Introducción a Leyes de Conservación

Programa de Doctorado en Ciencias Aplicadas
con mención en Ingeniería Matemática

Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción
Casilla 160-C
Concepción, Chile

5 de enero de 2022

Prefacio

Los presentes apuntes corresponden a un curso que el autor ha dictado en varias instancias en la Universidad de Concepción, Chile, a estudiantes de pregrado de la carrera Ingeniería Civil Matemática y a estudiantes del Programa de Doctorado en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática. Esta versión corresponde al curso del semestre 2020/II. Agradezco a las estudiantes Yissedt Lara e Yolanda Vásquez y al investigador post-doctoral David Zorío el tiempo dedicado a la lectura y corrección de la versión preliminar de estos apuntes.

San Pedro de la Paz, 5 de enero de 2022 Raimund Bürger

Índice general

Capítulo 1

Variación total, compacidad, y conceptos relacionados

1.1. La variación total de una función

Un concepto central de la teoría de leyes de conservación es la *variación total*, denotada por $\mathrm{TV}(u)$, de una función u de una variable. Se define

$$\mathrm{TV}(u) := \sup \sum_i \bigl| u(x_i) - u(x_{i-1}) \bigr|, \tag{1.1}$$

para lo cual también se usa la notación

$$|u|_{BV} := \mathrm{TV}(u).$$

El supremo en (1.1) es tomado sobre todas las particiones finitas $\{x_i\}$ tales que $x_{i-1} < x_i$. El conjunto de todas las funciones de variación total acotada sobre I es denotado por $BV(I)$. Claramente, las funciones de $BV(I)$ son acotadas. Se omite la mención explícita del intervalo I cuando éste es obvio o no importante. Para cualquier partición finita $\{x_i\}$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\sum_i \bigl| u(x_{i+1}) - u(x_i) \bigr| &= \sum_i \max\bigl\{ u(x_{i+1}) - u(x_i), 0 \bigr\} - \sum_i \min\bigl\{ u(x_{i+1}) - u(x_i), 0 \bigr\} \\ &=: p + n,\end{aligned}$$

luego

$$\mathrm{TV}(u) = P + N := \sup p + \sup n.$$

Las cantidades P y N se llaman *variación positiva* y *variación negativa* de u, respectivamente. Si por el momento consideramos el intervalo finito $I := [a, x]$ y particiones tales que

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = x,$$

se tiene que

$$p_a^x - n_a^x = u(x) - u(a),$$

donde escribimos p_a^x y n_a^x para indicar el intervalo bajo consideración. Concluimos que

$$p_a^x \leqslant N_a^x + u(x) - u(a).$$

Tomando el supremo en el lado izquierdo, obtenemos

$$P_a^x - N_a^x \leqslant u(x) - u(a).$$

Similarmente, se tiene que

$$N_a^x - P_a^x \leqslant u(a) - u(x),$$

luego

$$u(x) = P_a^x - N_a^x + u(a). \tag{1.2}$$

En otras palabras, observamos que cada función $u = u(x) \in BV$ puede ser escrita como diferencia de dos funciones crecientes:

$$u(x) = u_+(x) - u_-(x),$$

donde

$$u_+(x) = u(a) + P_a^x, \quad u_-(x) = N_a^x.$$

(Esta descomposición también es conocida como *descomposición de Jordan* de u.) Sean ξ_j los puntos en los que u es discontinua, entonces

$$\sum_j \bigl|u(\xi_j+) - u(\xi_j-)\bigr| \leqslant \mathrm{TV}(u) < \infty,$$

y el conjunto de puntos donde $u(\xi+) \neq u(\xi-)$ puede a lo más ser numerable.

Observamos, además, que las funciones de variación total finita son acotadas, ya que

$$\bigl|u(x)\bigr| \leqslant \bigl|u(a)\bigr| + \bigl|u(a) - u(x)\bigr| \leqslant \bigl|u(a)\bigr| + \mathrm{TV}(u).$$

La ecuación (1.2) tiene como consecuencia muy útil que si $u \in BV$ es, además, diferenciable, entonces

$$\int \bigl|u'(x)\bigr| \, \mathrm{d}x = \mathrm{TV}(u), \tag{1.3}$$

ya que

$$\int \bigl|u'(x)\bigr| \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_a^x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} N_a^x \right) \mathrm{d}x = P + N = \mathrm{TV}(u).$$

La variación total también puede ser relacionada con la norma L^1 desplazada. Sea

$$\lambda(u,\varepsilon) := \int \bigl|u(x+\varepsilon) - u(x)\bigr| \, \mathrm{d}x.$$

Si $\lambda(u,\varepsilon)$ es una función no negativa continua en ε con $\lambda(u,0) = 0$, entonce se dice que $\lambda(u,\cdot)$ es un *módulo de continuidad* para u. Mas generalmente utilizaremos el nombre *módulo de continuidad* para cada función continua $\lambda(u,\varepsilon)$ que se anula en $\varepsilon = 0$ tal que

$$\lambda(u,\varepsilon) \geqslant \bigl\|u(\cdot + \varepsilon) - u\bigr\|_{L^p}.$$

(Claramente, $\lambda(u,\varepsilon)$ es un módulo de continuidad si y sólo si $\lambda(u,\varepsilon) = o(1)$ cuando $\varepsilon \to 0$.) Necesitaremos una caracterización conveniente de la variación total (en una variable), la cual es proporcionada por el siguiente lema.

Lema 1.1. *Sea $u \in L^1$. Si $\lambda(u,\varepsilon)/|\varepsilon|$ es una función acotada de ε, entonces $u \in BV$ y*

$$\mathrm{TV}(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda(u,\varepsilon)}{|\varepsilon|}. \tag{1.4}$$

Si a su vez, $u \in BV$, entonces la cantidad $\lambda(u,\varepsilon)/|\varepsilon|$ es acotada y (1.4) es válido. En particular se tiene la siguiente desigualdad útil:

$$\lambda(u,\varepsilon) \leqslant |\varepsilon| \mathrm{TV}(u) \quad \text{para } u \in BV. \tag{1.5}$$

Demostración.

1.) Sea u una función suave y sea $\{x_i\}$ una partición del intervalo al cual se refiere la variación total. Entonces tenemos

$$\bigl|u(x_i) - u(x_{i-1})\bigr| = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \,\mathrm{d}x \right| \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} \right| \mathrm{d}x.$$

Sumando sobre i obtenemos para una función $u(x)$ diferenciable la desigualdad

$$\mathrm{TV}(u) \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda(u,\varepsilon)}{|\varepsilon|}.$$

2.) Sea ahora u una función en L^1 arbitraria y acotada, y sea u_k una sucesión de funciones suaves tales que $u_k \to u$ para casi todo x, y $\|u_k - u\|_1 \to 0$. A partir de la desigualdad triangular se tiene que

$$\bigl|\lambda(u_k,\varepsilon) - \lambda(u,\varepsilon)\bigr| \leqslant 2\|u_k - u\|_1 \to 0.$$

Ahora, si $\{x_i\}$ es una partición del intervalo podemos elegir u_k de tal forma que $u_k(x_i) = u(x_i)$ para todo i. Entonces

$$\sum_i \bigl|u(x_i) - u(x_{i-1})\bigr| \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda(u_k,\varepsilon)}{|\varepsilon|}$$

y por lo tanto

$$\mathrm{TV}(u) \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda(u,\varepsilon)}{|\varepsilon|}.$$

Además se tiene que

$$\begin{aligned}
\int \bigl|u(x+\varepsilon) - u(x)\bigr| \,\mathrm{d}x &= \sum_j \int_{(j-1)\varepsilon}^{j\varepsilon} \bigl|u(x+\varepsilon) - u(x)\bigr| \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_j \int_0^{\varepsilon} \bigl|u(x+j\varepsilon) - u\bigl(x+(j-1)\varepsilon\bigr)\bigr| \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\varepsilon} \sum_j \bigl|u(x+j\varepsilon) - u\bigl(x+(j-1)\varepsilon\bigr)\bigr| \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^{\varepsilon} \mathrm{TV}(u) \,\mathrm{d}x = |\varepsilon| \mathrm{TV}(u).
\end{aligned}$$

Entonces acabamos de demostrar las desigualdades

$$\frac{\lambda(u,\varepsilon)}{|\varepsilon|} \leqslant \mathrm{TV}(u) \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda(u,\varepsilon)}{|\varepsilon|} \leqslant \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda(u,\varepsilon)}{|\varepsilon|} \leqslant \mathrm{TV}(u),$$

las cuales implican el Lema 1.1.

■

Observamos que trivialmente

$$\tilde{\lambda}(u,\varepsilon) := \sup_{|\sigma|\leqslant|\varepsilon|} \lambda(u,\sigma) \leqslant |\varepsilon|\mathrm{TV}(u). \tag{1.6}$$

Para funciones en L^p hay que tener cuidado al elegir los puntos a ser utilizados en el supremo, ya que tales funciones en general no son definidas puntualmente. La elección adecuada en este caso son solamente aquellos puntos x_i que son puntos de *continuidad aproximada* de u. El Lema 1.1 sigue válido.

Definición 1.1. *Se dice que una función es* aproximadamente continua *en x si existe un conjunto A medible tal que*

$$\lim_{r\to 0} \frac{|[x-r,x+r]\cap A|}{|[x-r,x+r]|} = 1,$$

donde $|B|$ denota la medida de un conjunto B, y u es continua en x relativa a A. (Cada punto de Lebesgue es un punto de continuidad aproximada.)

En el caso de una función de dos variables, $u = u(x,y)$, la variación se mide como

$$\mathrm{TV}_{x,y}(u) = \int \bigl(\mathrm{TV}_x(u)\bigr)(y)\,\mathrm{d}y + \int \bigl(\mathrm{TV}_y(u)\bigr)(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.7}$$

La generalización a funciones de n variables es obvia. La siguiente caracterización de la variación total resulta muy útil.

Definición 1.2. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto. Se define el conjunto de todas las funciones con variación total acotada con respecto a Ω por*

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{\mathrm{Loc}}(\Omega) \,\middle|\, \sup_{\phi\in C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^n),\|\phi\|_\infty\leqslant 1} \int_\Omega u(\boldsymbol{x})\operatorname{div}\phi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty \right\}.$$

Para $u \in BV(\Omega)$ se escribe

$$\|\mathrm{D}u\| := \sup_{\phi\in C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^n),\|\phi\|_\infty\leqslant 1} \int_\Omega u(\boldsymbol{x})\operatorname{div}\phi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

y para $u \in BV(\Omega)\cap L^1(\Omega)$ definimos

$$\|u\|_{BV} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathrm{D}u\|.$$

Notamos que si u es integrable con derivadas débiles que son funciones integrables, entonces claramente

$$\|\mathrm{D}u\| = \int \bigl|\nabla u(\boldsymbol{x})\bigr|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

En una dimensión existe una relación simple entre $\|\mathrm{D}u\|$ y $\mathrm{TV}(u)$, tal como ilustra el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $u \in L^1(I)$. Entonces*

$$\mathrm{TV}(u) = \|\mathrm{D}u\|. \tag{1.8}$$

Demostración.

1.) Supongamos que u tiene variación total acotada sobre I. Sea ω una función no negativa, $0 \leqslant \omega(x) \leqslant 1$ con $\operatorname{supp}\omega \subset [-1,1]$ y $\int_{\mathbb{R}} \omega(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Sea $\omega_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1}\omega(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, y $u^\varepsilon := \omega_\varepsilon * u$. Para puntos $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ en I obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_i \bigl|u^\varepsilon(x_i) - u^\varepsilon(x_{i-1})\bigr| &\leqslant \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega_\varepsilon(x)\biggl(\sum_i \bigl|u(x_i - x) - u(x_{i-1} - x)\bigr|\biggr)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \mathrm{TV}(u).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Uilizando (1.3) y (1.9) obtenemos

$$\int \bigl|(u^\varepsilon)'\bigr|\,\mathrm{d}x = \mathrm{TV}(u^\varepsilon) = \sup \sum_i \bigl|u^\varepsilon(x_i) - u^\varepsilon(x_{i-1})\bigr| \leqslant \mathrm{TV}(u).$$

Sea $\phi \in C_0^1$ con $|\phi| \leqslant 1$. Entonces

$$\int u^\varepsilon(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int (u^\varepsilon)'(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int \bigl|(u^\varepsilon)'\bigr|\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{TV}(u),$$

lo que demuestra la primera parte del teorema.

2.) Sea ahora u tal que

$$\|\mathrm{D}u\| := \sup_{\phi \in C_0^1, |\phi| \leqslant 1} \int_\Omega u(x)\phi_x(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

En primer lugar deducimos que

$$\begin{aligned}-\int (u^\varepsilon)'(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x &= \int u^\varepsilon(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int (\omega_\varepsilon * u)(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int u(x)(\omega_\varepsilon * \phi)(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \|\mathrm{D}u\|.\end{aligned}$$

Utilizando que

$$\|f\|_{L^1(I)} = \sup_{\phi \in C_0^1(I), |\phi| \leqslant 1} \int f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

(Tarea), concluimos que

$$\int \bigl|(u^\varepsilon)'(x)\bigr|\,\mathrm{d}x \leqslant \|\mathrm{D}u\|.$$

Para demostrar que $u \in L^\infty$, sea $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset BV \cap C^\infty$ una sucesión tal que

$$u_j \to u \quad \text{c.t.p.}, \quad \|u_j - u\|_{L^1} \to 0 \quad \text{cuando } j \to \infty,$$
$$\int \bigl|u_j'(x)\bigr|\,\mathrm{d}x \to \|\mathrm{D}u\| \quad \text{cuando } j \to \infty$$

(ver, por ejemplo, [41, p. 64]). Para todo y, z se tiene que

$$u_j(z) = u_j(y) + \int_y^z u_j'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Formando el promedio sobre algún intervalo acotado $J \subseteq I$ obtenemos

$$|u_j| \leqslant \frac{1}{|J|}\int_J \bigl|u_j(y)\bigr|\,\mathrm{d}y + \int_I \bigl|u_j'(x)\bigr|\,\mathrm{d}x,$$

lo que demuestra que las funciones u_j son uniformemente acotadas, luego $u \in L^\infty$. Concluimos que $u^\varepsilon(x) \to u(x)$ cuando $\varepsilon \to 0$ en cada punto de continuidad aproximada de u. Para puntos de continuidad aproximada $x_1 < x_1 < \ldots < x_n$ concluimos que

$$\begin{aligned}\sum_i \bigl|u(x_i) - u(x_{i-1})\bigr| &= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_i \bigl|u^\varepsilon(x_i) - u^\varepsilon(x_{i-1})\bigr| \\ &\leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0}\int \bigl|(u^\varepsilon)'(x)\bigr|\,\mathrm{d}x \leqslant \|\mathrm{D}u\|.\end{aligned}$$

■

El próximo resultado demuestra que la generalización (1.7) de la variación total a dimensiones mayores entrega una (semi)norma que es equivalente con la norma inducida por la variación total.

Teorema 1.2. *Sea $u \in L^1(K)$, donde $K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\|\nabla u\| \leqslant \mathrm{TV}(u) \leqslant n\|\nabla u\|.$$

Demostración.

1.) Supongamos primero que $u \in BV(K) \cap L^1(K)$, y sea la versión suavizada de u definida por $u^\varepsilon := \omega_\varepsilon * u$. Entonces $u^\varepsilon \to u$ en $L^1(K)$ y $\limsup_\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\| \leqslant \|\nabla u\| < \infty$ (ver [107, Th. 5.3.1]). Sea u_k la función para la que todos sus argumentos, con la excepción del k-ésimo argumento, son fijos, es decir

$$\begin{aligned}u_k(\boldsymbol{x}', x) &= u(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n),\\ \boldsymbol{x}' &= (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in K'.\end{aligned}$$

Entonces también $u_k^\varepsilon \to u_k$ en $L^1([a_k, b_k])$, lo que implica, en virtud de la semicontinuinad inferior de la variación acotada [107, Th. 5.2.1] y el Teorema 1.1,

$$\mathrm{TV}_{[a_k,b_k]}(u_k) \leqslant \liminf_\varepsilon \mathrm{TV}_{[a_k,b_k]}(u_k^\varepsilon).$$

En virtud del Lema de Fatou y del Teorema 1.1 tenemos

$$\begin{aligned}\int_{K'} \mathrm{TV}_{[a_k,b_k]}(u_k)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' &\leqslant \liminf_\varepsilon \int_{K'} \mathrm{TV}_{[a_k,b_k]}(u_k^\varepsilon)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \liminf_\varepsilon \int_K |\nabla_k u^\varepsilon|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &\leqslant \limsup_\varepsilon \int_K |\nabla_k u^\varepsilon|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \|\nabla u\|_\infty < \infty.\end{aligned}$$

Esto implica que $\mathrm{TV}(u) \leqslant n\|\nabla u\|$.

2.) Supongamos ahora que

$$\forall k = 1, \ldots, n: \quad \int_{K'} \mathrm{TV}_{[a_k,b_k]}(u_k)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' < \infty.$$

A partir del Teorema 1.1 sabemos que para $\phi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\|\phi\|_\infty \leqslant 1$, se tiene que

$$\int_{K'} u\phi_{x_k}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \leqslant \int_{K'} \mathrm{TV}_{[a_k,b_k]}(u_k)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}',$$

lo que implica que $\|\nabla u\| \leqslant \mathrm{TV}(u)$.

∎

1.2. Compacidad

La variación total se utiliza para obtener compacidad. El enunciado apropiado de compacidad es el Teorema de Compacidad de Kolmogorov. Se dice que un subjunto M de un espacio métrico X es *compacto* si cada sucesión infinita de puntos de M posee una subsucesión que converge (fuertemente). Un conjunto se llama *relativamente compacto* si su clausura es compacta. Un subconjunto de un espacio métrico se llama *totalmente acotado* si es contenido en una unión finita de bolas del radio ε para cada $\varepsilon > 0$ (tal unión finita se llama *ε-malla*).

Teorema 1.3. *Un subconjunto M de un espacio métrico X es relativamente compacto si y sólo si es totalmente acotado.*

Demostración.

1.) Consideremos primeramente el caso donde M es relativamente compacto. Supongamos que existe ε_0 tal que no existe una ε_0-malla finita. Para cada $u_1 \in M$ existe un elemento $u_2 \in M$ tal que $\|u_1 - u_2\| \geqslant \varepsilon_0$. Como $\{u_1, u_2\}$ no es una ε_0-malla, debe existir $u_3 \in M$ tal que $\|u_1 - u_3\| \geqslant \varepsilon_0$ y $\|u_2 - u_3\| \geqslant \varepsilon_0$. Inductivamente, obtenemos una sucesión $\{u_j\}$ tal que $\|u_j - u_k\| \geqslant \varepsilon_0$ para $j \neq k$. Claramente, tal sucesión no puede poseer una subsucesión convergente, lo que genera una contradicción. Concluimos que debe existir una ε-malla para cada ε.

2.) Supongamos ahora que se puede hallar una ε-malla para M para cada $\varepsilon > 0$, y sea $M_1 \subset M$ un subconjunto infinito. Sea $\{u_1^{(1)}, \ldots, u_{N_1}^{(1)}\}$ una ε-malla para M con $\varepsilon = 1/2$. Sea ahora

$$M_1^{(j)} := \bigl\{u \in M_1 \mid \|u - u_j^{(1)}\| \leqslant 1/2\bigr\}.$$

Como M_1 es infinito, por lo menos uno de los conjuntos $M_1^{(1)}, \ldots, M_1^{(N_1)}$ debe ser infinito. Sea un tal conjunto denotado por M_2 y el elemento correspondiente denotado por u_2. Sobre este conjunto construimos una ε-malla para $\varepsilon = 1/4$. Continuando inductivamente obtenemos una sucesión anidada $M_{k+1} \subset M_k$ para $k \in \mathbb{N}$ tal que M_k posee una ε-malla con $\varepsilon = 1/2^k$, sea $\{u_1^{(k)}, \ldots, u_{N_k}^{(k)}\}$. Para elementos arbitrarios $u, v \in M_k$ se tiene

$$\|u - v\| \leqslant \|u - u_k\| + \|u_k - v\| \leqslant 1/2^{k-1}.$$

La sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $u_k \in M_k$ converge, ya que $\|u_{k+m} - u_k\| \leqslant 1/2^{k-1}$, lo que demuestra que M_1 posee una subsucesión convergente.

■

El siguiente lema simplifica el análisis.

Lema 1.2. *Sea M un subconjunto del espacio métrico X. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto A totalmente acotado tal que* $\operatorname{dist}(f, A) < \varepsilon$ *para cada $f \in M$. Entonces M es totalmente acotado.*

Demostración. Sea A tal que $\operatorname{dist}(f, A) < \varepsilon$ para cada $f \in M$. Como A es totalmente acotado, existen $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{B}_\varepsilon(x_j), \quad \text{donde} \quad \mathcal{B}_\varepsilon(y) := \bigl\{ z \in X \mid \|z - y\| \leqslant \varepsilon \bigr\}.$$

Según hipótesis, para cada $f \in M$ existe un elemento $a \in A$ tal que $\|a - f\| < \varepsilon$, además $\|a - x_j\| < \varepsilon$ para algún j, luego $\|f - x_j\| < 2\varepsilon$, lo que demuestra que

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{2\varepsilon}(x_j);$$

por lo tanto el conjunto M es totalmente acotado. ■

Ahora podemos formular y demostrar el Teorema de Compacidad de Kolmogorov.

Teorema 1.4 (Teorema de Compacidad de Kolmogorov)**.** *Sea $M \subset L^p(\Omega)$ para $p \in [1, \infty)$, para algún conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces M es relativamente compacto si y sólo si las siguientes condiciones están satisfechas.*

(i) *El conjunto M es acotado en $L^p(\Omega)$, es decir*

$$\sup_{u \in M} \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

(ii) *Existe un módulo de continuidad λ que es independiente de $u \in M$ tal que*

$$\bigl\| u(\cdot + \boldsymbol{\varepsilon}) - u \bigr\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \lambda\bigl(|\boldsymbol{\varepsilon}|\bigr),$$

donde se extiende u a cero fuera de Ω.

(iii) *Uniformemente para $u \in M$,*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{\{\boldsymbol{x} \in \Omega \mid |\boldsymbol{x}| \geqslant \alpha\}} \bigl| u(\boldsymbol{x}) \bigr|^p \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

Comentamos que si Ω es acotado, la condición (iii) es prescindible.

Demostración.

1.) Empezamos demostrando que las condiciones (i)–(iii) son suficientes para demostrar que M es relativamente compacto. Sea ahora φ una función continua tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = 1$ sobre $|\boldsymbol{x}| \leqslant 1$, y $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ para $|\boldsymbol{x}| \geqslant 2$. Sea $\varphi_r(\boldsymbol{x}) := \varphi(r^{-1}\boldsymbol{x})$. Entonces (iii) implica que $\|\varphi_r u - u\| \to 0$ cuando $r \to \infty$. Utilizando el Lema 1.2 notamos que basta demostrar que $M_r := \{\varphi_r u \mid u \in M\}$ es totalmente acotado. Además, M_r satisface (i) y (ii). En otras palabras, basta demostrar que (i) y (ii) conjuntamente con la existencia de un R tal que $u=0$ siempre que $u \in M$ y $|\boldsymbol{x}| \geqslant R$ implican que M es totalmente acotado. Para tal efecto, sea ω_ε una función mollifier, es decir

$$\omega \in C_0^\infty, \quad 0 \leqslant \omega \leqslant 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \omega \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1, \quad \omega_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\varepsilon^n}\omega\left(\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{x}\right).$$

Entonces, definiendo $\mathcal{B}_\varepsilon := \mathcal{B}_\varepsilon(0) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{z}\| \leqslant \varepsilon\}$ y definiendo q tal que $1/p + 1/q = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\|u * \omega_\varepsilon - u\|_{L^p}^p \\
&= \int \bigl|u * \omega_\varepsilon(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x})\bigr|^p \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int \left| \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \bigl(u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})\bigr)\omega_\varepsilon(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y}\right|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leqslant \int \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \bigl|u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})\bigr|^p \mathrm{d}\boldsymbol{y} \|\omega_\varepsilon\|_q^p \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \varepsilon^{np/q-p}\|\omega\|_q^p \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \int \bigl|u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})\bigr|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&\leqslant \varepsilon^{np/q-p}\|\omega\|_q^p \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \max_{|\boldsymbol{z}| \leqslant \varepsilon} \lambda\bigl(|\boldsymbol{z}|\bigr) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} = \varepsilon^{n+np/q-p}\|\omega\|_q^p |\mathcal{B}_1| \max_{|\boldsymbol{z}| \leqslant \varepsilon} \lambda\bigl(|\boldsymbol{z}|\bigr),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|u * \omega_\varepsilon - u\|_{L^p} \leqslant \varepsilon^{n-1}\|\omega\|_{L^q}|\mathcal{B}_1|^{1/p}\Bigl(\max_{|\boldsymbol{z}| \leqslant \varepsilon} \lambda\bigl(|\boldsymbol{z}|\bigr)\Bigr)^{1/p},$$

lo que en combinación con (ii) demuestra la convergencia uniforme cuando $\varepsilon \to 0$ para $u \in M$. Utilizando nuevamente el Lema 1.2 vemos que es suficiente demostrar que

$$N_\varepsilon := \{u * \omega_\varepsilon \mid u \in M\}$$

es totalmente acotado para cualquier $\varepsilon > 0$. De acuerdo a la desigualdad de Hölder,

$$\bigl|u * \omega_\varepsilon(\boldsymbol{x})\bigr| \leqslant \|u\|_p \|\omega_\varepsilon\|_q,$$

es decir en virtud de (i) las funciones en N_ε son uniformemente acotadas. Otra aplicación de la desigualdad de Hölder implica que

$$\begin{aligned}
\bigl|u * \omega_\varepsilon(\boldsymbol{x}) - u * \omega_\varepsilon(\boldsymbol{y})\bigr| &= \left| \int \bigl(u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) - u(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\bigr)\omega_\varepsilon(\boldsymbol{z}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{z}\right| \\
&\leqslant \bigl\|u(\cdot + \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - u\bigr\|_{L^p} \|\omega_\varepsilon\|_{L^q},
\end{aligned}$$

lo que conjuntamente con (ii) demuestra que N_ε es equicontinuo. Ahora el Teorema de Arzelà-Ascoli implica que N_ε es relativamente compacto, y por lo tanto uniformemente acotado en $C(\mathcal{B}_{R+r})$. Como la inmersion natural de $C(\mathcal{B}_{R+r})$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ es acotada, se tiene que N_ε es totalmente acotado también en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces hemos demostrado que (i)–(iii) implican que M es relativamente compacto.

