición 2.3 nos permite obtener la siguiente formulación variacional del problema acoplado (2.9): *Encontrar  $(u, \sigma) \in H$  tal que*

$$A((u, \sigma), (v, \rho)) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \text{para todo } (v, \rho) \in H. \quad (2.19)$$

La formulación variacional modificada (2.19) es obviamente equivalente a (2.10), no obstante tiene la ventaja de simplificar el análisis de problema discreto y nuestra aplicación de los métodos de ondelettes al acoplamiento FEM-BEM.

## 2.4 Discretización para la Compresión de Matrices

### Los Espacios de Elementos Finitos

La discretización del problema (2.19) será realizada usando elementos finitos lineales para la incógnita  $u$  y funciones constantes por tramos para la incógnita  $\sigma$ . Además, por simplicidad, consideraremos sólo el caso de una frontera poligonal  $\Gamma_0$ .

Dado  $N \in \mathbb{N}$ , sea  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$  una partición uniforme del intervalo  $\bar{I} = [0, 1]$ , con  $t_{k+1} - t_k = h := 1/N$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , y denotemos por  $\Omega_h \subset \Omega$  el dominio poligonal cuyos vértices sobre  $\Gamma$  son  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{N-1})$ . Sea  $\mathcal{T}_h$  una triangulación regular de  $\bar{\Omega}_h$  formada por triángulos  $T_i$  cuyos diámetros satisfacen  $\text{diam} T_i \leq h \sup_{t \in \bar{I}} \alpha(t)$ . Para esta triangulación, si  $\hat{T}$  denota el triángulo de referencia en  $\mathbb{R}^2$ , existen  $\#\mathcal{T}_h$  aplicaciones afines  $F_i$  tales que  $F_i(\hat{T}) = T_i$ .

Ahora, cada triángulo  $T_i$  con dos vértices sobre  $\Gamma$  es reemplazado por el correspondiente triángulo curvo. Sea  $T_i$  un triángulo curvo con vértices  $v_1$  y  $v_2$  sobre  $\Gamma$  verificando  $v_1 = \gamma(t_k)$  y  $v_2 = \gamma(t_{k+1})$  para algún  $k \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ . Entonces, en este caso, existe una aplicación inyectiva  $\tilde{F}_i := F_i + G_i$ , con

$$G_i(\hat{x}) := \frac{\hat{x}_1}{1 - \hat{x}_2} \left( \gamma(t_k + \hat{x}_2(t_{k+1} - t_k)) - \gamma(t_k) - \hat{x}_2(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)) \right),$$

la cual es un difeomorfismo de clase  $C^\infty$  tal que  $\tilde{F}_i(\hat{T}) = T_i$  (ver [29]).

De esta manera, considerando sólo elementos finitos conformes, denotamos por  $P_1(T_i)$  la imagen por  $\tilde{F}_i$  del espacio  $P_1(\hat{T})$  de polinomios de grado menor o igual que uno sobre  $\hat{T}$ . La suposición de regularidad de la triangulación  $\mathcal{T}_h$ , y las técnicas usuales empleadas en el caso afín, permiten obtener cotas para el error de interpolación sobre triángulos curvos. Más precisamente, uniformemente en  $T_i$ , se tiene

$$\|v - \Pi_i v\|_{H^1(T_i)} \lesssim h \|v\|_{H^2(T_i)} \tag{2.20}$$

para todo  $v \in H^2(T_i)$ , donde  $\Pi_i$  es el operador de interpolación sobre  $P_1(T_i)$  (ver [29]).

Sea  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$  el espacio de elementos finitos cuyas funciones son continuas y se anulan sobre la frontera  $\Gamma_0$ . Además, requerimos que la restricción de una función  $v_h \in V_h$  a un triángulo pertenezca a  $P_1(T_i)$ . Deducimos de (2.20) que

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \lesssim h \|u\|_{H^2(\Omega)} \tag{2.21}$$

para todo  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , uniformemente en  $h$ .

Finalmente, sea  $W_h \subset H^{-1/2}(I)$  el espacio de las funciones 1-periódicas y constantes por tramos definidas sobre la partición uniforme  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ . Entonces, el espacio de dimensión finita  $U_h := \{ \rho_h \in W_h \mid \langle 1, \rho_h \rangle = 0 \}$  es un subespacio de  $H_0^{-1/2}(I)$  y tiene la siguiente propiedad de aproximación

$$\inf_{\rho_h \in U_h} \|\sigma - \rho_h\|_{H^{-1/2}(I)} \lesssim h \|\sigma\|_{H^{1/2}(I)} \quad (2.22)$$

para todo  $\sigma \in H^{1/2}(I) \cap H_0^{-1/2}(I)$ , uniformemente en  $h$  (ver [27]).

## El Esquema de Galerkin

Considerando los espacios de elementos finitos definidos previamente, y denotando  $H_h := V_h \times U_h$ , obtenemos el siguiente esquema de Galerkin asociado a la formulación variacional (2.19): *Encontrar  $(u_h, \sigma_h) \in H_h$  tal que*

$$A((u_h, \sigma_h), (v_h, \rho_h)) = \int_{\Omega} f v_h dx \quad \text{para todo } (v_h, \rho_h) \in H_h. \quad (2.23)$$

Luego, debido a la conformidad y consistencia de los espacios  $H_h$ , se sigue que el esquema de Galerkin (2.23) tiene una única solución  $(u_h, \sigma_h) \in H_h$  satisfaciendo, uniformemente en  $h$ , la estimación del tipo Cea

$$\|(u, \sigma) - (u_h, \sigma_h)\|_H \lesssim \inf_{(v_h, \rho_h) \in H_h} \|(u, \sigma) - (v_h, \rho_h)\|_H, \quad (2.24)$$

donde  $(u, \sigma) \in H$  es la única solución de (2.19). Además, si  $u \in H^2(\Omega)$  obtenemos convergencia de orden óptimo en  $H$ . En efecto, usando las propiedades de aproximación (2.21) y (2.22), junto con la estimación de Cea (2.24), se tiene

$$\begin{aligned} \|(u, \sigma) - (u_h, \sigma_h)\|_H &\lesssim h \|(u, \sigma)\|_{H^2(\Omega) \times H^{1/2}(I)} \\ &\lesssim h \|u\|_{H^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde también hemos usado el hecho que  $\sigma := (p \circ \gamma)\alpha$ , y el teorema de trazas.

## La Compresión de Matrices

La matriz de rigidez de la forma bilineal  $B$  definida por (2.13), y conteniendo los operadores integrales  $V$ ,  $K$  y  $W$  definidos en (2.14), será calculada en bases de ondelettes para explotar la ventaja de la compresión de matrices. En otras palabras,

en vez de resolver numéricamente (2.23) resolveremos el siguiente esquema de Galerkin comprimido: Encontrar  $(u_h^c, \sigma_h^c) \in H_h$  tal que

$$A^c((u_h^c, \sigma_h^c), (v_h, \rho_h)) = \int_{\Omega} f v_h dx \quad \text{para todo } (v_h, \rho_h) \in H_h, \quad (2.26)$$

donde  $A^c : H_h \times H_h \rightarrow \mathbb{R}$  es una aproximación de la forma bilineal  $A$  y definida por

$$\begin{aligned} A^c((u_h, \sigma_h), (v_h, \rho_h)) &:= a(u_h, v_h) + b((u_h \circ \gamma, \sigma_h), (v_h \circ \gamma, \rho_h)) \\ &\quad + B^c((u_h \circ \gamma, \sigma_h), (v_h \circ \gamma, \rho_h)), \end{aligned} \quad (2.27)$$

con  $B^c : M_h \times M_h \rightarrow \mathbb{R}$  siendo la aproximación de la forma bilineal  $B$  debido a la compresión de matrices. Aquí, el espacio  $M_h \subset M$  es definido por  $M_h := S_h \times U_h$ , donde  $S_h := \{v_h \circ \gamma \in H^{1/2}(I) \mid v_h \in V_h\}$ .

Muy importantes para probar la convergencia del esquema de Galerkin comprimido (2.26) serán la consistencia de nuestra estrategia de compresión de matrices y la estabilidad de la forma bilineal comprimida  $A^c$ . En este sentido, el efecto de la compresión de matrices sobre la convergencia de (2.26) puede ser analizado usando la siguiente versión del primer Lema de Strang (ver por ejemplo [4]).

**Lema de Strang.** *Sea la forma bilineal comprimida  $A^c$  definida por (2.27) estable en el sentido que, uniformemente en  $h$ ,*

$$A^c((v_h, \rho_h), (v_h, \rho_h)) \gtrsim \|(v_h, \rho_h)\|_H^2$$

para todo  $(v_h, \rho_h) \in H_h$ . Entonces el esquema comprimido (2.26) tiene una única solución  $(u_h^c, \sigma_h^c) \in H_h$  satisfaciendo

$$\begin{aligned} \|(u, \sigma) - (u_h^c, \sigma_h^c)\|_H &\lesssim \inf_{(v_h, \rho_h) \in H_h} \left\{ \|(u, \sigma) - (v_h, \rho_h)\|_H \right. \\ &\quad \left. + \sup_{(w_h, \varrho_h) \in H_h} \frac{|A((v_h, \rho_h), (w_h, \varrho_h)) - A^c((v_h, \rho_h), (w_h, \varrho_h))|}{\|(w_h, \varrho_h)\|_H} \right\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

uniformemente en  $h$ .

En el siguiente capítulo usaremos ondelettes biortogonales para discretizar y comprimir la forma bilineal  $B$  definida por (2.13). Mostraremos además que la convergencia del esquema comprimido (2.26) no se ve deteriorada por nuestra estrategia de compresión de matrices, sino más bien que es idéntica a la del esquema original (2.23).



# Capítulo 3

## Aproximación Biortogonal del Acoplamiento FEM-BEM

En este capítulo se describe y analiza un esquema de Galerkin multiescala para el acoplamiento FEM-BEM. Usando ondelettes biortogonales, se realiza la discretización de los respectivos operadores integrales y se propone una estrategia de compresión de matrices la cual se ajusta completamente, con complejidad lineal, al orden de convergencia óptimo del método de Galerkin. Además, se propone un esquema preconditionado el cual puede ser resuelto por el método iterativo del gradiente conjugado. Experimentos numéricos confirman nuestros resultados.

### 3.1 Introducción

El potencial de los métodos de ondelettes como herramienta de discretización descansa principalmente en dos características: la validez de equivalencias de normas para espacios de Sobolev en términos de normas discretas para los coeficientes en expansiones en bases de ondelettes, y ciertas propiedades de cancelación determinadas por el orden de momentos nulos de las bases de ondelettes. Estas características son fundamentales para la construcción de preconditionadores eficientes y el desarrollo de estrategias de compresión de matrices basadas en la representación multiescala de operadores discretizados en bases de ondelettes.

En efecto, como fue observado en [1], las bases de ondelettes constituyen una herramienta eficiente para el tratamiento numérico de operadores integrales en el caso de grandes sistemas. De la misma manera, métodos de elementos de frontera tales como *Fast Multipole* [16] y *Panel Clustering* [17] prueban una complejidad lineal

o casi lineal. Aquí, complejidad lineal significa que los requerimientos en recursos y tiempos computacionales para solucionar el sistema lineal asociado son proporcionales al número de incógnitas. Estos desarrollos motivaron la utilización de las bases de ondelettes en el método de elementos de frontera en [11, 12, 13, 25]. Sin embargo, los resultados allí obtenidos se diferencian de aquellos en [1] en que las estrategias de compresión de matrices propuestas son diseñadas para no deteriorar el orden de convergencia del esquema discreto con complejidad lineal. Además, es probado que un simple preconditionador diagonal para las discretizaciones en bases de ondelettes resulta en matrices comprimidas bien condicionadas.

Basándonos en estos resultados, la aplicación de los métodos de ondelettes para una discretización eficiente de los operadores integrales en el acoplamiento FEM-BEM parece ser bastante ventajosa. En efecto, de acuerdo al capítulo 2, las ecuaciones integrales de frontera pueden ser formuladas sobre una frontera artificial  $\Gamma$  la cual puede ser elegida lo más regular y simple posible. Para tal elección los métodos de ondelettes son mucho más eficientes. Por otro lado, puesto que el acoplamiento FEM-BEM trata con los datos de frontera de Dirichlet y Neumann, la presencia de operadores integrales de orden distinto de cero y espacios de Sobolev de orden fraccionario no constituyen restricción alguna, ya que las bases de ondelettes pueden ser elegidas apropiadamente y, como observáramos, normalizadas para ser estables en estos espacios por medio de un simple preconditionador diagonal.

En este trabajo sólo consideramos el caso bidimensional. Para análogos resultados en tres y más dimensiones referimos a [23]. Es importante también mencionar que nuestra aplicación de los métodos de ondelettes al acoplamiento FEM-BEM constituye, al mismo tiempo, una discretización eficiente del proyector de Calderón [7], la cual es un operador fundamental en los métodos de elementos de frontera directos.

Usando las bases de ondelettes biortogonales construidas en [6], desarrollamos una estrategia de compresión de matrices la cual se ajusta completamente al orden de convergencia del método de Galerkin para el acoplamiento FEM-BEM. Respecto a las bases de ondelettes elegidas, existen varias razones que justifican su elección, siendo una de ellas el hecho que las trazas de las funciones de elementos finitos determinan las funciones bases que pueden ser definidas sobre la frontera. El análisis comienza con estimaciones para el decaimiento de los coeficientes matriciales que discretizan en bases ondelettes un operador pseudodiferencial genérico  $L$ , el cual representa a los operadores integrales de frontera en el acoplamiento FEM-BEM. Estas estimaciones son establecidas separadamente para una primera compresión (ondelettes con soportes

disjuntos) y una segunda compresión (ondelettes con soportes superpuestos). Fijando luego estrategias de compresión basadas en el decaimiento de estos coeficientes, procedemos a analizar el error de consistencia. Las herramientas básicas para este análisis son las propiedades de aproximación, estimaciones inversas y equivalencias de normas para espacios de Sobolev en términos de normas discretas para los coeficientes de ondelettes. De esta forma, el análisis se reduce a estimar, por medio del Lema de Schur, la norma espectral de ciertas matrices residuales. Debido a la segunda compresión, a continuación probamos que la estrategia de compresión propuesta tiene complejidad lineal. Identificando las escalas donde puede realizarse la segunda compresión, por medio de combinaciones convexas de parámetros de compresión acoplados con respecto a bases de ondelettes diferentes, observamos que nuestro análisis de complejidad resulta muy simple, claro y general.

Con estos resultados procedemos a definir la compresión de matrices para el acoplamiento FEM-BEM. Probamos la respectiva estimación para el error de consistencia y la estabilidad en las normas de los espacios de energía de una forma bilineal discreta correspondiente a operadores comprimidos. La convergencia y complejidad del esquema comprimido son luego establecidas. En lo que respecta al sistema lineal resultante, este es difícil de resolver debido a su complicada estructura y mal condicionamiento. Luego, haciendo uso de la propiedad de estabilidad de las bases de ondelettes y del conocido preconditionador BPX [3], proponemos un preconditionador para los esquemas simétrico y no simétrico asociados al problema. Además, usando una transformación del tipo Bramble-Pasciak [2], proponemos un esquema preconditionado, simétrico y definido positivo el cual puede ser resuelto muy eficientemente por el método iterativo del gradiente conjugado.

La organización del capítulo es como sigue. En la sección 2 se ponen en evidencia las razones que justifican la elección de bases de ondelettes biortogonales para la compresión de matrices que es propuesta en la sección 3. En esta sección se establecen las estimaciones para el decaimiento de los coeficientes matriciales, se definen las estrategias de compresión, se realiza el respectivo análisis de consistencia y se prueba la complejidad lineal resultante. En la sección 4 se propone la estrategia de compresión de matrices para el acoplamiento FEM-BEM, para la cual se prueba la consistencia, estabilidad, convergencia y complejidad. Algunos aspectos computacionales son discutidos en la sección 5. La sección 6 es dedicada al estudio del preconditionamiento del esquema multiescala propuesto. Finalmente, en la sección 7 se presentan algunos experimentos numéricos.

## 3.2 Elección de la Base de Ondelettes

En el capítulo 1 hemos puesto en evidencia la importancia de las bases de Riesz biortogonales en relación a la estabilidad de las transformaciones multiescala (ver el Teorema 1.1). Existen sin embargo otras razones por qué las bases de Riesz biortogonales son importantes en el contexto de las aplicaciones. En efecto, la flexibilidad ofrecida por el concepto de biortogonalidad permite el empleo de  $B$ -splines como funciones de escala y la posibilidad de elevar, independiente del orden de aproximación, el número de momentos nulos y la regularidad de las correspondientes ondelettes biortogonales. Estas propiedades son esenciales para la compresión de matrices y el ajuste de ordenes de convergencia.

En este mismo sentido, y en relación a nuestra aplicación de los métodos de ondelettes al acoplamiento FEM-BEM, podemos también mencionar las siguientes tres razones que justifican la elección de bases de ondelettes biortogonales.

- Las trazas de las funciones de elementos finitos restringen la elección de las funciones bases sobre la frontera.
- Es necesario discretizar y comprimir tres operadores, a saber, los operadores de capa simple, capa doble e hipersingular, los cuales actúan en espacios de Sobolev diferentes y, en consecuencia, deben ser discretizados en bases apropiadas.
- En conexión con la identidad (1.12), es fundamental que las respectivas bases de ondelettes duales sean también de soporte compacto.

De acuerdo a estas razones, hemos elegido para la aplicación de los métodos de ondelettes al acoplamiento FEM-BEM en dos dimensiones, las conocidas bases de ondelettes biortogonales para  $L^2(\mathbb{R})$  construidas en [6]. Referimos al apéndice A para la definición y descripción de las principales propiedades de estas bases.

## 3.3 Compresión de Matrices

En esta sección describimos y analizamos un esquema de Galerkin multiescala para la discretización y compresión de operadores pseudodiferenciales 1-periódicos del tipo definidos en la ecuación (2.14) del capítulo 2. Los resultados que se presentan son generalizaciones, para una aplicación en particular, de las ideas principalmente expuestas en [25]. Estas generalizaciones se refieren a que aquí consideramos tanto

la discretización como la compresión de operadores en el método de Galerkin con espacios de multiresolución diferentes. Por otro lado, una característica distintiva en esta presentación es también el análisis de consistencia en las normas de los espacios de energía de las discretizaciones en bases de ondelettes.

En lo que sigue, en atención a las notaciones introducidas en el capítulo 1 y el apéndice A, un arbitrario, pero fijo, más alto nivel de discretización será denotado por  $J$ . También, sin pérdida de generalidad, supondremos que el nivel de resolución más grueso en la definición de los espacios de multiresolución 1-periódicos es  $j_0 = 0$  (ver la ecuación (A.7) del apéndice).

### 3.3.1 Representación Multiescala de Operadores

Con el fin de ilustrar y analizar la discretización y compresión de los operadores integrales definidos en (2.14), consideraremos un operador pseudodiferencial genérico  $L$ , que se supone actúa continuamente entre los espacios de Sobolev 1-periódicos  $H^\beta(I)$  y  $H^{\beta-r}(I)$ , donde  $I := (0, 1)$  y  $r$  es el orden de  $L$ .

Según lo anterior, puesto que para el operador bajo consideración los espacios de energía son en general distintos, la correspondiente discretización de Galerkin debe ser llevada a cabo sobre espacios de multiresolución diferentes. Por un lado  $V_J \subset H^\beta(I)$  y por el otro  $V'_J \subset H^{\beta'}(I)$ , donde  $\beta' := r - \beta$ , y tal que los proyectores asociados  $P_J : H^\beta(I) \rightarrow V_J$  y  $P'_J : H^{\beta'}(I) \rightarrow V'_J$  verifiquen

$$\langle LP_J u, P'_J v \rangle = \langle (P'_J)^* LP_J u, v \rangle$$

para todo  $u \in H^\beta(I)$  y  $v \in H^{\beta'}(I)$ . Además, sin pérdida de generalidad, supondremos que  $\dim V_J = \dim V'_J = 2^J$ .

La representación multiescala del operador  $L_J := (P'_J)^* LP_J : V_J \rightarrow \tilde{V}'_J$  por una matriz requiere fijar bases de ondelettes biortogonales 1-periódicas

$$\Psi_J := \{ \psi_\lambda \mid \lambda \in \nabla_J \} \subset V_J \quad \text{y} \quad \Psi'_J := \{ \psi'_\lambda \mid \lambda \in \nabla_J \} \subset V'_J,$$

donde el conjunto de índices  $\nabla_J$  es definido por

$$\nabla_J := \{ \lambda = (j, k) \mid -1 \leq j < J, k \in \Delta_j \}.$$

Es directo comprobar que la matriz de rigidez del operador  $L_J$  con respecto a las bases multiescala  $\Psi_J$  y  $\Psi'_J$  tiene la forma

$$\mathbf{L}_J := [ \langle L\psi_\lambda, \psi'_{\lambda'} \rangle ]_{\lambda, \lambda' \in \nabla_J} = [ l_{\lambda', \lambda} ]_{\lambda, \lambda' \in \nabla_J}. \quad (3.1)$$

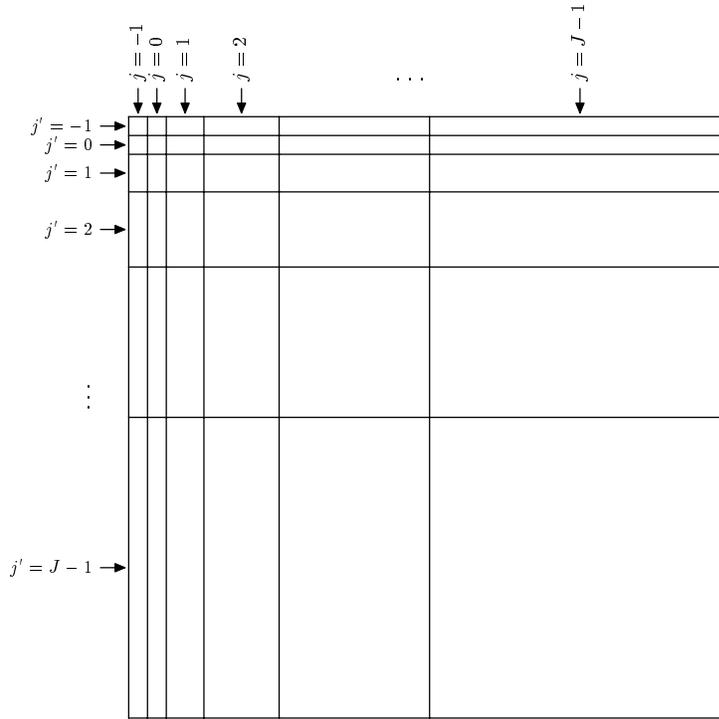


Figura 3.1: Estructura de la matriz de rigidez en ondelettes  $\mathbf{L}_J$ .

La matriz  $\mathbf{L}_J$ , cuya estructura puede ser visualizada en la Figura 3.1, será llamada la *matriz de rigidez en ondelettes* del operador  $L_J$ . En la literatura, cuando  $V_J = V'_J$ , esta matriz es denominada la *representación estándar* del operador  $L_J$ .

### Noción de Compresión de Matrices

Debido a la naturaleza no local del operador  $L$ , uno observa que la matriz de rigidez en ondelettes  $\mathbf{L}_J$  es en general una matriz llena. La idea de compresión de matrices consiste en aproximar  $\mathbf{L}_J$  por una matriz rala conveniente, mientras que la consistencia, estabilidad y convergencia del esquema perturbado no se vea deteriorada. Esta aproximación se basa en estimaciones para el decaimiento de los coeficientes matriciales  $\langle L\psi_\lambda, \psi'_{\lambda'} \rangle$  para  $\lambda', \lambda \in \nabla_J$ . En efecto, la mayoría de estos coeficientes son tan pequeños que pueden ser despreciados sin afectar la convergencia del esquema de Galerkin con *complejidad lineal* (ver [25] para el caso  $V_J = V'_J$ ). En esta tesis se prueba que tal propiedad es preservada para el acoplamiento FEM-BEM discretizado es bases de ondelettes (ver la sección 3.4).

### 3.3.2 Tres Lemas Fundamentales

En lo sucesivo  $L$  representa a los operadores integrales  $V$ ,  $K$  y  $W$  definidos en (2.14) en términos de la misma parametrización  $\gamma$  de la frontera  $\Gamma$ . En cualquier caso  $L$  es un operador de Calderón-Zygmund [21]. Así, el primer lema que establecemos contiene la *estimación estándar* (3.2), la cual tiene importantes consecuencias en la definición de nuestras estrategias de compresión para la representación matricial de  $L$  en bases de ondelettes.

**Lema 3.1.** *Sea  $N_L(s, t)$  el núcleo del operador  $L$ . Entonces, para derivadas parciales de orden  $m'$  con respecto a  $s$  y de orden  $m$  con respecto a  $t$  tal que  $m + m' + r + 1 > 0$ , se tiene la siguiente estimación*

$$\left| \frac{\partial^{m'}}{\partial s^{m'}} \frac{\partial^m}{\partial t^m} N_L(s, t) \right| \lesssim \frac{1}{|\gamma(s) - \gamma(t)|^{m+m'+r+1}} \quad (3.2)$$

con una constante que depende sólo de  $m$ ,  $m'$  y  $\Gamma$ .

#### Decaimiento de los Coeficientes $\langle L\psi_\lambda, \psi'_{\lambda'} \rangle$ para la Primera Compresión

Nuestro objetivo es traducir la estimación continua (3.2) al nivel discreto de los coeficientes de ondelettes. En primer lugar estimamos el decaimiento de aquellos coeficientes que están lejos de las diagonales en cada una de las submatrices de la matriz  $\mathbf{L}_J$  (ver la Figura 3.1). Para este fin, denotamos los soportes de las ondelettes por

$$\theta_\lambda := \text{supp } \psi_\lambda \quad \text{y} \quad \theta'_{\lambda'} := \text{supp } \psi'_{\lambda'},$$

y la distancia con respecto a  $\Gamma$  entre ambos soportes por

$$\text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \theta'_{\lambda'}) := \text{dist}(\gamma(\theta_\lambda), \gamma(\theta'_{\lambda'})).$$

El siguiente lema muestra que cada momento nulo de las ondelettes incrementa el decaimiento de los coeficientes  $\langle L\psi_\lambda, \psi'_{\lambda'} \rangle$  en términos de  $\text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \theta'_{\lambda'})$ .