2.) Para demostrar la otra implicación, supongamos que M es relativamente compacto. La satisfacción de (i) es óbvia. Sea ahora $\varepsilon > 0$. Como M es relativamente compacto, existen funciones $u_1, \dots, u_m \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{B}(u_j).$$

Además, como $C_0(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, podemos igualmente suponer que $u_j \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Claramente,

$$\big\| u_j(\cdot + \boldsymbol{y}) - u \big\|_{L^p} \to 0 \quad \text{cuando } \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{0},$$

por lo tanto existe un $\delta > 0$ tal que $\|u_j(\cdot + \boldsymbol{y}) - u\|_{L^p} \leqslant \varepsilon$ siempre que $|\boldsymbol{y}| < \delta$. Si $u \in M$ e $|\boldsymbol{y}| < \delta$, seleccionamos un número j tal que $\|u - u_j\|_{L^p} < \varepsilon$, luego

$$\begin{aligned} \big\| u(\cdot + \boldsymbol{z}) - u \big\|_{L^p} &\leqslant \big\| u(\cdot + \boldsymbol{z}) - u_j(\cdot + \boldsymbol{z}) \big\|_{L^p} \\ &\quad + \big\| u_j(\cdot + \boldsymbol{z}) - u_j \big\|_{L^p} + \|u_j - u\|_{L^p} \\ &= 2\|u_j - u\|_{L^p} + \big\| u_j(\cdot + \boldsymbol{z}) - u_j \big\|_{L^p} \leqslant 3\varepsilon, \end{aligned}$$

lo que demuestra (ii). Ahora si r es suficientemente grande, $\chi_{\mathcal{B}_r} u_j = u_j$ para todo j, luego con la misma selección de j que arriba, obtenemos

$$\|\chi_{\mathcal{B}_r} u - u\|_{L^p} \leqslant \big\| \chi_{\mathcal{B}_r}(u - u_j) \big\|_{L^p} + \|u - u_j\|_{L^p} \leqslant 2\|u - u_j\|_{L^p} \leqslant 2\varepsilon,$$

lo que demuestra (iii).

■

El Teorema de Helly es una simple consecuencia del Teorema de Compacidad de Kolmogorov (Teorema 1.4).

Teorema 1.5 (Teorema de Helly)**.** *Sea $\{h^\delta\}$ una sucesión de funciones definidas sobre un intervalo $[a, b]$, y supongamos que existe una constante M independiente de δ tal que $\mathrm{TV}(h^\delta) < M$ y $\|h^\delta\|_{L^\infty} < M$ para todo δ. Entonces existe una subsucesión $\{h^{\delta_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge c.t.p. a una función $h \in BV[a, b]$.*

Demostración. Basta aplicar (1.5) (para $p = 1$) y utilizar el hecho de que la variación total es acotada para demostrar la satisfacción de la condición (ii) del Teorema 1.4. ■

Efectivamente se puede demostrar que la convergencia asegurada por el Teorema de Helly tiene lugar en cada punto, no solamente en casi todas partes.

La aplicación del Teorema 1.4 en el contexto de leyes de conservacióm es basada en el siguiente resultado.

Teorema 1.6. *Sea $u_\eta : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una familia de funciones tal que para cada $T > 0$,*

$$\big| u_\eta(\boldsymbol{x}, t) \big| \leqslant C_T \quad \text{para } (\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T] \tag{1.10}$$

para una constante C_T independiente de η. Supongamos, además, que para cada conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $t \in [0, T]$ que

$$\sup_{|\boldsymbol{\xi}| \leqslant |\varrho|} \int_B \big| u_\eta(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi}, t) - u_\eta(\boldsymbol{x}, t) \big| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \nu_{B,T}\big(|\varrho|\big), \tag{1.11}$$

para un módulo de continuidad ν. Supongamos, además, que para $s, t \in [0,T]$ se tiene que

$$\int_B \big| u_\eta(\boldsymbol{x},t) - u(\boldsymbol{x},s) \big| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \omega_{B,T}\big(|t-s|\big) \quad \text{cuando } \eta \to 0, \tag{1.12}$$

para un módulo de continuidad ω_T. Entonces existe una sucesión $\eta_j \to 0$ tal que para cada $t \in [0,T]$ la función $\{u_{\eta_j}(t)\}$ converge a una función $u(t) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. La convergencia tiene lugar en $C([0,T]; L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. De acuerdo al Teorema 1.4, para cada $t \in [0,T]$ fijo y cada sucesión $\eta_j \to 0$ existe una subsucesión (todavía denotada por η_j) $\eta_j \to 0$ tal que $\{u_{\eta_j}(t)\}$ converge a una función $u(t)$ en $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Consideremos ahora un subconjunto denso contable $E \subset [0,T]$. Tomando posiblemente otra subsucesión (todavía denotada por $\{u_{\eta_j}(t)\}$) encontramos que

$$\int_B \big| u_{\eta_j}(\boldsymbol{x},t) - u(\boldsymbol{x},t) \big| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \to 0 \quad \text{cuando } \eta_j \to 0, \text{ para } t \in E.$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$ dado. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\omega_{B,T}(\tilde{\delta}) \leqslant \varepsilon$ para cada $\tilde{\delta} \leqslant \delta$. Sea $t \in [0,T]$ fijo. Entonces podemos encontrar $t_k \in E$ tal que $|t_k - t| \leqslant \delta$. Así

$$\int_B \big| u_{\tilde{\eta}}(\boldsymbol{x},t) - u_{\tilde{\eta}}(\boldsymbol{x},t_k) \big| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \omega_{B,T}\big(|t-t_k|\big) \leqslant \varepsilon \quad \text{para } \tilde{\eta} \leqslant \eta,$$

$$\int_B \big| u_{\eta_{j_1}}(\boldsymbol{x},t_k) - u_{\eta_{j_2}}(\boldsymbol{x},t_k) \big| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \varepsilon \quad \text{para } \eta_{j_1}, \eta_{j_2} \leqslant \eta \text{ y } t_k \in E.$$

Entonces la desigualdad triangular entrega que

$$\begin{aligned} \int_B \big| u_{\eta_{j_1}}(\boldsymbol{x},t) - u_{\eta_{j_2}}(\boldsymbol{x},t) \big| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant & \int_B \big| u_{\eta_{j_1}}(\boldsymbol{x},t) - u_{\eta_{j_1}}(\boldsymbol{x},t_k) \big| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ & + \int_B \big| u_{\eta_{j_1}}(\boldsymbol{x},t_k) - u_{\eta_{j_2}}(\boldsymbol{x},t_k) \big| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ & + \int_B \big| u_{\eta_{j_2}}(\boldsymbol{x},t_k) - u_{\eta_{j_2}}(\boldsymbol{x},t) \big| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant 3\varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que para cada $t \in [0,T]$, $u_\eta(t) \to u(t)$ en $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. El Teorema de Convergencia Dominada luego demuestra que

$$\sup_{t \in [0,T]} \int_B \big| u_\eta(\boldsymbol{x},t) - u(\boldsymbol{x},t) \big| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \to 0 \quad \text{cuando } \eta \to 0,$$

lo que concluye la demostración del Teorema 1.6. ∎

Capítulo 2

Introducción

2.1. Preliminares

Las leyes de conservación hiperbólicas son ecuaciones en derivadas parciales de la forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}, \tag{2.1}$$

donde $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_m)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, y si especificamos el dato inicial $\boldsymbol{u}_0$ en $t = 0$, entonces se obtiene el problema de Cauchy

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \boldsymbol{f}_j\bigl(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)\bigr) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0.$$

En las aplicaciones, t normalmente denota el tiempo y $\boldsymbol{x}$ denota la posición espacial en m dimensiones. La función incógnita $\boldsymbol{u}$, al igual que cada una de las funciones $\boldsymbol{f}_j$, puede ser un vector, caso en el cual se dice que tenemos un sistema de ecuaciones, o $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{f}_j$ pueden ser escalares, caso en el cual escribimos u y f_j en vez de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{f}_j$, respectivamente. Estos apuntes cubren la teoría de una ley de conservación escalar en múltiples dimensiones espaciales y la teoría de sistemas hiperbólicos en una dimensión espacial. En este capítulo se estudia el caso unidimensional escalar para enfatizar algunos temas fundamentales en la teoría de leyes de conservación. En lo siguiente se utilizan índices para denotar derivadas parciales, es decir $u_t(x, t) = \partial u(x, t)/\partial t$, etc.

2.2. La ley de conservación unidimensional y escalar

Para $m = 1$ podemos escribir (2.1) como

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0. \tag{2.2}$$

Integrando $u_t + f(u)_x = 0$ entre dos puntos x_1 y x_2, obtenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t \, \mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} f(u)_x \, \mathrm{d}x = f\bigl(u(x_1, t)\bigr) - f\bigl(u(x_2, t)\bigr).$$

Suponiendo que u es suficientemente regular podemos tomar la derivada fuera de la integral para concluir que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) \, \mathrm{d}x = f\bigl(u(x_1, t)\bigr) - f\bigl(u(x_2, t)\bigr). \tag{2.3}$$

Esta ecuación expresa la conservación de la cantidad medida por u en el sentido de que la tasa de cambio del monto total de u contenido en el intervalo $[x_1, x_2]$ es dada por los valores de f evaluada en los extremos de este intervalo. (En la física, normalmente se describe la conservación de una cantidad en forma integral, empezando por (2.3); luego la ecuación diferencial (2.2) sigue a partir de hipótesis adicionales respecto de la regularidad de u.) En virtud de lo anterior es natural interpretar $f = f(u)$ como *densidad de flujo* de u. Frecuentamente uno se refiere a esta función como *función de flujo*.

Ejemplo 2.1 (Conservación de masa en la mecánica de fluidos)**.** *Consideremos un fluido con la densidad $\varrho = \varrho(\boldsymbol{x}, t)$ y la velocidad $\boldsymbol{v}$, suponiendo que no hay fuentes ni sumideros y que por lo tanto la cantidad de fluido es conservada. Para un dominio dado fijo y acotado $D \subset \mathbb{R}^m$ la conservación de masa implica que*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_D \varrho(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{\partial D} (\varrho \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}},$$

donde $\boldsymbol{n}$ denota el vector normal unitario exterior sobre la frontera ∂D de D. Intercambiando la derivada respecto de t con la integral en el lado izquierdo de la ecuación y aplicando el Teorema de Divergencia al lado derecho obtenemos

$$\int_D \varrho(\boldsymbol{x}, t)_t \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_D \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

lo cual reescribimos como

$$\int_D \bigl(\varrho_t + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v})\bigr) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

La derivación en el Ejemplo 2.1 ha sido muy fundamental, y se han utilizado solamente dos hipótesis. En primer lugar, partimos de la hipótesis física de la conservación, y en segundo lugar, supusimos regularidad suficiente de las funciones para poder realizar las manipulaciones matemáticas necesarias. Este último aspecto será un tema recurrente a lo largo de estos apuntes.

Ejemplo 2.2 (Partículas no interactuantes en una dimensión; ecuación de Burgers)**.** *Como ejemplo simple de una ley de conservación consideremos un medio unidimensional consistente en partículas no interactuantes, o puntos materiales, identificados por sus coordenadas y a lo largo de una línea. Sea $\phi(y, t)$ la posición del punto material y al instante t. La velocidad y la aceleración en el instante t estan dadas por $\phi_t(y, t)$ y $\phi_{tt}(y, t)$, respectivamente. Supongamos que para cada t, la función $\phi(\cdot, t)$ es estrictamente creciente, es decir dos puntos materiales distintos no pueden asumir la misma posición en el mismo instante. Entonces la función $\phi(\cdot, t)$ posee una inversa, denotada $\psi(\cdot, t)$, de tal forma que $y = \psi(\phi(y, t), t)$ para todo t, por lo tanto $x = \phi(y, t)$ e $y = \psi(x, t)$ son equivalentes. Sea u la velocidad del punto material que ocupa la posición x en el instante t, es decir*

$$u(x, t) = \phi_t\bigl(\psi(x, t), t\bigr)$$

o equivalentemente,

$$u\bigl(\phi(y, t), t\bigr) = \phi_t(y, t).$$

Entonces la aceleración del punto material y en el instante t es

$$\begin{aligned} \phi_{tt}(y, t) &= u_t\bigl(\phi(y, t), t\bigr) + u_x\bigl(\phi(y, t), t\bigr)\phi_t(y, t) \\ &= u_t(x, t) + u_x(x, t) u(x, t). \end{aligned}$$

Si las partículas materiales son no interactuantes y por ende no ejercen ningún tipo de fuerza una sobre la otra, y no hay ninguna fuerza exterior que actúa sobre ellas, entonces la aceleración debe anularse de acuerdo a la segunda ley de Newton, lo que resulta en la ley de conservación

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \tag{2.4}$$

la cual es una ley de conservación para u *con* $f(u) = u^2/2$. *La ecuación* (2.4) *es frecuentamente denominada* ecuación de Burgers sin viscosidad *o simplemente* ecuación de Burgers invíscida.

La ecuación (2.4), y de hecho cualquier ley de conservación, es un ejemplo de una ecuación *cuasi-lineal*, lo que significa que las derivadas del mayor orden aparecen sólo linealmente. Una ecuación cuasi-lineal general para una función de dos variables x y t puede ser escrita como

$$a(x,t,u)u_t + b(x,t,u)u_x = c(x,t,u). \tag{2.5}$$

Si las funciones coeficientes a y b son independientes de u, es decir $a = a(x,t)$ y $b = b(x,t)$, se dice que (2.5) es *semi-lineal*, y si además lo mismo es válido para c, es decir $c = c(x,t)$, entonces se dice que (2.5) es *lineal*.

Se puede considerar la solución como una superficie

$$S = \big\{\big(t,x,u(x,t)\big) \in \mathbb{R}^3 \mid (t,x) \in \mathbb{R}^2\big\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ una curva dada, la cual puede ser considerada como dato inicial si t es constante a lo largo de Γ, parametrizada por $(t(y), x(y), z(y))$ para y en algún intervalo. Queremos construir la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $(t, x, u(x,t))$ de tal forma que $u = u(x,t)$ satisface (2.5) y a la vez, $\Gamma \subset S$. Es ventajoso parametrizar S por variables nuevas (s,y) tal que $t = t(s,y)$, $x = x(s,y)$ y $z = z(s,y)$ en tal forma que $u(x,t) = z(s,y)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{\partial t}{\partial s} = a, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = b, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = c, \quad s > s_0 \tag{2.6}$$

conjuntamente con las condiciones iniciales (para la integración con respecto a s)

$$t(s_0,y) = t(y), \quad x(s_0,y) = x(y), \quad z(s_0,y) = z(y)$$

obtenemos la superficie parametrizada

$$S = \big\{\big(t(s,y), x(s,y), z(s,y)\big) \mid (s,y) \in \mathbb{R}^2\big\}.$$

Supongamos que las relaciones $x = x(s,y)$ y $t = t(s,y)$ pueden ser invertidas para obtener $s = s(x,t)$ e $y = y(x,t)$. Entonces

$$u(x,t) = z\big(s(x,t), y(x,t)\big)$$

satisface tanto (2.5) como $\Gamma \subset S$. Para verificar la primera de estas afirmaciones, basta calcular

$$c = \frac{\partial z}{\partial s} = u_x \frac{\partial x}{\partial s} + u_t \frac{\partial t}{\partial s} = u_x b + u_t a.$$

Comentamos que hay muchas “trampas” en esta construcción: la solución (2.6) puede existir sólo localmente, y puede suceder que no podemos invertir la solución de la ecuación diferencial para expresar (s, y) como funciones de (x, t). Este tipo de problemas es intrínseco de leyes de conservación y será discutido detalladamente.

La ecuación (2.6) se llama *ecuación característica*, y sus soluciones son llamadas *características*. En ciertas circunstancias las características pueden ser utilizadas para hallar soluciones explícitas de leyes de conservación. Notamos que en el caso homogéneo, es decir cuando $c \equiv 0$, la solución u es constante a lo largo de características, ya que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u\bigl(x(s,y), t(s,y)\bigr) = u_x x_s + u_t t_s = u_x b + u_t a = 0.$$

Ejemplo 2.3 (Solución de una ecuación cuasi-lineal por el método de características)**.** *Consideremos la ecuación (cuasi-) lineal*

$$u_t - x u_x = -2u, \quad u(x,0) = x,$$

con la ecuación característica asociada

$$\frac{\partial t}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = -x, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = -2z.$$

La solución general de la ecuación característica es

$$t = t_0 + s, \quad x = x_0 \mathrm{e}^{-s}, \quad z = z_0 \mathrm{e}^{-2s}.$$

Parametrizando el dato inicial para $s = 0$ por $t = 0$, $x = y$ y $z = y$ obtenemos

$$t = s, \quad x = y\mathrm{e}^{-s}, \quad z = y\mathrm{e}^{-2s},$$

lo que puede ser invertido para obtener

$$u = u(x,t) = z(s,y) = x\mathrm{e}^{-t}.$$

Ejemplo 2.4 (Solución de una ecuación cuasi-lineal por el método de características)**.** *Consideremos la ecuación (cuasi-) lineal*

$$x u_t - t^2 u_x = 0 \tag{2.7}$$

con la ecuación característica asociada

$$\frac{\partial t}{\partial s} = x, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = -t^2.$$

Esta ecuación posee soluciones dadas implícitamente por

$$\frac{x^2}{2} + \frac{t^3}{3} = \text{const.},$$

considerando que

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right) = 0;$$

por lo tanto, la solución de (2.7) *es*

$$u(x,t) = \varphi\left(\frac{x^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$$

para cualquier función φ. Por ejemplo, si deseamos resolver el problema de valores iniciales de (2.7) *con el dato inicial $u(x,0) = \sin|x|$, entonces $u(x,0) = \varphi(x^2/2) = \sin|x|$, es decir $\varphi(\zeta) = \sin(2\zeta)^{1/2}$ con $\zeta \geqslant 0$, y la solución u viene dada por*

$$u(x,t) = \sin\sqrt{x^2 + 2t^3/3}, \quad t \geqslant 0.$$

Ejemplo 2.5 (Ecuación de Burgers)**.** *Aplicando la misma técnica a la ecuación de Burgers* (2.4) *con el dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$ obtenemos la ecuación característica*

$$\frac{\partial t}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = z, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

conjuntamente con las condiciones iniciales

$$t(0,y) = 0, \quad x(s,y) = y + sz = y + su_0(y), \quad z(s,y) = u_0(y).$$

Podemos escribir esto como

$$x = y + u_0(y)t. \tag{2.8}$$

Resolviendo esta ecuación en términos de $y = y(x,t)$, podemos utilizar y para obtener

$$u(x,t) = z(s,y) = u_0\bigl(y(x,t)\bigr),$$

llegando a la relación implícita

$$u(x,t) = u_0\bigl(x - u(x,t)t\bigr). \tag{2.9}$$

Para un punto (x,t) dado podemos, en un principio, utilizar (2.9) *para determinar la solución $u = u(x,t)$. Efectivamente, diferenciando* (2.8), *obtenemos*

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 1 + tu_0'(y). \tag{2.10}$$

Por lo tanto, una solución seguramente existe para todo $t > 0$ si $u_0' > 0$, ya que x es una función creciente de y en este caso. Por otro lado, si $u_0'(\tilde{x}) < 0$ para algun $\tilde{x}$, entonces una solución no puede ser encontrada para

$$t > t^* := -\frac{1}{u_0'(\tilde{x})}.$$

Por ejemplo para

$$u_0(x) = -\arctan x \tag{2.11}$$

no existe una solución suave para $t > 1$.

¿Qué pasa efectivamente cuando una solución suave no puede ser definida? A partir de (2.10) *vemos que para $t > t^*$ existen varios valores y que satisfacen* (2.8) *para cada x, puesto que x ya no es una función creciente de y. En cierto sentido podemos decir que la solución u es multívoca en tales puntos. Para ilustrar esto, consideremos la superficie*

$$(t,x,u) = \bigl(s, y + su_0(y), u_0(y)\bigr) \tag{2.12}$$

parametrizada por s e y, suponiendo que el dato inicial es dado por (2.11) *y $t_0 = 0$. Para cada t fijo, la curva trazada por la superficie es el grafo de una función (multívoca) de x. La Figura 2.1 muestra que a partir de $t = 1$ la solución u comienza a ser multívoca cuando la superficie comienza a plegar y que para $t > 1$ existen algunos x para los cuales existen tres*

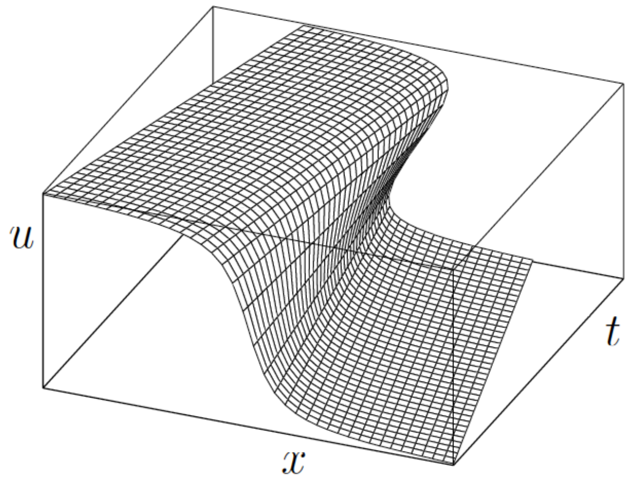


FIGURA 2.1. Ejemplo 2.5 (Ecuación de Burgers): superficie en el espacio (t, x, u) parametrizada por (2.12), $u_0(x) = -\arctan x$ [53].

valores de u asociados. Para poder continuar la solución más allá de $t = 1$ habrá que elegir entre los tres valores de u. En cualquier caso no es posible continuar la solución y a la vez mantener su continuidad.

El ejemplo anterior ilustra que independientemente de la suavidad de la función inicial, no podemos esperar poder definir soluciones clásicas de leyes de conservación no lineales para todos los tiempos. En esta situación hay que extender el concepto de solución para poder admitir discontinuidades.

2.3. Soluciones discontinuas

La manera estándar de extender el conjunto de soluciones admisibles para ecuaciones diferenciales parciales consiste en la búsqueda de *soluciones débiles* en lugar de *soluciones clásicas* mediante la teoría de distribuciones. Las soluciones clásicas son suficientemente diferenciables como para asegurar que la ecuación diferencial esté satisfecha para todos los valores de los argumentos independientes. Sin embargo no existe una definición única de soluciones débiles. En el contexto de leyes de conservación no necesitamos la "maquinaria" completa de la teoría de distribuciones, y las soluciones serán funciones que pueden ser no diferenciables.

En lo siguiente, se denota por $C^i(U)$ el espacio de las funciones i veces continuamente diferenciables sobre un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, y $C_0^i(U)$ denota el conjunto de tales funciones que poseen soporte compacto en U. Luego $C^\infty(U) = \cap_{l=0}^{\infty} C^i(U)$; análogamente definimos $C_0^\infty(U)$. Si no hay ambigüedad, escribimos simplemente C^0, etc.

Si u es una solución clásica de (2.2), podemos multiplicar la ecuación por una función test $\varphi = \varphi(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ e integrar por partes para obtener

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \bigl(u_t \varphi + f(u)_x \varphi\bigr)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$$

$$= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \big(u\varphi_t + f(u)\varphi_x\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} u_0\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x.$$

Observar que los términos de borde en $t=\infty$ y $x=\pm\infty$ se anulan porque φ posee soporte compacto, y que la expresión final incorpora los datos iniciales. En virtud de lo anterior, podemos *definir* una solución débil como sigue.

Definición 2.1 (Solución débil de (2.2))**.** *Se dice que una función medible* $u=u(x,t)$ *es una* solución débil de (2.2) *si*

$$\begin{aligned} &\forall \varphi = \varphi(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty)) : \\ &\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \big(u\varphi_t + f(u)\varphi_x\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} u_0\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Observamos que ya no se pide que una solución débil sea diferenciable, y que una solución clásica es, en particular, una solución débil. Se estudiarán detalladamente las restricciones que la validez de (2.13) impone sobre u.

En lo siguiente, utilizaremos la notación habitual; para $p\in[1,\infty)$, $L^p(U)$ denota el conjunto de todas las funciones medibles $F:U\to\mathbb{R}$ para las cuales

$$\int_U |F|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty.$$

El conjunto $L^p(U)$ es equipado por la norma

$$\|F\|_p = \|F\|_{L^p} = \|F\|_{L^p(U)} = \left(\int_U |F|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/p}.$$

Para $p=\infty$, $L^\infty(U)$ denota el conjunto de todas las funciones medibles F tales que

$$\operatorname*{ess\,sup}_U |F| = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in U} \big|F(\boldsymbol{x})\big| < \infty.$$

El espacio $L^\infty(U)$ posee la norma

$$\|F\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_U |F|.$$

Como es bien sabido, los espacios $L^p(U)$ para $p\in[1,\infty]$ son espacios de Banach, y $L^2(U)$ es un espacio de Hilbert. Frecuentemente utilizaremos, además, los espacios

$$L^p_{\mathrm{loc}}(U) := \big\{f:U\to\mathbb{R} \mid f\in L^p(K) \text{ para cada conjunto compacto } K\subseteq U.\big\}$$

En virtud de la discusión anterior nos preguntamos: ¿cuales son las discontinuidades compatibles con (2.13)? Si suponemos que u es constante fuera de un intervalo finito, los comentarios que siguen (2.2) implican que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^\infty u(x,t)\,\mathrm{d}x = 0,$$

es decir la cantidad total de u es independiente del tiempo, o equivalentemente, el área debajo del grafo de $u(\cdot,t)$ es constante.

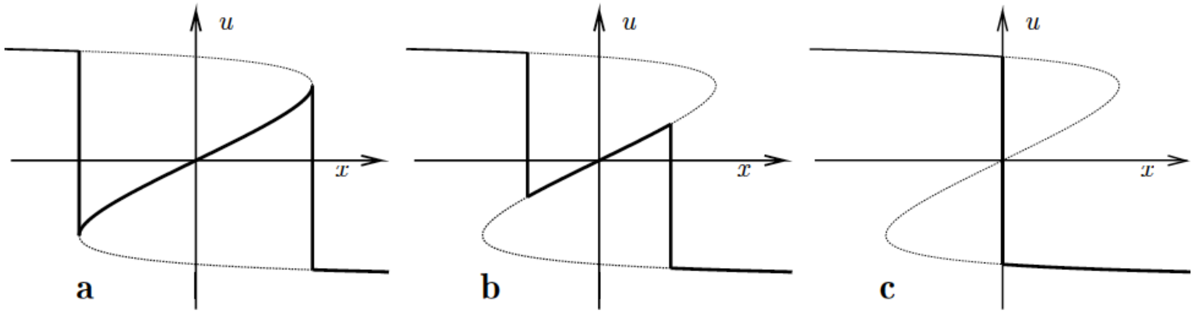


FIGURA 2.2. Ejemplo 2.6 (Ecuación de Burgers): varias soluciones $u(\cdot, 3)$ para $u_0(x) = -\arctan x$ con conservación de u [53].

Ejemplo 2.6 (Ecuación de Burgers (continuación))**.** *Queremos ahora determinar una función discontinua tal que el grafo de la función está en la superficie construida en el Ejemplo 2.5 (ver Figura 2.1) con*

$$u(x, 0) = u_0(x) = -\arctan x.$$

Además, el área debajo del grafo debe ser igual al área entre el eje x y la superficie. La Figura 2.2 muestra un corte de esta superficie que constituye la solución para $t = 3$. La curva es parametrizada por x_0, y dada explíctamente por

$$u = -\arctan x_0, \quad x = x_0 - 3\arctan x_0.$$

La función u es indicada por una línea gruesa. Es facil hallar una función $u(x)$ que tenga el valor correcto de la integral,

$$\int u(x)\,\mathrm{d}x = \int u_0(x)\,\mathrm{d}x,$$

insertando un corte (segmento recto vertical) entre el pliegue superior y el pliegue intermedio en una posición $x_c < 0$ con $x_c \geqslant -\sqrt{2}$, y agregar otro corte entre el pliegue intermedio y el pliegue inferior en $-x_c$. Observamos que en todos los casos el área debajo de la línea gruesa es el mismo que el área limitado por la curva $(x(x_0), u(x_0))$. Obviamente, la conservación de u por sí sóla no es suficiente como para determinar una solución débil única.

2.4. La condición de Rankine-Hugoniot

Analizamos ahora qué discontinuidades de la solución u son compatibles con (2.13). Suponemos una discontinuidad aislada que se desplaza a lo largo de una curva suave $\Gamma : x = x(t)$. Hablamos de una discontinuidad aislada indicando que se supone que $u(x, t)$ es diferenciable en una vecindad suficientemente pequeña de $x(t)$, donde u satisface la ley de conservación en el sentido clásico.

Escogemos una vecindad D de $(x(t), t)$ y una función test $\phi(x, t)$ cuyo soporte pertenece a D. Según la Figura 2.3, la vecindad D se descompone en dos partes D_1 y D_2, y suponemos que u es diferenciable en todo D salvo en los puntos de la curva $x(t)$. Definimos

$$D_i^\varepsilon := \bigl\{(x, t) \in D_i \bigm| \operatorname{dist}\bigl((x, t), (x(t), t)\bigr) > \varepsilon\bigr\}, \quad i = 1, 2.$$

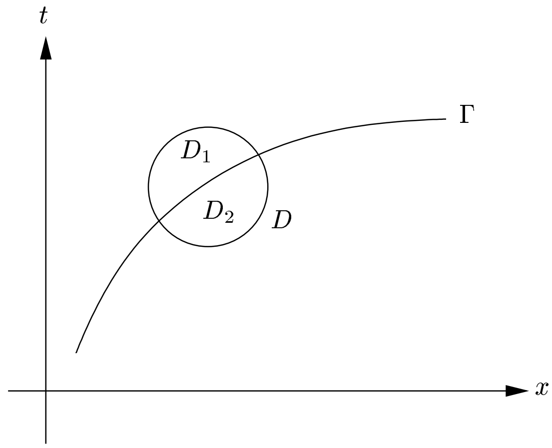


FIGURA 2.3. La derivación de la condición de Rankine-Hugoniot.

Como u es acotada, tenemos que

$$0 = \int_D \bigl(u\phi_t + f(u)\phi_x\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_1^\varepsilon \cup D_2^\varepsilon} \bigl(u\phi_t + f(u)\phi_x\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \qquad (2.14)$$

Dado que u es una solución clásica en D_1^ε y D_2^ε, el teorema de Green implica que

$$\begin{aligned}\int_{D_i^\varepsilon} \bigl(u\phi_t + f(u)\phi_x\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_{D_i^\varepsilon} \Bigl(u\phi_t + f(u)\phi_x + \bigl(u_t + f(u)_x\bigr)\phi\Bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{D_i^\varepsilon} \bigl((u\phi)_t + (f(u)\phi)_x\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\partial D_i^\varepsilon} \phi(-u\,\mathrm{d}x + f(u)\,\mathrm{d}t).\end{aligned}$$

Tomamos en cuenta que $\phi = 0$ en ∂D_i^ε, con la excepción de la cercanía de $x(t)$. Sea Γ_i^ε aquella parte de ∂D_i^ε. Entonces tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_i^\varepsilon} \phi(-u\,\mathrm{d}x + f(u)\,\mathrm{d}t) = \pm\int_{\Gamma\cap D} \phi(-u_{\mathrm{l,r}}\,\mathrm{d}x + f_{\mathrm{l,r}}\,\mathrm{d}t),$$

donde $u_{\mathrm{l,r}}$ es el límite de $u(x,t)$ cuando $x \to x(t)\mp$,

$$u_{\mathrm{l,r}} = \lim_{x\to x(t)\mp} u(x,t), \quad f_{\mathrm{l,r}} = \lim_{x\to x(t)\mp} f\bigl(u(x,t)\bigr).$$

En virtud de (2.14), obtenemos

$$\int_{\Gamma\cap D} \phi\Bigl(-\bigl(u_{\mathrm{l}}(t) - u_{\mathrm{r}}(t)\bigr)\,\mathrm{d}x + \bigl(f_{\mathrm{l}}(t) - f_{\mathrm{r}}(t)\bigr)\,\mathrm{d}t\Bigr) = 0.$$

Dado que esto debe ser válido para todas funciones test ϕ, obtenemos que

$$s(u_{\mathrm{l}} - u_{\mathrm{r}}) = f(u_{\mathrm{l}}) - f(u_{\mathrm{r}}), \quad s = x'(t). \qquad (2.15)$$

Esta ecuación se llama *condición de Rankine-Hugoniot*. Expresa la conservación a través de discontinuidades. Usando la notación

$$[\![a]\!] := a_{\mathrm{r}} - a_{\mathrm{l}},$$

podemos escribir (2.15) como

$$s[\![u]\!] = [\![f]\!].$$

Ejemplo 2.7 (Ecuación de Burgers: continuación)**.** *Para la ecuación de Burgers, la condición de Rankine-Hugoniot es*

$$s = \frac{[\![u^2/2]\!]}{[\![u]\!]} = \frac{u_{\mathrm{r}}^2 - u_{\mathrm{l}}^2}{2(u_{\mathrm{r}} - u_{\mathrm{l}})} = \frac{u_{\mathrm{l}} + u_{\mathrm{r}}}{2}.$$

Observamos que el salto a la izquierda en las Figuras 2.2 (a) y (b) tendrá una velocidad mayor a la del salto a la derecha, por lo tanto las soluciones del tipo (a) o (b) no pueden ser discontinuidades aisladas propagándose a lo largo de dos trayectorias empezando en $t = 1$*. La solución de la Figura 2.2 (c) corresponde a una discontinuidad estacionaria.*

Ejemplo 2.8 (Tráfico vehicular)**.** *En lugar de seguir desarrollando la teoría, consideremos ahora un ejemplo de una ley de conservación en detalle. Trataremos motivar como una ley de conservación puede modelar el flujo vehicular sobre una carretera.*

Consideremos una carretera unidimensional de solamente una pista, con tráfico en una sola dirección. La carretera es parametrizada por una sola coordenada x*, y se supone que el tráfico se mueve en la dirección de* x *creciente. Supongamos que nos posicionamos en un punto* x *de la carretera y observamos el número de vehículos* $N = N(x,t,h)$ *contenido en el intervalo* $[x, x+h]$*. Si algún vehículo está localizado en la frontera de este intervalo lo tomamos en cuenta permitiendo que* N *puede asumir cualquier valor real. Si el tráfico es denso y* h *es grande en comparación con la longitud en promedio de un vehículo, pero a la vez pequeño con la longitud de la carretera, podemos definir la densidad*

$$\varrho(x,t) := \lim_{h \to 0} \frac{N(x,t,h)}{h},$$

es decir,

$$N(x,t,h) = \int_x^{x+h} \varrho(y,t)\,\mathrm{d}y.$$

Sea ahora la posición de algún vehículo dada por $r(t)$*, y sea su velocidad dada por* $v(r(t),t)$*. Considerando el intervalo* $[a,b]$*, deseamos ahora determinar cómo cambia el número de vehículos contenidos en este intervalo. Como suponemos que no hay entradas o salidas en el segmento de carretera considerado, este número puede cambiar solamente debido a vehículos que entran por el extremo a la izquierda o salen por el otro extremo a la derecha. La tasa o el caudal de vehículos que pasan por un punto* x *al instante* t *es* $v(x,t)\varrho(x,t)$*, luego*

$$-\bigl(v(b,t)\varrho(b,t) - v(a,t)\varrho(a,t)\bigr) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b \varrho(y,t)\,\mathrm{d}y.$$

Comparando esto con (2.2) y (2.3) observamos que la densidad satisface la ley de conservación

$$\varrho_t + (\varrho v)_x = 0.$$

En el caso más simple se supone que la velocidad v es dada como una función solamente de la densidad ϱ. Esto es una aproximación razonable si la carretera no exhibe curvas cerradas, pendientes u otros obstáculos que obligan a los (conductores de los) vehículos a frenar. También es razonable que exista una velocidad máxima $v_{\text{máx}}$ que cada vehículo puede alcanzar. Cuando el tráfico es liviano, un vehículo se desplazará a la velocidad máxima $v_{\text{máx}}$, y mientras que se densifique el tráfico, los vehículos deben reducir su velocidad, hasta llegar a un estado de completa congestión sin movimiento cuando los vehículos están parados pegados, situación caracterizada por $\varrho = \varrho_{\text{máx}}$. En virtud de lo anterior se supone que la velocidad v es una funcion monótona decreciente de ϱ tal que $v(0) = v_{\text{máx}}$ y $v(\varrho_{\text{máx}}) = 0$. La función más simple de este tipo es una función lineal,

$$v(\varrho) = v_{\text{máx}}(1 - \varrho/\varrho_{\text{máx}}),$$

la cual resulta en la función de flujo

$$f(\varrho) = v\varrho = v_{\text{máx}}\varrho \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_{\text{máx}}}\right), \tag{2.16}$$

Para facilitar la discusión normalizamos introduciendo $u := \varrho/\varrho_{\text{máx}}$ y $\tilde{x} = v_{\text{máx}}x$. Escribiendo x en lugar de $\tilde{x}$ llegamos a la ley de conservación normalizada

$$u_t + \big(u(1-u)\big)_x = 0. \tag{2.17}$$

Para $\tilde{u} := 1/2 - u$ recuperamos la ecuación de Burgers (2.4), aunque esta vez con una nueva interpretación de la solución.

Queremos ahora resolver explícitamente un problema de valores iniciales de (2.17) mediante el método de características. Para tal efecto consideramos el dato inicial

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 3/4 & \text{para } x \leqslant -a, \\ 1/2 - x/(4a) & \text{para } -a < x < a, \\ 1/4 & \text{para } x \geqslant a. \end{cases} \tag{2.18}$$

Las características satisfacen

$$t'(\xi) = 1, \quad x'(\xi) = 1 - 2u\big(x(\xi), t(\xi)\big).$$

La solución de estas ecuaciones es $x = x(t)$, donde

$$x(t) = \begin{cases} x_0 - t/2 & \text{para } x_0 < -a, \\ x_0 + x_0 t/(2a) & \text{para } -a \leqslant x_0 \leqslant a, \\ x_0 + t/2 & \text{para } x_0 > a. \end{cases}$$

Insertando esto en la solución $u(x,t) = u_0(x_0(x,t))$ obtenemos

$$u(x,t) = \begin{cases} 3/4 & \text{para } x \leqslant -a - t/2, \\ 1/2 - x/(4a + 2t) & \text{para } -a - t/2 < x < a + t/2, \\ 1/4 & \text{para } x \geqslant a + t/2. \end{cases}$$

Esta solución describe una situación en la cual la densidad del tráfico es inicialmente pequeña para $x > 0$ y grande para $x < 0$. Si dejamos $a \to 0$, obtenemos la solución

$$u(x,t) = \begin{cases} 3/4 & \text{para } x \leqslant -t/2, \\ 1/2 - x/(2t) & \text{para } -t/2 < x < t/2, \\ 1/4 & \text{para } x \geqslant t/2. \end{cases} \tag{2.19}$$

Se puede verificar directamente que esta solución también es una solución clásica de (2.17) *en todas partes con la excepción de $x = \pm t/2$. Esta solución asume valores iniciales discontinuos:*

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 3/4 & \text{para } x < 0, \\ 1/4 & \text{para } x \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

La función inicial puede corresponder a la situación cuando un semáforo ubicado en $x = 0$ cambia de "rojo" a "verde" en el instante $t = 0$. Delante del semáforo la densidad es alta; detrás, la densidad es baja. Los problemas de valores iniciales del tipo (2.20)*, donde la función inicial consiste en dos valores constantes, se llaman* problemas de Riemann*. Tales problemas serán estudiados intensamente en estos apuntes.*

Insertando simplemente $u_{\mathrm{l}} = 3/4$ y $u_{\mathrm{r}} = 1/4$ en la condición de Rankine-Hugoniot (2.16) *obtenemos otra solución débil de este problema de valores iniciales. Estos estados entregan que $s = 0$, lo que corresponde a la solución simple $u_2(x,t) = u_0(x)$. En un principio esta solución no es peor o mejor que la solución* (2.19) *determinada anteriormente. Sin embargo, si examinamos la situación que el problema de valores iniciales supuestamente modela, la solución u_2 resulta insatisfactoria ya que describe una situación en la que el semáforo cambia a "verde" pero la densidad de vehículos delante del semáforo no cambia, es decir ningún vehículo se mueve. Al contrario, en la primera solución* (2.19) *la densidad decrece. Analizando el modelo, y considerando la experiencia cotidiana con "tacos", encontramos que las discontinuidades admisibles son aquellas en las que la densidad incrementa. Esto corresponde a la situación cuando hay un "taco" por delante desde el punto de vista del conductor, obligándole a frenar abruptamente. Por otro lado, saliendo de un "taco" normalmente experimentamos un decrecimiento gradual de la densidad de vehículo alrededor del nuestro.*

Acabamos de formular una condición adicional a la condición de Rankine-Hugoniot que nos permite reducir el número de soluciones débiles de la ley de conservación. Esta condición constata que cada solución débil u debe incrementar a través de una discontinuidad*. Tales condiciones frecuentemente son llamadas* condiciones de entropía*. Esta terminología origina en la dinámica de gases, donde condiciones similares constatan que la entropía física debe incrementar a través de cualquier discontinuidad.*

Consideremos ahora el problema de valores iniciales opuesto, es decir el estado inicial

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{para } x < 0, \\ 3/4 & \text{para } x \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Ahora las características que emanan desde un punto $x_0 < 0$ son dadas por $x(t) = x_0 + t/2$, y las características que emanan desde un punto $x_0 > 0$ son dadas por $x(t) = x_0 - t/2$. Observamos que estas características inmediatamente intersectan, dando origen a una *solución multívoca para cada $t > 0$. Esto significa que no existe ninguna posibilidad de encontrar una solución continua de este problema de valores iniciales para cualquier intervalo de tiempo $(0, \delta)$. Insertando los datos $u_{\mathrm{l}} = 1/4$ y $u_{\mathrm{r}} = 3/4$ en la condición de Rankine-Hugoniot obtenemos que u_0, dada por (2.21), ya es una solución débil. Esta vez la solución incrementa a través de la discontinuidad, y por lo tanto satisface la condición de entropía. En este caso una solución admisible viene dada por $u(x,t) = u_0(x)$.*

Queremos resolver en detalle un problema un poco más complicado. Supongamos que la carretera exhibe una densidad de vehículos inicialmente uniforme. En el instante $t = 0$ un semáforo posicionado en $x = 0$ cambia desde "verde" a "rojo". Permanece "rojo" por un intervalo Δt, luego vuelve a mostrar "verde" y permanece "verde". Suponemos que la densidad uniforme inicial es $u = 1/2$, y queremos determinar la densidad del tráfico para $t > 0$.

Cuando inicialmente el semáforo cambia a "rojo", la situación para los vehículos a la izquierda del semáforo es la misma que cuando los vehículos están parados parachoque con parachoque a la dereche del semáforo. Entonces para determinar la situación para $t \in [0, \Delta t)$ hay que resolver el problema de Riemann con la función inicial

$$u_0^{\mathrm{l}}(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{para } x < 0, \\ 1 & \text{para } x \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Para los vehículos a la derecha del semáforo la situación es similar a la situación de la interrupación abrupta del tráfico en el instante $t = 0$ detrás del vehículo localizado en $x = 0$. Por lo tanto, para determinar la solución para $x > 0$ hay que resolver el problema de Riemann dado por

$$u_0^{\mathrm{r}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ 1/2 & \text{para } x \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Volviendo a (2.22), observamos que aquí u incrementa a través de la discontinuidad inicial, es decir podemos tratar de insertar estos datos en la condición de Rankine-Hugoniot, lo que entrega

$$s = \frac{f_{\mathrm{r}} - f_{\mathrm{l}}}{u_{\mathrm{r}} - u_{\mathrm{l}}} = \frac{\frac{1}{4} - 0}{\frac{1}{2} - 1} = -\frac{1}{2},$$

por lo tanto una solución admisible para $x < 0$ y $t \in [0, \Delta t)$ es dada por

$$u^{\mathrm{l}}(x,t) = \begin{cases} 1/2 & \text{para } x < t/2, \\ 1 & \text{para } x \geqslant t/2. \end{cases}$$

Notar que cada vehículo se mueve sólo en la dirección positiva, pero que la discontinuidad se mueve hacia la izquierda.

En general, hay que distinguir tres velocidades diferentes en el contexto de leyes de conservación: la velocidad de una partícula, en este caso la velocidad de cada vehículo; la velocidad característica; y la velocidad de una discontinuidad. Estas tres velocidades no serán iguales en el caso de una ley de conservación no lineal. En el presente caso, la velocidad de cada *vehículo es no negativa, pero tanto la velocidad característica como la velocidad de una discontinuidad pueden asumir valores positivos o negativos. Notamos, además, que la velocidad de una discontinuidad admisible es menor que la velocidad característica a la izquierda de la discontinuidad pero mayor que a velocidad característica a la derecha. Esto es una propiedad general de discontinuidades admisibles.*

Queda por determinar la densidad para $x > 0$. La función (2.23) también posee una discontinuidad de salto positiva, es decir insertando los datos de (2.23) en la condición de Rankine-Hugoniot se produce una solución admisible. Aquí obtenemos $s = 1/2$, luego la solución para $x > 0$ viene dada por

$$u^{\mathrm{r}}(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < t/2, \\ 1/2 & \text{para } x \geqslant t/2. \end{cases}$$

Combinando u^{l} y u^{r}, obtenemos la solución

$$u(x,t) = \begin{cases} 1/2 & \text{para } x \leqslant -t/2, \\ 1 & \text{para } -t/2 < x \leqslant 0, \\ 0 & \text{para } 0 < x \leqslant t/2, \\ 1/2 & \text{para } x > t/2, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, \Delta t).$$

Para averiguar lo que pasa para $t > \Delta t$ se resuelve el problema de Riemann definido por los datos

$$u(x, \Delta t) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < 0, \\ 0 & \text{para } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Ahora la discontinuidad inicial no es aceptable de acuerdo a nuestra condición de entropía, por lo tanto hay que buscar otra solución. Podemos tratar de imitar el ejemplo anterior donde empezamos con una función inicial no creciente que es lineal sobre algún intervalo pequeño $(-a, a)$ (ver (2.18)). Entonces sea $v(x,t)$ la solución del problema de valores iniciales

$$v_t + \big(v(1-v)\big)_x = 0; \quad v(x,0) = v_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < -a, \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2a} & \text{para } -a \leqslant x < a, \\ 0 & \text{para } x \geqslant a. \end{cases}$$

Tal como en el ejemplo anterior encontramos que las características no intersectan, y precisamente llenan el semi-espacio positivo. Entonces la solución viene dada por $v(x,t) = v_0(x_0(x,t))$; precisamente,

$$v(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < -a - t, \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2a + 2t} & \text{para } -a - t \leqslant x < a + t, \\ 0 & \text{para } x \geqslant a + t. \end{cases}$$

Dejando $a \to 0$ obtenemos la solución del problema de Riemann con estado a izquiera 1 y a derecha 0. Por simplicidad también esta solución será denotada por $v(x,t)$. Este tipo *de solución puede ser representado como "abanico" de características que emanan desde el origen, y por lo tanto es llamado* onda de rarefacción centrada*, o simplemente,* onda de rarefacción*. Esta terminología origina en la dinámica de gases.*

Observamos que la onda de rarefacción, centrada en $(0, \Delta t)$*, no influye inmediatamente la solución lejos del origen. La parte más a la izquierda de la onda se mueve a la velocidad* -1*, mientras que la parte delantera de la onda se mueve a la velocidad* 1*. Es decir para algún tiempo después de* Δt*, la densidad es obtenida combinando las tres soluciones* $u^{\mathrm{l}}(x,t)$*,* $v(x, t-\Delta t)$*, y* $u^{\mathrm{r}}(x,t)$*. Por supuesto, la onda de rarefacción alcanzará las discontinuidades de las soluciones* u^{l} *y* u^{r}*. Como las velocidades de las discontinuidades son* $\mp 1/2$*, y las velocidades extremas de la onda de rarefacción son* ∓ 1*, y la onda de rarefacción comienza en* $(0, \Delta t)$*, concluimos que esto sucede en* $(\mp\Delta t, 2\Delta t)$*.*

Queda por calcular la solución para $t > 2\Delta t$*. Consideremos primero lo que pasa para* $x > 0$*. Como los valores de* u *transportados a lo largo de las características en la onda de rarefacción son inferiores a* $1/2$*, podemos construir una discontinuidad admisible utilizando la condición de Rankine-Hugoniot* (2.15)*. Se define una función que posee una discontinuidad que se mueve a lo largo de una trayectoria* $x(t)$*. El valor a la derecha de la discontinuidad es* $1/2$*, y el valor a la izquierda es determinado por* $v(x, t-\Delta t)$*. Insertando esto en* (2.15) *obtenemos la ecuación diferencial*

$$x'(t) = s = \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2(t-\Delta t)}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2(t-\Delta t)}\right)}{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2(t-\Delta t)}\right)} = \frac{x}{2(t-\Delta t)}.$$

Como $x(2\Delta t) = \Delta t$*, esta ecuación diferencial posee la solución*

$$x_+(t) = \sqrt{\Delta t(t-\Delta t)}.$$

La solución para $x < 0$ *es similar. Aquí utilizamos el hecho de que los valores de solución en la parte izquierda del abanico de rarefacción son mayores que* $1/2$*. Esto produce una discontinuidad con el estado* $1/2$ *a la izquierda y los valores a derecha tomados de la onda de rarefacción. La trayectoria de esta discontinuidad es* $x_-(t) = -x_+(t)$*.*

Ahora efectivamente hemos encontrado una solución válida para todo $t > 0$*. Esta solución tiene la propiedad de que es clásica en todo punto* (x,t) *donde es diferenciable, y que satisface tanto la condición de Rankine-Hugoniot como la condición de entropiía en puntos de discontinuidad. La Figura 2.4 muestra esta solución. Notamos que logramos resolver un problema complicado combinando soluciones de problemas de Riemann, lo que es exactamente la idea detrás del método de* front tracking.