**Lema 3.2.** *Sean  $m + m' + r + 1 > 0$  y  $\text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \theta'_{\lambda'}) > 0$ . Si las bases de ondelettes  $\Psi_J$  y  $\Psi'_J$  satisfacen la condición de momentos nulos (A.5) para algunos  $m := \tilde{d}$  y  $m' := \tilde{d}'$ , respectivamente, entonces los coeficientes de la matriz  $\mathbf{L}_J$  definida por (3.1) satisfacen la estimación*

$$|\langle L\psi_\lambda, \psi'_{\lambda'} \rangle| \lesssim \frac{2^{-j(m+1/2)} 2^{-j'(m'+1/2)}}{\text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \theta'_{\lambda'})^{m+m'+r+1}}, \quad (3.3)$$

uniformemente con respecto a  $\nabla_J$ .

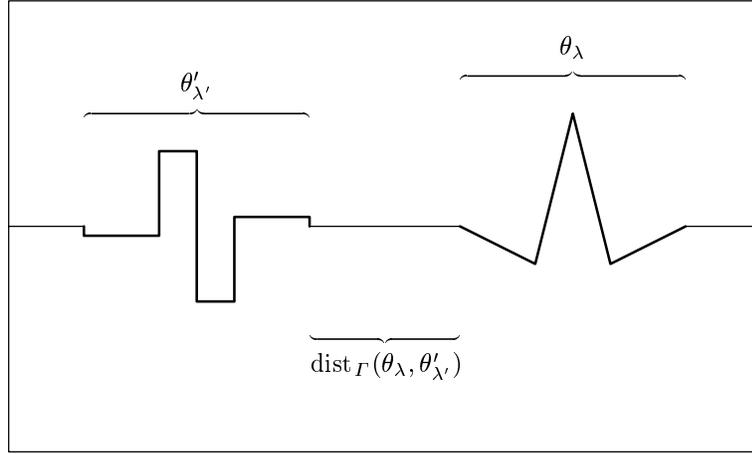


Figura 3.2: Ondelettes  $\psi_\lambda$  y  $\psi'_{\lambda'}$  en la primera compresión.

*Demostración.* Apoyándonos en la demostración del Lema 5.1 en [24], en primer lugar observamos que

$$\langle L\psi_\lambda, \psi'_{\lambda'} \rangle = \int_I \int_I N_L(s, t) \psi_\lambda(t) \psi'_{\lambda'}(s) dt ds.$$

Luego, debido a que la ondelette  $\psi_\lambda$  satisface la condición de momentos nulos de orden  $m$ , existe una función  $\varphi_\lambda \in L^2(I)$  tal que

$$\text{supp } \varphi_\lambda = \theta_\lambda, \quad \varphi_\lambda^{(m)} = \psi_\lambda \quad \text{y} \quad \|\varphi_\lambda\|_{L^1(I)} \lesssim 2^{-j(m+1/2)} \quad (3.4)$$

(ver la ecuación (A.6) del apéndice). De la misma manera, para la ondelette  $\psi'_{\lambda'}$  existe una función  $\varphi'_{\lambda'} \in L^2(I)$  satisfaciendo las propiedades en (3.4) con  $m'$  en vez de  $m$ . Así, puesto que el núcleo  $N_L(s, t)$  es regular sobre  $\theta'_{\lambda'} \times \theta_\lambda$  (ver la Figura 3.2), podemos integrar por partes  $m'$  veces con respecto  $s$  y  $m$  veces con respecto a  $t$ , obteniendo

$$\begin{aligned} \left| \int_I \int_I N_L(s, t) \psi_\lambda(t) \psi'_{\lambda'}(s) dt ds \right| &= \left| \int_{\theta'_{\lambda'}} \int_{\theta_\lambda} \frac{\partial^{m'}}{\partial s^{m'}} \frac{\partial^m}{\partial t^m} N_L(s, t) \varphi_\lambda(t) \varphi'_{\lambda'}(s) dt ds \right| \\ &\leq \max_{(s, t) \in \theta'_{\lambda'} \times \theta_\lambda} \left| \frac{\partial^{m'}}{\partial s^{m'}} \frac{\partial^m}{\partial t^m} N_L(s, t) \right| \|\varphi_\lambda\|_{L^1(I)} \|\varphi'_{\lambda'}\|_{L^1(I)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para establecer (3.3), debemos considerar la estimación estándar (3.2), y la estimación en (3.4) para las primitivas  $\varphi_\lambda$  y  $\varphi'_{\lambda'}$  asociadas a las bases de ondelettes elegidas.  $\square$

### Decaimiento de los Coeficientes $\langle L\psi_\lambda, \psi'_{\lambda'} \rangle$ para la Segunda Compresión

El Lema 3.2 anterior conduce a una estrategia de compresión con *complejidad casi lineal*. Luego, considerar solamente el decaimiento de los coeficientes asociados a funciones bases con soportes disjuntos no es suficiente. Existen aún  $O(J2^J)$  coeficientes donde los soportes de las ondelettes tienen intersección no vacía.

Para evitar este inconveniente debemos analizar el decaimiento de aquellos coeficientes no considerados en el Lema 3.2. Esto es fundamental para lo que llamaremos *segunda compresión* [25]. Nuestro análisis se basa, sobre todo, en la naturaleza de las ondelettes elegidas para la discretización del operador  $L$ . Más concretamente, el hecho que los soportes de las ondelettes consistan de subintervalos sobre los cuales estas son polinomios, es crucial para mostrar que coeficientes matriciales correspondientes a ondelettes con soportes superpuestos también presentan cierto decaimiento. Para tratar esos coeficientes, denotamos por

$$\vartheta_\lambda := \text{sing supp } \psi_\lambda \quad \text{y} \quad \vartheta'_{\lambda'} := \text{sing supp } \psi'_{\lambda'}$$

el *soporte singular* de las ondelettes, es decir, el conjunto boreleano de puntos donde las ondelettes no son diferenciables, y escribimos los soportes de las ondelettes como  $\theta_\lambda = \theta_{\lambda,1} \cup \theta_{\lambda,2} \cup \dots \cup \theta_{\lambda,m+d}$  y  $\theta'_{\lambda'} = \theta'_{\lambda',1} \cup \theta'_{\lambda',2} \cup \dots \cup \theta'_{\lambda',m'+d'}$ .

El siguiente lema prueba que sólo la ondelette con momentos nulos efectivos incide en el decaimiento de los coeficientes asociados a ondelettes con soportes superpuestos.

**Lema 3.3.** *Sean  $d < m' + r$ ,  $d' < m + r$ ,  $\psi_\lambda|_{\theta_{\lambda,\zeta}}$  un polinomio de grado  $d - 1$  sobre  $\theta_{\lambda,\zeta}$ ,  $\zeta = 1, 2, \dots, d + m$ , y  $\psi'_{\lambda'}|_{\theta'_{\lambda',\zeta}}$  un polinomio de grado  $d' - 1$  sobre  $\theta'_{\lambda',\zeta}$ ,  $\zeta = 1, 2, \dots, d' + m'$ . Si para  $j' < j$  se verifica la condición*

$$2^{-j} \lesssim \text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \vartheta'_{\lambda'}) \lesssim 2^{-j'}, \quad (3.5)$$

entonces los coeficientes de la matriz  $\mathbf{L}_J$  definida por (3.1) satisfacen la estimación

$$|\langle L\psi_\lambda, \psi'_{\lambda'} \rangle| \lesssim \frac{2^{-j(m+1/2)} 2^{j'/2}}{\text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \vartheta'_{\lambda'})^{m+r}}, \quad (3.6)$$

uniformemente con respecto a  $\nabla_J$ . Y si para  $j < j'$  se verifica la condición

$$2^{-j'} \lesssim \text{dist}_\Gamma(\vartheta_\lambda, \theta'_{\lambda'}) \lesssim 2^{-j}, \quad (3.7)$$

entonces se tiene la estimación

$$|\langle L\psi_\lambda, \psi'_{\lambda'} \rangle| \lesssim \frac{2^{-j'(m'+1/2)} 2^{j/2}}{\text{dist}_\Gamma(\vartheta_\lambda, \theta'_{\lambda'})^{m'+r}}, \quad (3.8)$$

uniformemente con respecto a  $\nabla_J$ .

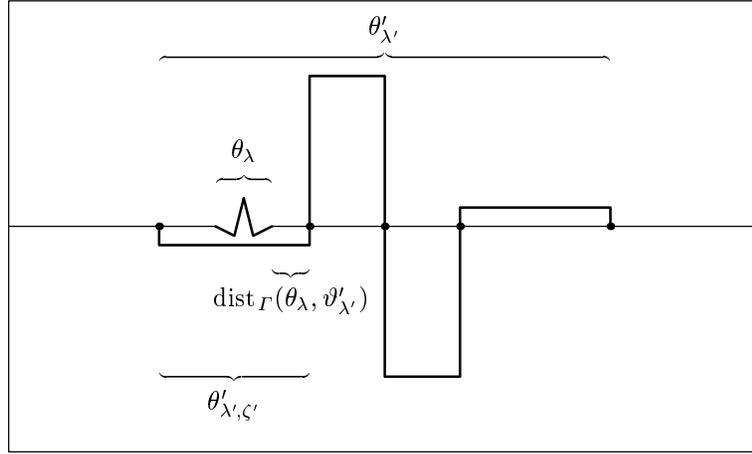


Figura 3.3: Ondelettes  $\psi_\lambda$  y  $\psi'_{\lambda'}$  en la segunda compresión.

*Demostración.* Esta se basa en una mostrada al autor por R. Schneider en [13].

1. Para  $j' < j$  la condición (3.5) implica que  $\theta_\lambda \cap \theta'_{\lambda'} = \theta_\lambda \subset \theta'_{\lambda', \zeta'}$  para algún  $\zeta' \in \{1, 2, \dots, d' + m'\}$  (ver la Figura 3.3). Puesto que  $\psi'_{\lambda'} \in C^\infty(\theta'_{\lambda', \zeta'})$ , la función  $\psi'_{\lambda'}|_{\theta'_{\lambda', \zeta'}}$  puede ser extendida a una función  $f_{\lambda', \zeta'} \in C_0^\infty(I)$  verificando  $f_{\lambda', \zeta'} = \psi'_{\lambda'}$  sobre  $\theta'_{\lambda', \zeta'}$ ,  $|\text{supp } f_{\lambda', \zeta'}| \sim 2^{-j'}$ , y la siguiente estimación

$$\|f_{\lambda', \zeta'}\|_{H^s(I)} \lesssim 2^{j's}. \quad (3.9)$$

Esto es una consecuencia del conocido teorema de extensión de Calderón (ver por ejemplo [28]). A continuación, descomponemos  $\psi'_{\lambda'} = f_{\lambda', \zeta'} + \tilde{f}_{\lambda', \zeta'}$ , donde  $\tilde{f}_{\lambda', \zeta'} := \psi'_{\lambda'} - f_{\lambda', \zeta'}$  tiene soporte en el complemento de  $\theta'_{\lambda', \zeta'}$  y  $|\text{supp } \tilde{f}_{\lambda', \zeta'}| \sim 2^{-j'}$ . Conforme a lo anterior, para probar la estimación (3.6) tenemos

$$|\langle L\psi_\lambda, \psi'_{\lambda'} \rangle| \leq |\langle L\psi_\lambda, f_{\lambda', \zeta'} \rangle| + |\langle L\psi_\lambda, \tilde{f}_{\lambda', \zeta'} \rangle|. \quad (3.10)$$

2. Para estimar el primer término en (3.10), observamos que existe un operador pseudodiferencial  $\mathfrak{L}$  de soporte compacto y orden  $r$  tal que

$$\langle L\psi_\lambda, f_{\lambda', \zeta'} \rangle = \langle \psi_\lambda, \mathfrak{L}f_{\lambda', \zeta'} \rangle.$$

Esto sigue del hecho que  $L$  es un operador pseudodiferencial definido paramétricamente sobre una frontera regular (ver [26]). Sea  $g_{\lambda', \zeta'} := \mathfrak{L}f_{\lambda', \zeta'}$ . Puesto que los

operadores pseudodiferenciales de soporte compacto y orden  $r$  actúan continuamente sobre espacios de Sobolev, deducimos, usando la estimación (3.9), que

$$g_{\lambda', \zeta'} \in C^\infty(I) \quad \text{y} \quad \|g_{\lambda', \zeta'}\|_{H^{s-r}(I)} \lesssim 2^{j's}.$$

De esta forma, usando los argumentos en la demostración del Lema 3.2, se tiene

$$\begin{aligned} |\langle L\psi_\lambda, f_{\lambda', \zeta'} \rangle| &= \left| \int_I \psi_\lambda(t) g_{\lambda', \zeta'}(t) dt \right| = \left| \int_{\theta_\lambda} \varphi_\lambda(t) \frac{d^m}{dt^m} g_{\lambda', \zeta'}(t) dt \right| \\ &\leq \max_{t \in \theta_\lambda} \left| \frac{d^m}{dt^m} g_{\lambda', \zeta'}(t) \right| \|\varphi_\lambda\|_{L^1(I)} \lesssim 2^{-j(m+1/2)} \|g_{\lambda', \zeta'}\|_{C^m(I)}. \end{aligned}$$

En virtud del teorema de inclusión de Sobolev, esta última expresión puede ser estimada por

$$\begin{aligned} |\langle L\psi_\lambda, f_{\lambda', \zeta'} \rangle| &\lesssim 2^{-j(m+1/2)} \|g_{\lambda', \zeta'}\|_{H^{m+1/2}(I)} \\ &\lesssim 2^{-j(m+1/2)} 2^{j'(m+r+1/2)} \lesssim \frac{2^{-j(m+1/2)} 2^{j'/2}}{\text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \vartheta'_{\lambda'})^{m+r}}, \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado la condición (3.5).

3. Para estimar el segundo término en (3.10), observar que el núcleo  $N_L(s, t)$  es regular sobre  $I \setminus \theta'_{\lambda', \zeta'} \times \theta_\lambda$ . Así, por el Lema 3.1 y nuevamente los argumentos en la demostración del Lema 3.2, se tiene

$$\begin{aligned} |(L\psi_\lambda)(s)| &= \left| \int_I N_L(s, t) \psi_\lambda(t) dt \right| = \left| \int_{\theta_\lambda} \frac{\partial^m}{\partial t^m} N_L(s, t) \varphi_\lambda(t) dt \right| \\ &\leq \max_{t \in \theta_\lambda} \left| \frac{\partial^m}{\partial t^m} N_L(s, t) \right| \|\varphi_\lambda\|_{L^1(I)} \lesssim \frac{2^{-j(m+1/2)}}{\text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, s)^{m+r+1}} \end{aligned}$$

para todo  $s \in I \setminus \theta'_{\lambda', \zeta'}$  tal que  $\text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, s) > 0$ . En consecuencia

$$\begin{aligned} |\langle L\psi_\lambda, \tilde{f}_{\lambda', \zeta'} \rangle| &\leq \int_{I \setminus \theta'_{\lambda', \zeta'}} |(L\psi_\lambda)(s)| |\tilde{f}_{\lambda', \zeta'}(s)| ds \\ &\lesssim \max_{s \in I \setminus \theta'_{\lambda', \zeta'}} |\tilde{f}_{\lambda', \zeta'}(s)| \int_{I \setminus \theta'_{\lambda', \zeta'}} \frac{2^{-j(m+1/2)}}{\text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, s)^{m+r+1}} ds \\ &\lesssim 2^{-j(m+1/2)} 2^{j'/2} \int_{|s| > \text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \vartheta'_{\lambda'})} |s|^{-(m+r+1)} ds \lesssim \frac{2^{-j(m+1/2)} 2^{j'/2}}{\text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \vartheta'_{\lambda'})^{m+r}}. \end{aligned}$$

Esto prueba la estimación (3.6).

La estimación (3.8) sigue análogamente.  $\square$

### 3.3.3 Estrategias de Compresión

Las estrategias de compresión propuestas consisten en la definición de *parámetros de compresión* que garantizan la consistencia, estabilidad y convergencia del correspondiente esquema de Galerkin comprimido. Para una *primera compresión* definimos un parámetro de compresión  $B_{j,j'}^L$ , mientras que para una *segunda compresión* definimos un parámetro  $C_{j,j'}^L$ . Estos parámetros son determinados en términos del orden del operador, y los ordenes de aproximación y de momentos nulos de cada una de las bases de ondelettes involucradas en la discretización del operador  $L$ . Advertimos que en el caso general, cuando  $L$  realiza el acoplamiento entre bases de ondelettes diferentes, estos parámetros de compresión quedan sujetos al acoplamiento dado entre el orden de aproximación de una base con respecto al orden de momentos nulos de la otra.

#### Primera Compresión

La estimación para el decaimiento de los coeficientes  $l_{\lambda',\lambda} = \langle L\psi_\lambda, \psi'_{\lambda'} \rangle$  obtenida en el segundo lema fundamental (Lema 3.2) nos permite formular una primera estrategia de compresión, la cual, en función de los niveles de resolución y colocando en cero todos aquellos coeficientes que la estimación *a priori* (3.3) garantiza están por debajo de un umbral dado, conduce a una matriz comprimida numéricamente rala. En efecto, como establecemos en la primera parte de la demostración del Teorema 3.12, la matriz comprimida resultante contiene sólo  $O(J2^J)$  coeficientes no nulos, esto es, en otras palabras, una *complejidad casi lineal*. Para alcanzar este objetivo, el requerimiento básico a satisfacer es que el orden de momentos nulos de una base de ondelettes debe exceder estrictamente el orden de aproximación de la otra, es decir,  $m > d'$  y  $m' > d$ .

La siguiente definición de la primera estrategia de compresión discrimina entre  $\text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \theta'_{\lambda'})$ , la distancia con respecto a  $\Gamma$  entre los soportes de las funciones bases, y el parámetro de compresión  $B_{j,j'}^L$  a elegir.

**Definición 3.4.** *Definimos la matriz comprimida*

$$\mathbf{L}_J^1 := [l_{\lambda',\lambda}^1]_{\lambda',\lambda \in \nabla_J},$$

asociada a la matriz de rigidez en ondelettes (3.1), por

$$l_{\lambda',\lambda}^1 := \begin{cases} 0 & \text{si } \text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \theta'_{\lambda'}) > B_{j,j'}^L, \\ l_{\lambda',\lambda} & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.11)$$

donde el parámetro de compresión  $B_{j,j'}^L$  es elegido fijando una constante  $b_L > 1$ , y números  $n$  y  $n'$  en los rangos  $d < n < m' + r$  y  $d' < n' < m + r$ , tal que

$$B_{j,j'}^L \geq b_L \max \left\{ 2^{-\min\{j,j'\}}, 2^{\frac{J(n+n'-r)-j(m+n)-j'(m'+n')}{m+m'+r}} \right\}. \quad (3.12)$$

Esta elección de  $B_{j,j'}^L$  permitirá estimar, via el Lema de Schur y el Lema 3.6 más adelante, la norma espectral de las matrices residuales definidas en el Teorema 3.9, como función de las cantidades que determinan este parámetro de compresión. Dicho teorema será fundamental en el posterior análisis de nuestro método de compresión.

En este sentido, elecciones apropiadas de los parámetros  $n$ ,  $n'$  y  $b_L$  son requeridas en los análisis de consistencia, estabilidad y complejidad de nuestras estrategias de compresión. A saber, las cotas inferiores  $d < n$  y  $d' < n'$  son necesarias en el análisis de *consistencia* de la subsección 3.3.4, mientras que las cotas superiores  $n < m' + r$  y  $n' < m + r$  son indispensables en el análisis de *complejidad* de la subsección 3.3.5. Finalmente, puesto que  $B_{J-1,J-1}^L > b_L 2^{-(J-1)}$ , señalamos que el parámetro  $b_L$  es una constante fija independiente de  $J$  que determina el ancho de banda en la submatriz  $\mathbf{L}_{J-1,J-1}^1 := [l_{\lambda',\lambda}^1]_{k',k \in \Delta_{J-1}}$ , y debe ser elegido lo suficientemente grande para que la *estabilidad* del esquema comprimido sea preservada, tal como lo establece el Lema 3.21 en la subsección 3.4.3.

### Estimaciones Matriciales para la Primera Compresión

A continuación investigamos la perturbación introducida por descartar coeficientes matriciales específicos. Primero, en el Lema 3.5, medimos dicha perturbación cuando el parámetro de compresión es sólo determinado por  $B_{j,j'}^L \geq 2^{-\min\{j,j'\}}$ , lo cual coincide con estrategias de compresión del tipo *Multipole* [16] y *Panel Clustering* [17], realizadas cuando los soportes de las funciones bases son disjuntos (*far-field*). No obstante, esto no es suficiente para llevar a cabo el análisis de consistencia. Para lograr esto debemos, en el Lema 3.6, considerar  $B_{j,j'}^L$  como en la Definición 3.4.

**Lema 3.5.** *Sea  $r_{\lambda',\lambda}^L := l_{\lambda',\lambda} - l_{\lambda',\lambda}^1$ . Si el parámetro de compresión  $B_{j,j'}^L$  satisface la condición  $B_{j,j'}^L \geq 2^{-\min\{j,j'\}}$ , entonces se verifica la estimación*

$$\sum_{k \in \Delta_j} |r_{\lambda',\lambda}^L| \lesssim 2^{-j(m+1/2)} 2^{-j'(m'+1/2)} 2^j (B_{j,j'}^L)^{-(m+m'+r)},$$

y análogamente para la suma por columnas.

*Demostración.* Primero observamos que sobre el conjunto de índices

$$\Lambda_j := \{ k \in \Delta_j \mid \text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \theta'_{\lambda'}) > B_{j,j'}^L \}$$

se tiene la siguiente igualdad

$$\sum_{k \in \Delta_j} |r_{\lambda', \lambda}^L| = \sum_{k \in \Lambda_j} |l_{\lambda', \lambda}|.$$

Esto nos permite utilizar el Lema 3.2 para establecer

$$\sum_{k \in \Delta_j} |r_{\lambda', \lambda}^L| \lesssim 2^{-j(m+1/2)} 2^{-j'(m'+1/2)} \sum_{k \in \Lambda_j} \text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \theta'_{\lambda'})^{-(m+m'+r+1)}.$$

Por otra parte, la definición de  $\Lambda_j$  y la elección  $B_{j,j'}^L \geq 2^{-\min\{j,j'\}}$  nos permiten estimar

$$\sum_{k \in \Lambda_j} \text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \theta'_{\lambda'})^{-(m+m'+r+1)} \lesssim 2^j \int_{|s| > B_{j,j'}^L} |s|^{-(m+m'+r+1)} ds.$$

En efecto, para el segmento positivo, la integral  $\int_{s > B_{j,j'}^L} s^{-(m+m'+r+1)} ds$  puede ser estimada por la suma de Riemann inferior  $\sum_{\{k \mid s_k > B_{j,j'}^L\}} s_k^{-(m+m'+r+1)} (s_k - s_{k-1})$ , con la función radial  $s_k = \text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \theta'_{\lambda'})$  la cual satisface  $s_k - s_{k-1} \sim 2^{-j}$ . Esto completa la demostración.  $\square$

Como hemos indicado previamente, la elección del parámetro de compresión  $B_{j,j'}^L$  como en la Definición 3.4 provee una de las estimaciones matriciales que por medio del Lema de Schur permitirán estimar la norma espectral de ciertas matrices residuales. Para lo que sigue, debemos recordar que los espacios de multiresolución han sido elegidos de manera que  $V_J \subset H^\beta(I)$  y  $V'_J \subset H^{\beta'}(I)$ , donde  $\beta + \beta' = r$ .

**Lema 3.6.** *Sean  $b_L > 1$ ,  $d < n < m' + r$  y  $d' < n' < m + r$ . Si el parámetro de compresión  $B_{j,j'}^L$  satisface (3.12), entonces se verifica la estimación*

$$\sum_{k \in \Delta_j} 2^{-j/2} \left( 2^{-j's'} |r_{\lambda', \lambda}^L| 2^{-js} \right) \lesssim 2^{-j'/2} b_L^{-(m+m'+r)} 2^{-J(s+s'-r)} 2^{(j-J)(n-s)} 2^{(j'-J)(n'-s')}$$

para todo  $0 \leq j, j' < J$ ,  $\beta \leq s \leq d$ ,  $\beta' \leq s' \leq d'$  y  $r < s + s'$ , y análogamente para la suma por columnas. Además, la siguiente estimación es válida

$$\sum_{\lambda \in \nabla_J} 2^{-j/2} \left( 2^{-j'\beta'} |r_{\lambda', \lambda}^L| 2^{-j\beta} \right) \lesssim 2^{-j'/2} b_L^{-(m+m'+r)},$$

y análogamente para la suma por columnas, donde  $\sum_{\lambda \in \nabla_J} = \sum_{j=-1}^{J-1} \sum_{k \in \Delta_j}$ .

*Demostración.* La primera estimación es inmediata del lema anterior y la definición de  $B_{j,j'}^L$  en (3.12). La segunda estimación sigue análogamente con  $s = \beta$ ,  $s' = \beta'$  y luego sumando sobre  $j$ . En efecto, puesto que  $\beta + \beta' = r$  y  $\beta' \leq d' < n'$ , se tiene

$$\sum_{\lambda \in \nabla_J} 2^{-j/2} \left( 2^{-j'\beta'} |r_{\lambda',\lambda}^L| 2^{-j\beta} \right) \lesssim 2^{-j'/2} b_L^{-(m+m'+r)} \sum_{j=0}^{J-1} 2^{(j-J)(n-\beta)}.$$

La demostración finaliza usando el hecho que  $\beta \leq d < n$ .  $\square$

### Segunda Compresión

La estrategia de segunda compresión ha sido propuesta en la tesis de habilitación de R. Schneider [25]. Aquí extendemos dicha estrategia de compresión al método de Galerkin con análisis de multiresolución diferentes. Características de esta extensión son la definición por casos de un parámetro de compresión  $C_{j,j'}^L$ , controlando la distancia entre el soporte de una ondelette con momentos nulos *efectivos* al soporte singular de una ondelette en escalas más gruesas (ver la Figura 3.3), y el localizar las escalas donde se encuentran aquellos coeficientes matriciales cuyo decaimiento es imposible determinar en la primera compresión, pero que si son factibles de despreciar en una segunda compresión. Recordamos que precisamente el tercer lema fundamental (Lema 3.3) nos provee la estimación para el decaimiento de esos coeficientes, esto es, aquellos coeficientes correspondientes a ondelettes con soportes superpuestos.

Luego, suponiendo nuevamente  $m > d'$  y  $m' > d$ , es decir, las mismas restricciones que para la primera compresión, damos la siguiente definición de la segunda estrategia de compresión.

**Definición 3.7.** *Definimos la nueva matriz comprimida*

$$\mathbf{L}_J^c := [l_{\lambda',\lambda}^c]_{\lambda',\lambda \in \nabla_J},$$

asociada a la matriz comprimida (3.11), por

$$l_{\lambda',\lambda}^c := \begin{cases} 0 & \text{si } \text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \vartheta_{\lambda'}) > C_{j,j'}^L, j' < \kappa(j), \\ 0 & \text{si } \text{dist}_\Gamma(\vartheta_\lambda, \theta_{\lambda'}) > C_{j,j'}^L, j < \kappa'(j'), \\ l_{\lambda',\lambda}^1 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.13)$$

donde el parámetro de compresión  $C_{j,j'}^L$  es elegido fijando constantes  $c_L, c'_L > 1$ , y

números  $n$  y  $n'$  en los rangos  $d < n < m' + r$  y  $d' < n' < m + r$ , tal que

$$C_{j,j'}^L \geq \begin{cases} c_L \max \left\{ 2^{-j}, 2^{\frac{J(n+n'-r)-j(m+n)-j'n'}{m+r}} \right\} & \text{si } j' < \kappa(j), \\ c'_L \max \left\{ 2^{-j'}, 2^{\frac{J(n+n'-r)-jn-j'(m'+n')}{m'+r}} \right\} & \text{si } j < \kappa'(j'), \end{cases} \quad (3.14)$$

donde las funciones  $\kappa(j)$  y  $\kappa'(j')$  son definidas como las combinaciones convexas

$$\kappa(j) := j \frac{1}{1-\epsilon} - J \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \quad \text{y} \quad \kappa'(j') := j' \frac{1}{1-\epsilon'} - J \frac{\epsilon'}{1-\epsilon'},$$

para las constantes  $\epsilon := \frac{n+n'-r}{m+n}$  y  $\epsilon' := \frac{n+n'-r}{m'+n'}$ , respectivamente.

Notar que esta elección de los parámetros  $n$  y  $n'$  garantiza que las constantes  $\epsilon$  y  $\epsilon'$  resulten ser menores que uno y, en consecuencia, que  $\kappa(j) < j$  y  $\kappa'(j') < j'$ . Además, la localización de las escalas en términos de las funciones  $\kappa(j)$  y  $\kappa'(j')$ , en donde la segunda compresión puede ser llevada a cabo, hacen que el parámetro compresión verifique  $C_{j,j'}^L \lesssim 2^{-\min\{j,j'\}}$  automáticamente.

Similar a lo indicado para la primera compresión, la elección de  $C_{j,j'}^L$  por (3.14) permitirá estimar, por medio del Lema de Schur y el Lema 3.8 más adelante, la norma espectral de las matrices residuales definidas en el Teorema 3.9 para la segunda compresión, como función de las cantidades que fijan este parámetro de compresión.

Así, elecciones apropiadas de los parámetros  $n$ ,  $n'$ ,  $c_L$  y  $c'_L$  son requeridas en los análisis de consistencia, estabilidad y complejidad, donde, en particular, al ser las constantes  $\epsilon$  y  $\epsilon'$  menores que uno, podremos mostrar que después de realizada la segunda compresión obtenemos un esquema con *complejidad lineal* (ver el Teorema 3.12). En fin, los parámetros  $c_L$  y  $c'_L$  son constantes fijas independientes de  $J$ , las cuales el Lema 3.21 establece que si son elegidas lo suficientemente grandes la estabilidad del esquema con segunda compresión es también preservada.

### Estimaciones Matriciales para la Segunda Compresión

Como para la primera compresión, procedemos a investigar la perturbación introducida por descartar coeficientes matriciales específicos, esta vez debido a la segunda compresión. En el siguiente lema medimos dicha perturbación cuando es usado el parámetro de segunda compresión dado por (3.14).

**Lema 3.8.** Sean  $c_L, c'_L > 1$ ,  $d < n < m' + r$  y  $d' < n' < m + r$ . Si definimos  $s_{\lambda', \lambda}^L := l_{\lambda', \lambda}^1 - l_{\lambda', \lambda}^c$  con el parámetro de compresión  $C_{j, j'}^L$ , satisfaciendo (3.14), entonces se verifica la estimación

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \Delta_j} 2^{-j/2} \left( 2^{-j's'} |s_{\lambda', \lambda}^L| 2^{-js} \right) \\ \lesssim 2^{-j/2} \max \left\{ c_L^{-(m+r)}, c_L^{-(m'+r)} \right\} 2^{-J(s+s'-r)} 2^{(j-J)(n-s)} 2^{(j'-J)(n'-s')} \end{aligned}$$

para todo  $0 \leq j, j' < J$ ,  $\beta \leq s \leq d$ ,  $\beta' \leq s' \leq d'$  y  $r < s + s'$ , y análogamente para la suma por columnas. Además, la siguiente estimación es válida

$$\sum_{\lambda \in \nabla_J} 2^{-j/2} \left( 2^{-j'\beta'} |s_{\lambda', \lambda}^L| 2^{-j\beta} \right) \lesssim 2^{-j/2} \max \left\{ c_L^{-(m+r)}, c_L^{-(m'+r)} \right\},$$

y análogamente para la suma por columnas, donde  $\sum_{\lambda \in \nabla_J} = \sum_{j=-1}^{J-1} \sum_{k \in \Delta_j}$ .

*Demostración.* Por la definición de la matriz comprimida  $\mathbf{L}_j^c$  en (3.13), en primer lugar observamos que

$$s_{\lambda', \lambda}^L = \begin{cases} l_{\lambda', \lambda}^1 & \text{si } \text{dist}_F(\theta_\lambda, \vartheta_{\lambda'}) > C_{j, j'}^L, j' < \kappa(j), \\ l_{\lambda', \lambda}^1 & \text{si } \text{dist}_F(\vartheta_\lambda, \theta_{\lambda'}) > C_{j, j'}^L, j < \kappa'(j'), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego, usando la estimación (3.6) del Lema 3.3 y la definición de  $C_{j, j'}^L$  en (3.14), obtenemos para  $j' < j$

$$|s_{\lambda', \lambda}^L| \lesssim c_L^{-(m+r)} 2^{-(j-j')/2} 2^{Jr} 2^{(j-J)n} 2^{(j'-J)n'},$$

y usando la estimación (3.8) del mismo lema, obtenemos para  $j < j'$

$$|s_{\lambda', \lambda}^L| \lesssim c_L^{-(m'+r)} 2^{-(j'-j)/2} 2^{Jr} 2^{(j-J)n} 2^{(j'-J)n'}.$$

A continuación, observando que el conjunto  $\{k \in \Delta_j \mid \theta_\lambda \cap \theta_{\lambda'} \neq \emptyset\}$  tiene cardinalidad  $O(2^{j-\min\{j, j'\}})$ , se tiene para  $j' < j$

$$\sum_{k \in \Delta_j} 2^{-j/2} \left( 2^{-j's'} |s_{\lambda', \lambda}^L| 2^{-js} \right) \lesssim 2^{-j/2} c_L^{-(m+r)} 2^{-J(s+s'-r)} 2^{(j-J)(n-s)} 2^{(j'-J)(n'-s')},$$

y para  $j < j'$

$$\sum_{k \in \Delta_j} 2^{-j/2} \left( 2^{-j's'} |s_{\lambda', \lambda}^L| 2^{-js} \right) \lesssim 2^{-j/2} c_L^{-(m'+r)} 2^{-J(s+s'-r)} 2^{(j-J)(n-s)} 2^{(j'-J)(n'-s')}.$$

De esto se deduce la primera estimación del lema. Para probar la segunda estimación, procedemos análogamente con  $s = \beta$ ,  $s' = \beta'$  y sumando sobre  $j$ . En efecto, puesto que  $\beta + \beta' = r$  y  $\beta' \leq d' < n'$ , se tiene

$$\sum_{\lambda \in \nabla_J} 2^{-j/2} \left( 2^{-j'\beta'} |s_{\lambda',\lambda}^L| 2^{-j\beta} \right) \lesssim 2^{-j/2} \max \left\{ c_L^{-(m+r)}, c_L'^{-(m'+r)} \right\} \sum_{j=0}^{J-1} 2^{(j-J)(n-\beta)}.$$

La demostración finaliza usando el hecho que  $\beta \leq d < n$ . □

### El Lema de Schur y la Norma Espectral de Matrices

La herramienta matemática básica para cuantificar desde un punto de vista discreto la perturbación introducida por las estrategias de compresión de matrices propuestas, es una versión del conocido Lema de Schur (ver por ejemplo [21]).

Por  $\|\mathbf{A}\|$  denotaremos la norma de operador de la matriz  $\mathbf{A}$  considerada como una transformación lineal entre espacios vectoriales discretos provistos con la norma de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Luego, con el fin de estimar esta norma, la siguiente forma discreta del Lema de Schur es requerida. Daremos la demostración debido a su carácter ilustrativo.

**Lema de Schur.** *Sea  $\mathbf{A} := [a_{i,j}]_{i,j \in \mathbb{N}}$  una matriz infinita. Si existe una sucesión  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de números reales positivos tal que*

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} |a_{i,j}| w_j &\lesssim w_i \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}, \\ \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_{i,j}| w_i &\lesssim w_j \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

entonces el operador  $\mathbf{A} : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$  es acotado y  $\|\mathbf{A}\| \lesssim 1$ .

*Demostración.* Considerando el vector  $y_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{i,j} x_j$ , la desigualdad de Cauchy-Schwarz da

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} |a_{i,j}| |x_j| \right)^2 &\leq \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} |a_{i,j}| w_j \right) \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} |a_{i,j}| w_j^{-1} |x_j|^2 \right) \\ &\lesssim w_i \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} |a_{i,j}| w_j^{-1} |x_j|^2 \right). \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{N}} |y_i|^2 &\lesssim \sum_{i \in \mathbb{N}} w_i \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} |a_{i,j}| w_j^{-1} |x_j|^2 \right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_{i,j}| w_i \right) w_j^{-1} |x_j|^2 \lesssim \sum_{j \in \mathbb{N}} |x_j|^2. \quad \square \end{aligned}$$

De esta forma, con la ayuda del Lema de Schur, y los Lemas 3.6 y 3.8, estamos en condiciones de establecer el siguiente resultado respecto a la norma espectral de ciertas matrices residuales, esto es, las matrices que contienen aquellos coeficientes que han sido descartados después de realizadas la primera y segunda compresión.

**Teorema 3.9.** *Sean  $\beta \leq s \leq d < n < m' + r$ ,  $\beta' \leq s' \leq d' < n' < m + r$  y  $r < s + s'$ . Para la primera compresión sean las submatrices de tamaño  $2^{j'} \times 2^j$*

$$\mathbf{R}_{j',j}^L := \left[ 2^{-j's'} |r_{\lambda',\lambda}^L| 2^{-js} \right]_{k' \in \Delta_{j'}, k \in \Delta_j},$$

y también la matriz cuadrada de orden  $2^J$

$$\mathbf{R}_J^L := \left[ 2^{-j'\beta'} |r_{\lambda',\lambda}^L| 2^{-j\beta} \right]_{\lambda',\lambda \in \nabla_J},$$

con  $r_{\lambda',\lambda}^L$  dado por el Lema 3.5 y el parámetro de compresión (3.12). Entonces las normas de las matrices  $\mathbf{R}_{j',j}^L : \ell^2(\Delta_j) \rightarrow \ell^2(\Delta_{j'})$  y  $\mathbf{R}_J^L : \ell^2(\nabla_J) \rightarrow \ell^2(\nabla_J)$  son uniformemente acotadas por

$$\|\mathbf{R}_{j',j}^L\| \lesssim b_L^{-(m+m'+r)} 2^{-J(s+s'-r)} 2^{(j-J)(n-s)} 2^{(j'-J)(n'-s')}, \quad (3.15)$$

$$\|\mathbf{R}_J^L\| \lesssim b_L^{-(m+m'+r)}. \quad (3.16)$$

Análogamente, para la segunda compresión sean las submatrices de tamaño  $2^{j'} \times 2^j$

$$\mathbf{S}_{j',j}^L := \left[ 2^{-j's'} |s_{\lambda',\lambda}^L| 2^{-js} \right]_{k' \in \Delta_{j'}, k \in \Delta_j},$$

y también la matriz cuadrada de orden  $2^J$

$$\mathbf{S}_J^L := \left[ 2^{-j'\beta'} |s_{\lambda',\lambda}^L| 2^{-j\beta} \right]_{\lambda',\lambda \in \nabla_J},$$

con  $s_{\lambda',\lambda}^L$  dado por el Lema 3.8 y el parámetro de compresión (3.14). Entonces las normas de las matrices  $\mathbf{S}_{j',j}^L : \ell^2(\Delta_j) \rightarrow \ell^2(\Delta_{j'})$  y  $\mathbf{S}_J^L : \ell^2(\nabla_J) \rightarrow \ell^2(\nabla_J)$  son uniformemente acotadas por

$$\|\mathbf{S}_{j',j}^L\| \lesssim \max \left\{ c_L^{-(m+r)}, c_L^{-(m'+r)} \right\} 2^{-J(s+s'-r)} 2^{(j-J)(n-s)} 2^{(j'-J)(n'-s')}, \quad (3.17)$$

$$\|\mathbf{S}_J^L\| \lesssim \max \left\{ c_L^{-(m+r)}, c_L^{-(m'+r)} \right\}. \quad (3.18)$$

*Demostración.* Esta es una aplicación directa del Lema de Schur y las estimaciones matriciales de los Lemas 3.6 y 3.8 con la sucesión  $\{w_k\}_{k \in \Delta_j} := \{2^{-j/2}\}$  para las matrices  $\mathbf{R}_{j',j}^L$  y  $\mathbf{S}_{j',j}^L$ , y la sucesión  $\{w_\lambda\}_{\lambda \in \nabla_j} := \{2^{-j/2}\}$  para las matrices  $\mathbf{R}_j^L$  y  $\mathbf{S}_j^L$ . Omitimos los detalles.  $\square$

### 3.3.4 Consistencia de las Estrategias de Compresión

Una vez obtenidas las estimaciones discretas para la norma espectral de las matrices residuales definidas en el Teorema 3.9, a continuación procedemos a estimar el error de consistencia del esquema comprimido en las correspondientes normas de espacios de Sobolev, o bien, en otras palabras, el orden en que el esquema comprimido aproxima al esquema no comprimido en la respectiva norma de operador. Para este fin usaremos la caracterización de espacios de Sobolev en términos de normas discretas para los coeficientes de ondelettes que brevemente hemos presentado en el capítulo 1 (para mayores detalles referimos a las monografías [5, 9] y al texto [21]).

El análisis de consistencia consta de dos etapas. En primer lugar, cuantificamos el error de consistencia sobre todos los niveles de discretización usando las propiedades de aproximación y las estimaciones inversas satisfechas por las bases de ondelettes. En segundo lugar, cuantificamos el error de consistencia en las normas de los espacios de energía utilizando la propiedad de estabilidad de las bases de ondelettes, lo que posteriormente conducirá a la estabilidad de nuestras estrategias de compresión. Estas tareas serán llevadas a cabo por medio de la definición de operadores de discretización y reconstrucción convenientes, los cuales permitirán relacionar las matrices llena y comprimida con sus operadores de dimensión finita asociados.

#### Operadores de Discretización y Reconstrucción

Para las descomposiciones multiescala dadas por  $V_J := V_0 \oplus W_0 \oplus \cdots \oplus W_{J-1}$  y  $V'_J := V'_0 \oplus W'_0 \oplus \cdots \oplus W'_{J-1}$ , sean  $F_j : W_j \rightarrow \ell^2(\Delta_j)$  y  $F'_j : W'_j \rightarrow \ell^2(\Delta_j)$  los operadores de *discretización* definidos por

$$F_j w_j := \{\langle w_j, \tilde{\psi}_\lambda \rangle\}_{k \in \Delta_j} \quad \text{y} \quad F'_j w_j := \{\langle w_j, \tilde{\psi}'_\lambda \rangle\}_{k \in \Delta_j},$$

donde las funciones  $\tilde{\psi}_\lambda$  y  $\tilde{\psi}'_\lambda$  son las ondelettes biortogonales a las ondelettes  $\psi_\lambda$  y  $\psi'_\lambda$ , respectivamente. Los correspondientes operadores adjuntos o de *reconstrucción*, esto es,  $F_j^* : \ell^2(\Delta_j) \rightarrow \tilde{W}_j$  y  $(F'_j)^* : \ell^2(\Delta_j) \rightarrow \tilde{W}'_j$ , son definidos por

$$F_j^* \mathbf{d}_j := \sum_{k \in \Delta_j} d_\lambda \tilde{\psi}_\lambda \quad \text{y} \quad (F'_j)^* \mathbf{d}_j := \sum_{k \in \Delta_j} d_\lambda \tilde{\psi}'_\lambda.$$

A continuación, definimos los operadores de discretización y reconstrucción en la escala más fina  $F_J : V_J \rightarrow \ell^2(\nabla_J)$  y  $F_J^* : \ell^2(\nabla_J) \rightarrow \tilde{V}_J$  como

$$F_J v_J := \sum_{j=-1}^{J-1} F_j w_j \quad \text{y} \quad F_J^* \mathbf{d}_J := \sum_{j=-1}^{J-1} F_j^* \mathbf{d}_j.$$

Análogamente, se definen los operadores  $F'_J : V'_J \rightarrow \ell^2(\nabla_J)$  y  $(F'_J)^* : \ell^2(\nabla_J) \rightarrow \tilde{V}'_J$ . Estos operadores permiten relacionar, independiente del método de proyección, el operador  $L_J$  con su matriz de rigidez en ondelettes  $\mathbf{L}_J$ . En efecto, es inmediato comprobar que

$$L_J := (P'_J)^* L P_J = (F'_J)^* \mathbf{L}_J F_J,$$

tal como puede apreciarse en el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccccc} L_J : V_J & \xrightarrow{F_J} & \ell^2(\nabla_J) & \xrightarrow{\mathbf{L}_J} & \ell^2(\nabla_J) & \xrightarrow{(F'_J)^*} & \tilde{V}'_J \\ & & \cap & & & & \\ & & H^\beta(I) & \xrightarrow{P_J} & V_J \subset H^\beta(I) & \xrightarrow{L} & H^{-\beta'}(I) & \xrightarrow{(P'_J)^*} & \tilde{V}'_J. \end{array}$$

De esta forma, podemos definir los operadores de dimensión finita asociados a las matrices comprimidas  $\mathbf{L}_J^1$  y  $\mathbf{L}_J^c$  como

$$L_J^1 := (F'_J)^* \mathbf{L}_J^1 F_J \quad \text{y} \quad L_J^c := (F'_J)^* \mathbf{L}_J^c F_J.$$

Es importante notar que estos operadores permiten reescribir las equivalencias de normas establecidas en el Teorema 1.1 como

$$\|v_J\|_{L^2(I)} \sim \|F_J v_J\|_{\ell^2(\nabla_J)} \quad \text{y} \quad \|F_J^* \mathbf{d}_J\|_{L^2(I)} \sim \|\mathbf{d}_J\|_{\ell^2(\nabla_J)}.$$

### Consistencia sobre todos los Niveles

Primeramente recordamos que los parámetros  $\tilde{\eta}$  y  $\tilde{\eta}'$  miden la regularidad Sobolev de los espacios de multiresolución duales en el sentido de la sección 1.3. El siguiente teorema establece que ellos fijan la cota inferior en la cual podemos estimar la norma del operador residual con respecto a normas de espacios de Sobolev. Además, el teorema da cuenta de la importancia que tienen los parámetros de compresión en la elección del siguiente parámetro

$$a_L := \min \left\{ b_L^{m+m'+r}, c_L^{m+r}, c'_L{}^{m'+r} \right\}. \quad (3.19)$$

En efecto, notar que  $a_L$  resulta ser mayor que uno como consecuencia de una elección apropiada de bases de ondelettes con un número suficiente de momentos nulos.

**Teorema 3.10.** *Sea  $L_J^c$  el operador de dimensión finita asociado a la matriz comprimida  $\mathbf{L}_J^c$  definida sucesivamente por (3.11) y (3.13) con parámetros de compresión dados por (3.12) y (3.14). Sea además  $a_L$  el parámetro (3.19). Entonces, para  $-\tilde{\eta} < \beta \leq s \leq d$ ,  $-\tilde{\eta}' < \beta' \leq s' \leq d'$  y  $r < s + s'$ , se verifica la estimación*

$$|\langle (L_J - L_J^c)P_J u, P_J' v \rangle| \lesssim a_L^{-1} 2^{-J(s+s'-r)} \|u\|_{H^s(I)} \|v\|_{H^{s'}(I)} \quad (3.20)$$

para todo  $u \in H^s(I)$  y  $v \in H^{s'}(I)$ , uniformemente en  $J$ .

*Demostración.* Primero observamos la siguiente descomposición

$$L_J - L_J^c = (L_J - L_J^1) + (L_J^1 - L_J^c),$$

la cual muestra explícitamente los dos procesos de compresión involucrados. Utilizando los operadores de reconstrucción y discretización, y las matrices residuales definidas en el Teorema 3.9, podemos escribir

$$\begin{aligned} L_J - L_J^c &= (F_J')^* ((\mathbf{L}_J - \mathbf{L}_J^1) + (\mathbf{L}_J^1 - \mathbf{L}_J^c)) F_J \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{j'=0}^{J-1} 2^{j's'} (F_{j'}')^* (\mathbf{R}_{j',j}^L + \mathbf{S}_{j',j}^L) F_j 2^{js}. \end{aligned}$$

Luego, considerando los proyectores  $Q_j$  y  $Q_j'$  sobre los espacios de ondelettes  $W_j$  y  $W_j'$ , respectivamente, estimamos

$$\begin{aligned} |\langle (L_J - L_J^c)P_J u, P_J' v \rangle| &\leq \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{j'=0}^{J-1} |\langle (F_{j'}')^* (\mathbf{R}_{j',j}^L + \mathbf{S}_{j',j}^L) F_j 2^{js} Q_j u, 2^{j's'} Q_{j'}' v \rangle| \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{j'=0}^{J-1} \left( \|\mathbf{R}_{j',j}^L\| + \|\mathbf{S}_{j',j}^L\| \right) 2^{js} \|Q_j u\|_{L^2(I)} 2^{j's'} \|Q_{j'}' v\|_{L^2(I)}. \end{aligned}$$

Enseguida, deducimos de la propiedad de aproximación (1.22), para  $s, s' \geq 0$ , y de la estimación inversa (1.23), para  $s, s' \leq 0$ , que

$$\|Q_j u\|_{L^2(I)} \lesssim 2^{-js} \|u\|_{H^s(I)} \quad \text{y} \quad \|Q_{j'}' v\|_{L^2(I)} \lesssim 2^{-j's'} \|v\|_{H^{s'}(I)}.$$

Esto conduce a la estimación

$$|\langle (L_J - L_J^c)P_J u, P_J' v \rangle| \lesssim \left( \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{j'=0}^{J-1} \left( \|\mathbf{R}_{j',j}^L\| + \|\mathbf{S}_{j',j}^L\| \right) \right) \|u\|_{H^s(I)} \|v\|_{H^{s'}(I)}.$$

Por otra parte, las estimaciones discretas (3.15) y (3.17) del Teorema 3.9 dan

$$\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{j'=0}^{J-1} \left( \|\mathbf{R}_{j',j}^L\| + \|\mathbf{S}_{j',j}^L\| \right) \lesssim a_L^{-1} 2^{-J(s+s'-r)} \left( \sum_{j=0}^{J-1} 2^{(j-J)(n-s)} \right) \left( \sum_{j'=0}^{J-1} 2^{(j'-J)(n'-s')} \right).$$

Finalmente, notando que  $s \leq d < n$  y  $s' \leq d' < n'$ , conseguimos (3.20).  $\square$

### Consistencia en las Normas de los Espacios de Energía

El siguiente teorema es un resultado de consistencia en las normas de los espacios de energía  $H^\beta(I)$  y  $H^{\beta'}(I)$ . Nuevamente recordamos que una elección apropiada de parámetros de compresión será esencial cuando probemos, en el Lema 3.21, la estabilidad de nuestras estrategias de compresión. Esto se entiende al observar que el parámetro  $a_L$  aparece explícitamente en la estimación (3.21) (ver también el Teorema 3.18).

**Teorema 3.11.** *Sea  $L_J^c$  el operador de dimensión finita asociado a la matriz comprimida  $\mathbf{L}_J^c$  definida sucesivamente por (3.11) y (3.13) con parámetros de compresión dados por (3.12) y (3.14). Sea además  $a_L$  el parámetro (3.19). Entonces, para  $-\tilde{\eta} < \beta < d$  y  $-\tilde{\eta}' < \beta' < d'$ , se verifica la estimación*

$$|\langle (L_J - L_J^c)u_J, v_J \rangle| \lesssim a_L^{-1} \|u_J\|_{H^\beta(I)} \|v_J\|_{H^{\beta'}(I)} \quad (3.21)$$

para todo  $u_J \in V_J$  y  $v_J \in V_J'$ , uniformemente en  $J$ .