2.5. Ecuaciones lineales

En lo siguiente haremos una pausa en la exposición de leyes de conservación hiperbólicas no lineales para echar una mirada breve a ecuaciones de transporte lineales. Muchos de los conceptos y métodos definidos más adelante en estos apuntes son mucho más simples si las ecuaciones son lineales.

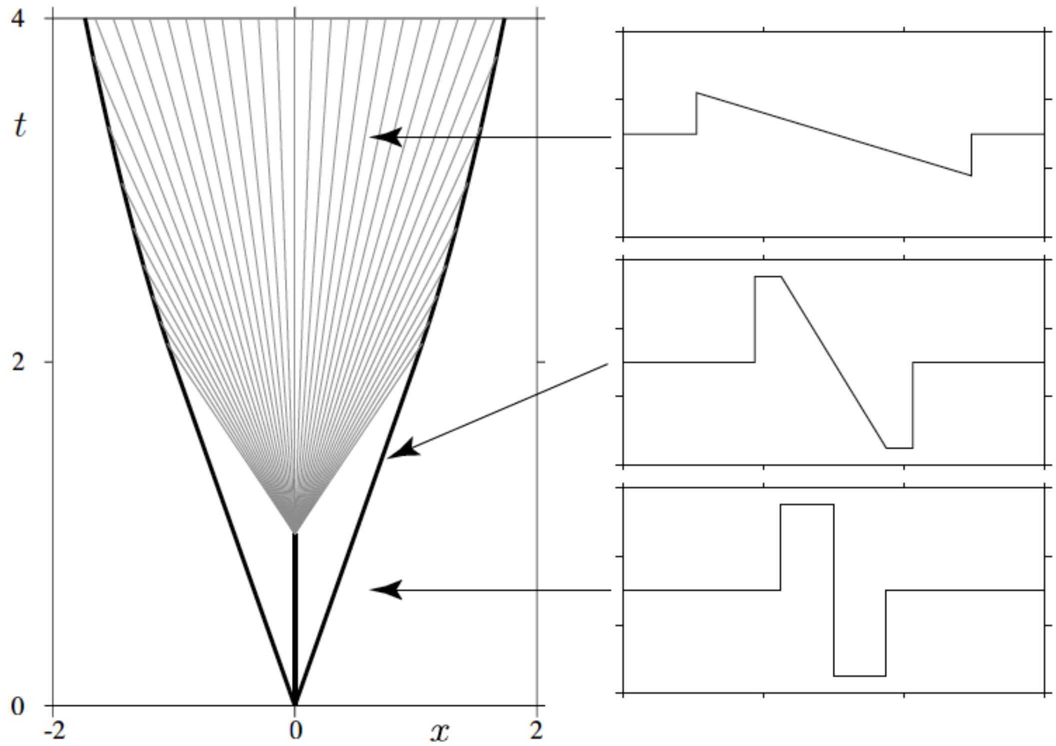


FIGURA 2.4. Ejemplo 2.8 (tráfico vehicular): solución del problema del semáforo en una carretera simple. Izquierda: solución en el plano (x,t), derecha: solución $u(x,t)$ en tres instantes t fijos.

Sea ahora $u \in \mathbb{R}$ una función incógnita escalar de $x \in \mathbb{R}$ y $t \in [0,\infty)$ que satisfaga el problema de Cauchy

$$u_t + au_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.24}$$

donde $a > 0$ es una constante dada y la función u_0 es dada. Recordemos la teoría de características. En este caso simple podemos utilizar t como parámetro, y utilizamos los parámetros (t, x_0) en lugar de (s, y). Entonces las características $x = \xi(t; x_0)$ son definidas por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t;x_0) = a, \quad \xi(0;x_0) = x_0$$

con la solución $\xi(t;x_0) = at + x_0$. Sabemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u\bigl(\xi(t;x_0),t\bigr) = 0,$$

lo que implica que

$$u\bigl(\xi(t;x_0),t\bigr) = u\bigl(\xi(0;x_0),0\bigr) = u(x_0,0) = u_0(x_0).$$

Podemos utilizar la solución de ξ para escribir

$$u(at + x_0, t) = u_0(x_0).$$

Si ponemos $x = at + x_0$, es decir $x_0 = x - at$, obtenemos la fórmula de solución

$$u(x,t) = u_0(x - at),$$

es decir (2.24) significa que la función inicial u_0 es transportada con una velocidad a constante.

El mismo razonamiento puede ser aplicado si $a = a(x,t)$, donde se supone que la aplicación $x \mapsto a(x,t)$ es Lipschitz continua para todo t. En este caso, supongamos que $u = u(x,t)$ es la solución del problema de Cauchy

$$u_t + a(x,t)u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.25}$$

Observamos en primer lugar que esta ecuación es *no* conservativa, luego la interpretación de $a(x,t)u$ *no* corresponde al flujo de u a través de un punto. Sea ahora $\xi(t;x_0)$ la solución única de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t;x_0) = a\bigl(\xi(t;x_0),t\bigr), \quad \xi(0;x_0) = x_0 \tag{2.26}$$

Utilizando la regla de la cadena obtenemos ahora

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u\bigl(\xi(t;x_0),t\bigr) = u_t + u_x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t;x_0) = u_t(\xi,t) + a(\xi,t)u_x(\xi,t) = 0.$$

Concluimos que

$$u\bigl(\xi(t;x_0),t\bigr) = u_0(x_0).$$

Para obtener una fórmula de solución hay que resolver $x = \xi(t;x_0)$ en términos de x_0 o equivalentemente, hallar una función $\zeta(\tau;x)$ que resuelve la ecuación característica retrógrada,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\zeta(\tau;x) = -a\bigl(\zeta(\tau;x),t-\tau\bigr), \quad \zeta(0;x) = x, \tag{2.27}$$

luego

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u\bigl(\zeta(\tau;x),t-\tau\bigr) = 0,$$

lo que significa que

$$u(x,t) = u\bigl(\zeta(0;x),t\bigr) = u\bigl(\zeta(t;x),0\bigr) = u_0\bigl(\zeta(t;x)\bigr).$$

Ejemplo 2.9 (Ecuación de transporte con coeficiente variable, 1 de 3)**.** *Sea $a(x,t) = x$, es decir sea el problema a resolver*

$$u_t + xu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

con la ecuación característica

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi = \xi, \quad \xi(0) = x_0,$$

con la solución $\xi(t;x_0) = x_0\mathrm{e}^t$. Despejando x_0 a partir de $\xi(t;x_0) = x$ obtenemos $x_0 = x\mathrm{e}^{-t}$, luego

$$u(x,t) = u_0(x\mathrm{e}^{-t}).$$

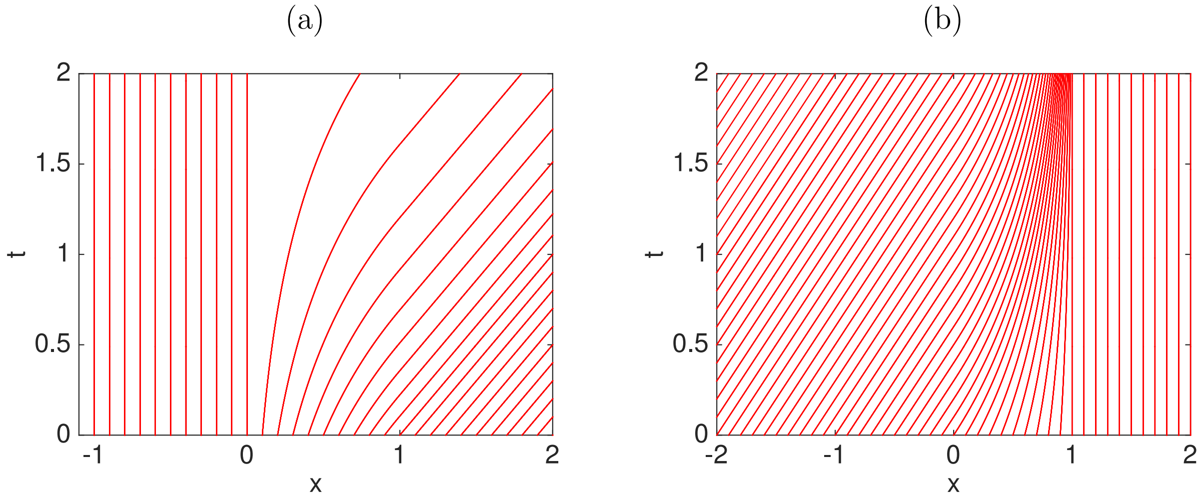


Figura 2.5. Ejemplos 2.10 y 2.11 (ecuación de transporte con coeficiente variable): características definidas (a) por (2.28) (Ejemplo 2.10), (b) por (2.29) (Ejemplo 2.11).

Ejemplo 2.10 (Ecuación de transporte con coeficiente variable, 2 de 3)**.** *Sea ahora*

$$a(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ x & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{para } x > 1. \end{cases} \tag{2.28}$$

En este caso las características son rectas $\xi(t; x_0) = x_0$ *para* $x_0 \leqslant 0$ *y* $\xi(t; x_0) = x_0 + t$ *para* $x_0 \geqslant 1$*. Para* $0 < x_0 < 1$ *obtenemos*

$$\xi(t; x_0) = \begin{cases} x_0 \mathrm{e}^t & \text{para } t \leqslant -\ln x_0, \\ 1 + t + \ln x_0 & \text{para } t > -\ln x_0, \end{cases}$$

ver Figura 2.5 (a). En este caso a *es creciente en* x*, por lo tanto las características no están mas cerca para* $t > 0$ *que para* $t = 0$*. Como* u *es constante a lo largo de las características, esto significa que*

$$\max_x \bigl| u_x(x,t) \bigr| \leqslant \max_x \bigl| u_0'(x) \bigr|.$$

Si a *es decreciente, tal cota no puede ser encontrada, tal como ilustra el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 2.11 (Ecuación de transporte con coeficiente variable, 3 de 3)**.** *Sea ahora*

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < 0, \\ 1 - x & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{para } x > 1. \end{cases} \tag{2.29}$$

En este caso las características son dadas por

$$\xi(t;x_0) = \begin{cases} x_0 + t & \text{para } x_0 < 0 \text{ y } t < -x_0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-(t+x_0)} & \text{para } x_0 < 0 \text{ y } t \geqslant -x_0, \\ 1 - (1-x_0)\mathrm{e}^{-t} & \text{para } 0 \leqslant x_0 < 1, \\ x_0 & \text{para } x_0 \geqslant 1, \end{cases}$$

ver Figura 2.5 (b). Sea ahora $x_0 \in (0,1)$*, y sea* $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$*. Como* u *es constante a lo largo de las características,* $u(\cdot,t)$ *también es diferenciable para todo* $t > 0$*, luego*

$$u_0'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_0} u\bigl(\xi(t;x_0),t\bigr) = u_x\bigl(\xi(t;x_0),t\bigr)\frac{\partial \xi}{\partial x_0},$$

lo cual para $x_0 \in (0,1)$ *implica que* $u_x(x,t) = u_0'(x_0)\mathrm{e}^t$ *para* $x = \xi(t;x_0)$*. A partir de esto vemos que la única cota de la derivada que podemos esperarnos encontrar es del tipo*

$$\max_x \bigl|u_x(x,t)\bigr| \leqslant \mathrm{e}^t \max_x \bigl|u_0'(x)\bigr|.$$

2.5.1. Métodos numéricos para problemas lineales, primera parte. Si no tuvieramos conocimiento de las características, podríamos tratar de aproximar la solución del problema por algún método numérico. Para tal efecto definimos las la siguientes aproximaciones de la primera derivada espacial:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_- u(x) &:= \frac{u(x) - u(x-\Delta x)}{\Delta x}, \\ \mathrm{D}_+ u(x) &:= \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \\ \mathrm{D}_0 u(x) &:= \frac{u(x+\Delta x) - u(x-\Delta x)}{2\Delta x}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

donde $\Delta x > 0$ es un número pequeño. Al tratar aproximaciones numéricas, se utilizara la notación $u_j(t)$ para indicar una aproximación a $u(j\Delta x, t)$ para algún $j \in \mathbb{Z}$. Además,

$$x_j = j\Delta x, \quad x_{j\pm 1/2} = \left(j \pm \frac{1}{2}\right)\Delta x = x_j \pm \frac{\Delta x}{2}.$$

Consideremos ahora el caso de una constante $a > 0$. Como método numérico semi-discreto para el problema de Cauchy de la ecuación de advección (2.24) proponemos que u_j sea la solución del sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$u_j'(t) + a\mathrm{D}_- u_j(t) = 0, \quad u_j(0) = u_0(x_j), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{2.31}$$

Para definir una aproximación a $u(x,t)$ para todo x y t, utilizamos interpolación lineal, definiendo

$$u_{\Delta x}(x,t) = u_j(t) + (x - x_j)\mathrm{D}_- u_{j+1}(t) \quad \text{para } x \in [x_j, x_{j+1}).$$

Queremos demostrar (a) que $u_{\Delta x}$ converge a alguna función u cuando $\Delta x \to 0$, y (b) que esta función límite u es una solución de la ecuación.

Si $u_0 \in C^1$, entonces sabemos que una solución a (2.24) existe (y puede ser determinada por el método de características). Como la ecuación es lineal, podemos fácilmente estudiar el error

$$e_{\Delta x}(x,t) := u(x,t) - u_{\Delta x}(x,t).$$

En los siguientes cálculos utilizaremos las propiedades $\mathrm{D}_+ u_j - \mathrm{D}_- u_j = \Delta x \mathrm{D}_+\mathrm{D}_- u_j$ y $\mathrm{D}_- u_{j+1} = \mathrm{D}_+ u_j$. Insertando el término $e_{\Delta x}$ en la ecuación obtenemos para $x \in (x_j, x_{j+1})$:

$$\begin{aligned}
(e_{\Delta x})_t + a(e_{\Delta x})_x &= -(u_{\Delta x})_t - a(u_{\Delta x})_x \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(u_j(t) + (x - x_j)\mathrm{D}_- u_{j+1}(t)\big) - a\mathrm{D}_- u_{j+1}(t) \\
&= -u_j'(t) - (x - x_j)\mathrm{D}_- u_{j+1}'(t) - a\mathrm{D}_+ u_j(t) \\
&= a\mathrm{D}_- u_j(t) - a\mathrm{D}_+ u_j(t) + a(x - x_j)\mathrm{D}_-\mathrm{D}_- u_{j+1}(t) \\
&= -a\Delta x \mathrm{D}_+\mathrm{D}_- u_j(t) + a(x - x_j)\mathrm{D}_+\mathrm{D}_- u_j(t) \\
&= a\big((x - x_j) - \Delta x\big)\mathrm{D}_+\mathrm{D}_- u_j(t).
\end{aligned}$$

Sea ahora $f_{\Delta x}$ definido por

$$f_{\Delta x}(x,t) = a\big((x - x_j) - \Delta x\big)\mathrm{D}_+\mathrm{D}_- u_j(t) \quad \text{para } x \in [x_j, x_{j+1}),$$

luego

$$(e_{\Delta x})_t + a(e_{\Delta x})_x = f_{\Delta x}. \tag{2.32}$$

Utilizando el método de características obtenemos

$$e_{\Delta x}(x,t) = e_{\Delta x}(x - at, 0) + \int_0^t f_{\Delta x}\big(x - a(t-s), s\big)\,\mathrm{d}s. \tag{2.33}$$

(Aqui implicitamente se supone que la solución es única.) Esto implica la cota

$$\big|e_{\Delta x}(x,t)\big| \leqslant \sup_x \big|e_{\Delta x}(x,0)\big| + t\|f_{\Delta x}\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,t])}.$$

Al tratar de acotar $f_{\Delta x}$, notamos primero que

$$\big|f_{\Delta x}(x,t)\big| \leqslant \Delta x a \big|\mathrm{D}_-\mathrm{D}_+ u_j(t)\big|,$$

es decir $f_{\Delta x} \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ si $\mathrm{D}_-\mathrm{D}_+ u_j$ es acotado. Escribiendo $w_j = \mathrm{D}_-\mathrm{D}_+ u_j$ y aplicando $\mathrm{D}_-\mathrm{D}_+$ a (2.31) obtenemos

$$w_j'(t) + a\mathrm{D}_-(w_j) = 0, \quad w_j(0) = \mathrm{D}_-\mathrm{D}_+ u_0(x).$$

Ahora se usará el hecho de que $a > 0$. Para acotar w_j observamos primeramente que si $w_j \leqslant w_{j-1}$, entonces $\mathrm{D}_- w_j \leqslant 0$. Es decir, si $w_j(t) \leqslant w_{j-1}(t)$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w_j(t) = -a\mathrm{D}_- w_j(t) \geqslant 0.$$

Similarmente, si para algún t se tiene que $w_j(t) \geqslant w_{j-1}(t)$, entonces $w_j'(t) \leqslant 0$. Esto significa que

$$\inf_x u_0''(x) \leqslant \inf_k \mathrm{D}_-\mathrm{D}_+ u_k(0) \leqslant w_j(t) \leqslant \sup_k \mathrm{D}_-\mathrm{D}_+ u_k(0) \leqslant \sup_x u_0''(x).$$

Esto implica que w_j es acotado si u_0' es Lipschitz continua. Notar que es el diseño del método de diferencias (2.31) (es decir, la selección de D_- en lugar de D_+ o D_0) que nos permite concluir que la aproximación es acotada. Queda por estudiar $e_{\Delta x}(x,0)$. Para $x \in [x_j, x_{j+1})$ se tiene que

$$\bigl|e_{\Delta x}(x,0)\bigr| = \left|u_0(x) - u_0(x_j) - \frac{x - x_j}{\Delta x}\bigl(u_0(x_{j+1}) - u_0(x_j)\bigr)\right| \leqslant 2\Delta x \max_{x\in[x_j,x_{j+1}]}\bigl|u_0'(x)\bigr|.$$

Así hemos demostrado la cota

$$\bigl|u_{\Delta x}(x,t) - u(x,t)\bigr| \leqslant \Delta x\bigl(2\|u_0'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + ta\|u_0''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\bigr) \quad \text{para todo } x,\, t > 0.$$

Estrictamente, para que este argumento sea válido, hemos supuesto implícitamente en (2.33) que la ecuación (2.32) posee solamente la solución (2.33). Esta consideración nos lleva al tema de soluciones de entropía y la unicidad.

2.5.2. Soluciones de entropía para problemas lineales, primera parte. Sin mucho esfuerzo adicional podemos ligeramente generalizar la ecuación bajo consideración. Específicamente queremos asegurar que la ecuación

$$u_t + a(x,t)u_x = f(x,t) \tag{2.34}$$

posea solamente una solución diferenciable, donde suponemos que

$$\exists R > 0 : \quad a(x,t) = 0 \quad \text{para } |x| > R,\, t > 0. \tag{2.35}$$

Si las curvas características quedan definidas por (2.26), entonces una solución viene dada por

$$u\bigl(\xi(t;x_0),t\bigr) = u_0(x_0) + \int_0^t f\bigl(\xi(s;x_0),s\bigr)\,\mathrm{d}s.$$

Utilizando las características inversas ζ definidas por (2.27) podemos escribir esta fórmula como

$$u(x,t) = u_0\bigl(\zeta(t;x)\bigr) + \int_0^t f\bigl(\zeta(\tau;x),t-\tau\bigr)\,\mathrm{d}\tau.$$

Si u_0 es diferenciable y f es acotada, entonces esta fórmula da origen a una función $u(x,t)$ diferenciable.

Podemos ahora discutir el problema de unicidad. Como (2.34) es lineal, demostrar unicidad significa demostrar que la ecuación con $f \equiv 0$ y $u_0 \equiv 0$ posee solamente la solución nula. Para tal efecto consideremos la ecuación

$$u_t + a(x,t)u_x = 0.$$

Sea $\eta = \eta(u)$ una función diferenciable, y multipliquemos esta ecuación por $\eta'(u)$ para obtener

$$0 = \eta(u)_t + a\eta(u)_x = \eta(u)_t + \bigl(a\eta(u)\bigr)_x - a_x\eta(u).$$

Supongamos que $\eta(0) = 0$ y $\eta(u) > 0$ para $u \neq 0$, y que $|a_x(x,t)| < C$ para todo x y t. Si $\eta(u(\cdot,t))$ es integrable, podemos integrar la ultima ecuación. En virtud de (2.35) obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}} \eta\bigl(u(x,t)\bigr)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} a_x(x,t)\eta\bigl(u(x,t)\bigr)\,\mathrm{d}x \leqslant C\int_{\mathbb{R}} \eta\bigl(u(x,t)\bigr)\,\mathrm{d}x.$$

Utilizando la desigualdad de Gronwall, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \eta\big(u(x,t)\big)\,\mathrm{d}x \leqslant \exp(Ct) \int_{\mathbb{R}} \eta\big(u_0(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Si $u_0 \equiv 0$, entonces $\eta(u_0) \equiv 0$, es decir $u(t) \equiv 0$ para todo t. Hemos demostrado que si $\eta(u_0)$ es integrable para alguna función diferenciable η con $\eta(0) = 0$ y $\eta(u) > 0$ para $u \neq 0$, a satisface (2.35), y a_x es acotada, entonces (2.34) posee solamente una solución diferenciable.

Frecuentamente el modelo (2.34) (con $f \equiv 0$) es obtenido como límite de un modelo físicamente más realista,

$$u_t^\varepsilon + a(x,t)u_x^\varepsilon = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{2.36}$$

cuando $\varepsilon \ll 1$. Esta ecuación puede ser interpretada, por ejemplo, como la ecuación del calor con un término de transporte, es decir u^ε representa la temperatura en una barra larga que se desplaza con la velocidad a. En este caso ε es proporcional a la conductividad de la barra. Las soluciones de (2.36) son más regulares que los datos iniciales. Si multiplicamos (2.36) por $\eta'(u^\varepsilon)$, donde $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ es una función *convexa* ($\eta'' \geqslant 0$), obtenemos

$$\eta(u^\varepsilon)_t + a\eta(u^\varepsilon)_x = \varepsilon\big(\eta'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon\big)_x - \varepsilon\eta''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2.$$

La función η es frecuentemente llamada *entropía*. El término con $(u_x^\varepsilon)^2$ es problemático cuando $\varepsilon \to 0$ porque la derivada u_x^ε no será cuadráticamente integrable bajo este límite. Para ecuaciones lineales la integrabilidad de este término depende de la integrabilidad inicial de este mismo término. Sin embargo vimos que para ecuaciones no lineales se pueden formar saltos independientemente de la suavidad del dato inicial, y el límite de u_x^ε no será cuadráticamente integrable en general.

La idea clave para evitar este problema consiste en utilizar la convexidad de la función η, ya que $\eta'' \geqslant 0$ implica que

$$\varepsilon\eta''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2 \geqslant 0,$$

luego se remplaza este término por la desigualdad apropiada. Así obtenemos

$$\eta(u^\varepsilon)_t + \big(a\eta(u^\varepsilon)\big)_x - a_x\eta(u^\varepsilon) \leqslant \varepsilon\big(\eta'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon\big)_x. \tag{2.37}$$

Ahora el lado derecho de (2.37) tiende a cero débilmente cuando $\varepsilon \to 0$, es decir para cualquier función test φ (con soporte compacto),

$$\varepsilon \iint_{\mathbb{R}\times[0,\infty)} \varphi_x \eta'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

Se define una *solución de entropía* como el límite $u = \lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon$ de soluciones de (2.36) cuando $\varepsilon \to 0$. Formalmente, y re-introduciendo la función f, una solución de entropía de (2.34) debe satisfacer

$$\eta(u)_t + \big(a\eta(u)\big)_x - a_x\eta(u) \leqslant \eta'(u)f(x,t) \tag{2.38}$$

para toda función convexa $\eta \in C^2(\mathbb{R})$. Veremos más adelante que esto es suficiente para establecer unicidad incluso cuando u no es diferenciable.