*Demostración.* Nuevamente utilizamos la descomposición

$$\begin{aligned} L_J - L_J^c &= (L_J - L_J^1) + (L_J^1 - L_J^c) \\ &= (F_J')^* ((\mathbf{L}_J - \mathbf{L}_J^1) + (\mathbf{L}_J^1 - \mathbf{L}_J^c)) F_J. \end{aligned}$$

A continuación, con los operadores de traslación  $D_J^\beta : V_J \rightarrow V_J$  y  $D_J^{\beta'} : V_J' \rightarrow V_J'$  definidos como en la ecuación (1.33) del capítulo 1, esto es,  $D_J^\beta := \sum_{j=-1}^{J-1} 2^{j\beta} Q_j$  y  $D_J^{\beta'} := \sum_{j=-1}^{J-1} 2^{j\beta'} Q_j'$ , estabilizamos el esquema discreto en la escala más fina por

$$L_J - L_J^c = (D_J^{\beta'})^* (F_J')^* (\mathbf{R}_J^L + \mathbf{S}_J^L) F_J D_J^\beta.$$

Luego, usando las estimaciones (3.16) y (3.18) del Teorema 3.9, obtenemos

$$\begin{aligned} |\langle (L_J - L_J^c)u_J, v_J \rangle| &= |\langle (F_J')^* (\mathbf{R}_J^L + \mathbf{S}_J^L) F_J D_J^\beta u_J, D_J^{\beta'} v_J \rangle| \\ &\lesssim \left( \|\mathbf{R}_J^L\| + \|\mathbf{S}_J^L\| \right) \|D_J^\beta u_J\|_{L^2(I)} \|D_J^{\beta'} v_J\|_{L^2(I)} \\ &\lesssim a_L^{-1} \|D_J^\beta u_J\|_{L^2(I)} \|D_J^{\beta'} v_J\|_{L^2(I)}. \end{aligned}$$

Para obtener (3.21) basta observar que los exponentes de regularidad Sobolev  $\beta$  y  $\beta'$  satisfacen  $-\tilde{\eta} < \beta < d$  y  $-\tilde{\eta}' < \beta' < d'$ . Por lo tanto, de la desigualdad de normas (1.28) del capítulo 1, se sigue que

$$\|D_J^\beta u_J\|_{L^2(I)} \lesssim \|u_J\|_{H^\beta(I)} \quad \text{y} \quad \|D_J^{\beta'} v_J\|_{L^2(I)} \lesssim \|v_J\|_{H^{\beta'}(I)}.$$

Esto concluye la demostración.  $\square$

### 3.3.5 Complejidad de las Estrategias de Compresión

En esta subsección mostraremos que la matriz comprimida  $\mathbf{L}_j^c$ , definida sucesivamente por (3.11) y (3.13), contiene sólo  $O(2^J)$  coeficientes no nulos.

Para permitir cierta flexibilidad en la elección de los parámetros de compresión haremos uso de las siguientes observaciones. Notar que para el parámetro de la primera compresión podemos escribir

$$\frac{J(n + n' - r) - j(m + n) - j'(m' + n')}{m + m' + r} = -J + (J - j)\xi + (J - j')\xi', \quad (3.22)$$

con las constantes  $0 < \xi, \xi' < 1$  definidas por

$$\xi := \frac{m + n}{m + m' + r} \quad \text{y} \quad \xi' := \frac{m' + n'}{m + m' + r}.$$

De la misma forma, para el parámetro de la segunda compresión podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{J(n + n' - r) - j(m + n) - j'n'}{m + r} &= -\kappa(j)\varepsilon - j'(1 - \varepsilon), \\ \frac{J(n + n' - r) - j'(m' + n') - jn}{m' + r} &= -\kappa'(j')\varepsilon' - j(1 - \varepsilon'), \end{aligned} \quad (3.23)$$

con las constantes  $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$  definidas por

$$\varepsilon := \frac{m + r - n'}{m + r} \quad \text{y} \quad \varepsilon' := \frac{m' + r - n}{m' + r},$$

y donde las funciones  $\kappa(j)$  y  $\kappa'(j')$  son como en la Definición 3.7 definidas por

$$\kappa(j) := j \frac{1}{1 - \varepsilon} - J \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \quad \text{y} \quad \kappa'(j') := j' \frac{1}{1 - \varepsilon'} - J \frac{\varepsilon'}{1 - \varepsilon'},$$

para las constantes  $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$  dadas por

$$\varepsilon := \frac{n + n' - r}{m + n} \quad \text{y} \quad \varepsilon' := \frac{n + n' - r}{m' + n'}.$$

Así, en vista de las definiciones de los parámetros de compresión en (3.12) y (3.14), en lo que sigue es suficiente considerar las expresiones más simples en (3.22) y (3.23). El próximo teorema muestra la importancia de elegir adecuadamente  $m, m', n$  y  $n'$  de modo que, aun cuando el orden del operador sea negativo, todas las constantes definidas previamente puedan ser ajustadas para ser menores que uno.

**Teorema 3.12.** Sean  $n < m' + r$  y  $n' < m + r$  tal que todas las constantes definidas previamente sean menores que uno. Entonces la matriz comprimida  $\mathbf{L}_j^c$  definida sucesivamente por (3.11) y (3.13), con parámetros de compresión dados por

$$B_{j,j'}^L \geq b_L \max \left\{ 2^{-\min\{j,j'\}}, 2^{-J+(J-j)\xi+(J-j')\xi'} \right\},$$

$$C_{j,j'}^L \geq \begin{cases} c_L \max \left\{ 2^{-j}, 2^{-\kappa(j)\varepsilon-j'(1-\varepsilon)} \right\} & \text{si } j' < \kappa(j), \\ c'_L \max \left\{ 2^{-j'}, 2^{-\kappa'(j')\varepsilon'-j(1-\varepsilon')} \right\} & \text{si } j < \kappa'(j'), \end{cases}$$

tiene  $O(2^J)$  coeficientes no nulos, es decir, una complejidad proporcional al número de incógnitas.

*Demostración.* Procedemos por etapas.

1. *Primera Compresión.* Sea  $\mathbf{L}_{j',j}^1 := [l_{\lambda',\lambda}^1]_{k' \in \Delta_{j'}, k \in \Delta_j}$  la submatriz en las escalas  $j'$  y  $j$  de la matriz  $\mathbf{L}_j^1$  de la Definición 3.4 (ver la Figura 3.4). Por  $\#\mathbf{L}_{j',j}^1$  denotamos su número total de coeficientes no nulos.

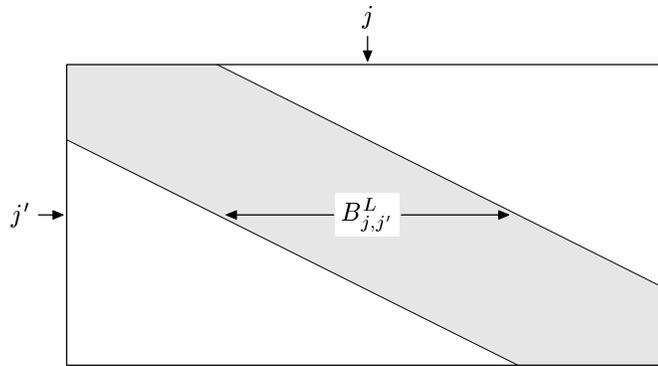


Figura 3.4: Submatriz  $\mathbf{L}_{j',j}^1$  y ancho de banda de compresión  $B_{j,j'}^L$ .

Primero contamos los coeficientes que satisfacen la condición

$$\text{dist}_F(\theta_\lambda, \theta_{\lambda'}) \leq B_{j,j'}^L \sim 2^{-J+(J-j)\xi+(J-j')\xi'}.$$

En la  $k'$ -ésima fila de la submatriz  $\mathbf{L}_{j',j}^1$  hay a lo más  $O(2^j B_{j,j'}^L)$  coeficientes no nulos. Puesto que hay  $2^{j'}$  filas, tenemos la estimación

$$\#\mathbf{L}_{j',j}^1 = O(2^{j+j'} B_{j,j'}^L), \quad (3.24)$$

esto es,  $\#\mathbf{L}_{j',j}^1 \lesssim 2^{J+(J-j)(\xi-1)+(J-j')(\xi'-1)}$ . Luego, sumando sobre  $j$  y  $j'$ , obtenemos

$$\#\mathbf{L}_J^1 = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{j'=0}^{J-1} \#\mathbf{L}_{j',j}^1 \lesssim 2^J \left( \sum_{j=0}^{J-1} 2^{(J-j)(\xi-1)} \right) \left( \sum_{j'=0}^{J-1} 2^{(J-j')(\xi'-1)} \right) \lesssim 2^J,$$

ya que  $0 < \xi, \xi' < 1$ . Contando ahora los coeficientes para los cuales

$$\text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \theta'_{\lambda'}) \leq B_{j,j'}^L \sim 2^{-\min\{j,j'\}}, \quad (3.25)$$

deducimos razonando como en (3.24) que  $\#\mathbf{L}_{j',j}^1 \lesssim 2^{\max\{j,j'\}}$ . En consecuencia

$$\#\mathbf{L}_J^1 \lesssim \left( \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{j'=0}^j 2^j \right) + \left( \sum_{j'=1}^{J-1} \sum_{j=0}^{j'-1} 2^{j'} \right) \lesssim J2^J.$$

2. *Segunda Compresión.* A continuación, contamos nuevamente los coeficientes que satisfacen la condición (3.25) pero tomando en cuenta la segunda compresión. Sea  $\mathbf{L}_{j',j}^c := [l_{\lambda',\lambda}^c]_{k' \in \Delta_{j'}, k \in \Delta_j}$  la submatriz en las escalas  $j'$  y  $j$  de la matriz  $\mathbf{L}_J^c$  en la Definición 3.7. Para  $j' < \kappa(j)$  definimos el siguiente parámetro

$$D_{j,j'}^L := \max_{k' \in \Delta_{j'}} \max_{k \in \Delta_j} \{ \text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \vartheta'_{\lambda'}) \mid l_{\lambda',\lambda}^c \neq 0 \}.$$

Contando los coeficientes para los cuales

$$\text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \vartheta'_{\lambda'}) \leq D_{j,j'}^L \sim 2^{-\kappa(j)\varepsilon - j'(1-\varepsilon)},$$

deducimos como en (3.24) que  $\#\mathbf{L}_{j',j}^c = O(2^{j+j'} D_{j,j'}^L)$ . Luego, sumando sobre  $j$  y  $j'$ , y observando que  $j > J\varepsilon$  ya que  $\kappa(j) > 0$ , obtenemos (ver la Figura 3.5)

$$\#\mathbf{L}_J^c = \sum_{j=\lceil J\varepsilon \rceil}^{J-1} \sum_{j'=0}^{\lfloor \kappa(j) \rfloor} \#\mathbf{L}_{j',j}^c \lesssim \sum_{j=\lceil J\varepsilon \rceil}^{J-1} 2^{j-\kappa(j)\varepsilon} \sum_{j'=0}^{\lfloor \kappa(j) \rfloor} 2^{j'\varepsilon} \lesssim \sum_{j=\lceil J\varepsilon \rceil}^{J-1} 2^{j-\kappa(j)\varepsilon} 2^{\kappa(j)\varepsilon} \lesssim 2^J,$$

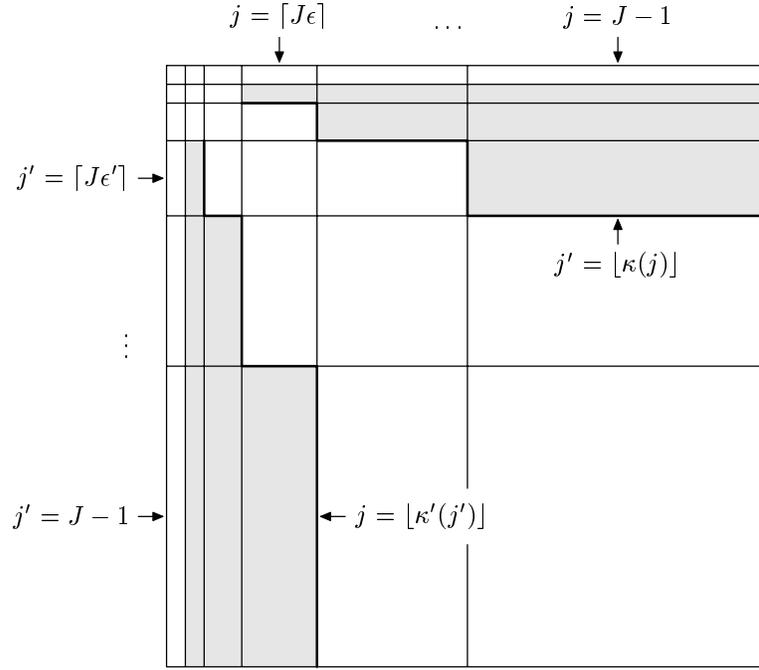
puesto que es una serie geométrica de razón dos. Contando ahora los coeficientes para los cuales

$$\text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \vartheta'_{\lambda'}) \leq D_{j,j'}^L \sim 2^{-j},$$

tenemos  $\#\mathbf{L}_{j',j}^c \lesssim 2^{j'}$ , y por lo tanto

$$\#\mathbf{L}_J^c = \sum_{j=\lceil J\varepsilon \rceil}^{J-1} \sum_{j'=0}^{\lfloor \kappa(j) \rfloor} \#\mathbf{L}_{j',j}^c \lesssim \sum_{j=\lceil J\varepsilon \rceil}^{J-1} \sum_{j'=0}^{\lfloor \kappa(j) \rfloor} 2^{j'} \lesssim \sum_{j=\lceil J\varepsilon \rceil}^{J-1} 2^{\kappa(j)} \lesssim 2^{\kappa(J)} = 2^J.$$

El caso  $j < \kappa(j')$  sigue usando los mismos argumentos.

Figura 3.5: Submatrices de  $\mathbf{L}_J^\epsilon$  con segunda compresión.

3. *Términos Residuales.* Resta contar los coeficientes que satisfacen la condición (3.25) pero que no han sido afectados por la segunda compresión. Este número de coeficientes es estimado por

$$\begin{aligned}
\#\mathbf{L}_J^1 &\lesssim \left( \sum_{j=0}^{\lfloor J\epsilon \rfloor} \sum_{j'=0}^j 2^j + \sum_{j=\lceil J\epsilon \rceil}^{J-1} \sum_{j'=\lceil \kappa(j) \rceil}^j 2^j \right) + \left( \sum_{j'=1}^{\lfloor J\epsilon' \rfloor} \sum_{j=0}^{j'-1} 2^{j'} + \sum_{j'=\lceil J\epsilon' \rceil}^{J-1} \sum_{j=\lceil \kappa'(j') \rceil}^{j'-1} 2^{j'} \right) \\
&\lesssim \left( J\epsilon 2^{J\epsilon} + \sum_{j=\lceil J\epsilon \rceil}^{J-1} (J-j)2^j \right) + \left( J\epsilon' 2^{J\epsilon'} + \sum_{j'=\lceil J\epsilon' \rceil}^{J-1} (J-j')2^{j'} \right) \\
&\lesssim \left( 2^J + 2^J \sum_{j=\lceil J\epsilon \rceil}^{J-1} (J-j)2^{-(J-j)} \right) + \left( 2^J + 2^J \sum_{j'=\lceil J\epsilon' \rceil}^{J-1} (J-j')2^{-(J-j')} \right) \\
&\lesssim 2^J + 2^J \sum_{j=0}^{\infty} j 2^{-j} \lesssim 2^J,
\end{aligned}$$

donde las estimaciones  $J\epsilon 2^{J\epsilon}, J\epsilon' 2^{J\epsilon'} \lesssim 2^J$  son válidas para  $\epsilon, \epsilon' < 1$  suficientemente pequeños.

Esto completa la demostración.  $\square$

### 3.4 Compresión de Matrices para el Acoplamiento FEM-BEM

Hasta ahora nuestro análisis ha estado restringido a un operador genérico  $L$  representando a los operadores  $V$ ,  $K$  y  $W$  definidos en (2.14). Luego, con el fin de proponer la estrategia de compresión de matrices para el acoplamiento FEM-BEM, en lo que sigue debemos considerar que los resultados establecidos en la sección anterior son válidos de acuerdo a los parámetros dados en la Tabla 3.1 a continuación.

$L$	$r$	$\beta$	$\beta'$
$V$	-1	-1/2	-1/2
$K$	0	1/2	-1/2
$W$	1	1/2	1/2

Tabla 3.1: *Parámetros de los operadores  $V$ ,  $K$  y  $W$ .*

Después de esta observación, estamos en situación de proponer la estrategia de compresión de matrices para el acoplamiento FEM-BEM, la cual será llevada a cabo por medio de la compresión de la forma bilineal  $B$  definida por (2.13).

#### 3.4.1 Compresión de la Forma Bilineal $B$

De acuerdo a la discretización introducida en la sección 2.4, dada una función  $v \in V_h$ , la función de una variable  $\omega = v \circ \gamma$  pertenece al espacio  $V_J = S_h \subset H^{1/2}(I)$  de las funciones 1-periódicas, continuas y lineales por tramos definidas sobre la partición uniforme  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{2^J} = 1$ , con  $t_{k+1} - t_k = h = 2^{-J}$ ,  $k \in \Delta_J = \mathbb{Z}/2^J\mathbb{Z}$ . Si denotamos por

$$\Phi_J := \{ \phi_{J,k} \mid k \in \Delta_J \}$$

la base nodal de  $V_J$ , es decir, las funciones en  $V_J$  que satisfacen  $\phi_{J,k}(t_{k'}) = \delta_{k,k'}$ , deducimos que el conjunto

$$\Phi'_J := \{ \phi'_{J,k} \mid k \in \Delta_J \setminus \{0\} \}$$

forma una base de  $V'_J = U_h \subset H_0^{-1/2}(I)$ , el espacio de las funciones 1-periódicas, constantes por tramos y con media cero, donde  $'$  denota derivación. Notar que

estos conjuntos constituyen bases para los espacios discretos en una única escala de discretización. A continuación, para la compresión de la forma bilineal  $B$ , procedemos a elegir las correspondientes bases multiescala.

Tomando en cuenta los parámetros de la Tabla 3.1, y las condiciones sobre los parámetros de compresión establecidas en los Lemas 3.6 y 3.8, para la discretización y compresión del operador  $K$  son necesarias dos bases de ondelettes, una para  $V_J$  y otra para  $V'_J$ , tal que los ordenes de sus momentos nulos  $m$  y  $m'$  excedan los ordenes de aproximación de los espacios  $V'_J$  y  $V_J$ , respectivamente, los que en nuestro caso son  $d' = 1$  y  $d = 2$ . Esto demanda  $m > 1$  y  $m' > 2$ . Por otro lado, para la discretización y compresión del operador  $V$  se requiere una base de ondelettes para  $V'_J$  tal que el orden de sus momentos nulos  $m'$  satisfaga la condición  $d' < m' - 1$ , es decir,  $m' > 2$ . Análogamente, para la discretización y compresión del operador  $W$  se requiere una base de ondelettes para  $V_J$  cuyo orden de momentos nulos  $m$  satisfaga la condición  $d < m + 1$ , es decir,  $m > 1$ .

Puesto que la medida del soporte de las ondelettes se incrementa proporcionalmente con el orden de momentos nulos (ver la ecuación (A.4) del apéndice), reduciendo en cierta medida la compresión, es importante fijar un compromiso entre el tamaño de los soportes y el decaimiento esperado en los coeficientes matriciales, con el fin de obtener en la práctica la mayor compresión. De esta forma, denotando por  $\Psi_J^{d,m}$  la base de ondelettes con orden de aproximación  $d$  y orden de momentos nulos  $m = \tilde{d}$ , para la discretización y compresión de los operadores integrales definidos en (2.14) podemos elegir, de acuerdo a las restricciones del párrafo anterior, cualquiera de las siguientes bases

$$\begin{aligned}
 \Psi_J^{1,m'} &\subset V'_J && \text{para el operador } V, \text{ con } m' \geq 3, \\
 \Psi_J^{2,m} &\subset V_J \text{ y } \Psi_J^{1,m'} \subset V'_J && \text{para el operador } K, \text{ con } m \geq 2 \text{ y } m' \geq 3, \text{ y} \\
 \Psi_J^{2,m} &\subset V_J && \text{para el operador } W, \text{ con } m \geq 2.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

**Observación 3.13.** Esta elección de las bases ondelettes nos permite concluir, al igual que un esquema con una única escala de discretización, que tan sólo dos bases son necesarias y suficientes para la discretización multiescala de todos los términos de frontera en el acoplamiento FEM-BEM. Así, por ejemplo, como en una única escala de discretización estamos usando la base nodal para  $V_J$  y funciones constantes por tramos para  $V'_J$ , en el correspondiente esquema multiescala basta utilizar las bases de ondelettes  $\Psi_J^{1,3}$  y  $\Psi_J^{2,2}$  para la discretización y compresión de los operadores en (2.14), y satisfacer de esta forma todos requerimientos de la sección anterior.

Una vez elegidas las bases multiescala para la discretización y compresión de los operadores  $V$ ,  $K$  y  $W$ , la compresión de la forma bilineal  $B$  es como sigue. Primero, no es difícil comprobar que la matriz de rigidez en ondelettes de la forma bilineal  $B$ , con respecto a las bases en (3.26), es dada por

$$\mathbf{B}_J := \begin{bmatrix} \mathbf{W}_J & \mathbf{K}_J^\top \\ -\mathbf{K}_J & \mathbf{V}_J \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

donde  $\mathbf{V}_J$ ,  $\mathbf{K}_J$  y  $\mathbf{W}_J$  son, respectivamente, las matrices de rigidez en ondelettes de los operadores  $V$ ,  $K$  y  $W$ , definidas apropiadamente por (3.1). Más precisamente, para las funciones  $\psi_\lambda \in \Psi_J^{2,m}$  y  $\psi'_{\lambda'} \in \Psi_J^{1,m'}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_J &:= [\langle V\psi'_\lambda, \psi'_{\lambda'} \rangle]_{\lambda', \lambda \in \nabla_J}, \\ \mathbf{K}_J &:= [\langle K\psi_\lambda, \psi'_{\lambda'} \rangle]_{\lambda', \lambda \in \nabla_J}, \\ \mathbf{W}_J &:= [\langle \psi_{\lambda'}, W\psi_\lambda \rangle]_{\lambda', \lambda \in \nabla_J}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Luego, definimos la matriz comprimida  $\mathbf{B}_J^c$ , asociada a la matriz  $\mathbf{B}_J$  en (3.27), por

$$\mathbf{B}_J^c := \begin{bmatrix} \mathbf{W}_J^c & \mathbf{K}_J^{c\top} \\ -\mathbf{K}_J^c & \mathbf{V}_J^c \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

donde las matrices comprimidas  $\mathbf{V}_J^c$ ,  $\mathbf{K}_J^c$  y  $\mathbf{W}_J^c$  son definidas de la siguiente forma y con los siguientes parámetros de compresión.

**Definición 3.14.** *Para la compresión de la forma bilineal  $B$  definimos*

1. *La matriz comprimida  $\mathbf{V}_J^c$ , asociada a la matriz  $\mathbf{V}_J := [v_{\lambda', \lambda}]_{\lambda', \lambda \in \nabla_J}$  en (3.28), por*

$$v_{\lambda', \lambda}^c := \begin{cases} 0 & \text{si } \text{dist}_\Gamma(\theta'_\lambda, \theta'_{\lambda'}) > B_{j, j'}^V, \\ 0 & \text{si } \text{dist}_\Gamma(\theta'_\lambda, \vartheta'_{\lambda'}) > C_{j, j'}^V, \quad j' < \kappa'(j), \\ 0 & \text{si } \text{dist}_\Gamma(\vartheta'_\lambda, \theta'_{\lambda'}) > C_{j, j'}^V, \quad j < \kappa'(j'), \\ v_{\lambda', \lambda} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con  $\kappa'(j) := j \frac{1}{1-\epsilon'} - J \frac{\epsilon'}{1-\epsilon'}$ ,  $\epsilon' := \frac{2n'+1}{m'+n'}$ , y parámetros de compresión dados por

$$\begin{aligned} B_{j, j'}^V &\geq b_V \max \left\{ 2^{-\min\{j, j'\}}, 2^{\frac{J(2n'+1) - (j+j')(m'+n')}{2m'-1}} \right\}, \\ C_{j, j'}^V &\geq c'_V \max \left\{ 2^{-\max\{j, j'\}}, 2^{\frac{J(2n'+1) - \max\{j, j'\}m' - (j+j')n'}{m'-1}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde  $b_V, c'_V > 1$  y  $1 < n' < m' - 1$ , con  $m' \geq 3$ .

2. La matriz comprimida  $\mathbf{K}_J^c$ , asociada a la matriz  $\mathbf{K}_J := [k_{\lambda',\lambda}]_{\lambda',\lambda \in \nabla_J}$  en (3.28), por

$$k_{\lambda',\lambda}^c := \begin{cases} 0 & \text{si } \text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \theta_{\lambda'}) > B_{j,j'}^K, \\ 0 & \text{si } \text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \vartheta_{\lambda'}) > C_{j,j'}^K, \quad j' < \kappa(j), \\ 0 & \text{si } \text{dist}_\Gamma(\vartheta_\lambda, \theta_{\lambda'}) > C_{j,j'}^K, \quad j < \kappa'(j'), \\ k_{\lambda',\lambda} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con  $\kappa(j) := j \frac{1}{1-\epsilon} - J \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ ,  $\epsilon := \frac{n+n'}{m+n}$ , y  $\kappa'(j') := j' \frac{1}{1-\epsilon'} - J \frac{\epsilon'}{1-\epsilon'}$ ,  $\epsilon' := \frac{n+n'}{m'+n'}$ , y parámetros de compresión dados por

$$\begin{aligned} B_{j,j'}^K &\geq b_K \max \left\{ 2^{-\min\{j,j'\}}, 2^{\frac{J(n+n')-j(m+n)-j'(m'+n')}{m+m'}} \right\}, \\ C_{j,j'}^K &\geq \begin{cases} c_K \max \left\{ 2^{-j}, 2^{\frac{J(n+n')-j(m+n)-j'n'}{m}} \right\} & \text{si } j' < \kappa(j), \\ c'_K \max \left\{ 2^{-j'}, 2^{\frac{J(n+n')-jn-j'(m'+n')}{m'}} \right\} & \text{si } j < \kappa'(j'), \end{cases} \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde  $b_K, c_K, c'_K > 1$ ,  $2 < n < m'$  y  $1 < n' < m$ , con  $m \geq 2$  y  $m' \geq 3$ .

3. La matriz comprimida  $\mathbf{W}_J^c$ , asociada a la matriz  $\mathbf{W}_J := [w_{\lambda',\lambda}]_{\lambda',\lambda \in \nabla_J}$  en (3.28), por

$$w_{\lambda',\lambda}^c := \begin{cases} 0 & \text{si } \text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \theta_{\lambda'}) > B_{j,j'}^W, \\ 0 & \text{si } \text{dist}_\Gamma(\theta_\lambda, \vartheta_{\lambda'}) > C_{j,j'}^W, \quad j' < \kappa(j), \\ 0 & \text{si } \text{dist}_\Gamma(\vartheta_\lambda, \theta_{\lambda'}) > C_{j,j'}^W, \quad j < \kappa'(j'), \\ w_{\lambda',\lambda} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con  $\kappa(j) := j \frac{1}{1-\epsilon} - J \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ ,  $\epsilon := \frac{2n-1}{m+n}$ , y parámetros de compresión dados por

$$\begin{aligned} B_{j,j'}^W &\geq b_W \max \left\{ 2^{-\min\{j,j'\}}, 2^{\frac{J(2n-1)-(j+j')(m+n)}{2m+1}} \right\}, \\ C_{j,j'}^W &\geq c_W \max \left\{ 2^{-\max\{j,j'\}}, 2^{\frac{J(2n-1)-\max\{j,j'\}m-(j+j')n}{m+1}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde  $b_W, c_W > 1$  y  $2 < n < m+1$ , con  $m \geq 2$ .

**Observación 3.15.** Un punto importante aquí, el cual debemos mencionar antes de proceder con el análisis de consistencia, es que, a diferencia de como acaba de ser propuesta la compresión de la forma bilineal  $B$ , la implementación computacional respectiva no requiere el cálculo explícito de la matriz  $\mathbf{W}_J^c$  como en el tercer punto de la Definición 3.14, sino que ella puede ser calculada en términos de la matriz  $\mathbf{V}_J^c$

usando la identidad  $\langle \omega, W\mu \rangle = \langle V\mu', \omega' \rangle$  dada en la Proposición 2.3 del capítulo 2. Lo anterior, sin afectar la consistencia, estabilidad y convergencia del esquema comprimido original. En efecto, escogiendo  $b_W = b_V > 1$  y  $n' \in \mathbb{R}$  tal que  $1 < n' < m' - 1$ , obtenemos para  $m' = m + 1$  y  $n = n' + 1$  también la condición  $2 < n < m + 1$ . Luego, podemos elegir  $B_{j,j'}^W = B_{j,j'}^V$ , lo cual da lugar al mismo conjunto de coeficientes no nulos en las respectivas matrices. Desafortunadamente, sin embargo, lo anterior es imposible de verificar para los parámetros de la segunda compresión, y es necesario examinar el error de compresión desde un punto de vista más analítico (ver el Teorema 3.19).

Finalmente, por otra parte, similar a la definición del parámetro  $a_L$  en (3.19), definimos los siguientes parámetros

$$\begin{aligned} a_V &:= \min \left\{ b_V^{2m'-1}, c_V'^{m'-1} \right\}, \\ a_K &:= \min \left\{ b_K^{m+m'}, c_K^m, c_K'^{m'} \right\}, \\ a_W &:= \min \left\{ b_W^{2m+1}, c_W^{m+1} \right\}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

los cuales, obviamente, resultan ser mayores que uno debido a la elección de las bases de ondelettes en (3.26).

### 3.4.2 Consistencia

El análisis de consistencia comprende dos etapas. En primer lugar, cuantificamos el error de consistencia como el orden en que una forma bilineal comprimida aproxima a la forma bilineal  $B$  en normas de espacios de Sobolev con índices mayores que  $\beta$  y  $\beta'$ . Esto es crucial para el análisis de convergencia subsiguiente. También, medimos el error de consistencia en la escala más fina de discretización y en las normas de los espacios de energía. Esto conducirá a la estabilidad de nuestra estrategia de compresión (ver el Lema 3.21). En segundo lugar, procedemos a examinar el error de consistencia cuando la compresión del operador hipersingular es definida en términos de aquella definida para el operador de capa simple. Luego, con el fin de establecer los resultados de consistencia para la compresión de la forma bilineal  $B$ , necesitamos introducir algunas notaciones.

Sean  $V_J^c$ ,  $K_J^c$  y  $W_J^c$  los operadores de dimensión finita asociados a las matrices comprimidas  $\mathbf{V}_J^c$ ,  $\mathbf{K}_J^c$  y  $\mathbf{W}_J^c$  de la Definición 3.14, con parámetros de compresión dados por (3.30), (3.31) y (3.32), respectivamente. Además, definiendo el espacio

producto  $M_J := V_J \times V'_J = M_h \subset M$ , sea  $B^c : M_J \times M_J \rightarrow \mathbb{R}$  la forma bilineal comprimida definida por

$$\begin{aligned} B^c((\mu_J, \sigma_J), (\omega_J, \rho_J)) &:= \langle P_J \omega, W_J^c P_J \mu \rangle + \langle K_J^c P_J \omega, P'_J \sigma \rangle \\ &\quad - \langle K_J^c P_J \mu, P'_J \rho \rangle + \langle V_J^c P'_J \sigma, P'_J \rho \rangle, \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde para todo  $\mu \in H^s(I)$ ,  $\omega \in H^t(I)$ ,  $\sigma \in H^{s'}(I)$  y  $\rho \in H^{t'}(I)$ , hemos denotado  $\mu_J = P_J \mu$ ,  $\omega_J = P_J \omega$ ,  $\sigma_J = P'_J \sigma$  y  $\rho_J = P'_J \rho$ , respectivamente. Definimos también el siguiente parámetro

$$a_B := \min\{a_V, a_K, a_W\}, \quad (3.35)$$

con los parámetros  $a_V$ ,  $a_K$  y  $a_W$  definidos en (3.33). Corresponde señalar que este parámetro es el que finalmente determina la estabilidad de nuestra estrategia de compresión, ya que si es elegido lo suficientemente grande, la forma bilineal comprimida  $A^c$  definida por (2.27) resulta ser estable (ver el Lema 3.21).

Ahora estamos en condiciones de establecer las estimaciones de consistencia para la compresión de la forma bilineal  $B$ . Primero, como una consecuencia del Teorema 3.10, con los parámetros apropiados de la Tabla 3.1, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.16.** *Sean los parámetros de regularidad  $\tilde{\eta} > -1/2$ ,  $\tilde{\eta}' > 1/2$ ,  $B^c$  la forma bilineal comprimida definida por (3.34) y  $a_B$  el parámetro (3.35). Entonces, para  $1/2 \leq s, t \leq 2$ ,  $-1/2 \leq s', t' \leq 1$ ,  $1 < s + t$ ,  $0 < t + s'$ ,  $0 < s + t'$  y  $-1 < s' + t'$ , se verifica la estimación*

$$\begin{aligned} &|B((\mu_J, \sigma_J), (\omega_J, \rho_J)) - B^c((\mu_J, \sigma_J), (\omega_J, \rho_J))| \\ &\lesssim a_B^{-1} \left\{ 2^{-J(s+t-1)} \|\mu\|_{H^s(I)} \|\omega\|_{H^t(I)} + 2^{-J(t+s')} \|\omega\|_{H^t(I)} \|\sigma\|_{H^{s'}(I)} \right. \\ &\quad \left. + 2^{-J(s+t')} \|\mu\|_{H^s(I)} \|\rho\|_{H^{t'}(I)} + 2^{-J(s'+t'+1)} \|\sigma\|_{H^{s'}(I)} \|\rho\|_{H^{t'}(I)} \right\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

para todo  $\mu \in H^s(I)$ ,  $\omega \in H^t(I)$ ,  $\sigma \in H^{s'}(I)$  y  $\rho \in H^{t'}(I)$ , uniformemente en  $J$ .

**Observación 3.17.** Notar que el Teorema 3.16 demanda que los parámetros de regularidad Sobolev de los espacios de multiresolución duales  $\tilde{V}_j$  y  $\tilde{V}'_j$  satisfagan  $\tilde{\eta} > -1/2$  y  $\tilde{\eta}' > 1/2$ , respectivamente. Pero esto es inmediatamente satisfecho por las bases de ondelettes elegidas en (3.26), ya que para las respectivas funciones de escala duales uno tiene, al menos,  $\tilde{\phi} \in L^2(I)$  para  $d = m = 2$ , y  $\tilde{\phi}' \in C(I)$  para  $d' = 1$  y  $m' = 3$  (ver las Figuras A.1 y A.2 del apéndice) (ver también [6]).

*Demostración.* En primer lugar observamos que

$$\begin{aligned} & |B((\mu_J, \sigma_J), (\omega_J, \rho_J)) - B^c((\mu_J, \sigma_J), (\omega_J, \rho_J))| \\ & \leq |\langle P_J \omega, (W_J - W_J^c) P_J \mu \rangle| + |\langle (K_J - K_J^c) P_J \omega, P_J' \sigma \rangle| \\ & \quad + |\langle (K_J - K_J^c) P_J \mu, P_J' \rho \rangle| + |\langle (V_J - V_J^c) P_J' \sigma, P_J' \rho \rangle|. \end{aligned}$$

Luego, usando el Teorema 3.10 y los parámetros de la Tabla 3.1, podemos estimar cada término en esta expresión por

$$\begin{aligned} |\langle P_J \omega, (W_J - W_J^c) P_J \mu \rangle| & \lesssim a_W^{-1} 2^{-J(s+t-1)} \|\mu\|_{H^s(I)} \|\omega\|_{H^t(I)}, \\ |\langle (K_J - K_J^c) P_J \omega, P_J' \sigma \rangle| & \lesssim a_K^{-1} 2^{-J(t+s')} \|\omega\|_{H^t(I)} \|\sigma\|_{H^{s'}(I)}, \\ |\langle (K_J - K_J^c) P_J \mu, P_J' \rho \rangle| & \lesssim a_K^{-1} 2^{-J(s+t')} \|\mu\|_{H^s(I)} \|\rho\|_{H^{t'}(I)}, \\ |\langle (V_J - V_J^c) P_J' \sigma, P_J' \rho \rangle| & \lesssim a_V^{-1} 2^{-J(s'+t'+1)} \|\sigma\|_{H^{s'}(I)} \|\rho\|_{H^{t'}(I)}. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración.  $\square$

Ahora, usando el Teorema 3.11 y los parámetros de la Tabla 3.1, establecemos el siguiente resultado de consistencia en la escala más fina de discretización y en la norma del espacio de energía  $M = H^{1/2}(I) \times H_0^{-1/2}(I)$ .

**Teorema 3.18.** *Sean los parámetros de regularidad  $\tilde{\eta} > -1/2$ ,  $\tilde{\eta}' > 1/2$ ,  $B^c$  la forma bilineal comprimida definida por (3.34) y  $a_B$  el parámetro (3.35). Entonces se verifica la estimación*

$$\begin{aligned} & |B((\mu_J, \sigma_J), (\omega_J, \rho_J)) - B^c((\mu_J, \sigma_J), (\omega_J, \rho_J))| \\ & \lesssim a_B^{-1} \left\{ \|\mu_J\|_{H^{1/2}(I)} \|\omega_J\|_{H^{1/2}(I)} + \|\omega_J\|_{H^{1/2}(I)} \|\sigma_J\|_{H^{-1/2}(I)} \right. \\ & \quad \left. + \|\mu_J\|_{H^{1/2}(I)} \|\rho_J\|_{H^{-1/2}(I)} + \|\sigma_J\|_{H^{-1/2}(I)} \|\rho_J\|_{H^{-1/2}(I)} \right\} \quad (3.37) \\ & \lesssim a_B^{-1} \|(\mu_J, \sigma_J)\|_M \|(\omega_J, \rho_J)\|_M \end{aligned}$$

para todo  $(\mu_J, \omega_J), (\sigma_J, \rho_J) \in M_J$ , uniformemente en  $J$ .

*Demostración.* Similar a la del Teorema 3.16.  $\square$

A continuación, procedemos a estudiar el error de consistencia cuando el operador hipersingular  $W$  es discretizado y comprimido en términos del operador de capa simple  $V$ . El punto central en el análisis siguiente consiste en que los coeficientes matriciales  $\langle \psi_\lambda, W \psi_\lambda \rangle$  pueden ser calculados en términos de los coeficientes matriciales  $\langle V \psi'_\lambda, \psi'_\lambda \rangle$ , donde  $\psi'_\lambda$  y  $\psi'_{\lambda'}$  son las derivadas de  $\psi_\lambda$  y  $\psi_{\lambda'}$ , respectivamente.

En efecto, sea  $\psi^{d,m}$  la ondelette asociada a la base de ondelettes  $\Psi_J^{d,m}$ . Entonces, como se muestra en [6], se tiene módulo una constante

$$(\psi^{d,m})' = \psi^{d-1,m+1},$$

donde  $'$  indica derivación. Luego, después de una normalización, vemos que para ondelettes  $\psi_\lambda \in \Psi_J^{2,m}$  y  $\psi'_\lambda \in \Psi_J^{1,m'}$ , con  $m' = m + 1$  y  $m \geq 2$ , se tiene

$$(\psi_\lambda)' = 2^j \psi'_\lambda.$$

Por lo tanto, usando la identidad

$$\langle \omega, W\mu \rangle = \langle V\mu', \omega' \rangle,$$

válida para todo  $\mu, \omega \in H^{1/2}(I)$  (ver la Proposición 2.3), deducimos que los coeficientes matriciales  $w_{\lambda',\lambda} = \langle \psi_{\lambda'}, W\psi_\lambda \rangle$ , correspondientes a la discretización del operador hipersingular, pueden ser calculados en función de los coeficientes matriciales  $v_{\lambda',\lambda} = \langle V\psi'_{\lambda'}, \psi'_\lambda \rangle$ , correspondientes a la discretización del operador de capa simple, por medio de la siguiente relación

$$w_{\lambda',\lambda} = 2^{j+j'} v_{\lambda',\lambda}.$$

Así, para la compresión del operador  $W$  definimos, con  $m' = m + 1$ , la matriz comprimida  $\mathbf{W}_J^c := [w_{\lambda',\lambda}^c]_{\lambda',\lambda \in \nabla_J}$ , asociada a la matriz  $\mathbf{W}_J := [w_{\lambda',\lambda}]_{\lambda',\lambda \in \nabla_J}$ , por

$$w_{\lambda',\lambda}^c := 2^{j+j'} v_{\lambda',\lambda}^c, \quad (3.38)$$

donde los  $v_{\lambda',\lambda}^c$  son los coeficientes de la matriz comprimida  $\mathbf{V}_J^c$  definida en el primer punto de la Definición 3.14 con parámetros de compresión dados por (3.30). El siguiente teorema cuantifica el error de consistencia en la compresión del operador hipersingular por (3.38).

**Teorema 3.19.** *Sean  $m' = m + 1$ , el parámetro de regularidad  $\tilde{\eta}' > 1/2$  y  $W_J^c$  el operador de dimensión finita asociado a la matriz comprimida  $\mathbf{W}_J^c$  definida por (3.38). Entonces, para  $-1/2 \leq s', t' \leq 1$  y  $-1 < s' + t'$ , se tiene la estimación*

$$|\langle P_J \omega, (W_J - W_J^c) P_J \mu \rangle| \lesssim a_V^{-1} 2^{-J(s'+t'+1)} \|\mu\|_{H^{s'+1}(I)} \|\omega\|_{H^{t'+1}(I)} \quad (3.39)$$

para todo  $\mu \in H^{s'+1}(I)$  y  $\omega \in H^{t'+1}(I)$ , uniformemente en  $J$ . Además, la siguiente estimación

$$|\langle \omega_J, (W_J - W_J^c) \mu_J \rangle| \lesssim a_V^{-1} \|\mu_J\|_{H^{1/2}(I)} \|\omega\|_{H^{1/2}(I)} \quad (3.40)$$

es válida para todo  $\mu_J, \omega_J \in V_J$ , uniformemente en  $J$ .

*Demostración.* Primeramente observamos que debido a la definición en (3.38) se tienen las siguientes identidades

$$\begin{aligned} W_J - W_J^c &= \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{j'=0}^{J-1} 2^{j't'} F_{j'}^* (\mathbf{R}_{j',j}^W + \mathbf{S}_{j',j}^W) F_j 2^{js'} \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{j'=0}^{J-1} 2^{j'(t'+1)} F_{j'}^* (\mathbf{R}_{j',j}^V + \mathbf{S}_{j',j}^V) F_j 2^{j(s'+1)}, \end{aligned}$$

con las matrices residuales definidas como en el Teorema 3.9. Luego, procediendo como en la demostración del Teorema 3.10, obtenemos

$$|\langle P_J \omega, (W_J - W_J^c) P_J \mu \rangle| \lesssim \left( \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{j'=0}^{J-1} \left( \|\mathbf{R}_{j',j}^V\| + \|\mathbf{S}_{j',j}^V\| \right) \right) \|\mu\|_{H^{s'+1}(I)} \|\omega\|_{H^{t'+1}(I)}.$$

La demostración de (3.39) concluye utilizando las estimaciones del Teorema 3.9 y los argumentos en la última parte de la demostración del Teorema 3.10. La estimación (3.40) sigue análogamente.  $\square$

En virtud de este resultado, el teorema a continuación establece que la definición en (3.38) preserva la consistencia de nuestra estrategia de compresión para la forma bilineal  $B$ .

**Teorema 3.20.** *Sea  $B^c$  la forma bilineal comprimida definida por (3.34) con el operador  $W_J^c$  dado por el Teorema 3.19. Entonces las estimaciones (3.36) y (3.37) de los Teoremas 3.16 y 3.18, respectivamente, se verifican con  $a_B = \min\{a_V, a_K\}$ .*

### 3.4.3 Estabilidad, Convergencia y Complejidad

En esta subsección probaremos que la solución  $(u_h^c, \sigma_h^c)$  del esquema de Galerkin comprimido (2.26) converge con el mismo orden (2.25) que la solución de Galerkin exacta  $(u_h, \sigma_h)$  en (2.23), pero con *complejidad lineal*.

En primer lugar, la estimación para el error de consistencia del Teoremas 3.18 nos permitirá probar la estabilidad de la forma bilineal comprimida  $A^c$  definida por (2.27). En efecto, debido a la estabilidad de la forma bilineal  $A$  definida por (2.18), y la consistencia de la forma bilineal comprimida  $B^c$  expresada en la estimación (3.37) del Teorema 3.18, la forma bilineal comprimida  $A^c$  es estable en la norma del espacio de energía  $H = H_0^1(\Omega) \times H_0^{-1/2}(I)$ .

**Lema 3.21 (Estabilidad).** *Si el parámetro  $a_B$  definido por (3.35) es suficientemente grande, la forma bilineal comprimida  $A^c$  definida por (2.27) es estable en la norma del espacio de energía  $H$ , esto es,*

$$A^c((v_h, \rho_h), (v_h, \rho_h)) \gtrsim \|(v_h, \rho_h)\|_H^2$$

para todo  $(v_h, \rho_h) \in H_h$ .

*Demostración.* La estimación (3.37) del Teorema 3.18 con  $(\mu_J, \sigma_J) = (\omega_J, \rho_J)$  da

$$|B((\omega_J, \rho_J), (\omega_J, \rho_J)) - B^c((\omega_J, \rho_J), (\omega_J, \rho_J))| \lesssim a_B^{-1} \|(\omega_J, \rho_J)\|_M^2 \quad (3.41)$$

para todo  $(\omega_J, \rho_J) \in M_J$ . Luego, denotando por  $(\omega_J, \rho_J) = (v_h \circ \gamma, \rho_h)$  para todo  $(v_h, \rho_h) \in H_h$ , obtenemos con (3.41) y la  $H$ -elipticidad de  $A$

$$\begin{aligned} A^c((v_h, \rho_h), (v_h, \rho_h)) &\geq |A((v_h, \rho_h), (v_h, \rho_h))| \\ &\quad - |B((\omega_J, \rho_J), (\omega_J, \rho_J)) - B^c((\omega_J, \rho_J), (\omega_J, \rho_J))| \\ &\gtrsim \|(v_h, \rho_h)\|_H^2 - a_B^{-1} \|(\omega_J, \rho_J)\|_M^2 \\ &\gtrsim \|(v_h, \rho_h)\|_H^2 - a_B^{-1} \|(v_h, \rho_h)\|_H^2 \\ &\gtrsim \|(v_h, \rho_h)\|_H^2, \end{aligned}$$

siempre que el parámetro  $a_B > 1$  sea suficientemente grande.  $\square$

Enseguida, habiendo probado la estabilidad de nuestra estrategia de compresión, podemos aplicar el Lema de Strang (ver el capítulo 2) para concluir que el error en la solución del esquema comprimido (2.26) es uniformemente acotado por un múltiplo de la suma del *error de aproximación* y el *error de consistencia*. En consecuencia, usando el Teorema 3.16, obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.22 (Convergencia).** *Sean  $(u_h^c, \sigma_h^c) \in H_h$  la solución del esquema de Galerkin comprimido (2.26) y  $(u, \sigma) \in H$  la solución exacta de (2.19). Sea además la estimación (3.36) del Teorema 3.16 con  $s = 3/2$ ,  $t = s' = 1/2$  y  $t' = -1/2$ . Entonces, si  $u \in H^2(\Omega)$ , la solución aproximada  $(u_h^c, \sigma_h^c)$  converge a la solución exacta  $(u, \sigma)$  de acuerdo a*

$$\|(u, \sigma) - (u_h^c, \sigma_h^c)\|_H \lesssim h \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

uniformemente en  $h = 2^{-J}$ .

*Demostración.* Elegimos en la estimación (2.28) del Lema de Strang  $(v_h, \rho_h)$  como la solución de Galerkin exacta en (2.23), esto es,  $(v_h, \rho_h) = (u_h, \sigma_h)$ . Luego, denotando  $\mu_J = u_h \circ \gamma$ ,  $\sigma_J = \sigma_h$ ,  $\omega_J = w_h \circ \gamma$  y  $\rho_J = \varrho_h$ , y utilizando la convergencia (2.25), obtenemos a partir de la estimación (2.28)

$$\begin{aligned} \|(u, \sigma) - (u_h^c, \sigma_h^c)\|_H &\lesssim h \|u\|_{H^2(\Omega)} \\ &+ \sup_{(\omega_J, \rho_J) \in M_J} \frac{|B((\mu_J, \sigma_J), (\omega_J, \rho_J)) - B^c((\mu_J, \sigma_J), (\omega_J, \rho_J))|}{\|(\omega_J, \rho_J)\|_M}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por otro lado, usando el teorema de trazas,  $u \in H^2(\Omega)$  implica  $u \circ \gamma \in H^{3/2}(I)$  y  $\sigma = (p \circ \gamma)\alpha \in H^{1/2}(I)$ . De esta forma, denotando  $\mu = u \circ \gamma$  y  $\omega = v \circ \gamma$ , la estimación (3.36) del Teorema 3.16 con  $s = 3/2$ ,  $t = s' = 1/2$  y  $t' = -1/2$  da

$$|B((\mu_J, \sigma_J), (\omega_J, \rho_J)) - B^c((\mu_J, \sigma_J), (\omega_J, \rho_J))| \lesssim 2^{-J} \|(\mu, \sigma)\|_N \|(\omega, \rho)\|_M,$$

donde  $N = H^{3/2}(I) \times H^{1/2}(I)$ . La estabilidad de las bases de ondelettes nos permiten deducir que  $\|(\omega, \rho)\|_M \sim \|(\omega_J, \rho_J)\|_M$ . En consecuencia, tenemos

$$\frac{|B((\mu_J, \sigma_J), (\omega_J, \rho_J)) - B^c((\mu_J, \sigma_J), (\omega_J, \rho_J))|}{\|(\omega_J, \rho_J)\|_M} \lesssim h \|(\mu, \sigma)\|_N \quad (3.43)$$

para todo  $(\omega_J, \rho_J) \in M_J$ , donde  $h = 2^{-J}$ . Así, substituyendo (3.43) en (3.42), finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \|(u, \sigma) - (u_h^c, \sigma_h^c)\|_H &\lesssim h \left\{ \|u\|_{H^2(\Omega)} + \|(\mu, \sigma)\|_N \right\} \\ &\lesssim h \|u\|_{H^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado el hecho que  $\sigma = (p \circ \gamma)\alpha$ , y nuevamente el teorema de trazas.  $\square$

Antes de concluir la presente sección, un resultado inmediato de establecer es aquel que nos indica que la matriz comprimida  $\mathbf{B}_J^c$  definida por (3.29) tiene tan sólo  $O(2^J)$  coeficientes no nulos. En efecto, el Teorema 3.12 implica el siguiente resultado respecto de la complejidad del método compresión de matrices propuesto para el acoplamiento FEM-BEM.

**Teorema 3.23 (Complejidad).** *Sean las hipótesis del Teorema 3.12 válidas de acuerdo a los parámetros de la Tabla 3.1. Entonces la matriz comprimida  $\mathbf{B}_J^c$  definida por (3.29) tiene  $O(2^J)$  coeficientes no nulos, es decir, una complejidad proporcional a los grados de libertad sobre la frontera.*

## 3.5 Aspectos Computacionales

### 3.5.1 Una Formulación Variacional Coercitiva

Para la implementación computacional del método de acoplamiento con dos ecuaciones integrales es conveniente considerar una formulación variacional algo diferente. La formulación variacional que es adecuada consiste en tomar la condición  $\int_{\Gamma} p(x) ds_x = \int_{\Gamma} \sigma(t) dt = 0$  del Lema 2.1, como una restricción y no como una propiedad intrínseca de los espacios de aproximación.

Más precisamente, con el espacio  $N := H^{-1/2}(I) \times \mathbb{R}$ , sea  $e : N \times N \rightarrow \mathbb{R}$  la forma bilineal definida por

$$e((\sigma, c), (\rho, d)) := d \langle 1, \sigma \rangle - c \langle 1, \rho \rangle.$$

Luego, definiendo el espacio producto  $\mathcal{H} := H_0^1(\Omega) \times H^{-1/2}(I) \times \mathbb{R}$ , obtenemos la forma bilineal  $\mathcal{L} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((u, \sigma, c), (v, \rho, d)) &:= a(u, v) + b((u \circ \gamma, \sigma), (v \circ \gamma, \rho)) \\ &\quad + B((u \circ \gamma, \sigma), (v \circ \gamma, \rho)) \\ &\quad + e((\sigma, c), (\rho, d)), \end{aligned} \tag{3.44}$$

donde  $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$  es la clásica forma bilineal del método de elementos finitos, y las formas bilineales  $b : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  y  $B : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , ahora con el espacio producto  $M := H^{1/2}(I) \times H^{-1/2}(I)$ , son definidas, respectivamente, por las ecuaciones (2.12) y (2.13) en el capítulo 2.