2.5.3. Métodos numéricos para problemas lineales, segunda parte. Consideremos por el momento la ecuación de transporte

$$u_t + a(x,t)u_x = 0. \tag{2.39}$$

Queremos construir un método numérico completamente discreto para esta ecuación. El esquema más simple es el método explícito

$$\mathrm{D}_+^t u_j^n + a_j^n \mathrm{D}_- u_j^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.40}$$

donde $u_j^0 = u_0(x_j)$. Aquí

$$\mathrm{D}_+^t u(t) = \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t},$$

y u_j^n denota una aproximación de $u(x_j, t_n)$ con $t_n = n\Delta t$, $n \geqslant 0$; además, a_j^n denota una aproximación de $a(x_j, t_n)$ a ser especificada más adelante. Podemos escribir (2.40) como

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_j^n \lambda \bigl(u_j^n - u_{j-1}^n\bigr), \tag{2.41}$$

donde $\lambda = \Delta t/\Delta x$.

Si a es constante, podemos aplicar el análisis de estabilidad de von Neumann. Supongamos que el método produce una aproximación que converge a una solución acotada para casi todo x y t; en particular supongamos que u_j^n es acotado independientemente de Δx y Δt. Consideremos el caso periódico, para el cual se utiliza el planteo

$$u_j^n = \alpha^n \exp(\mathrm{i} j \Delta x)$$

con $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ (como la ecuación es lineal, podríamos igualmente haber desarrollado la solución en series de Fourier). Insertando esto en (2.41) obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha^{n+1}\exp(\mathrm{i}j\Delta x) &= \alpha^n \exp(\mathrm{i}j\Delta x) - \lambda a\bigl(\alpha^n \exp(\mathrm{i}j\Delta x) - \alpha^n \exp(\mathrm{i}(j-1)\Delta x)\bigr)\\ &= \alpha^n \exp(\mathrm{i}j\Delta x)\bigl(1 - \lambda a(1 - \exp(-\mathrm{i}\Delta x))\bigr),\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\alpha = 1 - \lambda a\bigl(1 - \cos(\Delta x) + \mathrm{i}\sin(\Delta x)\bigr).$$

Si $|\alpha| \leqslant 1$, entonces la acotación en la norma del supremo también será válida para la solución generada por el esquema. En este caso el esquema se llama *estable en el sentido de von Neumann*. Aquí calculamos

$$\begin{aligned}|\alpha|^2 &= 1 + 2\lambda^2 a^2 - 2\lambda a\bigl(1 + (1-\lambda a)\cos(\Delta x)\bigr)\\ &= 1 - 2a\lambda(1 - a\lambda)\bigl(1 - \cos(\Delta x)\bigr),\end{aligned}$$

lo que significa que $|\alpha|^2 \leqslant 1$ para todo Δx si sólo si

$$a\lambda(1 - a\lambda) \geqslant 0,$$

por lo cual exigimos que

$$0 \leqslant \lambda a \leqslant 1.$$

Esta relación entre la discretización espacial y temporal (expresada por el valor de λ) y la velocidad de propagación de la onda, dada por el valor de a, es el ejemplo más simple de la celebrada *condición CFL*, de acuerdo a Courant, Friedrichs y Lewy [35]. Volviendo el esquema para la ecuación del transporte con velocidad variable y no negativa, entonces se dice que el esquema es *estable en el sentido de von Neumann* si

$$\lambda \max_{(x,t)} a(x,t) \leqslant 1. \tag{2.42}$$

Consideremos ahora el método (2.40) con

$$a_j^n = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(x_j,t)\,\mathrm{d}t.$$

Queremos establecer la convergencia de u_j^n. Para tal efecto definimos

$$e_j^n := u(x_j,t_n) - u_j^n,$$

donde u es la solución única de (2.39). Insertando esto en el método numérico obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_+^t e_j^n + a_j^n \mathrm{D}_- e_j^n &= \mathrm{D}_+^t u(x_j,t_n) + a_j^n \mathrm{D}_- u(x_j,t_n) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} u_t(x_j,t)\,\mathrm{d}t + \frac{a_j^n}{\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_j} u_x(x,t_n)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Delta x\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{x_{j-1}}^{x_j} \big(u_t(x_j,t) + a(x_j,t)u_x(x,t_n)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Delta x\Delta t}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(x_j,t)\big(u_x(x,t_n) - u_x(x_j,t)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Delta x\Delta t}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(x_j,t)\left(\int_{x_j}^{x} u_{xx}(z,t_n)\,\mathrm{d}z - \int_{t_n}^{t} u_{xt}(x_j,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&=: R_j^n.
\end{aligned}$$

Suponiendo que u_{xx} y u_{tx} son acotadas, lo que sucede si consideramos un intervalo de tiempo $[0,T]$ acotado, elegimos M tal que

$$M \geqslant \max\big\{\|u_{xx}\|_{L^\infty}, \|u_{tx}\|_{L^\infty}, \|a\|_{L^\infty}\big\},$$

luego

$$\big|R_j^n\big| \leqslant \frac{M^2}{\Delta x\Delta t}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (x_j - x + t - t_n)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \frac{M^2}{2}(\Delta x + \Delta t),$$

por lo tanto el error satisface la desigualdad

$$e_j^{n+1} \leqslant (1-\lambda a_j^n)e_j^n + \lambda a_j^n e_{j-1}^n + \frac{\Delta t M^2}{2}(\Delta x + \Delta t). \tag{2.43}$$

Si $\|a\|_{L^\infty}\lambda < 1$ (recordemos la condición CFL), entonces $(1-\lambda a_j^n)e_j^n + \lambda a_j^n e_{j-1}^n$ es una combinación convexa de e_j^n y e_{j-1}^n, es decir

$$(1-\lambda a_j^n)e_j^n + \lambda a_j^n e_{j-1}^n \leqslant \max\big\{e_j^n, e_{j-1}^n\big\}.$$

Tomando el supremo primero en el lado derecho y luego en el lado izquierdo de (2.43) obtenemos

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}\big\{e_j^{n+1}\big\} \leqslant \sup_{j\in\mathbb{Z}}\big\{e_j^n\big\} + \frac{\Delta t M^2}{2}(\Delta x + \Delta t).$$

También se tiene que

$$e_j^{n+1} \geqslant (1-\lambda a_j^n)e_j^n + \lambda a_j^n e_{j-1}^n - \frac{\Delta t M^2}{2}(\Delta x + \Delta t),$$

lo que implica que

$$\inf_{j\in\mathbb{Z}}\bigl\{e_j^{n+1}\bigr\} \geqslant \inf_{j\in\mathbb{Z}}\bigl\{e_j^n\bigr\} - \frac{\Delta t M^2}{2}(\Delta x + \Delta t).$$

Si definimos

$$\bar{e}^n := \sup_{j\in\mathbb{Z}} |e_j^n|,$$

lo anterior implica que

$$\bar{e}^{n+1} \leqslant \bar{e}^n + \frac{\Delta t M^2}{2}(\Delta x + \Delta t).$$

Por inducción y considerando que por definición $e_j^0 = 0$, llegamos a

$$\bar{e}^n \leqslant \bar{e}^0 + \frac{t_n M^2}{2}(\Delta x + \Delta t) = \frac{t_n M^2}{2}(\Delta x + \Delta t).$$

Concluimos que la aproximación definida por (2.40) converge a la solución única si u es dos veces continuamente diferenciable con segundas derivadas acotadas.

Hemos visto que si $x \mapsto a(x,t)$ es decreciente sobre algún intervalo, las mejores cotas para u_{xx} y u_{xt} probablemente son del tipo $C\exp(Ct)$, lo que significa que la "constante" M será muy grande si deseamos estudiar la solución para tiempos largos (o incluso solamente moderadamente largos). Concluimos la discusión comentando que similarmente a lo discutido aquí se puede demostrar que si $a(x,t) < 0$, el método

$$\mathrm{D}_+^t u_j^n + a_j^n \mathrm{D}_+ u_j^n = 0$$

produce una sucesión convergente.

2.5.4. Soluciones de entropía para problemas lineales, segunda parte. Consideremos el problema de Cauchy

$$u_t + a(x,t)u_x = 0, \quad x\in\mathbb{R}, \quad t>0; \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.44}$$

donde a es continuamente diferenciable y se supone en esta sección que $a(x,t) \geqslant 0$. Recordamos que una solución de entropía es definida como el límite de la ecuación singularmente perturbada (2.36). Para cada $\varepsilon > 0$, u^ε satisface (2.37), lo que implica que el límite $u = \lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon$ debería satisfacer (2.38) con $f \equiv 0$. Multiplicando la desigualdad (2.38) por una función test $\psi \geqslant 0$ e integrando por partes encontramos que la desigualdad

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \bigl(\eta(u)\psi_t + a\eta(u)\psi_x + a_x\eta(u)\psi\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \eta\bigl(u_0(x)\bigr)\psi(x,0)\,\mathrm{d}x \geqslant 0 \tag{2.45}$$

debe estar satisfecha para toda función test $\psi \geqslant 0$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty))$, y toda función η convexa. Si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ satisface (2.45) para todas las entropías convexas η, entonces se dice que u es una *solución débil de entropía* de (2.44). El punto importante está en que ya no exigimos que u sea diferenciable o continua. Entonces demostrar que ciertas aproximaciones convergen a una solución de entropía debe ser mucho más fácil que demostrar que el límite es una solución clásica.

Demostraremos ahora que existe solamente una solución de entropía. Como la ecuación es lineal, basta demostrar que $u_0 = 0$ (en $L^1(\mathbb{R})$) implica $u(\cdot, t) = 0$ (en $L^1(\mathbb{R})$). Para tal efecto definimos una función test particular. Sea $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$0 \leqslant \omega(\sigma) \leqslant 1, \quad \operatorname{supp} \omega \subseteq [-1, 1], \quad \omega(-\sigma) = \omega(\sigma), \quad \int_{-1}^{1} \omega(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma = 1,$$

y sea $\omega_\varepsilon(\sigma) := \omega(\sigma/\varepsilon)/\varepsilon$. Sean $x_1 < x_2$ y

$$\varphi_\varepsilon(x, t) := \int_{x_1 + Lt}^{x_2 - Lt} \omega_\varepsilon(x - y) \, \mathrm{d}y,$$

donde L es una constante tal que $L > \|a\|_{L^\infty(\Omega)}$ y $\Omega := \mathbb{R} \times [0, \infty)$. Fijamos $T < (x_2 - x_1)/(2L)$ y consideramos $t < T$. Observamos que $\varphi_\varepsilon(\cdot, t)$ es una aproximación de la función característica del intervalo $(x_1 + Lt, x_2 - Lt)$. Luego definimos

$$h_\varepsilon(t) := 1 - \int_0^t \omega_\varepsilon(s - T) \, \mathrm{d}s;$$

esta función aproxima la función característica del intervalo $(-\infty, T]$. Finalmente definimos la función test $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ por

$$\psi_\varepsilon(x, t) = h_\varepsilon(t) \varphi_\varepsilon(x, t).$$

Insertando esta función test en la desigualdad de entropía (2.45) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\iint_\Omega \eta(u) \varphi_\varepsilon h_\varepsilon'(t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \iint_\Omega h_\varepsilon(t) \eta(u) \big((\varphi_\varepsilon)_t(x, t) + a(x, t) (\varphi_\varepsilon)_x(x, t) \big) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&+ \iint_\Omega a_x \eta(u) h_\varepsilon(t) \varphi_\varepsilon(x, t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0) \varphi_\varepsilon(x, 0) \, \mathrm{d}x \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Tratamos primeramente la segunda integral. Notando que

$$\begin{aligned}
(\varphi_\varepsilon)_t(x, t) &= -L \big(\omega_\varepsilon(x - x_2 + Lt) + \omega_\varepsilon(x - x_1 - Lt) \big), \\
(\varphi_\varepsilon)_x(x, t) &= -\omega_\varepsilon(x - x_2 + Lt) + \omega_\varepsilon(x - x_1 - Lt)
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
(\varphi_\varepsilon)_t(x, t) + a(x, t) (\varphi_\varepsilon)_x(x, t) &= (-L + a) \omega_\varepsilon(x - x_2 + Lt) + (-L - a) \omega_\varepsilon(x - x_1 - Lt) \\
&\leqslant \big(|a| - L \big) \big(\omega_\varepsilon(x - x_2 + Lt) + \omega_\varepsilon(x - x_1 - Lt) \big) \leqslant 0,
\end{aligned}$$

ya que $L > |a|$. Concluimos que si $\eta(u) \geqslant 0$, entonces la segunda integral en (2.46) es no positiva, es decir tenemos la desigualdad

$$\iint_\Omega \eta(u) \varphi_\varepsilon h_\varepsilon'(t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \iint_\Omega a_x \eta(u) h_\varepsilon(t) \varphi_\varepsilon(x, t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0) \varphi_\varepsilon(x, 0) \, \mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Por el momento procedemos de manera formal. La función h_ε aproxima la función característica $\chi_{(-\infty, T]}$, la cual posee la derivada $-\delta(\cdot - T)$, es decir una función delta de Dirac negativa centrada en T. Similarmente, φ_ε aproxima la función característica $\chi_{(x_1 + Lt, x_2 - Lt)}$

con la derivada $L(\delta(\cdot-(x_1+Lt))-\delta(\cdot-(x_2-Lt)))$. Entonces, a partir de (2.46) obtenemos formalmente, tomando el límite $\varepsilon\to 0$, la desigualdad

$$-\int_{x_1+LT}^{x_2-LT}\eta\bigl(u(x,T)\bigr)\,\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{x_1+Lt}^{x_2-Lt}a_x(x,t)\eta\bigl(u(x,t)\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{x_1}^{x_2}\eta\bigl(u(x,0)\bigr)\,\mathrm{d}x\geqslant 0. \tag{2.47}$$

En lo siguiente demostraremos que esta desigualdad es válida. Para tal efecto notamos que la primera integral en (2.46) es

$$-\iint_\Omega\eta(u)\varphi_\varepsilon(x,t)\omega_\varepsilon(t-T)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=-\int_0^\infty f_\varepsilon(t)\omega_\varepsilon(t-T)\,\mathrm{d}t,$$

donde

$$f_\varepsilon(t)=\int_{\mathbb{R}}\varphi_\varepsilon(x,t)\eta\bigl(u(x,t)\bigr)\,\mathrm{d}x.$$

Fijando t obtenemos

$$f_\varepsilon(t)\overset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\int_{x_1+Lt}^{x_2-Lt}\eta\bigl(u(x,t)\bigr)\,\mathrm{d}x=f_0(t),$$

donde el límite es uniforme en t para $t\in[0,T]$. Si $t\mapsto u(\cdot,t)$ es continua como aplicación $[0,\infty)\to L^1(\mathbb{R})$, entonces f_ε y f_0 son continuas en t. En este caso,

$$\int_0^\infty f_\varepsilon(t)\omega_\varepsilon(t-T)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty\bigl(f_\varepsilon(t)-f_0(t)\bigr)\omega_\varepsilon(t-T)\,\mathrm{d}t+\int_0^\infty f_0(t)\omega_\varepsilon(t-T)\,\mathrm{d}t\overset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}f_0(T),$$

ya que

$$\left|\int_0^\infty\bigl(f_\varepsilon(t)-f_0(t)\bigr)\omega_\varepsilon(t-T)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\|f_\varepsilon-f_0\|_{L^\infty}\int_0^\infty\omega_\varepsilon(t-T)\,\mathrm{d}t=\|f_\varepsilon-f_0\|_{L^\infty}\overset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}0.$$

Para asegurar que la aplicación $[0,\infty)\ni t\mapsto u(\cdot,t)\in L^1(\mathbb{R})$ efectivamente es continua, *definimos* que una solución de entropía tiene esta propiedad, ver Definición 2.2 más abajo. Sabemos que

$$h_\varepsilon(t)\varphi_\varepsilon(x,t)\overset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\chi_{\Pi_T}(x,t)\quad\text{en }L^1(\Omega_T),$$

donde definimos

$$\Pi_T:=\bigl\{(x,t)\mid 0\leqslant t\leqslant T,\ x_1+Lt\leqslant x\leqslant x_2-Lt\bigr\},\quad\Omega_T:=\mathbb{R}\times[0,T].$$

Tomando el límite $\varepsilon\to0$ en (2.46), ahora encontramos que

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta\bigl(u(x,0)\bigr)\,\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{x_1+Lt}^{x_2-Lt}a_x(x,t)\eta\bigl(u(x,t)\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\geqslant\int_{x_1+LT}^{x_2-LT}\eta\bigl(u(x,T)\bigr)\,\mathrm{d}x$$

(comparar con (2.47)), lo que bajo la hipótesis $\eta>0$ implica que

$$f_0(T)\leqslant f_0(0)+\|a_x\|_{L^\infty(\Omega_T)}\int_0^T f_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

La desigualdad de Gronwall ahora implica que

$$f_0(T)\leqslant f_0(0)\bigl(1+\|a_x\|_{L^\infty(\Omega_T)}T\exp(\|a_x\|_{L^\infty(\Omega_T)}T)\bigr),$$

o escrito en forma explícita,

$$\int_{x_1+LT}^{x_2-LT} \eta\big(u(x,T)\big)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x_1}^{x_2} \eta\big(u_0(x)\big)\,\mathrm{d}x\big(1+\|a_x\|_{L^\infty(\Omega_T)}T\exp(\|a_x\|_{L^\infty(\Omega_T)}T)\big)$$

para cada función η convexa y no negativa. Observamos que esto demuestra que la velocidad de propagación es finita.

Eligiendo $\eta(u)=|u|^p$ para $1\leqslant p<\infty$, suponiendo que $\eta(u)$ es integrable y considerando $x_1\to-\infty$ y $x_2\to\infty$, obtenemos

$$\big\|u(\cdot,T)\big\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}\big(1+\|a_x\|_{L^\infty(\Omega_T)}T\exp(\|a_x\|_{L^\infty(\Omega_T)}T)\big)^{1/p}, \quad 1\leqslant p<\infty. \tag{2.48}$$

Suponiendo que $\eta(u)$ es integrable para todo $1\leqslant p<\infty$, podemos considerar el límite $p\to\infty$ y

$$\lim_{p\to\infty}\big(1+\|a_x\|_{L^\infty(\Omega_T)}T\exp(\|a_x\|_{L^\infty(\Omega_T)}T)\big)^{1/p}=1$$

para obtener

$$\big\|u(\cdot,T)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \tag{2.49}$$

Para formalizar el argumento anterior introducimos la siguiente definición.

Definición 2.2 (Solución de entropía de una ecuación lineal)**.** *Se dice que una función* $u=u(x,t)\in C([0,\infty);L^1(\mathbb{R}))$ *es una* solución débil de entropía *del problema*

$$u_t+a(x,t)u_x=0,\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R};\quad u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}$$

si para todas la funciones no negativas y convexas $\eta=\eta(u)$ *y todas las funciones test* $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ *no negativas la siguiente desigualdad es válida:*

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\big(\eta(u)\varphi_t+a\eta(u)\varphi_x+a_x\eta(u)\varphi\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{\mathbb{R}}\eta\big(u_0(x)\big)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x\geqslant 0. \tag{2.50}$$

Teorema 2.1 (Unicidad de la solución de entropía del problema lineal)**.** *Sea la función* $a=a(x,t)$ *elegida tal que* a_x *es acotada. Entonces el problema* (2.25) *tiene a lo más una solución de entropía* $u=u(x,t)$*, la cual satisface las cotas* (2.48) *y* (2.49)*.*

Comentario 2.1. *A partir de la demostración del Teorema 2.1 (aplicando* (2.48) *para* $p=1$*) concluimos que si definimos una solución de entropía como función que satisface la condición de entropía* (2.50) *para todas las funciones test* $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ *no negativas pero solamente para* $\eta(u)=|u|$*, obtenemos unicidad en* $C([0,\infty),L^1(\mathbb{R}))$*.*

2.5.5. Métodos numéricos para problemas lineales, tercera parte. Consideremos nuevamente la ecuación del transporte

$$u_t+a(x,t)u_x=0,\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0;\quad u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{2.51}$$

y el método de diferencias asociado

$$\mathrm{D}_+^t u_j^n + a_j^n \mathrm{D}_- u_j^n = 0,$$

donde definimos

$$a_j^n := \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(x_j, t)\,\mathrm{d}t, \quad u_j^0 := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_0(x)\,\mathrm{d}x,$$

donde, como antes, suponemos que $a(x,t) \geqslant 0$. Para crear una aproximación definida para todo x y t definimos

$$u_{\Delta x}(x,t) = u_j^n \quad \text{para } (x,t) \in I_{j-1/2}^n := [x_{j-1}, x_j) \times [t_n, t_{n+1}), \text{ donde } t_n = n\Delta t.$$

Deseamos demostrar que $u_{\Delta x}$ converge a una solución de entropía (¡la única!) de (2.51). Esta vez no se usa la linealidad, y demostramos primeramente que $\{u_{\Delta x}\}_{\Delta x > 0}$ posee una subsucesión convergente. Para tal efecto recordamos primero que el método puede ser escrito como

$$u_j^{n+1} = \bigl(1 - \lambda a_j^n\bigr) u_j^n + \lambda a_j^n u_{j-1}^n. \tag{2.52}$$

Deseamos aplicar el Teorema 1.6 para demostrar la compacidad. En primer lugar demostramos que la aproximación es uniformemente acotada. Esto es fácil de demostrar considerando que bajo la condición CFL

$$\|a\|_{L^\infty} \lambda \leqslant 1, \tag{2.53}$$

u_j^{n+1} es una *combinación convexa* de u_j^n y u_{j-1}^n, por lo tanto no se introducen nuevos extremos y

$$\bigl\|u_{\Delta x}(\cdot, t)\bigr\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

es decir la primera condición del Teorema 1.6, (1.10), está satisfecha.

Para verificar la segunda condición del Teorema 1.6, (1.11), recordemos la definición de la variación total de una función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (1.1), y la notación $|u|_{BV} = \mathrm{TV}(u)$. Aquí tenemos que acotar la variación total de $u_{\Delta x}$. Para $t \in [t_n, t_{n+1})$ esta viene dada por

$$\bigl|u_{\Delta x}(\cdot, t)\bigr|_{BV} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \bigl|u_j^n - u_{j-1}^n\bigr|.$$

Tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} &= \bigl(1 - \lambda a_j^n\bigr) u_j^n + \lambda a_j^n u_{j-1}^n - \bigl(1 - \lambda a_{j-1}^n\bigr) u_{j-1}^n - \lambda a_{j-1}^n u_{j-2}^n \\ &= \bigl(1 - \lambda a_j^n\bigr)\bigl(u_j^n - u_{j-1}^n\bigr) + \lambda a_{j-1}^n \bigl(u_{j-1}^n - u_{j-2}^n\bigr) \end{aligned}$$

y utilizando que la condición CFL (2.53) implica que

$$0 \leqslant \lambda a_j^n \leqslant 1 \quad \text{para todo } n \text{ y } j,$$

obtenemos que

$$\bigl|u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}\bigr| \leqslant \bigl(1 - \lambda a_j^n\bigr)\bigl|u_j^n - u_{j-1}^n\bigr| + \lambda a_{j-1}^n \bigl|u_{j-1}^n - u_{j-2}^n\bigr|,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \bigl|u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}\bigr| &\leqslant \sum_{j \in \mathbb{Z}} \bigl(1 - \lambda a_j^n\bigr)\bigl|u_j^n - u_{j-1}^n\bigr| + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \lambda a_{j-1}^n \bigl|u_{j-1}^n - u_{j-2}^n\bigr| \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \bigl|u_j^n - u_{j-1}^n\bigr| - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \lambda a_j^n \bigl|u_j^n - u_{j-1}^n\bigr| + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \lambda a_j^n \bigl|u_j^n - u_{j-1}^n\bigr| \end{aligned}$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|u_j^n - u_{j-1}^n\big|,$$

es decir

$$\big|u_{\Delta x}(\cdot,t)\big|_{BV} \leqslant \big|u_{\Delta x}(\cdot,0)\big|_{BV} \leqslant |u_0|_{BV}.$$

Esto demuestra la satisfacción de (1.11).