De esta forma, la formulación variacional del problema acoplado (2.9), apropiada para la implementación computacional, consiste en: *Encontrar*  $(u, \sigma, c) \in \mathcal{H}$  tal que

$$\mathcal{L}((u, \sigma, c), (v, \rho, d)) = \int_{\Omega} f v dx \quad \text{para todo } (v, \rho, d) \in \mathcal{H}. \tag{3.45}$$

La formulación variacional (3.45) tiene varias ventajas. En particular, el operador identidad puede ser representado de manera estable en una única escala de discretización por funciones constantes por tramos. Por el contrario, la elección usual de funciones constantes por tramos y con media cero, con el fin de garantizar la condición  $\int_{\Gamma} p(x) ds_x = 0$ , es extremadamente inestable. Además, esta formulación permite elegir bases tales que los espacios discretos asociados a  $H^{1/2}(I)$  y  $H^{-1/2}(I)$  tengan la misma dimensión (comparar con las bases definidas al comienzo de la subsección 3.4.1). Esto simplifica ampliamente nuestra aplicación de los métodos ondelettes

al método de acoplamiento. Observamos, por otro lado, que la formulación (3.45) difiere de la formulación (2.19) sólo en un operador de rango finito (ver la definición del operador  $E$  en (3.46)).

La demostración de existencia y unicidad de solución para la formulación (3.45) es una consecuencia de la desigualdad de Gårding y la alternativa de Fredholm. En efecto, bajo la suposición que el dominio  $\Omega$  tiene diámetro menor que uno, no es difícil probar que la forma bilineal  $\mathcal{L}$  es continua, *coercitiva* e inyectiva. Por consiguiente, observamos que la teoría de compresión de matrices desarrollada previamente en este capítulo se aplica igualmente a la formulación variacional (3.45).

A continuación, con el fin de facilitar el análisis subsiguiente, sea  $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$  el operador inducido por la forma bilineal  $\mathcal{L}$  mediante la relación

$$[L(u, \sigma, c), (v, \rho, d)] = \mathcal{L}((u, \sigma, c), (v, \rho, d)),$$

donde  $[\cdot, \cdot]$  denota el producto de dualidad entre  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}^*$ . Es directo comprobar que  $L$  es el operador matricial dado por

$$L := \begin{bmatrix} A + G^*WG & -G^*(\frac{1}{2} - K)^* & \\ (\frac{1}{2} - K)G & V & -E^* \\ & E & \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

donde  $V : H^{-1/2}(I) \rightarrow H^{1/2}(I)$ ,  $K : H^{1/2}(I) \rightarrow H^{1/2}(I)$  y  $W : H^{1/2}(I) \rightarrow H^{-1/2}(I)$  son los operadores integrales definidos en (2.14),  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  es el operador inducido por la forma bilineal  $a$ , es decir,  $(Au)v = a(u, v)$ ,  $G : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(I)$  es un operador de traza definido por  $Gu = u \circ \gamma$ , y  $E : H^{-1/2}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  es el operador de rango finito dado por  $E\sigma := \langle 1, \sigma \rangle$ .

Así, bajo la suposición que  $\text{diam}(\Omega) < 1$ , se sigue que el operador matricial  $L$  definido por (3.46) es biyectivo, es decir,

$$\|L\hat{v}\|_{\mathcal{H}^*} \sim \|\hat{v}\|_{\mathcal{H}}$$

para todo  $\hat{v} = (v, \rho, d) \in \mathcal{H}$ , y la ecuación de operador  $L\hat{u} = \hat{f}$  tiene una única solución  $\hat{u} = (u, \sigma, c) \in \mathcal{H}$  para cada  $\hat{f} \in \mathcal{H}^*$ .

### 3.5.2 Discretización y Cambio de Bases

En la sección 2.4 introdujimos una triangulación regular del dominio  $\Omega$  formada por triángulos curvos a lo largo de  $\Gamma$ . No obstante, puesto que posteriormente haremos uso del preconditionador BPX [3], necesitamos definir una sucesión creciente de triangulaciones.

Dado  $j_0 \in \mathbb{N}$ , sea  $0 = t_{0,0} < t_{0,1} < \dots < t_{0,N_0} = 1$ ,  $N_0 := 2^{j_0}$ , una partición uniforme del intervalo  $\bar{I} = [0, 1]$ , con  $t_{0,k+1} - t_{0,k} = h_0 := 1/N_0$ ,  $k \in \Delta_0 := \mathbb{Z}/N_0\mathbb{Z}$ , y denotemos por  $\Omega_{h_0} \subset \Omega$  el dominio poligonal con vértices sobre  $\Gamma$  dados por  $\gamma(t_{0,0}), \gamma(t_{0,1}), \dots, \gamma(t_{0,N_0-1})$ . Sea  $\mathcal{T}_{h_0}$  una triangulación regular de  $\bar{\Omega}_{h_0}$  formada por triángulos  $T_i$  cuyos diámetros satisfacen  $\text{diam } T_i \leq h_0 \sup_{t \in \bar{I}} \alpha(t) \sim 1$ . Procediendo como en la sección 2.4, esto es, reemplazando cada triángulo con dos vértices sobre  $\Gamma$  por el correspondiente triángulo curvo, conseguimos una triangulación inicial  $\tilde{\mathcal{T}}_{h_0}$  formada por triángulos rectos y curvos. Luego, subdividiendo el triángulo de referencia  $\hat{T}$  en 4, 16, 64,  $\dots$  triángulos congruentes, obtenemos un *refinamiento uniforme* de  $\tilde{\mathcal{T}}_{h_0}$ , conduciendo a la sucesión creciente de triangulaciones

$$\tilde{\mathcal{T}}_{h_0} \subset \tilde{\mathcal{T}}_{h_1} \subset \tilde{\mathcal{T}}_{h_2} \subset \dots$$

tal que  $\text{diam } T_i \leq h_j \sup_{t \in \bar{I}} \alpha(t) \sim 2^{-j}$  para todo  $T_i \in \tilde{\mathcal{T}}_{h_j}$ , donde  $h_j := 2^{-j} h_0$  (ver en [20] más detalles de esta construcción).

Ahora, sea  $\Omega_j$  un conjunto de índices para los nodos de la triangulación  $\tilde{\mathcal{T}}_{h_j}$ , excepto aquellos nodos que están sobre la frontera  $\Gamma_0$ . Sea además  $\Gamma_j$  un conjunto de índices para los nodos que están sobre la frontera  $\Gamma$ . Denotando por  $\varphi_{j,k}$  la única función lineal que toma el valor uno en el nodo  $k$  de  $\tilde{\mathcal{T}}_{h_j}$ , mientras que se anula en el resto de los otros nodos, no es difícil ver que los conjuntos  $\Upsilon_j := \{ \varphi_{j,k} \mid k \in \Omega_j \}$  generan sobre la triangulación  $\tilde{\mathcal{T}}_{h_j}$  los espacios

$$V_{h_j} := \text{clos}_{H^1(\Omega)}(\text{span } \Upsilon_j)$$

como una sucesión creciente de subespacios cerrados,

$$V_{h_0} \subset V_{h_1} \subset \dots \subset H_0^1(\Omega),$$

cuya unión es densa en  $H_0^1(\Omega)$ .

Notar que la estrategia de refinamiento anterior conduce en el  $j$ -ésimo paso a la partición uniforme  $0 = t_{j,0} < t_{j,1} < \dots < t_{j,N_j} = 1$  del intervalo  $[0, 1]$ , con  $N_j := 2^j N_0$  y  $t_{j,k+1} - t_{j,k} = h_j$ ,  $k \in \Delta_j := \mathbb{Z}/N_j\mathbb{Z}$ . Por consiguiente, denotando por  $\phi_{j,k} := \phi(N_j \cdot -k)$ ,  $k \in \Delta_j$ , donde  $\phi$  es la función característica del intervalo  $[0, 1]$ , deducimos que los conjuntos  $\Phi_j := \{ \phi_{j,k} \mid k \in \Delta_j \}$  generan los espacios

$$V_j := \text{clos}_{H^{-1/2}(I)}(\text{span } \Phi_j)$$

como una sucesión creciente de subespacios cerrados,

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset H^{-1/2}(I),$$



Luego, tomando en cuenta la identidad (1.12) del capítulo 1, la discretización del operador  $L$ , con los operadores  $V$ ,  $K$  y  $W$  discretizados en las bases de ondelettes elegidas en (3.26), es dada por la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_J & \hat{\mathbf{A}}_J^\top & & & \\ \hat{\mathbf{A}}_J & \check{\mathbf{A}}_J + \mathbf{S}_J^\top \mathbf{W}_\psi \mathbf{S}_J & \mathbf{S}_J^\top \mathbf{K}_\psi^\top \mathbf{T}_J - \mathbf{G}_J^\top & & \\ & \mathbf{G}_J - \mathbf{T}_J^\top \mathbf{K}_\psi \mathbf{S}_J & \mathbf{T}_J^\top \mathbf{V}_\psi \mathbf{T}_J & & -\mathbf{E}_J^\top \\ & & \mathbf{E}_J & & \end{bmatrix},$$

la cual es equivalente a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & \\ & \mathbf{I} & & & \\ & & \mathbf{T}_J^\top & & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_J & \hat{\mathbf{A}}_J^\top & & & \\ \hat{\mathbf{A}}_J & \check{\mathbf{A}}_J + \mathbf{S}_J^\top \mathbf{W}_\psi \mathbf{S}_J & \mathbf{S}_J^\top \mathbf{K}_\psi^\top - \mathbf{G}_J^\top \mathbf{T}_J^{-1} & & \\ & \mathbf{T}_J^{-\top} \mathbf{G}_J - \mathbf{K}_\psi \mathbf{S}_J & \mathbf{V}_\psi & & -\mathbf{E}_\psi^\top \\ & & \mathbf{E}_\psi & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & \\ & \mathbf{I} & & & \\ & & \mathbf{T}_J & & \\ & & & & 1 \end{bmatrix},$$

donde el subíndice  $\psi$  indica la discretización en bases de ondelettes.

En consecuencia, el sistema lineal de ecuaciones, con los operadores  $V$ ,  $K$  y  $W$  discretizados en bases de ondelettes, que resuelve el problema discreto asociado a la formulación variacional (3.45) es dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_J & \hat{\mathbf{A}}_J^\top & & & \\ \hat{\mathbf{A}}_J & \check{\mathbf{A}}_J + \mathbf{S}_J^\top \mathbf{W}_\psi \mathbf{S}_J & \mathbf{S}_J^\top \mathbf{K}_\psi^\top - \mathbf{G}_J^\top \mathbf{T}_J^{-1} & & \\ & \mathbf{T}_J^{-\top} \mathbf{G}_J - \mathbf{K}_\psi \mathbf{S}_J & \mathbf{V}_\psi & & -\mathbf{E}_\psi^\top \\ & & \mathbf{E}_\psi & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_J^\Omega \\ \mathbf{u}_J^\Gamma \\ \boldsymbol{\sigma}_\psi \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_J^\Omega \\ \mathbf{F}_J^\Gamma \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Notar que la incógnita  $\sigma_J \in V_J$  aparece discretizada en la base de ondelettes  $\Psi_J^{1,m'}$ . Esto reduce el costo computacional que involucra un cambio de bases en cada paso de la solución iterativa del sistema (3.48).

### 3.5.3 El Operador Hipersingular

En lo que sigue nos ocuparemos de las propiedades de las matrices  $\mathbf{W}_J$  y  $\mathbf{W}_\psi$ , correspondientes a la representación del operador hipersingular en una única y múltiples escalas de discretización, respectivamente.

Suponiendo, por simplicidad, correspondencia de índices entre las funciones lineales por tramos  $\omega_{J,k} = \varphi_{J,k} \circ \gamma$  y las funciones constantes por tramos  $\phi_{J,k} = \phi(N_J \cdot -k)$

sobre el intervalo  $[0, 1]$ , esto es,  $\Gamma_J \equiv \Delta_J$ , deducimos usando la identidad (2.17) que

$$\langle \omega_{J,k'}, W\omega_{J,k} \rangle = N_J^2 \left\{ \langle V\phi_{J,k-1}, \phi_{J,k'-1} \rangle - \langle V\phi_{J,k}, \phi_{J,k'-1} \rangle \right. \\ \left. - \langle V\phi_{J,k-1}, \phi_{J,k'} \rangle + \langle V\phi_{J,k}, \phi_{J,k'} \rangle \right\}.$$

Esta expresión conduce a la siguiente relación entre las matrices  $\mathbf{W}_J$  y  $\mathbf{V}_J$ ,

$$\mathbf{W}_J = N_J^2 \mathbf{H}_J^\top \mathbf{V}_J \mathbf{H}_J, \quad (3.49)$$

donde  $\mathbf{H}_J$  es la matriz cuadrada de orden  $N_J$  definida por

$$\mathbf{H}_J := \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -1 & \\ -1 & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Puesto que la aplicación de la matriz  $\mathbf{H}_J$  a un vector  $\mathbf{v}_J \in \mathbb{R}^{N_J}$  requiere  $O(N_J)$  operaciones, en una única escala de discretización es suficiente calcular sólo dos matrices correspondientes a los términos de frontera, a saber, las matrices  $\mathbf{V}_J$  y  $\mathbf{K}_J$ , ya que la matriz  $\mathbf{W}_J$  puede ser calculada en términos de la matriz  $\mathbf{V}_J$  usando la relación (3.49).

Para las matrices  $\mathbf{W}_\psi$  y  $\mathbf{V}_\psi$  podemos derivar una relación similar a (3.49). En efecto, si suponemos  $m' = m + 1$ , con  $m \geq 2$ , es inmediato comprobar que

$$\langle \psi_{\lambda'}, W\psi_\lambda \rangle = N_j N_{j'} \langle V\psi'_\lambda, \psi'_{\lambda'} \rangle$$

(ver la Observación 3.15 y el análisis al final de la subsección 3.4.2). Luego, definiendo la matriz diagonal

$$\mathbf{D}_J := [N_j \delta_{\lambda', \lambda}]_{\lambda', \lambda \in \nabla_J},$$

obtenemos la siguiente relación entre las matrices  $\mathbf{W}_\psi$  y  $\mathbf{V}_\psi$

$$\mathbf{W}_\psi = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0^\top & \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{D}_J \mathbf{V}_\psi \mathbf{D}_J \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Sabemos, debido a los Teoremas 3.19 y 3.20, que es posible comprimir el operador hipersingular en función de la compresión definida para el operador de capa simple. Esto sin afectar la consistencia del esquema comprimido original. Por lo tanto, usando la relación (3.50), concluimos que para la solución iterativa del sistema comprimido asociado a (3.48), es también suficiente calcular sólo dos matrices correspondientes a los términos de frontera, a saber, las matrices comprimidas  $\mathbf{V}_\psi^c = \mathbf{V}_J^c$  y  $\mathbf{K}_\psi^c = \mathbf{K}_J^c$ .

## 3.6 Precondicionamiento

La matriz de sistema en (3.48) incluye matrices que corresponden a la discretización de operadores de orden positivo y negativo. Luego, es importante estudiar el precondicionamiento de (3.48) para su eficiente resolución por métodos iterativos. Sobre la base del precondicionador BPX [3] y el precondicionador multiescala analizado en la sección 1.4, proponemos un precondicionador para los esquemas simétrico y no simétrico asociados a (3.48). Además, usando una transformación del tipo Bramble-Pasciak [2], proponemos un esquema precondicionado, simétrico y definido positivo el cual puede ser resuelto por el método iterativo del gradiente conjugado.

### 3.6.1 El Precondicionador BPX

Sea  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  el operador definido por  $(Au)v = a(u, v)$ , donde  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$ . Luego,  $A$  es un operador simétrico, definido positivo y de orden dos. Por otro lado, en la notación de la subsección 3.5.2, sea la base nodal  $\Upsilon_j := \{ \varphi_{j,k} \mid k \in \Omega_j \}$  normalizada en  $L^2(\Omega)$  de modo que, uniformemente en  $j$ ,

$$\|\mathbf{c}_j\|_{\ell^2(\Omega_j)} \sim \|\Upsilon_j^\top \mathbf{c}_j\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.51)$$

Ahora, sea  $P_j$  el proyector ortogonal sobre el espacio  $V_{h_j} := \text{clos}_{H^1(\Omega)}(\text{span } \Upsilon_j)$ . Claramente,  $P_j$  satisface  $P_{j'}P_j = P_{j'}$  para todo  $j' \leq j$ , y también  $P_j^* = P_j$ . En consecuencia, puesto que los espacios  $V_{h_j}$  tienen suficientes propiedades de aproximación y regularidad, podemos aplicar el Teorema 1.2 para deducir que el operador

$$D_J := \sum_{j=-1}^{J-1} 2^{2j} (P_{j+1} - P_j),$$

donde  $P_{-1} = 0$ , es simétrico, definido positivo y satisface

$$(D_J v_J, v_J) = \|D_J^{1/2} v_J\|_{L^2(\Omega)}^2 \sim \|v_J\|_{H^1(\Omega)}^2$$

para todo  $v_J \in V_{h_J}$ . Aquí,  $(\cdot, \cdot)$  denota el producto interior en  $L^2(\Omega)$ . Luego, usando elipticidad y definiendo  $A_J := P_J A P_J$ , se sigue que

$$(D_J v_J, v_J) \sim (A_J v_J, v_J),$$

esto es, los operadores  $D_J$  y  $A_J$  son espectralmente equivalentes y, así, el operador  $D_J^{-1/2} A_J D_J^{-1/2}$  tiene número de condición uniformemente acotado. Notar que lo anterior corresponde a la situación considerada en el Teorema 1.4, ya que la evaluación

de  $D_J^{-1}$  parece requerir el conocimiento de bases explícitas para los complementos ortogonales. Sin embargo, puesto que

$$D_J^{-1} = \sum_{j=-1}^{J-1} 2^{-2j} (P_{j+1} - P_j),$$

y  $\|(P_{j+1} - P_j)v\|^2 = \|P_{j+1}v\|^2 - \|P_jv\|^2$ , es directo ver que  $D_J^{-1}$  es espectralmente equivalente al operador  $\sum_{j=0}^J 2^{-2j} P_j$ , el cual, debido a la propiedad de estabilidad uniforme (3.51), es a su vez espectralmente equivalente al operador

$$C_J := \sum_{j=0}^J 2^{-2j} \sum_{k \in \Omega_j} (\cdot, \varphi_{j,k}) \varphi_{j,k}. \quad (3.52)$$

Este operador es simétrico y definido positivo, por lo que su raíz cuadrada  $C_J^{1/2}$  está bien definida. Además, la aplicación de  $C_J^{1/2}$  a una función  $v_J \in V_{h_J}$  da la siguiente equivalencia de normas

$$\|C_J^{1/2} v_J\|_{H^s(\Omega)} \sim \|v_J\|_{H^{s-1}(\Omega)} \quad (3.53)$$

para todo  $-3/2 < s < 3/2$ . Por lo tanto, de acuerdo a lo anterior, el operador  $C_J^{1/2} A_J C_J^{1/2}$  tiene también número de condición uniformemente acotado (ver [3, 22]).

El operador  $C_J$  definido por (3.52) es el conocido preconditionador BPX, y los siguientes argumentos muestran que puede ser implementado de manera similar al preconditionador multiescala de la sección 1.4, con la salvedad que las transformaciones multiescala sólo involucran las bases nodales y los coeficientes de aproximación. En efecto, no es difícil ver que la representación matricial de  $C_J$  es dada por

$$\mathbf{C}_J := \sum_{j=0}^J 2^{-2j} \mathbf{I}_j \mathbf{I}_j^\top, \quad (3.54)$$

donde  $\mathbf{I}_j$  es la representación matricial de la base nodal  $\Upsilon_j$  de  $V_{h_j}$  en términos de la base nodal  $\Upsilon_J$  de  $V_{h_J}$ . Notar que la acción de  $\mathbf{I}_j$  puede ser expresada como

$$\mathbf{I}_j = \mathbf{I}_{J-1}^J \mathbf{I}_{J-2}^{J-1} \cdots \mathbf{I}_j^{j+1},$$

donde la matriz de *prolongación*  $\mathbf{I}_j^{j+1}$  es definida por el cambio de bases siguiente

$$\Upsilon_j^\top = \Upsilon_{j+1}^\top \mathbf{I}_j^{j+1}.$$

Esta expresión muestra que el preconditionador  $\mathbf{C}_J$  depende completamente de las transformaciones entre bases nodales de espacios multiescala. Luego, definiendo para  $1 \leq j \leq J$  las matrices

$$\mathbf{C}_j := \sum_{k=0}^j 2^{-2k} \mathbf{I}_k^j (\mathbf{I}_k^j)^\top,$$

obtenemos la siguiente relación de recurrencia

$$\mathbf{C}_j = 2^{-2j} + \mathbf{I}_{j-1}^j \mathbf{C}_{j-1} (\mathbf{I}_{j-1}^j)^\top.$$

Por lo tanto, la aplicación del preconditionador  $\mathbf{C}_J$  a un vector  $\mathbf{v}_J \in \mathbb{R}^{\#\Omega_J}$  puede ser llevada a cabo por medio del siguiente algoritmo

```

for  $j = J : 1$ 
     $\mathbf{v}_{j-1} = (\mathbf{I}_{j-1}^j)^\top \mathbf{v}_j$ 
end
 $\mathbf{w}_0 = \mathbf{v}_0$ 
for  $j = 1 : J$ 
     $\mathbf{w}_j = 2^{-2j} \mathbf{v}_j + \mathbf{I}_{j-1}^j \mathbf{w}_{j-1}$ 
end
 $\mathbf{C}_J \mathbf{v}_J = \mathbf{w}_J.$ 

```

Como es probado en [3], el número de operaciones en este algoritmo, y también los requerimientos de memoria para guardar todos los vectores  $\mathbf{v}_j$ , es proporcional al número de incógnitas en  $V_{h_j}$ .

### 3.6.2 El Esquema Precondicionado

Primero, escribimos la matriz de sistema en (3.48) como

$$\mathbf{L}_J := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_J & \hat{\mathbf{A}}_J^\top \\ \hat{\mathbf{A}}_J & \check{\mathbf{A}}_J + \mathbf{S}_J^\top \mathbf{W}_\psi \mathbf{S}_J \end{bmatrix} & \mathbf{S}_J^\top \mathbf{K}_\psi^\top - \mathbf{G}_J^\top \mathbf{T}_J^{-1} \\ & \mathbf{V}_\psi \\ & \mathbf{E}_\psi & -\mathbf{E}_\psi^\top \end{bmatrix}.$$

Esta matriz es no simétrica e indefinida, pero puede ser transformada a una matriz simétrica, aún indefinida, al multiplicar la tercera fila por menos uno. De esta forma,

obtenemos la nueva matriz

$$\bar{\mathbf{L}}_J := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_J & \hat{\mathbf{A}}_J^\top \\ \hat{\mathbf{A}}_J & \check{\mathbf{A}}_J + \mathbf{S}_J^\top \mathbf{W}_\psi \mathbf{S}_J \\ & \mathbf{K}_\psi \mathbf{S}_J - \mathbf{T}_J^{-\top} \mathbf{G}_J \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{S}_J^\top \mathbf{K}_\psi^\top - \mathbf{G}_J^\top \mathbf{T}_J^{-1} \\ -\mathbf{V}_\psi \\ \mathbf{E}_\psi \end{bmatrix} \\ & \mathbf{E}_\psi^\top \end{bmatrix},$$

la cual es equivalente a  $\mathbf{L}_J$ . Luego, definiendo la matriz

$$\mathbf{P}_J := \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_J] & & \\ & \mathbf{D}_J & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

donde  $\mathbf{C}_J$  es el preconditionador BPX dado por (3.54) y  $\mathbf{D}_J$  es el preconditionador diagonal definido por (1.32) con  $s = 1$ , tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.24.** *Sean  $\mathbf{L}_J$  y  $\bar{\mathbf{L}}_J$  definidas como arriba. Entonces el preconditionador  $\mathbf{P}_J$  definido por (3.55) satisface*

$$\text{cond}(\mathbf{P}_J^{1/2} \mathbf{L}_J \mathbf{P}_J^{1/2}) = \text{cond}(\mathbf{P}_J^{1/2} \bar{\mathbf{L}}_J \mathbf{P}_J^{1/2}) = O(1) \quad \text{cuando } J \rightarrow \infty,$$

donde  $\text{cond}(\mathbf{A}) := \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$  y  $\|\cdot\|$  es la norma espectral.

*Demostración.* Sean  $L_J : V_{h_J} \times V_J \times \mathbb{R} \rightarrow V_{h_J} \times \tilde{V}_J \times \mathbb{R}$  el operador de dimensión finita asociado a cualquiera de las matrices  $\mathbf{L}_J$  ó  $\bar{\mathbf{L}}_J$ , y  $P_J^{1/2} : L^2(\Omega) \times L^2(I) \times \mathbb{R} \rightarrow H_0^1(\Omega) \times H^{-1/2}(I) \times \mathbb{R}$  el operador matricial dado por

$$P_J^{1/2} := \begin{bmatrix} C_J^{1/2} & & \\ & D_J^{1/2} & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

donde  $C_J^{1/2}$  es la raíz cuadrada del preconditionador BPX definido por (3.52) y  $D_J^{1/2}$  es el preconditionador multiescala definido por (1.33) con  $s = 1/2$ . Luego, denotando por  $\mathcal{L} = L^2(\Omega) \times L^2(I) \times \mathbb{R}$  y  $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H^{-1/2}(I) \times \mathbb{R}$ , obtenemos para todo  $\hat{v}_J = (v_J, \rho_J, d) \in V_{h_J} \times V_J \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|\hat{v}_J\|_{\mathcal{L}}^2 &= \|v_J\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\rho_J\|_{L^2(I)}^2 + |d|^2 && \text{por definición,} \\ &\sim \|C_J^{1/2} v_J\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|D_J^{1/2} \rho_J\|_{H^{-1/2}(I)}^2 + |d|^2 && \text{por (1.26), (1.27) y (3.53),} \\ &= \|P_J^{1/2} \hat{v}_J\|_{\mathcal{H}}^2 && \text{por definición,} \\ &\sim \|L_J P_J^{1/2} \hat{v}_J\|_{\mathcal{H}^*}^2 && \text{por estabilidad,} \\ &\sim \|(P_J^{1/2})^* L_J P_J^{1/2} \hat{v}_J\|_{\mathcal{L}}^2 && \text{por (1.26), (1.27) y (3.53).} \end{aligned}$$

Esto completa la demostración.  $\square$

Conforme a lo anterior, los sistemas lineales precondicionados simétrico y no simétrico pueden ser resueltos, por ejemplo, por los métodos iterativos MINRES (Minimal Residual) y GMRES (Generalized Minimal Residual), respectivamente (ver en [15] la definición de estos métodos iterativos).

### 3.6.3 La Transformación de Bramble-Pasciak

En esta subsección nos ocuparemos de aplicar a la formulación (3.45) la transformación de Bramble-Pasciak propuesta en [2]. Así, nuestro objetivo consistirá en derivar un sistema simétrico y definido positivo, equivalente (3.48), el cual puede ser resuelto eficientemente por el método iterativo del gradiente conjugado.

Primero, usando la notación continua, modificamos la definición del operador  $L$  en (3.46) como el operador de dimensión finita  $L : V_J \times V_{h_J} \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{V}_J \times V_{h_J} \times \mathbb{R}$  definido por

$$L := \begin{bmatrix} V & (\frac{1}{2} - K)G & -E^* \\ G^*(\frac{1}{2} - K)^* & -(A + G^*WG) & \\ -E & & \end{bmatrix},$$

y asociado a la matriz de sistema del siguiente sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_\psi & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}_J^{-\top} \mathbf{G}_J - \mathbf{K}_\psi \mathbf{S}_J \\ \mathbf{A}_J & \hat{\mathbf{A}}_J^\top \\ \mathbf{G}_J^\top \mathbf{T}_J^{-1} - \mathbf{S}_J^\top \mathbf{K}_\psi^\top \\ -\mathbf{E}_\psi \end{bmatrix} & -\mathbf{E}_\psi^\top \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_J^\top \mathbf{T}_J^{-1} - \mathbf{S}_J^\top \mathbf{K}_\psi^\top \\ -\mathbf{E}_\psi \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}_J^{-\top} \mathbf{G}_J - \mathbf{K}_\psi \mathbf{S}_J \\ \mathbf{A}_J & \hat{\mathbf{A}}_J^\top \\ \hat{\mathbf{A}}_J & \check{\mathbf{A}}_J + \mathbf{S}_J^\top \mathbf{W}_\psi \mathbf{S}_J \end{bmatrix} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\psi \\ \mathbf{u}_J^\Omega \\ \mathbf{u}_J^\Gamma \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_J^\Omega \\ \mathbf{F}_J^\Gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

el cual es equivalente al sistema lineal (3.48). A continuación, en atención a la notación de [2], simplificamos la definición de  $L$  dándole la forma

$$L = \begin{bmatrix} V & Q^* \\ Q & -U \end{bmatrix},$$

donde  $U$  y  $Q$  son dados por

$$Q := \begin{bmatrix} G^*(\frac{1}{2} - K)^* \\ -E \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U := \begin{bmatrix} A + G^*WG & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notar que  $U$  es semidefinido positivo. Además, bajo el supuesto que se satisface  $\text{diam}(\Omega) < 1$ , se sigue que  $V$  es definido positivo.

Ahora, de acuerdo a la sección 1.4, sea  $D$  el preconditionador multiescala para  $V$ . Obviamente  $D$  y  $V$  son espectralmente equivalentes, esto es, se verifica

$$\alpha_0 \langle V\rho, \rho \rangle \leq \langle D\rho, \rho \rangle \leq \alpha_1 \langle V\rho, \rho \rangle$$

para todo  $\rho \in V_J$  y algunas constantes  $\alpha_0, \alpha_1 > 0$  independientes de  $J$ . Aquí,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto interior en  $L^2(I)$ . Para lo que sigue, necesitamos suponer que  $\alpha_1 < 1$ , de manera que para  $\alpha = 1 - \alpha_0$  se tiene

$$0 < \langle (V - D)\rho, \rho \rangle \leq \alpha \langle V\rho, \rho \rangle \quad (3.57)$$

para todo  $\rho \in V_J$ . Si esta condición no se satisface, es fácil calcular un factor de escalamiento para  $D$  tal que el preconditionador escalado verifica (3.57) (ver [2]).

Luego, como una consecuencia de (3.57), dado el operador

$$Z := \begin{bmatrix} V - D & \\ & I \end{bmatrix},$$

podemos definir sobre  $V_J \times V_{h_J} \times \mathbb{R}$  el siguiente producto interior

$$[\hat{\sigma}, \hat{\rho}]_Z := \langle V\sigma, \rho \rangle - \langle D\sigma, \rho \rangle + (u, v) + cd, \quad (3.58)$$

donde  $\hat{\sigma} = (\sigma, u, c)$ ,  $\hat{\rho} = (\rho, v, d)$  y  $(\cdot, \cdot)$  denota el producto interior en  $L^2(\Omega)$ . Para derivar el sistema definido positivo, definimos el operador  $M := NL$  como

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} D^{-1} & \\ QD^{-1} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & Q^* \\ Q & -U \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D^{-1}V & D^{-1}Q^* \\ QD^{-1}(V - D) & U + QD^{-1}Q^* \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Observar que

$$ZM = ZNL = \begin{bmatrix} (V - D)D^{-1}V & (V - D)D^{-1}Q^* \\ QD^{-1}(V - D) & U + QD^{-1}Q^* \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,  $M$  es simétrico con respecto al producto interior dado por (3.58). El siguiente teorema, probado en [2], nos permitirá deducir que  $M$  es definido positivo en dicho producto interior.

**Teorema 3.25.** Sean  $M$  el operador (3.59) y  $\tilde{M}$  definido por

$$\tilde{M} := \begin{bmatrix} I \\ U + QV^{-1}Q^* \end{bmatrix}.$$

Entonces las siguientes desigualdades se verifican

$$\lambda_0 [\tilde{M}\hat{\sigma}, \hat{\sigma}]_Z \leq [M\hat{\sigma}, \hat{\sigma}]_Z \leq \lambda_1 [\tilde{M}\hat{\sigma}, \hat{\sigma}]_Z$$

para todo  $\hat{\sigma} = (\sigma, u, c) \in V_J \times V_{h_J} \times \mathbb{R}$ , donde

$$\lambda_0 = \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{\alpha^2}{4}}\right)^{-1} \quad y \quad \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{1 - \alpha},$$

con  $\alpha$  dado por (3.57).

Notar que el teorema muestra que cualquier preconditionador para  $\tilde{M}$  sirve como un preconditionador para  $M$ . Por otro lado, el teorema nos indica que  $M$  es definido positivo con respecto al producto interior dado por (3.58) si y sólo si el operador  $U + QV^{-1}Q^*$  es definido positivo con respecto al producto interior en  $L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ .

En lo que resta de esta sección probaremos que  $U + QV^{-1}Q^*$  es definido positivo. Para ello, en primer lugar definimos los siguientes operadores

$$S_0 := V^{-1}\left(\frac{1}{2} - K\right) \quad y \quad S_1 := W + S_0^*VS_0, \quad (3.60)$$

los que corresponden a los operadores de Steklov-Poincaré utilizados en el método de descomposición de dominios. El siguiente lema será también requerido.

**Lema 3.26.** Existe una constante  $\beta > 0$  tal que

$$(G^*S_1Gu, u) \leq \beta(Au, u)$$

para todo  $u \in V_{h_J}$ .

*Demostración.* Usando la continuidad de  $S_1$ , el teorema de trazas y la  $V_{h_J}$ -elipticidad de  $A$ , en ese orden, se tiene

$$(G^*S_1Gu, u) = \langle S_1Gu, Gu \rangle \lesssim \|Gu\|_{H^{1/2}(I)}^2 \lesssim \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \lesssim (Au, u)$$

para todo  $u \in V_{h_J}$ . Esto prueba el lema.  $\square$

A continuación, por  $[\cdot, \cdot]$  denotamos el producto interior sobre  $V_{h_J} \times \mathbb{R}$  definido como el producto interior usual en  $L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ , esto es,

$$[\hat{u}, \hat{v}] = (u, v) + cd,$$

donde  $\hat{u} = (u, c)$  y  $\hat{v} = (v, d)$ . Ahora estamos en condiciones de probar que el operador  $U + QV^{-1}Q^*$  es definido positivo.

**Teorema 3.27.** Sean  $R := U + QV^{-1}Q^*$  y  $\tilde{R}$  el operador simétrico y definido positivo dado por

$$\tilde{R} := \begin{bmatrix} A & \\ & EV^{-1}E^* \end{bmatrix}.$$

Entonces las siguientes desigualdades se verifican

$$\gamma_0 [\tilde{R}\hat{u}, \hat{u}] \leq [R\hat{u}, \hat{u}] \leq \gamma_1 [\tilde{R}\hat{u}, \hat{u}]$$

para todo  $\hat{u} = (u, c) \in V_{h_J} \times \mathbb{R}$ , donde

$$\gamma_0 = 1 + \frac{\beta}{2} - \sqrt{\beta + \frac{\beta^2}{4}} \quad y \quad \gamma_1 = 1 + \frac{\beta}{2} + \sqrt{\beta + \frac{\beta^2}{4}},$$

con  $\beta$  dado por el Lema 3.26.

*Demostración.* Procedemos en cuatro pasos.

1. Usando la definición de los operadores  $S_0$  y  $S_1$  en (3.60), cálculos directos dan la siguiente identidad

$$R = U + QV^{-1}Q^* = \begin{bmatrix} A + G^*S_1G & -(ES_0G)^* \\ -ES_0G & EV^{-1}E^* \end{bmatrix}.$$

Luego, dado cualquier número real  $\omega \neq 0$ , es inmediato comprobar que el operador  $R$  admite la siguiente descomposición

$$R = (1 - \omega)\tilde{R} + A_\omega + B_\omega,$$

donde los operadores  $A_\omega$  y  $B_\omega$  son definidos por

$$A_\omega := \begin{bmatrix} \omega A + (1 - \frac{1}{\omega})G^*S_1G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B_\omega := \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega}G^*S_1G & -(ES_0G)^* \\ -ES_0G & \omega EV^{-1}E^* \end{bmatrix}.$$

2. Usando el Lema 3.26, se sigue que el operador  $A_\omega$  satisface

$$[A_\omega \hat{u}, \hat{u}] = \omega(Au, u) + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)(G^* S_1 G u, u) \geq 0$$

si y sólo si  $\omega > 0$  y  $\frac{\omega^2}{1-\omega} = \beta$ , es decir, si y sólo si  $\omega = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\beta + \frac{\beta^2}{4}}$ . Notar que  $0 < \omega < 1$  se verifica para todo  $\beta > 0$ . Análogamente, se sigue que

$$[A_\omega \hat{u}, \hat{u}] = \omega(Au, u) + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)(G^* S_1 G u, u) \leq 0$$

si y sólo si  $\omega < 0$  y  $\frac{\omega^2}{1-\omega} = \beta$ , es decir, si y sólo si  $\omega = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{\beta + \frac{\beta^2}{4}}$ .

3. A continuación, observar que el operador  $B_\omega$  definido en la descomposición de  $R$  satisface a su vez la siguiente descomposición

$$B_\omega = T_\omega^* D_\omega T_\omega,$$

donde los operadores  $D_\omega$  y  $T_\omega$  son definidos por

$$D_\omega := \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} W & \\ & \omega V^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T_\omega := \begin{bmatrix} G & \\ \frac{1}{\omega} V S_0 G & -E^* \end{bmatrix}.$$

Luego, puesto que  $W$  es semidefinido positivo,  $V$  es definido positivo, y  $T_\omega$  es un operador continuo sobre  $V_{h_J} \times \mathbb{R}$  para todo  $\omega \neq 0$ , deducimos que

$$[B_\omega \hat{u}, \hat{u}] \geq 0 \quad \text{si } \omega > 0 \quad \text{y} \quad [B_\omega \hat{u}, \hat{u}] \leq 0 \quad \text{si } \omega < 0$$

para todo  $\hat{u} \in V_{h_J} \times \mathbb{R}$ .

4. Por consiguiente, para  $\omega^- = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{\beta + \frac{\beta^2}{4}} < 0$ , tenemos

$$[R\hat{u}, \hat{u}] = (1 - \omega^-)[\tilde{R}\hat{u}, \hat{u}] + [(A_{\omega^-} + B_{\omega^-})\hat{u}, \hat{u}] \leq (1 - \omega^-)[\tilde{R}\hat{u}, \hat{u}],$$

y para  $\omega^+ = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\beta + \frac{\beta^2}{4}} > 0$ ,

$$[R\hat{u}, \hat{u}] = (1 - \omega^+)[\tilde{R}\hat{u}, \hat{u}] + [(A_{\omega^+} + B_{\omega^+})\hat{u}, \hat{u}] \geq (1 - \omega^+)[\tilde{R}\hat{u}, \hat{u}].$$

Esto completa la demostración. □

Así, este teorema en combinación con el Teorema 3.25 nos permiten probar que  $M$  es efectivamente definido positivo con respecto al producto interior (3.58).

**Teorema 3.28.** Sean  $M$  el operador (3.59) y  $P$  el operador simétrico y definido positivo dado por

$$P := \begin{bmatrix} I & & \\ & A & \\ & & EV^{-1}E^* \end{bmatrix}.$$

Entonces las siguientes desigualdades se verifican

$$\lambda_0 \gamma_0 [P\hat{\sigma}, \hat{\sigma}]_Z \leq [M\hat{\sigma}, \hat{\sigma}]_Z \leq \lambda_1 \gamma_1 [P\hat{\sigma}, \hat{\sigma}]_Z$$

para todo  $\hat{\sigma} = (\sigma, u, c) \in V_J \times V_{h_J} \times \mathbb{R}$ .

Finalmente, incluimos una discusión de la aplicación del método iterativo del gradiente conjugado para la solución del sistema lineal (3.56). Primero, observar que la aplicación del operador  $D$  no es necesaria en la correspondiente implementación computacional, aun cuando él aparezca explícitamente en la definición del producto interior (3.58). En efecto, al multiplicar  $Z$  y el operador  $N$  en la definición de  $M$  por (3.59), obtenemos

$$ZN = \begin{bmatrix} V - D & \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{-1} & \\ QD^{-1} & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} VD^{-1} - I & \\ QD^{-1} & -I \end{bmatrix}.$$

Luego, sólo se involucra la aplicación del operador  $D^{-1}$ .

Ahora, sean  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{N}$  las representaciones matriciales de los operadores  $Z$  y  $N$  con respecto a la discretización dada por sistema lineal (3.56), el cual abreviamos  $\mathbf{Lu} = \mathbf{f}$ . De esta forma, la representación matricial del operador  $M$  es dada por la matriz

$$\mathbf{M} = \mathbf{NL},$$

la cual, debido al Teorema 3.28, puede ser preconditionada por la matriz

$$\mathbf{P} := \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & \\ & \mathbf{C}_J & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

donde  $\mathbf{C}_J$  es el preconditionador BPX dado por (3.54). En consecuencia, colocando  $\mathbf{g} = \mathbf{Nf}$  y denotando por  $[\cdot, \cdot]_{\mathbf{Z}}$  la contraparte discreta del producto interior definido por (3.58), una versión preconditionada del método iterativo del gradiente conjugado

para la solución de (3.56) por medio del sistema lineal  $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{g}$ , es dada por el siguiente algoritmo

Elegir  $\mathbf{u}_0$  arbitrario

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{u}_0$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{s}_0 = \mathbf{P}\mathbf{r}_0$$

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{M}\mathbf{p}_0$$

for  $k = 1, 2, \dots$

$$\alpha_k = \frac{[\mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{r}_{k-1}]_{\mathbf{Z}}}{[\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{p}_{k-1}]_{\mathbf{Z}}}$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1} + \alpha_k \mathbf{p}_{k-1}$$

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{q}_{k-1}$$

verificar convergencia; continuar si es necesario

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{P}\mathbf{r}_k$$

$$\beta_k = \frac{[\mathbf{s}_k, \mathbf{r}_k]_{\mathbf{Z}}}{[\mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{r}_{k-1}]_{\mathbf{Z}}}$$

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{s}_k + \beta_k \mathbf{p}_{k-1}$$

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{M}\mathbf{p}_k$$

end.

Con respecto a este algoritmo, se tiene la estimación de error

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k\|_{\mathbf{M}} \leq 2 \left( \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^k \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_{\mathbf{M}},$$

donde  $\|\cdot\|_{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}\cdot, \cdot]_{\mathbf{Z}}^{1/2}$  y  $\kappa = \text{cond}(\mathbf{P}\mathbf{M})$  es el número de condición espectral de  $\mathbf{P}\mathbf{M}$ , el que en este caso es uniformemente acotado.

## 3.7 Experimentos Numéricos

En esta sección se presentan algunos experimentos numéricos que corroboran la teoría presentada. En todas la pruebas se ha considerado sólo la primera compresión y se han elegido, de acuerdo a las restricciones impuestas en la subsección 3.4.1, las bases de ondelettes  $\Psi_J^{1,3}$  y  $\Psi_J^{2,2}$ .

Para comparar los esquemas de Galerkin comprimido y no comprimido, primero construimos un ejemplo para el cual una solución analítica es conocida. Sea  $\Omega_0$  el dominio poligonal con forma de L definido por  $\Omega_0 = [-0.1, 0.1]^2 \setminus [0, 0.1]^2$ . Definimos la función  $u = v + w \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus (-0.05, 0))$ , donde  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (-0.05, 0))$  es la función armónica dada por

$$v(x, y) = 0.01 \frac{(x + 0.05) + y}{(x + 0.05)^2 + y^2},$$

y  $w \in C^2(\mathbb{R}^2)$  es la función definida por

$$w(x, y) = 2 + \begin{cases} \left( \frac{x^2}{0.3^2} + \frac{y^2}{0.2^2} - 1 \right)^3 & \text{si } \frac{x^2}{0.3^2} + \frac{y^2}{0.2^2} \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función  $f = -\Delta w$  tiene soporte compacto, con  $\text{supp } f = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{0.3^2} + \frac{y^2}{0.2^2} \leq 1 \right\}$ . Luego, colocando  $g = u|_{\Gamma_0}$ , obtenemos el siguiente problema exterior

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_0, \\ u &= g && \text{sobre } \Gamma_0, \\ u(x) &= O(1) && \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Para el acoplamiento elegimos  $\Gamma$  como la elipse con semiejes 0.35 y 0.25. La Figura 3.6 muestra la geometría de problema acoplado asociado al problema exterior (3.61).

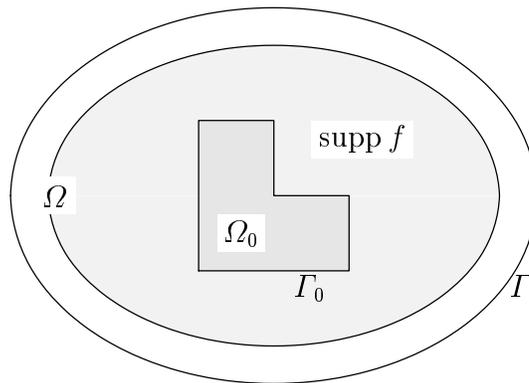


Figura 3.6: Geometría del problema acoplado.

El gráfico de la función  $u$  es dado en la Figura 3.7.

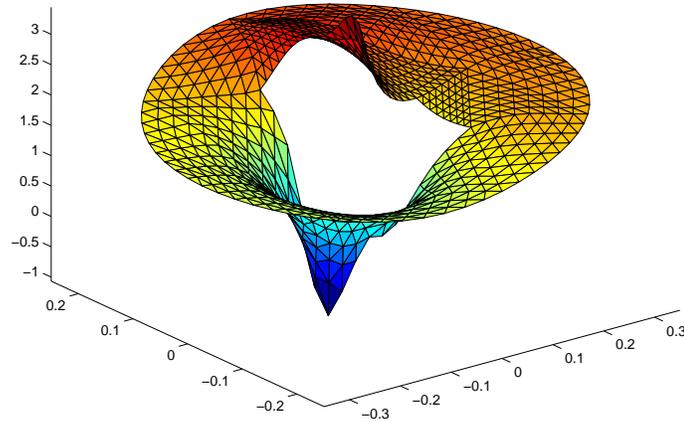


Figura 3.7: Gráfico de la solución analítica  $u$  sobre  $\Omega$ .

En las Tablas 3.2 y 3.3 se muestra el efecto de la compresión de matrices y el tiempo computacional requerido para ensamblar las matrices  $\mathbf{V}_J$ ,  $\mathbf{V}_J^c$ ,  $\mathbf{K}_J$  y  $\mathbf{K}_J^c$ . Como puede ser visto, el ahorro en los requerimientos de recursos computacionales es enorme en comparación con el esquema sin compresión, ya para un número moderado de grados de libertad sobre la frontera.

$\#\Gamma_J$	$\#\mathbf{V}_J^c$ en %	$T(\mathbf{V}_J)$ en seg.	$T(\mathbf{V}_J^c)$ en seg.
32	94.531	0.01	0.03
64	68.457	0.04	0.06
128	43.726	0.16	0.20
256	26.685	0.66	0.59
512	15.768	2.75	1.47
1024	8.9458	11.3	3.75
2048	5.0101	27.1	9.31

Tabla 3.2: Cardinalidad de  $\mathbf{V}_J^c$  en porcentaje, y tiempo computacional en segundos requerido para ensamblar  $\mathbf{V}_J$  y  $\mathbf{V}_J^c$ .

En las Tablas 3.4 y 3.5 comparamos la exactitud obtenida en los esquemas de Galerkin comprimido y no comprimido. Como puede observarse, la exactitud del

$\#\Gamma_J$	$\#\mathbf{K}_J^c$ en %	$T(\mathbf{K}_J)$ en seg.	$T(\mathbf{K}_J^c)$ en seg.
32	100.00	0.01	0.01
64	86.426	0.02	0.04
128	59.033	0.06	0.16
256	36.688	0.23	0.45
512	21.698	0.98	1.16
1024	12.534	4.57	2.94
2048	7.0668	18.9	7.54

Tabla 3.3: Cardinalidad de  $\mathbf{K}_J^c$  en porcentaje, y tiempo computacional en segundos requerido para ensamblar  $\mathbf{K}_J$  y  $\mathbf{K}_J^c$ .

esquema comprimido es casi idéntica a la del esquema sin comprimir. Además, los resultados muestran que la convergencia no se ve deteriorada por nuestra estrategia de compresión.

$\#\Omega_J$	$\#\Gamma_J$	$\ u - u_J\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \sigma - \sigma_J\ _{L^2(I)}$	$ c - c_J $
188	32	9.3063 (-03)	5.9979 (-02)	3.1150 (-03)
696	64	3.7929 (-03)	1.6400 (-02)	4.3119 (-03)
2672	128	7.7040 (-04)	4.6377 (-03)	7.7151 (-04)
10464	256	1.3317 (-04)	1.3902 (-03)	5.6473 (-05)
41408	512	3.9053 (-05)	4.1934 (-04)	2.9662 (-05)
164736	1024	8.6537 (-06)	1.3361 (-04)	4.7211 (-06)
657152	2048	2.0511 (-06)	4.4152 (-05)	6.4501 (-07)

Tabla 3.4: Exactitud del esquema de Galerkin no comprimido.

Finalmente, comparamos el desempeño de distintos métodos iterativos. La Tabla 3.6 muestra el número de iteraciones requeridas por los métodos MINRES y GMRES para resolver los sistemas simétrico y no simétrico, respectivamente (ver la subsección 3.6.2). En cada caso, el esquema en una única escala de discretización fue parcialmente preconditionado por BPX, mientras que el esquema multiescala comprimido fue completamente preconditionado por BPX y un escalamiento diagonal

$\#\Omega_J$	$\#\Gamma_J$	$\ u - u_J^c\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \sigma - \sigma_J^c\ _{L^2(I)}$	$ c - c_J^c $
188	32	9.3063 (-03)	5.9980 (-02)	3.1150 (-03)
696	64	3.7929 (-03)	1.6402 (-02)	4.3119 (-03)
2672	128	7.7040 (-04)	4.6409 (-03)	7.7152 (-04)
10464	256	1.3317 (-04)	1.3907 (-03)	5.6466 (-05)
41408	512	3.9051 (-05)	4.2303 (-04)	2.9680 (-05)
164736	1024	8.6512 (-06)	1.4341 (-04)	4.7292 (-06)
657152	2048	2.0487 (-06)	7.5080 (-05)	6.5146 (-07)

Tabla 3.5: *Exactitud del esquema de Galerkin comprimido.*

de  $\mathbf{V}_J^c$ . Un escalamiento diagonal de  $\mathbf{V}_J^c$  es más fácil de implementar y mejora el preconditionador multiescala de la sección 1.4.

$\#\Omega_J$	$\#\Gamma_J$	MINRES	MINRES <sup>c</sup>	GMRES	GMRES <sup>c</sup>
188	32	79	72	48	50
696	64	119	95	56	55
2672	128	163	109	58	61
10464	256	212	117	62	69
41408	512	283	124	69	73
164736	1024	358	130	73	77
657152	2048	457	136	81	79

Tabla 3.6: *Número de iteraciones requeridas por MINRES y GMRES para alcanzar una norma residual menor que 1 (-06).*

La Tabla 3.7 muestra el tiempo computacional total requerido para ensamblar todas las matrices y resolver el respectivo sistema lineal con MINRES y GMRES. Como puede apreciarse, el esquema comprimido representa un ahorro enorme en tiempo computacional con respecto al esquema sin comprimir. Puesto que las diferencias en tiempo computacional requerido para ensamblar las matrices comprimidas y no comprimidas son más bien pequeñas (ver las Tablas 3.2 y 3.3), lo anterior se debe, obviamente, a un más económico producto matriz-vector.

$\#\Omega_J$	$\#\Gamma_J$	$T(\text{MINRES})$	$T(\text{MINRES}^c)$	$T(\text{GMRES})$	$T(\text{GMRES}^c)$
188	32	0.590	0.960	0.520	0.860
696	64	1.560	2.700	1.110	1.960
2672	128	5.170	7.480	3.250	5.520
10464	256	45.83	24.37	19.55	19.94
41408	512	422.1	85.14	137.1	74.21
164736	1024	2964	316.7	774.1	294.1
657152	2048	15967	1403	3703	1297

Tabla 3.7: *Tiempo computacional total en segundos requerido para ensamblar todas las matrices y resolver el sistema lineal con MINRES y GMRES.*

La Tabla 3.8 muestra el número de iteraciones y el tiempo computacional total requerido para resolver el sistema lineal (3.56) por la transformación de Bramble-Pasciak en conjunto con el método iterativo del gradiente conjugado. Puesto que una única escala de discretización no disponemos de un preconditionador para  $\mathbf{V}_J$ , sólo se presentan los resultados para el esquema multiescala comprimido. Observar que este método es el que requiere el menor número de iteraciones y, por lo tanto, es el más rápido y eficiente.