Para verificar la tercera condición (1.12), es decir la L^1 Lipschitz continuidad en el tiempo, supongamos que $s \in [t_n, t_{n+1})$ y que t satisface $t - s \leqslant \Delta t$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \big|u_{\Delta x}(x,t) - u_{\Delta x}(x,s)\big| \,\mathrm{d}x &\leqslant \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|u_j^{n+1} - u_j^n\big| = \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda a_j^n \big|u_j^n - u_{j-1}^n\big| \\ &\leqslant \Delta t \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|u_j^n - u_{j-1}^n\big| \leqslant \Delta t \|a\|_{L^\infty(\Omega)} |u_0|_{BV}.\end{aligned}$$

Si $s \in [t_n, t_{n+1})$ y $t \in [t_{n+k}, t_{n+k+1})$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \big|u_{\Delta x}(x,t) - u_{\Delta x}(x,s)\big| \,\mathrm{d}x &= \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|u_j^{n+k} - u_j^n\big| \leqslant \sum_{m=n}^{n+k-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta x \big|u_j^{m+1} - u_j^m\big| \\ &= \sum_{m=n}^{n+k-1} \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda a_j^m \big|u_j^m - u_{j-1}^m\big| \\ &\leqslant \sum_{m=n}^{n+k-1} \Delta t \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|u_j^m - u_{j-1}^m\big| \leqslant k\Delta t \|a\|_{L^\infty(\Omega)} |u_0|_{BV} \\ &\leqslant (t - s + \Delta t) \|a\|_{L^\infty(\Omega)} |u_0|_{BV}.\end{aligned}$$

Concluimos que también (1.12) está satisfecha, es decir tenemos la convergencia de una subsucesión $u_{\Delta x} \to u$ cuando $\Delta x \to 0$. Queda por demostrar que u es la solución de entropía. Para tal efecto observamos que como η es una función convexa, a partir de (2.52) se tiene que

$$\eta\big(u_j^{n+1}\big) = \eta\big(\big(1 - \lambda a_j^n\big) u_j^n + \lambda a_j^n u_{j-1}^n\big) \leqslant \big(1 - \lambda a_j^n\big) \eta\big(u_j^n\big) + \lambda a_j^n \eta\big(u_{j-1}^n\big)$$

Definiendo $\eta_j^n := \eta(u_j^n)$ podemos escribir esto como

$$\nabla_+^t \eta_j^n + a_j^n \mathrm{D}_- \eta_j^n \leqslant 0$$

o equivalentemente como

$$\mathrm{D}_+^t \eta_j^n + \mathrm{D}_-\big(a_j^n \eta_j^n\big) - \eta_{j-1}^n \mathrm{D}_- a_j^n \leqslant 0. \tag{2.54}$$

Los operadores D_-, D_+ y ∇_+^t satisfacen las siguientes propiedades de "sumación por partes":

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \mathrm{D}_- b_j = -\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j \mathrm{D}_+ a_j \quad \text{si } a_{\pm\infty} = 0 \text{ o } b_{\pm\infty} = 0, \\ &\sum_{n=0}^{\infty} a^n \mathrm{D}_+^t b^n = -\frac{a^0 b^0}{\Delta t} - \sum_{n=1}^{\infty} b^n \mathrm{D}_-^t a^n \quad \text{si } a^\infty = 0 \text{ o } b^\infty = 0. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Sea ahora $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$ una función test y

$$\varphi_j^n := \frac{1}{|I_{j-1/2}^n|} \iint_{I_{j-1/2}^n} \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Multiplicando (2.54) por $\Delta t \Delta x \varphi_j^n$ y sumando sobre $n \in \mathbb{N}_0$ y $j \in \mathbb{Z}$, utilizando (2.55), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\Delta x \Delta t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \eta\big(u_j^n\big) \mathrm{D}_-^t \varphi_j^n + \Delta x \Delta t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big(a_j^n \eta\big(u_j^n\big) \mathrm{D}_+ \varphi_j^n + \eta\big(u_{j-1}^n\big) \mathrm{D}_- a_j^n \varphi_j^n \Big) \\
&+ \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} \eta\big(u_j^0\big) \varphi_j^0 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Sea $B_{\Delta x}$ el lado izquierdo de esta desigualdad, y sea

$$A_{\Delta x} := \iint_\Omega \big(\eta(u_{\Delta x}) \varphi_t + a \eta(u_{\Delta x}) \varphi_x + a_x \eta(u_{\Delta x}) \varphi \big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0) \varphi(x,0)\,\mathrm{d}x.$$

Como $B_{\Delta x} \geqslant 0$, se tiene que

$$A_{\Delta x} = B_{\Delta x} + (A_{\Delta x} - B_{\Delta x}) \geqslant A_{\Delta x} - B_{\Delta x}.$$

Aquí encontramos que

$$\begin{aligned}
A_{\Delta x} - B_{\Delta x} = {} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \iint_{I_{j-1/2}^n} \eta_j^n \big(\varphi_t - \mathrm{D}_-^t \varphi_j^n \big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \iint_{I_{j-1/2}^0} \eta_j^0 \varphi_t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \iint_{I_{j-1/2}^n} \eta_j^n a \big(\varphi_x - \mathrm{D}_+ \varphi_j^n \big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \iint_{I_{j-1/2}^n} \eta_j^n \mathrm{D}_+ \varphi_j^n \big(a - a_j^n \big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \iint_{I_{j-1/2}^n} \big(\eta_j^n - \eta_{j-1}^n \big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \iint_{I_{j-1/2}^n} a_x \eta_{j-1}^n \big(\varphi - \varphi_j^n \big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \iint_{I_{j-1/2}^n} \eta_{j-1}^n \big(a_x - \mathrm{D}_- a_j^n \big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{I_{j-1/2}} \big(\eta(u_0) - \eta_j^0 \big) \varphi(x,0)\,\mathrm{d}x + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{I_{j-1/2}} \eta_j^0 \big(\varphi(x,0) - \varphi_j^0 \big)\,\mathrm{d}x \\
=: {} & S_1 + \cdots + S_9,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

donde $I_{j-1/2} := [x_{j-1}, x_j)$. Para demostrar que el límite u es una solución de entropía, tenemos que demostrar que cada uno de los términos $S_1, \ldots, S_9$ desaparece cuando $\Delta x \to 0$. El siguiente comentario provee un resultado útil para esta tarea.

Comentario 2.2. *Para una función $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ se tiene*

$$\begin{aligned}\big|\phi(x,t)-\phi(y,s)\big| &= \left|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\phi\big(\sigma(x,t)+(1-\sigma)(y,s)\big)\,\mathrm{d}\sigma\right| \\ &= \left|\int_0^1 \nabla\phi\big(\sigma(x,t)+(1-\sigma)(y,s)\big)\cdot(x-y,t-s)\,\mathrm{d}\sigma\right| \\ &\leqslant |x-y|\|\phi_x\|_{L^\infty}+|t-s|\|\phi_t\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Empezamos con el último término, S_9. Ahora

$$\begin{aligned}&\int_{I_{j-1/2}} \eta_j^0\big(\varphi(x,0)-\varphi_j^0\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\eta_j^0}{\Delta x\Delta t}\int_{I_{j-1/2}}\iint_{I_{j-1/2}^0}\big(\varphi(x,0)-\varphi(y,t)\big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\eta_j^0}{\Delta x\Delta t}\int_{I_{j-1/2}}\iint_{I_{j-1/2}^0}\left(\int_y^x \varphi_x(z,0)\,\mathrm{d}z+\int_0^t \varphi_t(y,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

luego, utilizando la convexidad de η,

$$|S_9| \leqslant \big\|\eta(u_0)\big\|_{L^1(\mathbb{R})}\big(\|\varphi_x\|_{L^\infty(\Omega)}\Delta x+\|\varphi_t\|_{L^\infty(\Omega)}\Delta t\big).$$

Para tratar S_8, notamos primero que como η es convexa, se tiene

$$\big|\eta(b)-\eta(a)\big| \leqslant \text{máx}\big\{\big|\eta'(a)\big|,\big|\eta'(b)\big|\big\}|b-a|,$$

además, si $x,y\in I_{j-1/2}$, entonces

$$\big|u_0(x)-u_0(y)\big| \leqslant |u_0|_{BV(I_{j-1/2})}.$$

Utilizando esto y $C := \|\eta'(u_0)\|_{L^\infty}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{I_{j-1/2}}\big(\eta(u_0)-\eta\big(u_j^0\big)\big)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant C\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{I_{j-1/2}}\big|u_0(x)-u_j^0\big|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant C\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{I_{j-1/2}}\frac{1}{\Delta x}\int_{I_{j-1/2}}\big|u_0(x)-u_0(y)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant C\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Delta x|u_0|_{BV(I_{j-1/2})},\end{aligned}$$

por lo tanto

$$|S_8| \leqslant C\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Delta x\sum_{j\in\mathbb{Z}}|u_0|_{BV(I_{j-1/2})} \leqslant C\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Delta x|u_0|_{BV}.$$

Para analizar S_7 notamos primero que

$$\mathrm{D}_-a_j^n = \mathrm{D}_-\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(x_j,t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{\Delta x\Delta t}\iint_{I_{j-1/2}^n} a_x(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

luego

$$\eta_{j-1}^n \iint_{I_{j-1/2}^n} \big(a_x(x,t) - \mathrm{D}_- a_j^n\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \eta_{j-1}^n \bigg(\iint_{I_{j-1/2}^n} a_x(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \Delta x \Delta t a_j^n \bigg) = 0$$

y $S_7 = 0$. Continuamos por el término S_6, notando que

$$\begin{aligned}\iint_{I_{j-1/2}^n} |a_x| \eta_{j-1}^n \big|\varphi - \varphi_j^n\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &\leqslant \frac{\|a_x\|_{L^\infty(\Omega)} \eta_{j-1}^n}{\Delta x \Delta t} \iint_{I_j^n} \iint_{I_j^n} \big|\varphi(x,t) - \varphi(y,s)\big|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \|a_x\|_{L^\infty(\Omega)} \eta_{j-1}^n \Delta x \Delta t \big(\Delta x \|\varphi_x\|_{L^\infty(\Omega)} + \Delta t \|\varphi_t\|_{L^\infty(\Omega)}\big).\end{aligned}$$

Recordemos que la función test φ tiene soporte compacto en $\{t < T\}$. Además, utilizando el esquema para η_j^n (2.54), podemos ver fácilmente que

$$\Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} \eta_j^n \leqslant \exp(Ct_n) \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} \eta_j^0 \leqslant \exp(Ct_n) \big\|\eta(u_0)\big\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

luego

$$\begin{aligned}|S_6| &\leqslant C_T \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_j^n \Delta t (\Delta x + \Delta t) \leqslant C_T \Delta x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \eta_j^0 \Delta t (\Delta x + \Delta t) \\ &\leqslant C_T T \big\|\eta(u_0)\big\|_{L^1(\mathbb{R})} (\Delta x + \Delta t),\end{aligned}$$

considerando que la sumatoria en n es solamente sobre tales n que $t_n = n\Delta t \leqslant T$. Para S_5 obtenemos, poniendo $M > \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$,

$$|S_5| \leqslant \|\eta'\|_{L^\infty(-M,M)} \|a_x\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \Delta x \Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} \big|u_j^n - u_{j-1}^n\big| \leqslant C \Delta x T |u_0|_{BV},$$

mientras que

$$\begin{aligned}|S_4| &\leqslant \|\varphi_x\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_j^n \iint_{I_{j-1/2}^n} \big|a(x,t) - a(x_j,t)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \|\varphi_x\|_{L^\infty(\Omega)} \|a_x\|_{L^\infty(\Omega)} \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_j^n \Delta x \Delta t \leqslant \|\varphi_x\|_{L^\infty(\Omega)} \|a_x\|_{L^\infty(\Omega)} C_T T \Delta x \big\|\eta(u_0)\big\|_{L^1(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Por argumentos similares,

$$\begin{aligned}|S_3| &\leqslant \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \big(\Delta x \|\varphi_{xx}\|_{L^\infty(\Omega)} + \Delta t \|\varphi_{xt}\|_{L^\infty(\Omega)}\big) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_j^n \Delta x \Delta t \\ &\leqslant \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \big(\Delta x \|\varphi_{xx}\|_{L^\infty(\Omega)} + \Delta t \|\varphi_{xt}\|_{L^\infty(\Omega)}\big) C_T T \big\|\eta(u_0)\big\|_{L^1(\mathbb{R})}, \\ |S_2| &\leqslant C_{\Delta t} \Delta t \big\|\eta(u_0)\big\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\varphi_t\|_{L^\infty(\Omega)}.\end{aligned}$$

Finalmente, nuevamente por argumentos similares,

$$|S_1| \leqslant \big(\Delta x \|\varphi_{xt}\|_{L^\infty(\Omega)} + \Delta t \|\varphi_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)}\big) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \eta_j^n \Delta x \Delta t$$

$$\leqslant \big(\Delta x\|\varphi_{xt}\|_{L^\infty(\Omega)} + \Delta t\|\varphi_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)}\big)C_T T\big\|\eta(u_0)\big\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Resumiendo, hemos demostrado que para cada función test $\varphi = \varphi(x,t)$,

$$\begin{aligned}&\iint_\Omega \big(\eta(u)\varphi_t + a\eta(u)\varphi_x + a_x\eta(u)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} A_{\Delta x} \geqslant \lim_{\Delta x\to 0}(A_{\Delta x} - B_{\Delta x}) = 0\end{aligned}$$

si a_x es (localmente) continua y $u_0 \in BV(\mathbb{R})$. Concluimos que el método (2.51) genera una sub-sucesión que converge a la única solución débil. Como el límite es la única solución de entropía, cada subsucesión genera otra subsucesión que converge *al mismo* límite, por lo tanto la sucesión *entera* converge.

Si u_0'' es acotada, vimos que el método (2.51) converge a la solución de entropía a una tasa $\mathcal{O}(\Delta x)$. El significado de los cálculos anteriores consiste en que tenemos convergencia a la solución de entropía única incluso si solamente $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$. Sin embargo en este caso no hemos establecido ninguna tasa de convergencia.

2.5.6. Sistemas de ecuaciones. Sea ahora $\boldsymbol{u} : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ una solución del sistema lineal

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{0}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad \boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.57}$$

donde se supone que la matriz constante $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ posee n valores propios reales y distintos a pares ordenados como $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Si esto es válido, entonces se dice que el sistema es *estrictamente hiperbólico*. En este caso la matriz $\boldsymbol{A}$ tambien posee n vectores propios a derecha $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ tales que

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_i = \lambda_i \boldsymbol{r}_i \quad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

Similarmente existen n vectores propios a izquierda $\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_n$ tales que

$$\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{A} = \lambda_i \boldsymbol{l}_i \quad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

Se supone que los vectores $\boldsymbol{r}_i$ y $\boldsymbol{l}_i$ son columnas y filas, respectivamente. Para $k \neq m$, $\boldsymbol{l}_k$ y $\boldsymbol{r}_m$ son ortogonales, ya que

$$\lambda_m \boldsymbol{l}_k \boldsymbol{r}_m = \boldsymbol{l}_k(\lambda_m \boldsymbol{r}_m) = \boldsymbol{l}_k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_m) = (\boldsymbol{l}_k\boldsymbol{A})\boldsymbol{r}_m = \lambda_k \boldsymbol{l}_k \boldsymbol{r}_m.$$

Se definen, además, las matrices

$$\boldsymbol{L} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{l}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{l}_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 & \cdots & \boldsymbol{r}_n \end{bmatrix}.$$

Suponiendo que los vectores propios son normalizados tales que $\boldsymbol{l}_k\boldsymbol{r}_i = \delta_{ki}$, es decir $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}^{-1}$ o $\boldsymbol{L}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$, tenemos

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} =: \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Multiplicando (2.57) desde la izquierda por $\boldsymbol{L}$ obtenemos

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{0},$$

y definiendo $\boldsymbol{w}$ mediante $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{w}$, obtenemos

$$\boldsymbol{w}_t + \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\boldsymbol{w}_x = \boldsymbol{0}.$$

Esto son n ecuaciones escalares desacopladas para cada componente de $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_n)^{\mathrm{T}}$, es decir

$$(w_i)_t + \lambda_i (w_i)_x = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

con los datos iniciales transformados de acuerdo a

$$\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}_0 = (\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{u}_0, \dots, \boldsymbol{l}_n\boldsymbol{u}_0)^{\mathrm{T}}.$$

Obtenemos entonces la solución

$$w_i(x,t) = \boldsymbol{l}_i\boldsymbol{u}_0(x - \lambda_i t), \quad i = 1, \dots, n$$

o en variables originales

$$\boldsymbol{u}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} w_i(x,t)\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{u}_0(x - \lambda_i t))\boldsymbol{r}_i. \tag{2.58}$$

Ejemplo 2.12 (La ecuación de la onda unidimensional)**.** *Consideremos la ecuación de la onda unidimensional. Sea $\alpha : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una solución del problema*

$$\alpha_{tt} - c^2\alpha_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad \alpha(x,0) = \alpha_0(x), \quad \alpha_t(x,0) = \beta_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

donde $c > 0$ es una constante. Definiendo

$$\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \alpha_x \end{pmatrix}$$

obtenemos las ecuaciones

$$u_t - c^2 v_x = 0, \quad v_t - u_x = 0$$

o bien

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz $\boldsymbol{A}$ posee los valores y vectores propios

$$\lambda_1 = -c, \quad \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = c, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} -c \\ 1 \end{pmatrix},$$

luego

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} c & -c \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}^{-1} = \frac{1}{2c}\begin{bmatrix} 1 & c \\ -1 & c \end{bmatrix}.$$

Concluimos entonces que

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2c}\begin{pmatrix} u + cv \\ -u + cv \end{pmatrix}.$$

A partir de (2.58) *obtenemos ahora*

$$\alpha_x(x,t) = \frac{1}{2}\big(\alpha_0'(x+ct)+\alpha_0'(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\big(\beta_0(x+ct)-\beta_0(x-ct)\big),$$
$$\alpha_t(x,t) = \frac{1}{2}\big(\beta_0(x+ct)+\beta_0(x-ct)\big) + \frac{c}{2}\big(\alpha_0'(x+ct)-\alpha_0'(x-ct)\big).$$

Para determinar α *podemos integrar la última ecuación con respecto a* t *para obtener*

$$\alpha(x,t) = \frac{1}{2}\big(\alpha_0(x+ct)+\alpha_0(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \beta_0(y)\,\mathrm{d}y,$$

después de un cambio de variables en la integral sobre β_0. *Esta es la conocida fórmula de d'Alembert para la solución de la ecuación de la onda en una dimensión espacial.*

En lo siguiente discutiremos el concepto de soluciones de entropía para sistemas lineales. El significado de una solución de entropía para una ecuación escrita en variables características es el siguiente. Para una función de entropía convexa $\hat{\eta}(\boldsymbol{u})$, la solución de entropía debería satisfacer

$$\hat{\eta}(\boldsymbol{u})_t + \hat{q}(\boldsymbol{u})_x \leqslant 0$$

en el sentido débil. A su vez, el flujo de entropía $\hat{q}$ debe satisfacer

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}\hat{q}(\boldsymbol{u}) = \nabla_{\boldsymbol{u}}\hat{\eta}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\Lambda},$$

donde $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, es decir

$$\hat{q}_{u_i} = \lambda_i \hat{\eta}_{u_i}, \quad i=1,\dots,n.$$

Una solución de entropía a (2.57) es el límite (si tal límite existe) de la regularización parabólica

$$\boldsymbol{u}_t^{\varepsilon} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_x^{\varepsilon} = \varepsilon \boldsymbol{u}_{xx}^{\varepsilon}$$

cuando $\varepsilon \to 0$. Para verificar si existe una entropía convexa $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ multiplicamos esta ecuación desde la izquierda por $\nabla\eta(\boldsymbol{u}^{\varepsilon})$ para obtener

$$\eta(\boldsymbol{u}^{\varepsilon})_t + \nabla\eta(\boldsymbol{u}^{\varepsilon})\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_x^{\varepsilon} \leqslant \varepsilon\big(\nabla\eta(\boldsymbol{u}^{\varepsilon})\boldsymbol{u}_x^{\varepsilon}\big)_x,$$

donde utilizamos la convexidad de η para deshacernos de un término que contiene $(\boldsymbol{u}_x^{\varepsilon})^2$, expresión que no es bien comportada (para ecuaciones no lineales) en el límite $\varepsilon \to 0$. Queremos escribir el término $\nabla\eta(\boldsymbol{u}^{\varepsilon})\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_x^{\varepsilon}$ como la derivada con respecto a x de alguna función $q = q(\boldsymbol{u}^{\varepsilon})$. Utilizando que

$$q(\boldsymbol{u}^{\varepsilon})_x = \nabla_{\boldsymbol{u}} q(\boldsymbol{u}^{\varepsilon})\boldsymbol{u}_x^{\varepsilon}$$

notamos que si esto es posible, entonces se tiene que

$$q_{u_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\eta_{u_i}, \quad j=1,\dots,n. \tag{2.59}$$

Estas son n ecuaciones para las dos incógnitas η y q, es decir no podemos esperar ninguna solución para $n > 2$. El lado derecho de (2.59) es dado, luego buscamos un potencial q con un gradiente dado. Este problema posee una solución si las condiciones de integrabilidad $q_{u_k u_j} = q_{u_j u_k}$ para $j, k = 1, \dots, n$ o

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \eta_{u_i u_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \eta_{u_i u_k}, \quad j, k = 1, \dots, n$$

están satisfechas.

Si queremos hallar un flujo de entropía para la entropía $\eta(\boldsymbol{u}) = |\boldsymbol{u}|^2/2$, notamos que $\eta_{u_i u_k} = \delta_{ik}$, luego podemos hallar un flujo de entropía si $a_{jk} = a_{kj}$ para $j, k = 1, \dots, n$, es decir $\boldsymbol{A}$ debe ser simétrica. En tal caso el flujo de entropía q viene dado por

$$q(\boldsymbol{u}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} u_i^2,$$

es decir para la entropía $\eta(\boldsymbol{u}) = |\boldsymbol{u}|^2/2$ una solución de entropía satisface $|\boldsymbol{u}|_t^2 + q(\boldsymbol{u})_x \leqslant 0$ débilmente, lo que significa que

$$\big\| \boldsymbol{u}(\cdot, t) \big\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \big\| \boldsymbol{u}_0 \big\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

por lo tanto existe a lo más una solución de entropía de (2.57) si $\boldsymbol{A}$ es simétrica.

2.5.7. El problema de Riemann para sistemas lineales. Volviendo al caso general (de una matriz $\boldsymbol{A}$ que ahora no necesariamente debe ser simétrica) recordamos que la solución $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x, t)$ de (2.57) es dada por (2.58). Deseamos ahora analizar el *problema de Riemann* (ver también (2.20)) puesto por

$$\boldsymbol{u}_0(x) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x < 0, \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.60}$$

donde $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ y $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ son vectores constantes. Para una ecuación escalar ($n = 1$) sabemos que la solución es dada por

$$u(x, t) = u_0(x - \lambda_1 t) = \begin{cases} u_{\mathrm{L}} & \text{para } x < \lambda_1 t, \\ u_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant \lambda_1 t. \end{cases}$$

Notar que u no es continua. Sin embargo u es la única solución de entropía de (2.57) con los datos iniciales (2.60) en el sentido de la Definición 2.2.

Para dos ecuaciones ($n = 2$) escribimos

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} = \sum_{i=1}^{2} (\boldsymbol{l}_i \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} = \sum_{i=1}^{2} (\boldsymbol{l}_i \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}) \boldsymbol{r}_i.$$

Podemos hallar la solución de cada componente por separado. Utilizando (2.58) para los datos iniciales (2.60) obtenemos

$$\boldsymbol{l}_1 \boldsymbol{u}(x, t) = \begin{cases} \boldsymbol{l}_1 \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x < \lambda_1 t, \\ \boldsymbol{l}_1 \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant \lambda_1 t, \end{cases} \quad \boldsymbol{l}_2 \boldsymbol{u}(x, t) = \begin{cases} \boldsymbol{l}_2 \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x < \lambda_2 t, \\ \boldsymbol{l}_2 \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant \lambda_2 t, \end{cases}$$

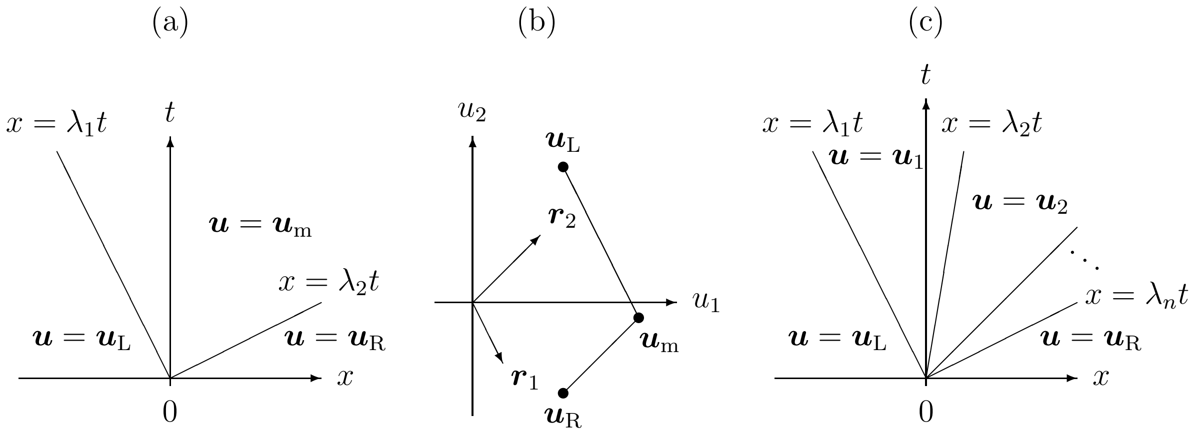


FIGURA 2.6. Solución del problema de Riemann para un sistema lineal: (a) solución (2.61) de un sistema de $n=2$ ecuaciones, (b) construcción del estado intermedio $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$ en el espacio de fase, (c) solución (2.62) para n general.

luego

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(x,t) &= (\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{u}(x,t))\boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{u}(x,t))\boldsymbol{r}_2\\ &= \begin{cases}(\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{r}_2 & \text{para } x<\lambda_1 t,\\ (\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})\boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{r}_2 & \text{para } \lambda_1 t<x<\lambda_2 t,\\ (\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})\boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})\boldsymbol{r}_2 & \text{para } x\geqslant\lambda_2 t\end{cases}\\ &= \begin{cases}\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x<\lambda_1 t,\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} & \text{para } \lambda_1 t<x<\lambda_2 t,\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x\geqslant\lambda_2 t\end{cases}\end{aligned} \tag{2.61}$$

para un estado intermedio

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} = (\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})\boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{r}_2,$$

ver Figura 2.6 (a). Tambien podemos visualizar la solución en el espacio de fase (Figura 2.6 (b)). Observamos que para cada par de estados $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ y $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$, la solución es

$$\boldsymbol{u}(x,t) = \begin{cases}\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x<\lambda_1 t,\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} & \text{para } \lambda_1 t\leqslant x<\lambda_2 t,\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x\geqslant\lambda_2 t.\end{cases}$$

El valor intermedio $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$ marca la intersección de la recta por $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ paralela a $\boldsymbol{r}_1$ con la recta por $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ paralela a $\boldsymbol{r}_2$. En el caso general no lineal las rectas que conectan $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$ y $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ serán reemplazadas por arcos (segmentos de curvas) no necesariamente rectos. Sin embargo se mantiene la misma estructura, por lo menos localmente.

Para un número de ecuaciones n general obtenemos la solución

$$\boldsymbol{u}(x,t)=\begin{cases}\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x<\lambda_1 t,\\ \boldsymbol{u}_i & \text{para } \lambda_i t\leqslant x<\lambda_{i+1}t,\ i=1,\dots,n-1,\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x\geqslant \lambda_n t,\end{cases} \tag{2.62}$$

donde los estados intermedios $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_{n-1}$ son dados por

$$\boldsymbol{u}_i=\sum_{j=1}^{i}(\boldsymbol{l}_j\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})\boldsymbol{r}_j+\sum_{j=i+1}^{n}(\boldsymbol{l}_j\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{r}_j.$$

Esta solución tambien puede ser entendida en el espacio de fase como camino desde $\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ a $\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ obtenido marchando desde $\boldsymbol{u}_{i-1}$ a $\boldsymbol{u}_i$ sobre una recta paralela a $\boldsymbol{r}_i$ para $i=1,\dots,n$. Este punto de vista será muy importante al considerar ecuaciones no lineales, donde las rectas serán reemplazadas por arcos. Localmente la estructura es la misma.

2.5.8. Métodos numéricos para sistemas lineales con coeficientes constantes. Para $\lambda_i>0$ sabemos que el método

$$\mathrm{D}_+^t w_{i,j}^m+\lambda_i\mathrm{D}_-w_{i,j}^m=0$$

genera una sucesión $\{w_i,\Delta x\}$ de funciones que converge a la solución de entropía única de

$$(w_i)_t+\lambda_i(w_i)_x=0.$$

Similarmente, para $\lambda_i<0$ el método

$$\mathrm{D}_+^t w_{i,j}^m+\lambda_i\mathrm{D}_+w_{i,j}^m=0$$

genera una sucesión convergente. Ambos métodos convergen sólo bajo la condición CFL $\Delta t\leqslant\Delta x|\lambda_i|$. En coordenadas de vectores propios, con

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{w}_j^m\approx\boldsymbol{w}(j\Delta x,m\Delta t),$$

resulta el método para $\boldsymbol{w}$ dado por

$$\mathrm{D}_+^t\boldsymbol{w}_j^m+\boldsymbol{\Lambda}_+\mathrm{D}_-\boldsymbol{w}_j^m+\boldsymbol{\Lambda}_-\mathrm{D}_+\boldsymbol{w}_j^m=\boldsymbol{0}, \tag{2.63}$$

donde

$$\boldsymbol{\Lambda}_-=\operatorname{diag}(\lambda_1\wedge 0,\dots,\lambda_n\wedge 0),\quad \boldsymbol{\Lambda}_+=\operatorname{diag}(\lambda_1\vee 0,\dots,\lambda_n\vee 0),$$

donde utilizamos la notación

$$a\wedge b:=\text{mín}\{a,b\},\quad a\vee b:=\text{máx}\{a,b\}$$

y observamos que $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda}_++\boldsymbol{\Lambda}_-$. Si la condición CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|=\frac{\Delta t}{\Delta x}\text{máx}\bigl\{|\lambda_1|,|\lambda_n|\bigr\}\leqslant 1$$

está satisfecha, entonces el método (2.63) producirá una sucesión convergente, y el límite $\boldsymbol{w}$ será la solución de entropía única de

$$\boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{w}_x = \boldsymbol{0}.$$

Definiendo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{w}$ obtenemos una solución de (2.57).

La misma transformación también puede ser implementada a nivel discreto. Multiplicando (2.63) desde la izquierda por $\boldsymbol{L}$ y utilizando que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{w}$ obtenemos

$$\mathrm{D}_+^t \boldsymbol{u}_j^m + \boldsymbol{A}_+ \mathrm{D}_- \boldsymbol{u}_j^m + \boldsymbol{A}_- \mathrm{D}_+ \boldsymbol{u}_j^m = \boldsymbol{0},$$

donde $\boldsymbol{A}_\pm = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}_\pm \boldsymbol{L}$, y este método de diferencias finitas converge directamente a $\boldsymbol{u}$.

2.6. Ejercicios

Problem 2.1. Determinar las características de las siguientes ecuaciones cuasi-lineales:

$$\begin{aligned} u_t + \sin(x) u_x &= u, \\ \sin(t) u_t + \cos(x) u_x &= 0, \\ u_t + \sin(u) u_x &= u, \\ \sin(u) u_t + \cos(u) u_x &= 0. \end{aligned}$$

Problem 2.2. Utilizar características para resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

a) $uu_x + xu_y = 0$, $u(0,s) = 2s$ para $s > 0$.
b) $\mathrm{e}^y u_x + uu_y + u^2 = 0$, $u(x,0) = 1/x$ para $x > 0$.
c) $xu_y - yu_x = u$, $u(x,0) = h(x)$ para $x > 0$.
d) $(x+1)^2 u_x + (y-1)^2 u_y = (x+y)u$, $u(x,0) = -1 - x$.
e) $u_x + 2xu_y = x + xu$, $u(1,y) = \mathrm{e}^y - 1$.
f) $u_x + 2xu_y = x + xu$, $u(0,y) = y^2 - 1$.
g) $xuu_x + u_y = 2y$, $u(x,0) = x$.

Problem 2.3.

a) Utilizar el método de características para demostrar que el problema

$$u_t + au_x = f(x,t), \quad u|_{t=0} = u_0, \quad a = \text{const.}$$

posee la solución

$$u(x,t) = u_0(x - at) + \int_0^t f\bigl(x - a(t-s), s\bigr)\,\mathrm{d}s.$$

b) Demostrar que

$$u\bigl(\xi(t;x_0), t\bigr) = u_0(x_0) + \int_0^t f\bigl(\xi(s;x_0), s\bigr)\,\mathrm{d}s$$

si u es la solución de

$$u_t + a(x,t)u_x = f(x,t), \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{2.64}$$

donde ξ satisface

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t;x_0) = a\big(\xi(t;x_0),t\big), \quad \xi(0;x_0) = x_0.$$

c) Demostrar que

$$u(x,t) = u_0\big(\zeta(t;x)\big) + \int_0^t f\big(\zeta(\tau;x),t-\tau\big)\,\mathrm{d}\tau$$

si u es la solución de (2.64) y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\zeta(\tau;x) = -a\big(\zeta(\tau;x),t-\tau\big), \quad \zeta(0;x) = x.$$

Problem 2.4. Demostrar que

$$u(x,t) = \begin{cases} u_\mathrm{l} & \text{para } x < at, \\ u_\mathrm{r} & \text{para } x \geqslant at \end{cases}$$

es la solución de entropía (en el sentido de la Definición 2.2) del problema

$$u_t + au_x = 0 \quad (a = \text{const.}), \quad u(x,0) = \begin{cases} u_\mathrm{l} & \text{para } x < 0, \\ u_\mathrm{r} & \text{para } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Problem 2.5. Hallar la condición de salto (es decir, la condición de Rankine-Hugoniot) para sistemas unidimensionales

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}.$$

Problem 2.6. Se considera una ley de conservación en dos dimensiones,

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0, \tag{2.65}$$

donde $f, g \in C^1$ y la incógnita es $u = u(x,y,t)$. Hallar la condición de Rankine-Hugoniot válida a través de una discontinuidad en u, suponiendo que u salta a través de una superficie regular en (x,y,t). Tratar de generalizar la respuesta a una ley de conservación en n dimensiones espaciales.

Problem 2.7. Se considera una linealización de la ecuación de Burgers. Sea

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < -1, \\ -x & \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1 & \text{para } x > 1. \end{cases}$$

a) Determinar el tiempo $t_{\text{máx}}$ hasta el cual la solución del problema de valores iniciales

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

permanece continua. Determinar la solución para $t < t_{\text{máx}}$.

b) Encontrar la solución v del problema linealizado

$$v_t + u_0(x)v_x = 0, \quad v(x,0) = u_0(x).$$

Determinar la solución también en el caso $v(x,0) = u_0(\alpha x)$, donde $\alpha \geqslant 0$.

c) En lo siguiente definiremos un procedimiento para hallar u mediante la solución de una sucesión de ecuaciones linealizadas. Para tal efecto fijemos $n \in \mathbb{N}$, y para $t \in (m/n, (m+1)/n]$ sea v_n la solución de

$$(v_n)_t + v_n(x, m/n)(v_n)_x = 0,$$

donde $v_n(x,0) = u_0(x)$. Demostrar que

$$v_n(x, m/n) = u_0(\alpha_{m,n} x)$$

y hallara una relación recursiva (en m) satisfecha por $\alpha_{m,n}$.

d) Supongamos que existe una función $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(t) \in C^1$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{m,n} = \tilde{\alpha}(t), \quad \text{donde } t = m/n < 1.$$

Demostrar que $\tilde{\alpha}(t) = 1/(1-t)$, y luego $v_n(x) \to u(x)$ para $t < 1$. ¿Qué pasa para $t \geqslant 1$?

Problem 2.8.

a) Resolver el problema de valores iniciales para la ecuación de Burgers

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ 1 & \text{para } x \geqslant 0. \end{cases}$$

b) Resolver el problema de valores iniciales para la misma ecuación con

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < 0, \\ 0 & \text{para } x \geqslant 0. \end{cases}$$

c) Multiplicando la ecuación de Burgers por u, encontramos formalmente que u satisface

$$\frac{1}{2}(u^2)_t + \frac{1}{3}(u^3)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{2.66}$$

¿Las soluciones débiles encontradas en (a) y (b) son soluciones débiles de (2.66)? Si la respuesta es negativa, hallar las soluciones débiles de (2.66) correspondientes. (Este ejemplo demuestra que manipulaciones válidas para soluciones suaves no necesariamente son válidas para soluciones débiles.)

Problem 2.9. Demostrar que para cada $\alpha \geqslant 1$, la función

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leqslant (1-\alpha)t/2, \\ -\alpha & \text{para } (1-\alpha)t/2 < x \leqslant 0, \\ \alpha & \text{para } 0 < x \leqslant (\alpha-1)t/2, \\ -1 & \text{para } x \geqslant (\alpha-1)t/2 \end{cases}$$

es una solución débil de

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leqslant 0, \\ -1 & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

(Este es otro ejemplo que ilustra que soluciones débiles no necesariamente son únicas.)

Capítulo 3

Leyes de conservación escalares

3.1. Condiciones de entropía

Seguimos considerando la ley de conservación

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{3.1}$$

en el sentido distribucional (ver (2.13)). No especificaremos condiciones de continuidad de f, pero suponemos que f es suficientemente suave para que todas las fórmulas siguientes sean razonables.

La manera más común de especificar condiciones de entropía está basada en la regularización viscosa, donde la ley de conservación (3.1) es reemplazada por

$$u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{3.2}$$

La idea es que el problema físico exhibe algo de difusión, y que la ley de conservación (3.1) representa un modelo "límite" cuando la difusión es pequeña. Nos interesamos entonces en aquellas soluciones de (3.1) que aparecen como límites de soluciones del problema regularizado (3.2) cuando $\varepsilon \to 0$. Llamamos *viscosas* a ecuaciones tales como (3.2), dado que físicamente el lado derecho describe el efecto de viscosidad.

3.1.1. Condiciones de entropía de la onda viajera y de Oleĭnik. Supongamos que (3.1) tiene una solución del tipo

$$u(x,t) = \begin{cases} u_\mathrm{l} & \text{para } x < st, \\ u_\mathrm{r} & \text{para } x > st. \end{cases} \tag{3.3}$$

En este caso, $u(x,t)$ satisface la *condición de entropía de la onda viajera* si $u(x,t)$ coincide en casi todas partes con el límite de una función

$$u^\varepsilon(x,t) = U\left(\frac{x-st}{\varepsilon}\right) \tag{3.4}$$

cuando $\varepsilon \to 0$, donde u^ε es una solución clásica de (3.2). Insertando (3.4) en (3.2), obtenemos la ecuación diferencial ordinaria

$$-s\dot{U} + \frac{\mathrm{d}f(U)}{\mathrm{d}\xi} = \ddot{U}, \quad U = U(\xi), \quad \xi := \frac{x-st}{\varepsilon}, \quad \dot{U} := \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}.$$

Esta ecuación puede ser integrada una vez, lo que entrega

$$\dot{U} = -sU + f(U) + A \tag{3.5}$$

con la constante de integración A. Para $\varepsilon \to 0$ tenemos que $\xi \to \pm\infty$. Ahora si u debe ser el límite de u^ε, lo siguiente necesariamente debe ser válido:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} U(\xi) = \begin{cases} u_\mathrm{l} & \text{si } x < st, \\ u_\mathrm{r} & \text{si } x > st \end{cases} = \begin{cases} \lim_{\xi \to -\infty} U(\xi) & \text{si } x < st, \\ \lim_{\xi \to \infty} U(\xi) & \text{si } x > st. \end{cases}$$

La ecuación (3.5) implica que $\lim_{\xi \to \pm\infty} \dot{U}(\xi)$ existe y es igual a $-su_{\mathrm{l,r}} + f(u_{\mathrm{l,r}}) + A$. Se llega a una contradicción a menos que este límite se anula, por lo tanto

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \dot{U}(\xi) = 0.$$

Utilizando esto en (3.5), obtenemos

$$A = su_\mathrm{l} - f_\mathrm{l} = su_\mathrm{r} - f_\mathrm{r},$$

lo que en primer lugar confirma la condición de Rankine-Hugoniot conocida

$$s(u_\mathrm{l} - u_\mathrm{r}) = f_\mathrm{l} - f_\mathrm{r}.$$

Entonces la solución de onda viajera U debe ser la solución del siguiente problema de valores de frontera:

$$\dot{U} = -s(U - u_\mathrm{l}) + f(U) - f_\mathrm{l}, \quad U(\infty) = u_\mathrm{r}, \quad U(-\infty) = u_\mathrm{l}. \tag{3.6}$$

La condición de Rankine-Hugoniot implica que u_l y u_r son puntos fijos de esta ecuación.

Ahora buscamos una órbita de (3.6) desde u_l hasta u_r. Si la terna $(s, u_\mathrm{l}, u_\mathrm{r})$ posee una órbita tal, entonces la solución discontinua (3.3) satisface la condición de entropía de la onda viajera. También se dice que en este caso, la discontinuidad *posee un perfil viscoso*. Estas consideraciones también pueden ser aplicadas a sistemas de leyes de conservación.

Ahora supongamos que $u_\mathrm{l} < u_\mathrm{r}$. Entonces $\dot{U}$ no se anula en ningún punto, porque si tuviéramos que $\dot{U}(\xi_0) = 0$ para un valor ξ_0, entonces la constante $U(\xi_0)$ sería la única solución, en contradicción a

$$U(-\infty) = u_\mathrm{l} < u_\mathrm{r} = U(\infty).$$

Entonces, $\dot{U}(\xi) > 0$ para todo ξ y por lo tanto

$$\forall u \in (u_\mathrm{l}, u_\mathrm{r}) : \quad f_\mathrm{l} + s(u - u_\mathrm{l}) < f(u). \tag{3.7}$$

Dado que

$$s = \frac{f_\mathrm{l} - f_\mathrm{r}}{u_\mathrm{l} - u_\mathrm{r}},$$

esto significa que el grafo de $f(u)$ debe correr *arriba* de la secante que conecta los puntos $(u_\mathrm{l}, f_\mathrm{l})$ y $(u_\mathrm{r}, f_\mathrm{r})$. Por otro lado, con esa propiedad geométrica se cumple (3.7), y podemos encontrar una solución de (3.6). Análogamente, para $u_\mathrm{l} > u_\mathrm{r}$, $\dot{U}$ debe ser negativo sobre el intervalo $(u_\mathrm{r}, u_\mathrm{l})$, y la secante debe correr enteramente *arriba* del grafo de $f(u)$. Combinando los dos casos, vemos que la condición de entropía de la onda viajera es equivalente a

$$s\bigl|k - u_\mathrm{l}\bigr| < \operatorname{sgn}(k - u_\mathrm{l})\bigl(f(k) - f(u_\mathrm{l})\bigr) \quad \text{para todo } k \text{ entre } u_\mathrm{l} \text{ y } u_\mathrm{r}. \tag{3.8}$$

La desigualdad idéntica es válida si reemplazamos u_{l} por u_{r}. Esto es equivalente a la *condición de entropía de Oleĭnik*

$$\forall k \in (u_{\mathrm{l}}, u_{\mathrm{r}}) \cup (u_{\mathrm{r}}, u_{\mathrm{l}}) : \frac{f(k) - f_{\mathrm{r}}}{k - u_{\mathrm{r}}} < s < \frac{f(k) - f_{\mathrm{l}}}{k - u_{\mathrm{l}}}. \tag{3.9}$$

Lema 3.1. *Sea u una solución clásica de* (3.1) *lejos de discontinuidades aisladas, que supuestamente corren a lo largo de curvas suaves, y supongamos que en cada punto de discontinuidad que separa los valores de solución $u_{\mathrm{l}} \neq u_{\mathrm{r}}$ la condición* (3.9) *es satisfecha. Entonces*

$$\forall k \in \mathbb{R} : \quad s[\![|u - k|]\!] \geqslant [\![\operatorname{sgn}(u - k)\big(f(u) - f(k)\big)]\!], \tag{3.10}$$

donde denotamos $[\![a]\!] := a_{\mathrm{r}} - a_{\mathrm{l}}$ para cualquier cantidad a.

Demostración.

1.) Supongamos que (3.10) es válida. Sea $u_{\mathrm{l}} < u_{\mathrm{r}}$ y escogimos $u_{\mathrm{l}} < k < u_{\mathrm{r}}$, resulta la desigualdad

$$s\big((u_{\mathrm{r}} - k) + (u_{\mathrm{l}} - k)\big) \geqslant \big(f_{\mathrm{r}} - f(k)\big) + \big(f_{\mathrm{l}} - f(k)\big),$$

la cual puede ser escrita en la forma

$$f(k) \geqslant \bar{f} - s(\bar{u} - k), \quad \bar{f} := \frac{f_{\mathrm{l}} + f_{\mathrm{r}}}{2}, \quad \bar{u} := \frac{u_{\mathrm{l}} + u_{\mathrm{r}}}{2}.$$

El lado derecho denota una recta que conecta $(u_{\mathrm{l}}, f_{\mathrm{l}})$ y $(u_{\mathrm{r}}, f_{\mathrm{r}})$ (donde hay que utilizar la condición de Rankine-Hugoniot). Entonces el grafo de $f(u)$ debe correr arriba de la secante que junta $(u_{\mathrm{l}}, f_{\mathrm{l}})$ con $(u_{\mathrm{r}}, f_{\mathrm{r}})$; análogamente, en el caso $u_{\mathrm{r}} < u_{\mathrm{l}}$ el grafo debe correr debajo de esta secante. Concluimos entonces que (3.10) implica la condición de la onda viajera (3.8).

2.) Si u posee una discontinuidad aislada entre u_{l} y u_{r} tal que se satisface la condición de Rankine-Hugoniot, entonces

$$s[\![|u - k|]\!] = [\![\operatorname{sgn}(u - k)\big(f(u) - f(k)\big)]\!] \tag{3.11}$$

para todas las constantes $k < \text{mín}\{u_{\mathrm{l}}, u_{\mathrm{r}}\}$ o $k > \text{máx}\{u_{\mathrm{l}}, u_{\mathrm{r}}\}$. Para k entre u_{l} y u_{r} vimos que para

$$f(k) \geqslant \bar{f} - s(\bar{u} - k),$$

o sea, si la condición del perfil viscoso está satisfecha, tenemos que

$$s[\![|u - k|]\!] \geqslant [\![\operatorname{sgn}(u - k)\big(f(u) - f(k)\big)]\!]. \tag{3.12}$$

Análogamente podemos demostrar que (3.12) siempre es válida si $u_{\mathrm{l}} > u_{\mathrm{r}}$. Concluimos que (3.10) es válida.

■

3.1.2. Condición de entropía de Kružkov. La desigualdad (3.8) es el punto de partida para desarrollar la *condición de entropía de Kružkov*, que es mas cómoda. Para motivarla, escogimos una función suave y convexa $\eta = \eta(u)$ y una función test no negativa $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$. Definiendo una función q a través de

$$q'(u) = f'(u)\eta'(u), \tag{3.13}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \iint \bigl(u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x - \varepsilon u_{xx}^\varepsilon\bigr)\eta'(u^\varepsilon)\phi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \iint \eta(u^\varepsilon)_t\phi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \iint q'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon\phi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \varepsilon \iint \bigl(\eta(u^\varepsilon)_{xx} - \eta''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= -\iint \eta(u^\varepsilon)\phi_t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \iint q(u^\varepsilon)\phi_x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \varepsilon \iint \eta(u^\varepsilon)\phi_{xx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \qquad (3.14)\\
&\quad + \varepsilon \iint \eta''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\geqslant -\iint \bigl(\eta(u^\varepsilon)\phi_t + q(u^\varepsilon)\phi_x + \varepsilon\eta(u^\varepsilon)\phi_{xx}\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

donde aprovechamos la convexidad de η, es decir $\eta'' \geqslant 0$, para hacer desaparecer la última integral en la penúltima línea de (3.14). (Esta integral es problemática porque contiene el término $(u_x^\varepsilon)^2$, el cual en general no será integrable cuando $\varepsilon \to 0$.) Si la última desigualdad debe ser válida cuando $\varepsilon \to 0$, entonces se debe tener que $\eta(u)_t + q(u)_x \leqslant 0$ en el sentido de distribuciones, es decir

$$\iint \bigl(\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Específicamente, usamos ahora la función

$$\eta(u) = \bigl((u-k)^2 + \delta^2\bigr)^{1/2}, \quad \delta > 0, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Para $\delta \to 0$ podemos extender el análisis al caso $\eta(u) = |u-k|$, $k \in \mathbb{R}$, en el cual la función q está definida por

$$q(u) = \operatorname{sgn}(u-k)\bigl(f(u) - f(k)\bigr).$$

Lema 3.2. *Sea u una solución débil acotada de la ley de conservación y ϕ una función test con $\phi \geqslant 0$. Se el funcional lineal Λ definido a través de*

$$\Lambda(\eta) := \iint \bigl(\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

donde recordamos que en virtud de (3.13)*, la función q depende linealmente de η. Entonces $\Lambda(\eta) \geqslant 0$ para todas las funciones convexas η si y sólo si $\Lambda(\eta) \geqslant 0$ para todas las funciones de entropía de Kružkov $\eta(u) = |u-k|$, $k \in \mathbb{R}$.*

Demostración.

1.) Supongamos que $\Lambda(\eta) \geqslant 0$ para todas las funciones convexas η, entonces basta elegir $k \in \mathbb{R}$ y η por (3.15) y dejar $\delta \to 0$ para obtener $\Lambda(|\cdot - k|) \geqslant 0$.