$\#\Omega_J$	$\#\Gamma_J$	BP-CG <sup>c</sup>	$T(\text{BP-CG}^c)$
188	32	37	0.570
696	64	43	1.380
2672	128	46	3.740
10464	256	46	10.69
41408	512	47	35.12
164736	1024	48	121.7
657152	2048	49	484.8

Tabla 3.8: *Número de iteraciones y tiempo computacional total en segundos requeridos por la transformación de Bramble-Pasciak en conjunto con el método iterativo del gradiente conjugado.*

# Conclusiones

Métodos de Ondelettes han sido aplicados al acoplamiento FEM-BEM. Ha sido probado teórica como también prácticamente que ellos mejoran el método de acoplamiento respecto a la eficiencia de la discretización de los operadores integrales de frontera. La exactitud y convergencia no ha sido deteriorada por la estrategia de compresión propuesta.

Problemas no lineales o problemas con coeficientes variables que poseen una solución fundamental pueden ser tratados completamente por nuestro método. Puesto que bases de ondelettes sobre variedades y superficies han sido ya construidas, el método es también aplicable a problemas en tres y más dimensiones [23]. Para tales problemas el ahorro en recursos y tiempos computacionales es de enorme importancia.

A partir de los resultados teóricos obtenidos, y confirmados por los experimentos numéricos, se ha observado que tanto la complejidad como el orden de convergencia del método en su totalidad son fijados por aquellos del método de elementos finitos.



# Apéndice A

## Bases de Ondelettes Biortogonales

En este apéndice se presenta una breve introducción al concepto de análisis de multiresolución biortogonal por medio de la descripción de las bases de ondelettes biortogonales para  $L^2(\mathbb{R})$  construidas en [6].

### Bases de Ondelettes Biortogonales para $L^2(\mathbb{R})$

Sea  $d \in \mathbb{N}$  un entero positivo. Denotando por  $[0, 1, \dots, d]f(n)$  la *diferencia dividida* de orden  $d$  sobre la función  $f \in C^d(\mathbb{R})$  en los puntos  $n = 0, 1, \dots, d$ , la función *B-spline* de orden  $d$  con nodos en los enteros  $-\lfloor d/2 \rfloor, \dots, 0, \dots, \lceil d/2 \rceil$  es definida por

$$\phi(x) := d[0, 1, \dots, d] \max\left\{0, (n - x - \lfloor d/2 \rfloor)^{d-1}\right\},$$

donde  $\lfloor x \rfloor$  ( $\lceil x \rceil$ ) denota el entero más grande (más pequeño) menor (mayor) o igual que  $x$ . Esta *función de escala* es de soporte compacto, con

$$\text{supp } \phi = [-\lfloor d/2 \rfloor, \lceil d/2 \rceil], \quad (\text{A.1})$$

y satisface la *ecuación de escala* o *refinamiento*

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k)$$

con coeficientes de *filtro* dados por

$$h_k := \begin{cases} 2^{1-d} \binom{d}{k + \lfloor d/2 \rfloor} & \text{si } -\lfloor d/2 \rfloor \leq k \leq \lceil d/2 \rceil, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Denotando ahora por  $f_{j,k} := 2^{j/2} f(2^j \cdot -k)$  los dilatados y trasladados de una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , los conjuntos  $\Phi_j := \{ \phi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z} \}$  generan una sucesión creciente de subespacios cerrados  $V_j := \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})}(\text{span } \Phi_j)$ , cuya unión es densa en  $L^2(\mathbb{R})$ , y con exactitud polinomial de orden  $d$ . Además,  $\Phi_j$  es una base estable o de Riesz para  $V_j$  en el sentido que para toda sucesión  $\mathbf{c}_j := \{c_{j,k}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  se tiene

$$\|\mathbf{c}_j\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \sim \|\Phi_j^\top \mathbf{c}_j\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

uniformemente en  $j$ , donde hemos usado la notación  $\Phi_j^\top \mathbf{c}_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k}$ .

Como se muestra [6], para cada entero  $\tilde{d} \geq d$ , con  $d + \tilde{d}$  par, existe una *función de escala dual*  $\tilde{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$  que es biortogonal a la primera función de escala

$$\langle \phi_{j,k}, \tilde{\phi}_{j,k'} \rangle := \int_{\mathbb{R}} \phi_{j,k}(x) \tilde{\phi}_{j,k'}(x) dx = \delta_{k,k'},$$

de soporte compacto, con

$$\text{supp } \tilde{\phi} = [-\lfloor d/2 \rfloor - \tilde{d} + 1, \lfloor d/2 \rfloor + \tilde{d} - 1], \tag{A.2}$$

y satisfaciendo la ecuación de escala

$$\tilde{\phi}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_k \tilde{\phi}(2x - x)$$

con coeficientes de filtro dados implícitamente por

$$\sum_{k=-\lfloor d/2 \rfloor - \tilde{d} + 1}^{\lfloor d/2 \rfloor + \tilde{d} - 1} \tilde{h}_k z^k = p(z)q(z),$$

donde los polinomios  $p(z)$  y  $q(z)$  son definidos por

$$p(z) := 2^{1-\tilde{d}} \sum_{k=-\lfloor \tilde{d}/2 \rfloor}^{\lfloor \tilde{d}/2 \rfloor} \binom{\tilde{d}}{k + \lfloor \tilde{d}/2 \rfloor} z^k,$$

$$q(z) := \sum_{k=0}^{\frac{d+\tilde{d}}{2}-1} 2^{-k} \binom{\frac{d+\tilde{d}}{2}-1+k}{k} \sum_{m=-k}^k (-1)^m \binom{2k}{k+m} z^m.$$

Además, los conjuntos  $\tilde{\Phi}_j := \{ \tilde{\phi}_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z} \}$  son bases estables que generan una sucesión creciente de subespacios cerrados  $\tilde{V}_j := \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})}(\text{span } \tilde{\Phi}_j)$ , cuya unión es densa en  $L^2(\mathbb{R})$ , con exactitud polinomial de orden  $\tilde{d}$ , y regularidad que se incrementa proporcionalmente con  $\tilde{d}$ .

A continuación y de acuerdo a [6], existen *ondelettes*  $\psi$  y  $\tilde{\psi}$  en  $L^2(\mathbb{R})$  satisfaciendo la relación de biortogonalidad

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j',k'} \rangle = \delta_{(j,k),(j',k')}, \quad (\text{A.3})$$

y definidas por

$$\psi(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2x - k) \quad \text{y} \quad \tilde{\psi}(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_k \tilde{\phi}(2x - k)$$

con coeficientes de filtro dados por

$$g_k := (-1)^k \tilde{h}_{1-k} \quad \text{y} \quad \tilde{g}_k := (-1)^k h_{1-k}.$$

Esto implica que ambas ondelettes son de soporte compacto, con

$$\text{supp } \psi = \text{supp } \tilde{\psi} = \left[1 - \frac{d+\tilde{d}}{2}, \frac{d+\tilde{d}}{2}\right]. \quad (\text{A.4})$$

Además, en analogía a las funciones de escala, los conjuntos  $\Psi_j := \{ \psi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z} \}$  y  $\tilde{\Psi}_j := \{ \tilde{\psi}_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z} \}$  son bases estables que generan los espacios de ondelettes  $W_j := \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})}(\text{span } \Psi_j)$  y  $\tilde{W}_j := \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})}(\text{span } \tilde{\Psi}_j)$  como complementos en las descomposiciones  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  y  $\tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j$ . De este manera, se obtienen las descomposiciones multiescala  $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{W}_j = L^2(\mathbb{R})$ , y los conjuntos  $\Psi := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \Psi_j$  y  $\tilde{\Psi} := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{\Psi}_j$  constituyen bases de Riesz biortogonales para  $L^2(\mathbb{R})$ .

Puesto que la relación de biortogonalidad (A.3) implica  $W_j \perp \tilde{V}_j$ , se deduce que la ondelette  $\psi$  tiene momentos nulos de orden  $\tilde{d}$ , esto es,

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x) dx = 0 \quad \text{para } 0 \leq n < \tilde{d}. \quad (\text{A.5})$$

Luego, como una consecuencia inmediata de la condición (A.5), existe una función  $\varphi_{j,k} \in L^2(\mathbb{R})$  de soporte compacto tal que

$$\text{supp } \varphi_{j,k} = \text{supp } \psi_{j,k}, \quad \varphi_{j,k}^{(\tilde{d})} = \psi_{j,k} \quad \text{y} \quad \|\varphi_{j,k}\|_{L^1(\mathbb{R})} \lesssim 2^{-j(\tilde{d}+1/2)}. \quad (\text{A.6})$$

En efecto, la función

$$\varphi_{j,k}(x) := \frac{1}{(\tilde{d}-1)!} \sum_{n=0}^{\tilde{d}-1} \binom{\tilde{d}-1}{n} (-1)^n x^{\tilde{d}-1-n} \int_{-\infty}^x y^n \psi_{j,k}(y) dy$$

verifica las propiedades en (A.6) con  $\|\varphi_{j,k}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \left(\frac{1}{\tilde{d}!} \int_{\mathbb{R}} x^{\tilde{d}} \psi(x) dx\right) 2^{-j(\tilde{d}+1/2)}$ .

Los gráficos de las funciones  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\tilde{\phi}$  y  $\tilde{\psi}$  para  $d = 1$  y  $\tilde{d} = 3$  son dados en la Figura A.1, y para  $d = \tilde{d} = 2$  en la Figura A.2.

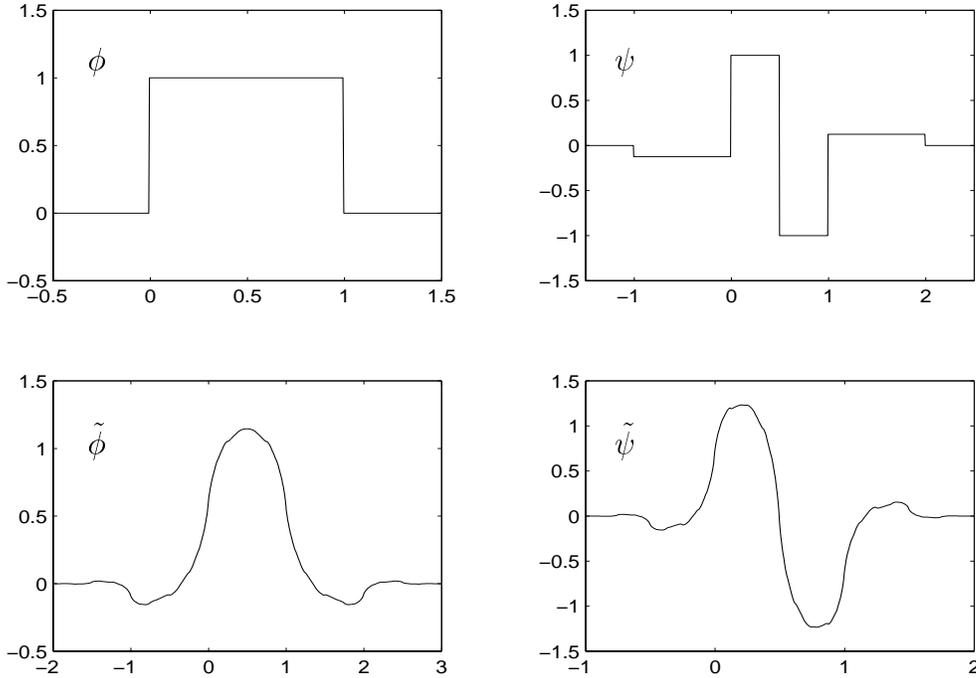


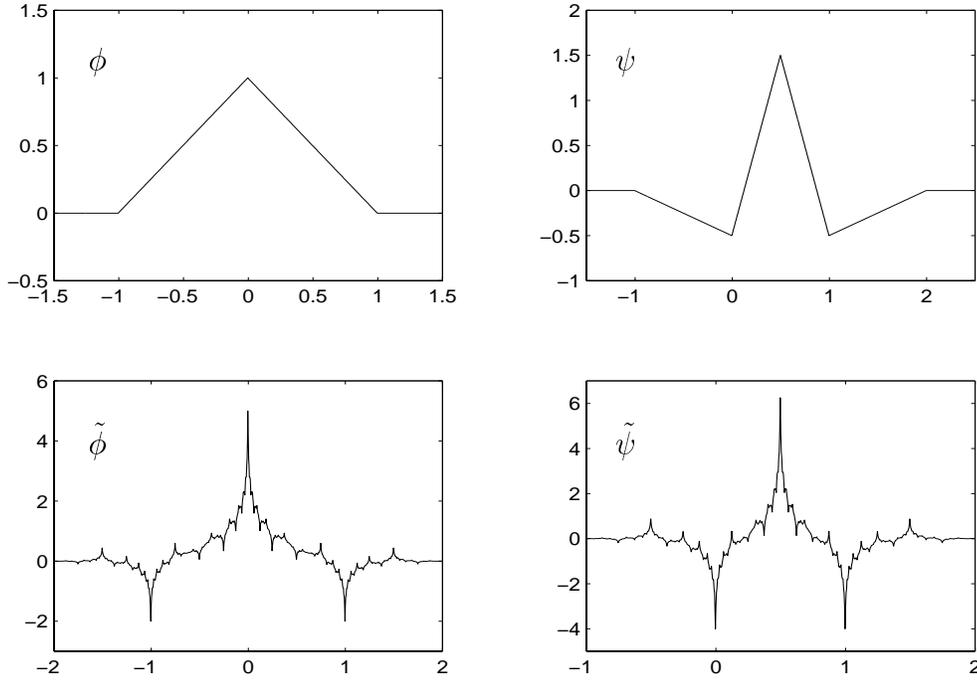
Figura A.1: Funciones  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\tilde{\phi}$  y  $\tilde{\psi}$  para  $d = 1$  y  $\tilde{d} = 3$ .

## Bases de Ondelettes Biortogonales para $L^2(I)$

En lo que sigue describimos la adaptación al intervalo  $I := (0, 1)$  de las bases de ondelettes biortogonales para  $L^2(\mathbb{R})$  definidas previamente. Esta adaptación resulta en bases de ondelettes biortogonales 1-periódicas para  $L^2(I)$  las cuales poseen, esencialmente, todas las ventajas estructurales y computacionales del caso estacionario e invariante por traslaciones. Para este fin, la idea consiste en reemplazar el significado de  $f_{j,k} := 2^{j/2} f(2^j \cdot -k)$ , para una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  de soporte compacto, por su contraparte periódica

$$f_{j,k} := 2^{j/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2^j(\cdot + n) - k).$$

Consecuentemente, dadas las funciones de escala duales  $\phi$  y  $\tilde{\phi}$  de soporte compacto definidas sobre  $\mathbb{R}$ , y definiendo  $\Delta_j := \mathbb{Z}/2^j\mathbb{Z}$ , los conjuntos  $\Phi_j := \{\phi_{j,k} \mid k \in \Delta_j\}$  y  $\Psi_j := \{\psi_{j,k} \mid k \in \Delta_j\}$ , para  $j \geq j_0$ , y asimismo  $\tilde{\Phi}_j$  y  $\tilde{\Psi}_j$ , tienen cardinalidad finita  $2^j$  y consisten de funciones 1-periódicas. Claramente, el nivel de resolución más grueso  $j_0$  debe ser elegido lo suficientemente grande para asegurar que la medida de


 Figura A.2: Funciones  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\tilde{\phi}$  y  $\tilde{\psi}$  para  $d = \tilde{d} = 2$ .

los soportes de las funciones de escala y de las ondelettes sea más pequeña que uno. Comparando (A.1), (A.2) y (A.4), deducimos que

$$j_0 \geq \log_2(|\text{supp } \tilde{\phi}|) = \log_2(d + 2\tilde{d} - 2). \quad (\text{A.7})$$

Notar que estas definiciones preservan las relaciones de biortogonalidad. En efecto, es directo comprobar que

$$\langle \phi_{j,k}, \tilde{\phi}_{j',k'} \rangle = \delta_{k,k'} \quad \text{para } k, k' \in \Delta_j, j \geq j_0,$$

como también que

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j',k'} \rangle = \delta_{(j,k),(j',k')} \quad \text{para } k \in \Delta_j, k' \in \Delta_{j'}, j, j' \geq j_0,$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto interior de  $L^2(I)$ .

Por lo tanto, los espacios  $V_j := \text{clos}_{L^2(I)}(\text{span } \Phi_j)$  y  $\tilde{V}_j := \text{clos}_{L^2(I)}(\text{span } \tilde{\Phi}_j)$ , para  $j \geq j_0$ , forman sucesiones crecientes de subespacios cerrados, cuyas uniones son densas en  $L^2(I)$ , y con exactitudes polinomiales de ordenes  $d$  y  $\tilde{d}$ , respectivamente. Además, los conjuntos  $\Psi := \bigcup_{j \geq j_0-1} \Psi_j$  y  $\tilde{\Psi} := \bigcup_{j \geq j_0-1} \tilde{\Psi}_j$ , donde  $\Psi_{j_0-1} := \Phi_{j_0}$  y  $\tilde{\Psi}_{j_0-1} := \tilde{\Phi}_{j_0}$ , son bases de Riesz biortogonales 1-periódicas para  $L^2(I)$ .



# Bibliografía

- [1] G. BEYLKIN, R. COIFMAN Y V. ROKHLIN, *Fast wavelet transforms and numerical algorithms I*, Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 141–183.
- [2] J. H. BRAMBLE Y J. E. PASCIAK, *A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations of elliptic problems*, Math. Comp. **50** (1988), 1–17.
- [3] J. H. BRAMBLE, J. E. PASCIAK Y J. XU, *Parallel multilevel preconditioners*, Math. Comp. **55** (1990), 1–22.
- [4] P. G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [5] A. COHEN, *Wavelet Methods in Numerical Analysis*, Handbook of Numerical Analysis VII (P. G. Ciarlet y J. L. Lions, editores), Elsevier, Amsterdam, 1999.
- [6] A. COHEN, I. DAUBECHIES Y J. FEAUVEAU, *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 485–560.
- [7] M. COSTABEL, *Boundary integral operators on Lipschitz domains: Elementary results*, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), 613–626.
- [8] M. COSTABEL, *Symmetric methods for the coupling of finite elements and boundary elements*, en The Mathematics of Finite Elements and Applications VI (J. R. Whiteman, editor), Academic Press, London, 1988, 281–288.
- [9] W. DAHMEN, *Wavelet and multiscale methods for operator equations*, Acta Numerica **6** (1997), 55–228.
- [10] W. DAHMEN Y A. KUNOTH, *Multilevel preconditioning*, Numer. Math. **63** (1992), 315–344.

- [11] W. DAHMEN, S. PRÖSSDORF Y R. SCHNEIDER, *Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations II: Matrix compression and fast solution*, Adv. Comput. Math. **1** (1993), 259–335.
- [12] W. DAHMEN, S. PRÖSSDORF Y R. SCHNEIDER, *Multiscale methods for pseudodifferential equations on smooth manifolds*, en Proceedings of the International Conference on Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications (C. K. Chui, L. Montefusco y L. Puccio, editores), Academic Press, 1994, 385–424.
- [13] W. DAHMEN Y R. SCHNEIDER, *Wavelets on manifolds – Application to boundary integral equations*, en preparación.
- [14] G. N. GATICA Y G. C. HSIAO, *Boundary-Field Equation Methods for a Class of Nolinear Problems*, Pitman Research Notes in Mathematics Series **331**, Longman, London, 1995.
- [15] G. GOLUB Y C. VAN LOAN, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
- [16] L. GREENGARD Y V. ROKHLIN, *A fast algorithm for particle simulation*, J. Comput. Phys. **73** (1987), 325–348.
- [17] W. HACKBUSCH Y Z. P. NOWAK, *On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering*, Numer. Math. **54** (1989), 463–491.
- [18] H. HAN, *A new class of variational formulation for the coupling of finite and boundary element methods*, J. Comput. Math. **8** (1990), 223–232.
- [19] C. JOHNSON Y J. C. NEDELEC, *On the coupling of boundary integral and finite element methods*, Math. Comp. **35** (1980), 1063–1079.
- [20] S. MEDDAHI, *An optimal iterative process for the Johnson-Nedelec method of coupling boundary and finite elements*, SIAM J. Numer. Anal. **35** (1998), 1393–1415.
- [21] Y. MEYER, *Ondelettes et Opérateurs 1: Ondelettes, 2: Opérateurs de Calderón-Zygmund*, Hermann, Paris, 1990.
- [22] P. OSWALD, *Multilevel Finite Element Approximation, Theory and Applications*, B. G. Teubner Stuttgart, 1994.

- [23] C. PÉREZ Y R. SCHNEIDER, *Wavelet Galerkin Methods for Boundary Integral Equations and the Coupling with Finite Element Methods*, en *Wavelet Transforms and Time Frequency Analysis* (L. Debnath, S. Mallat, M. Farge y R. Coifman, editores), Birkhäuser, 2000.
- [24] T. VON PETERSDORFF Y C. SCHWAB, *Wavelet approximation for first kind integral equations on polygons*, *Numer. Math.* **74** (1996), 479–516.
- [25] R. SCHNEIDER, *Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme*, B. G. Teubner Stuttgart, 1998.
- [26] M. A. SHUBIN, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Springer Verlag, 1985.
- [27] I. SLOAN, *Error analysis of boundary integral methods*, *Acta Numerica* **1** (1992), 287–339.
- [28] E. M. STEIN, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [29] A. ZENISEK, *Nonlinear Elliptic and Evolution Problems and Their Finite Element Approximation*, Academic Press, London, 1990.



# Índice de Figuras

2.1	<i>Geometría del problema modelo.</i>	23
3.1	<i>Estructura de la matriz de rigidez en ondelettes <math>\mathbf{L}_J</math>.</i>	38
3.2	<i>Ondelettes <math>\psi_\lambda</math> y <math>\psi'_{\lambda'}</math> en la primera compresión.</i>	40
3.3	<i>Ondelettes <math>\psi_\lambda</math> y <math>\psi'_{\lambda'}</math> en la segunda compresión.</i>	42
3.4	<i>Submatriz <math>\mathbf{L}_{j',j}^1</math> y ancho de banda de compresión <math>B_{j',j}^L</math>.</i>	57
3.5	<i>Submatrices de <math>\mathbf{L}_j^c</math> con segunda compresión.</i>	59
3.6	<i>Geometría del problema acoplado.</i>	88
3.7	<i>Gráfico de la solución analítica <math>u</math> sobre <math>\Omega</math>.</i>	89
A.1	<i>Funciones <math>\phi</math>, <math>\psi</math>, <math>\tilde{\phi}</math> y <math>\tilde{\psi}</math> para <math>d = 1</math> y <math>\tilde{d} = 3</math>.</i>	98
A.2	<i>Funciones <math>\phi</math>, <math>\psi</math>, <math>\tilde{\phi}</math> y <math>\tilde{\psi}</math> para <math>d = \tilde{d} = 2</math>.</i>	99



# Índice de Tablas

3.1	<i>Parámetros de los operadores <math>V</math>, <math>K</math> y <math>W</math>.</i> . . . . .	60
3.2	<i>Cardinalidad de <math>\mathbf{V}_J^c</math> en porcentaje, y tiempo computacional en segundos requerido para ensamblar <math>\mathbf{V}_J</math> y <math>\mathbf{V}_J^c</math>.</i> . . . . .	89
3.3	<i>Cardinalidad de <math>\mathbf{K}_J^c</math> en porcentaje, y tiempo computacional en segundos requerido para ensamblar <math>\mathbf{K}_J</math> y <math>\mathbf{K}_J^c</math>.</i> . . . . .	90
3.4	<i>Exactitud del esquema de Galerkin no comprimido.</i> . . . . .	90
3.5	<i>Exactitud del esquema de Galerkin comprimido.</i> . . . . .	91
3.6	<i>Número de iteraciones requeridas por MINRES y GMRES para alcanzar una norma residual menor que 1 (-06).</i> . . . . .	91
3.7	<i>Tiempo computacional total en segundos requerido para ensamblar todas las matrices y resolver el sistema lineal con MINRES y GMRES.</i>	92
3.8	<i>Número de iteraciones y tiempo computacional total en segundos requeridos por la transformación de Bramble-Pasciak en conjunto con el método iterativo del gradiente conjugado.</i> . . . . .	92





## Resumen

En esta tesis se estudia una Aproximación por *Ondelettes Biortogonales* del Acoplamiento del Método de Elementos Finitos con el Método de Elementos de Frontera para la resolución numérica de problemas exteriores bidimensionales en Teoría de Potencial.

Basados en esta aproximación, se propone una *Estrategia de Compresión de Matrices* para los términos de frontera la cual se ajusta completamente, con *Complejidad Lineal*, al orden de convergencia óptimo del Método de Galerkin. Además, haciendo uso de la propiedad de *estabilidad* de las bases de ondelettes en combinación con el conocido preconditionador BPX, se propone un esquema preconditionado el cual puede ser resuelto eficientemente por el método iterativo del Gradiente Conjugado.

Como modelo se considera el problema exterior de Dirichlet para la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Se discuten y analizan los aspectos teóricos y prácticos de la aplicación de los métodos de ondelettes al preconditionamiento y la compresión de matrices. En particular, las propiedades de aproximación, equivalencias de normas y momentos nulos de las bases de ondelettes, son completamente justificadas y explotadas en los análisis de consistencia, convergencia y complejidad de nuestra estrategia de compresión. Además, se presentan algunos experimentos numéricos que corroboran nuestros resultados.

## Abstract

This thesis is concerned with the study of a *Biorthogonal Wavelet* Approximation for the Coupling of Finite Element and Boundary Element Methods for the numerical solving of two-dimensional exterior boundary value problems in Potential Theory.

Based on this approximation, we propose a *Matrix Compression Strategy* for the boundary terms which fits entirely, with *Linear Complexity*, the optimal convergence order of the Galerkin Method. Moreover, using the *stability* property of wavelet bases combined with the well-known BPX preconditioner, we propose a preconditioned scheme which can be solved efficiently by the Conjugated Gradient Method.

As model we consider the exterior Dirichlet problem for the Laplace equation in the plane. We discuss and analyze the theoretical and practical aspects of the application of wavelet methods to the preconditioning and the compression of matrices. In particular, the approximation property, norm equivalences and vanishing moments of wavelet bases are fully justified and exploited in the consistency, convergence and complexity analysis of our compression strategy. Also, we present some numerical experiments which confirm our results.