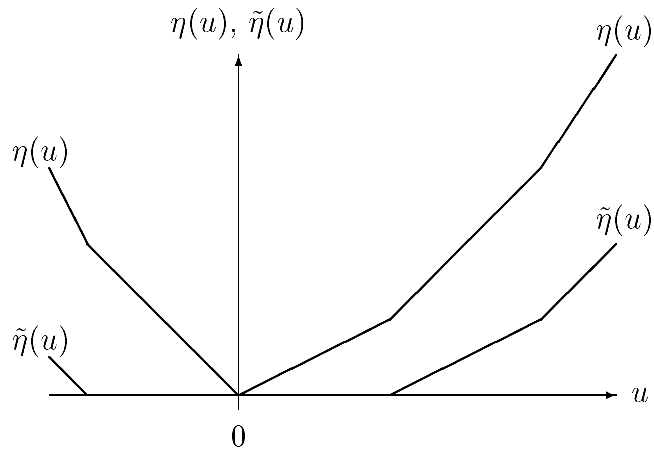


FIGURA 3.1. Demostración del Lema 3.2: las funciones $\eta(u)$ y $\tilde{\eta}(u)$ (ecuación (3.17)).

2.) Supongamos que $\Lambda(\eta) \geqslant 0$ para todas las funciones $\eta(u) = |u-k|$, $k \in \mathbb{R}$. Ahora sean para $i \in \mathbb{N}$ las funciones η_i definidas por

$$\eta_i(u) = \alpha_i |u - k_i|, \quad k_i \in \mathbb{R}, \quad \alpha_i \geqslant 0.$$

Entonces como $\Lambda(\eta_i) \geqslant 0$ para todo i y además Λ es lineal,

$$\Lambda\left(\sum_i \eta_i\right) \geqslant 0.$$

Por otro lado, como u es una solución débil, $\Lambda(\alpha u + \beta) = 0$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, de lo cual se deduce que la función convexa y lineal a trozos

$$\eta(u) := \alpha u + \beta + \sum_i \eta_i(u) \tag{3.16}$$

satisface la desigualdad $\Lambda(\eta) \geqslant 0$.

3.) Demostramos ahora que *toda* función convexa y lineal por trozos η puede ser escrita en la forma (3.16). Para tal efecto usamos el método de inducción sobre las puntas de η, donde η' es discontinua. Consideramos entonces una punta de η, sin pérdida de generalidad localizada en $u = 0$. Entonces, cerca del origen,

$$\eta(u) = \begin{cases} \sigma_1 u & \text{para } u \leqslant 0, \\ \sigma_2 u & \text{para } u > 0 \end{cases}$$

si $|u|$ es pequeño y $\sigma_1 < \sigma_2$. En este caso,

$$\tilde{\eta}(u) := \eta(u) - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)|u| - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)u \tag{3.17}$$

es una función convexa y lineal por trozos que posee una punta menos que η, ver la Figura 3.1. Eso implica que $\Lambda(\eta) \geqslant 0$ para todas las funciones convexas y lineales por trozos η.

4.) Ahora sea η una función convexa arbitraria. Entonces podemos aproximar la función η por una sucesión de funciones convexas y lineales por trozos η_j con $\eta_j \to \eta$ en L^∞, lo que implica que $\Lambda(\eta) \geqslant 0$.

Concluimos que si $\Lambda(\eta) \geqslant 0$ para la función de entropía de Kružkov $\eta(u) = |u-k|$ para todo $k \in \mathbb{R}$, entonces $\Lambda(\eta) \geqslant 0$ para *todas* las funciones convexas. ■

Definición 3.1 (Solución de entropía de Kružkov)**.**

(i) *Una función u se llama* una solución de entropía en el sentido de Kružkov *o simplemente* una solución de entropía de Kružkov *de la ley de conservación $u_t + f(u)_x = 0$ para $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ si*

$$\begin{aligned} &\forall k \in \mathbb{R}, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty)), \quad \phi \geqslant 0 : \\ &\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big(|u-k|\phi_t + \operatorname{sgn}(u-k)\big(f(u)-f(k)\big)\phi_x \Big) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

(ii) *Si consideramos soluciones en un intervalo finito de tiempo $[0,T]$ y usamos funciones test no negativas $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,T])$, obtenemos que para todo $k \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{-\infty}^\infty \Big(|u-k|\phi_t + \operatorname{sgn}(u-k)\big(f(u)-f(k)\big)\phi_x \Big) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &- \int_{-\infty}^\infty \big|u(x,T)-k\big|\phi(x,T)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^\infty \big|u_0(x)-k\big|\phi(x,0)\,\mathrm{d}x \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Lema 3.3. *Toda solución de entropía u acotada en el sentido de Kružkov (Definición 3.1) es, en particular, es una solución débil de la ley de conservación bajo consideración (en el sentido de la Definición 2.1).*

Demostración. Si u es acotada, fijamos k tal que $k \leqslant -\|u\|_\infty$, luego obtenemos de (3.18)

$$0 \leqslant \iint \Big((u-k)\phi_t + \big(f(u)-f(k)\big)\phi_x \Big) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \iint \big(u\phi_t + f(u)\phi_x \big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Análogamente, para $k \geqslant \|u\|_\infty$,

$$0 \geqslant \iint \big(u\phi_t + f(u)\phi_x \big) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

por lo tanto

$$\iint \big(u\phi_t + f(u)\phi_x \big) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0 \tag{3.20}$$

para todas las funciones test no negativas. Para $\phi \in C_0^\infty$ definimos $\phi = \phi_+ - \phi_-$, $\phi_\pm \geqslant 0$, $\phi_\pm \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$, y (3.20) se convierte en la definición de una solución débil. ■

3.2. El problema de Riemann

Consideremos ahora el problema de Riemann

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_\mathrm{l} & \text{para } x \leqslant 0, \\ u_\mathrm{r} & \text{para } x > 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

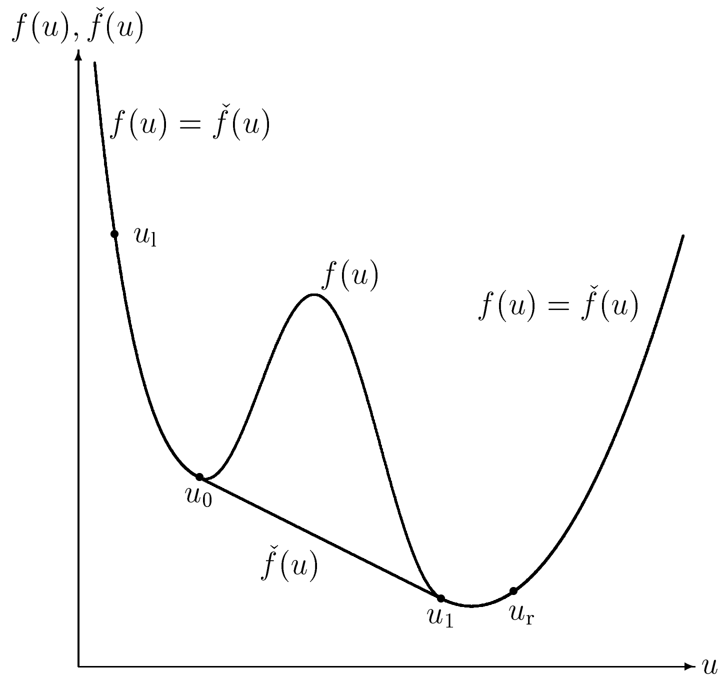


FIGURA 3.2. La función $f(u)$ y su envoltura convexa inferior $\check{f}(u)$ para los valores de u_{l} y u_{r} . Las funciones $f(u)$ y $\check{f}(u)$ coinciden para $u_{\mathrm{l}} \leqslant u \leqslant u_0$ y $u_1 \leqslant u \leqslant u_{\mathrm{r}}$.

con una función $f \in C^2$ con un número finito de puntos de inflexión. Buscamos soluciones del tipo $u(x,t) = w(x/t)$. Insertando $z := x/t$ en (3.21), obtenemos que

$$-\frac{x}{t^2}w'(z) + \frac{1}{t}f'(w)w'(z) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{t}\left(-\frac{x}{t} + f'(w)\right)w' = 0, \tag{3.22}$$

o sea $z = f'(w)$. Si f' es estrictamente monótona, obtenemos simplemente

$$w = (f')^{-1}(z).$$

En general tenemos que reemplazar f' por una función monótona entre u_{l} y u_{r}.

Consideremos primero el caso $u_{\mathrm{l}} < u_{\mathrm{r}}$. Afirmamos que la solución de (3.22) está dada por

$$u(x,t) = w(z) = \begin{cases} u_{\mathrm{l}} & \text{para } x \leqslant \check{f}'(u_{\mathrm{l}})t, \\ (\check{f}')^{-1}(x/t) & \text{para } \check{f}'(u_{\mathrm{l}})t \leqslant x \leqslant \check{f}'(u_{\mathrm{r}})t, \\ u_{\mathrm{r}} & \text{para } x \geqslant \check{f}'(u_{\mathrm{r}})t, \end{cases} \tag{3.23}$$

donde $\check{f}$ es la *envoltura convexa inferior* en el intervalo $[u_{\mathrm{l}}, u_{\mathrm{r}}]$ definida por

$$\check{f}(u) := \sup\bigl\{g(u) \bigm| g \leqslant f \text{ y } g \text{ es convexa sobre } [u_{\mathrm{l}}, u_{\mathrm{r}}]\bigr\},$$

ver Figura 3.2, y $(\check{f}')^{-1} \equiv ((\check{f})')^{-1}$. Como $\check{f}'' \geqslant 0$, $\check{f}'$ es no decreciente, y podemos formar la inversa $(\check{f}')^{-1}$ que admite discontinuidades donde $\check{f}'$ es constante.

Si $f \in C^2$ con un número finito de puntos de inflexión, entonces existe un número finito de intervalos con los extremos

$$u_\mathrm{l} = u_1 < u_2 < \ldots < u_n = u_\mathrm{r}$$

tal que $\check{f} = f$ en cada segundo intervalo, es decir

$$\check{f}(u) = f(u) \text{ para } u \in [u_i, u_{i+1}] \Longrightarrow \check{f}(u) < f(u) \text{ para } u \in (u_{i-1}, u_i) \cup (u_{i+1}, u_{i+2}).$$

En este caso la solución consiste en un número finito de intervalos sobre los cuales u es una solución regular dada por $u(x,t) = (f')^{-1}(x/t)$, que estan separados por saltos en aquellas posiciones x que satisfacen

$$x = f'(u_j)t = t\frac{f(u_{j+1}) - f(u_j)}{u_{j+1} - u_j} = f'(u_{j+1})t.$$

Demostramos ahora que (3.23) define una solución de entropía. Para tal efecto, definimos

$$\sigma_i := \check{f}'(u_i), \quad i = 1, \ldots, n; \quad \sigma_0 := -\infty, \quad \sigma_{n+1} := \infty.$$

Eliminando σ_is idénticos y cambiando la enumeración si necesario, obtenemos que

$$\sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_{n+1}.$$

Definimos ahora

$$\begin{aligned}
v_i(x,t) &:= (\check{f}')^{-1}(x/t) \quad \text{para } \sigma_{i-1} \leqslant x/t \leqslant \sigma_i,\ i = 2, \ldots, n,\\
v_1(x,t) &:= u_\mathrm{l} \quad \text{para } x \leqslant \sigma_1 t,\\
v_{n+1}(x,t) &:= u_\mathrm{r} \quad \text{para } x \geqslant \sigma_n t,\\
\Omega_i(x,t) &:= \bigl\{(x,t) \bigm| 0 \leqslant t \leqslant T,\ \sigma_{i-1}t < x < \sigma_i t\bigr\}, \quad i = 1, \ldots, n+1.
\end{aligned}$$

La función definida en (3.23) puede ser escrita en la forma

$$u(x,t) := \sum_{i=1}^{n+1} \chi_{\Omega_i}(x,t) v_i(x,t). \tag{3.24}$$

Además, definimos

$$\underline{u}_i := \lim_{x \to \sigma_i t^-} u(x,t), \quad \overline{u}_i := \lim_{x \to \sigma_i t^+} u(x,t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Usando esta notación demostramos ahora que (3.24) es una solución de entropía del problema (3.21). Dado que u es continuamente diferenciable sobre cada sector Ω_i, podemos aplicar sobre cada sector Ω_i el Teorema de Green, obteniendo

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int (\eta\phi_t + q\phi_x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=1}^{n+1} \iint_{\Omega_i} (\eta_i\phi_t + q_i\phi_x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\partial\Omega_i} \phi(-\eta_i\,\mathrm{d}x + q_i\,\mathrm{d}t)\\
&= \int \bigl(\eta(x,T)\phi(x,T) - \eta(x,0)\phi(x,0)\bigr)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \phi(\sigma_i t,t)\big(\sigma_i(\overline{\eta}_i-\underline{\eta}_i)-(\overline{q}_i-\underline{q}_i)\big)\,\mathrm{d}t,$$

donde usamos las siguientes definiciones:

$$\overline{\eta}_i := \eta(\overline{u}_i,k),\ q=q(u,k):=\operatorname{sgn}(u-k)\big(f(u)-f(k)\big),\ q_i := q\big(u_i(x,t),k\big),$$
$$\overline{q}_i := q(\overline{u}_i,k),\ \underline{q}_i := q(\underline{u}_i,k).$$

Usando (3.11) y (3.12) obtenemos que

$$\forall k\in\mathbb{R}: \quad \sigma_i(\overline{\eta}_i-\underline{\eta}_i)-(\overline{q}_i-\underline{q}_i)\geqslant 0,$$

por lo tanto

$$\int_0^T\int(\eta\phi_t+q\phi_x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int\big(\eta(x,0)\phi(x,0)-\eta(x,T)\phi(x,T)\big)\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

lo que significa que u satisface la condición de entropía de Kružkov (3.19).

El caso restante $u_{\mathrm{l}} > u_{\mathrm{r}}$ puede ser transformado al caso discutido aquí mediante la transformación $x\mapsto -x$. El problema de Riemann que resulta es

$$u_t - f(u)_x = 0, \quad u(x,0)=\begin{cases} u_{\mathrm{r}} & \text{para } x<0,\\ u_{\mathrm{l}} & \text{para } x\geqslant 0.\end{cases}$$

Ahora necesitamos la envoltura convexa inferior de $-f$ entre u_{r} y u_{l}. Esta envoltura es precisamente la negativa de la envoltura *concava superior* desde u_{l} hasta u_{r}:

$$\hat{f}(u) := \inf\big\{g(u)\,\big|\, g\geqslant f \text{ y } g \text{ es concava sobre } [u_{\mathrm{l}},u_{\mathrm{r}}]\big\}.$$

En este caso, la solución débil está dada por

$$u(x,t)=w(z)=\begin{cases} u_{\mathrm{l}} & \text{para } x\leqslant \hat{f}'(u_{\mathrm{l}})t,\\ (\hat{f}')^{-1}(x/t) & \text{para } \hat{f}'(u_{\mathrm{l}})t\leqslant x\leqslant \hat{f}'(u_{\mathrm{r}})t,\\ u_{\mathrm{r}} & \text{para } x\geqslant \hat{f}'(u_{\mathrm{r}})t.\end{cases} \tag{3.25}$$

Esta construcción es válida en todas las situaciones donde la envoltura consiste en un número finito de intervalos con $\check{f},\hat{f}\neq f$ que alternan con intervalos donde estas funciones coinciden. Mas adelante generalizaremos la solución a casos donde la función f es solamente Lipschitz continua.

Teorema 3.1. *Se considera el problema de valores iniciales* (3.21) *con una función de flujo con la propiedad que $\check{f},\hat{f}\neq f$ sobre un número finito de intervalos que alternan con intervalos donde $\check{f}$ y $\hat{f}$, respectivamente, coinciden con f. Este problema tiene una solución dada por* (3.23) *o* (3.25)*, respectivamente, la cual satisface la condición de entropía de Kružkov.*

Una discontinuidad que satisface la condición de entropía se llama *onda de choque* o simplemente *choque*; las partes continuas de la solución se llaman *onda de rarefacción*. En la formulación del Teorema 3.1 *no* exigimos que f sea diferenciable. Tambien podemos utilizar una función f continua y lineal por trozos, con un número finito de intervalos de linealidad. En este caso, f' será una función escalonada con un rango de valores finito. Los valores de u donde f' es discontinua son las *puntas* (breakpoints) de f. Para una función f con estas propiedades las envolturas igualmente son lineales por trozos con un número finito de puntas, y las funciones $\check{f}'$ y $\hat{f}'$ tanto como sus inversas son funciones escalonadas. Además, las inversas asumen sus valores en el conjunto de puntas de $\check{f}$ y $\hat{f}$, respectivamente.

Si $u_\mathrm{l} < u_\mathrm{r}$ y las puntas de f son $u_\mathrm{l} = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = u_\mathrm{r}$, entonces $\check{f}$ tiene sus puntas en un subconjunto de estos puntos, por ejemplo en $u_\mathrm{l} < u_{i_1} < \ldots < u_{i_n} < u_\mathrm{r}$. En este caso, la solución es una función escalonada de $z = x/t$ que disminuye monotonamente entre u_l y u_r. Las discontinuidades estan en

$$z_{i_k} = \frac{f(u_{i_{k-1}}) - f(u_{i_k})}{u_{i_{k-1}} - u_{i_k}}.$$

Corolario 3.1. *Sea f una función continua y lineal por trozos $f : [-K, K] \to \mathbb{R}$, y sean*

$$-K = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = K$$

las puntas de f. Entonces el problema de Riemann

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} u_j & \text{para } x < 0, \\ u_k & \text{para } x \geqslant 0 \end{cases}$$

tiene una solución que es constante por trozos como función de $z = x/t$. Si $u_j < u_k$, sean

$$u_j = v_1 < \ldots < v_m = u_k$$

las puntas de $\check{f}$ y si $u_j > u_k$, sean

$$u_k = v_m < \ldots < v_1 = u_j$$

las puntas de $\hat{f}$. Entonces la solución débil del problema de Riemann está dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} v_1 & \text{para } x \leqslant s_1 t, \\ v_2 & \text{para } s_1 t < x \leqslant s_2 t, \\ \vdots & \\ v_i & \text{para } s_{i-1} t < x \leqslant s_i t, \\ \vdots & \\ v_m & \text{para } x > s_{m-1} t. \end{cases}$$

Las velocidades resultan de la derivada de la envoltura, es decir

$$s_i = \frac{f(v_{i+1}) - f(v_i)}{v_{i+1} - v_i}, \quad i = 1, \ldots, m-1.$$

3.3. Front Tracking

Ejemplo 3.1. *Consideramos una aproximación lineal por trozos del flujo de la ecuación de Burgers. Nos interesan solamente valores de la solución entre -1 y 2, por lo tanto basta especificar la función de flujo sobre el intervalo $[-1, 2]$:*

$$f(u) = \begin{cases} -u/2 & \text{para } u \in [-1, 0], \\ u/2 & \text{para } u \in [0, 1], \\ (3/2)u - 1 & \text{para } u \in [1, 2], \end{cases}$$

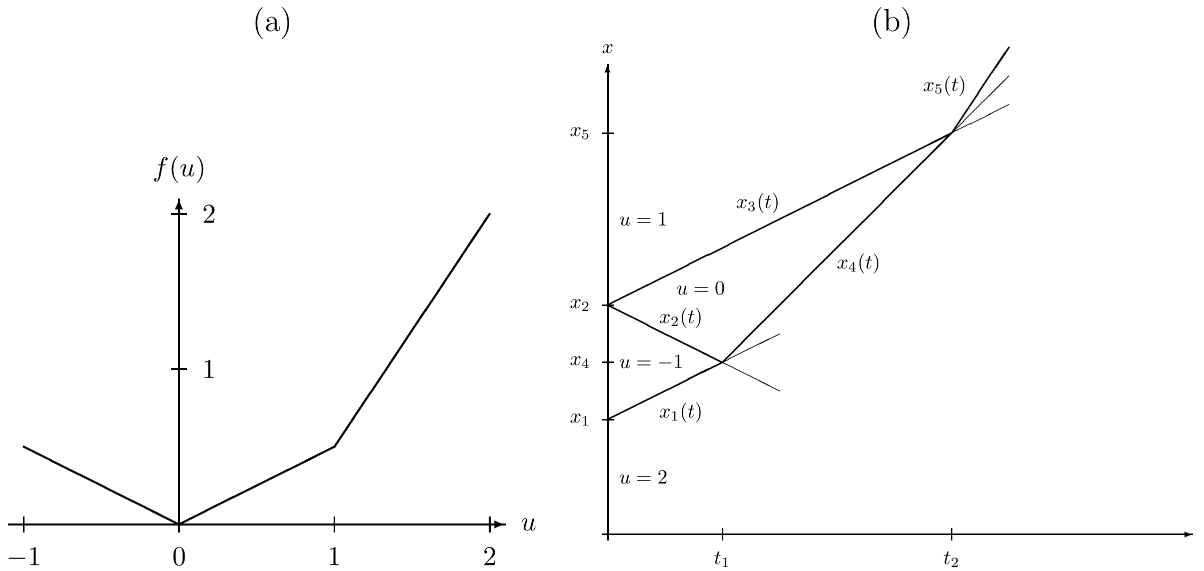


FIGURA 3.3. Ejemplo 3.1: (a) la función de flujo $f(u)$ continua y lineal por trozos, (b) la solución constante por trozos.

ver Figura 3.3 (a). La función de flujo exhibe dos puntas y es convexa. Queremos tratar el problema de valores iniciales

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{para } x \leqslant x_1, \\ -1 & \text{para } x_1 < x \leqslant x_2, \\ 1 & \text{para } x > x_2. \end{cases}$$

Inicialmente, la solución debe ser compuesta por las soluciones de los problemas de Riemann localizados en $x = x_1$ y $x = x_2$, puesto que las ondas de las soluciones de ambos problemas se propagan con velocidades finitas, y no van a intersectar antes de un cierto tiempo $t_1 > 0$. La construcción de la solución está ilustrada en la Figura 3.3 (b).

Empezamos con el problema de Riemann planteado en $x = x_1$. Como f es convexa y $u_{\mathrm{l}} = 2 > -1 = u_{\mathrm{r}}$, la solución consiste en un choque único con la velocidad

$$s_1 = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 - (-1)} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}.$$

Para t pequeño y x cerca de x_1 resulta

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{para } x < s_1 t + x_1, \\ -1 & \text{para } x \geqslant s_1 t + x_1. \end{cases}$$

Para el otro problema de Riemann tenemos que $u_{\mathrm{l}} = -1$ y $u_{\mathrm{r}} = 1$, por lo tanto hay que formar la envoltura convexa inferior $\check{f}$, la cual en este caso coincide con la función de flujo. En el intervalo $(-1,1)$, la función de flujo posee dos segmentos lineales y una punta en $u = 0$. Entonces, la solución va a consistir en dos discontinuidades divergentes cuyas velocidades *se calculan de $f'(u)$ o equivalentemente de la condición de Rankine-Hugoniot, ya que f es linealmente degenerada a través de cada discontinuidad. Así llegamos a las velocidades*

$$s_2 = \frac{0 - \frac{1}{2}}{0-(-1)} = -\frac{1}{2}, \quad s_3 = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1-0} = \frac{1}{2}.$$

De aquí proviene la solución para t pequeño y x cerca de x_2:

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & \text{para } x < s_2 t + x_2, \\ 0 & \text{para } s_2 t + x_2 \leqslant x < s_3 t + x_2, \\ 1 & \text{para } x \geqslant s_3 t + x_2, \end{cases}$$

es decir para todo x, pero t pequeño, la solución esta dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{para } x < x_1 + s_1 t, \\ -1 & \text{para } s_1 t + x_1 \leqslant x < s_2 t + x_2, \\ 0 & \text{para } s_2 t + x_2 \leqslant x < s_3 t + x_2, \\ 1 & \text{para } x \geqslant s_3 t + x_2 \end{cases}$$

Obviamente, las trayectorias $x_1(t) := x_1 + t/2$ y $x_2(t) := x_2 - t/2$ colisionan en el momento $t = t_1 = x_2 - x_1$ en $x = x_4 = (x_1 + x_2)/2$. Tenemos que considerar entonces la interacción entre el choque $x_1(t)$ y la discontinuidad $x_2(t)$. Debido a la velocidad de propagación finita, lejos de (x_4, t_1) la solución no será afectada directamente por lo que precisamente pasa en este mismo punto. Consideramos $t = t_4$ y la cercanía de x_4. La solución u asume los valores 2 para $x < x_4$ y 0 para $x > x_4$. Por lo tanto, dicha interacción puede ser descrita por la solución del problema de Riemann con $u_{\mathrm{l}} = 2$ y $u_{\mathrm{r}} = 0$. Esta solución consiste en un choque único, dado que la función de flujo es convexa y $u_{\mathrm{l}} > u_{\mathrm{r}}$. La velocidad del choque es

$$s_4 = \frac{2-0}{2-0} = 1.$$

Para $t > t_1 = x_2 - x_1$, la solución consiste en un choque en $x_4(t)$ y la discontinuidad en $x_3(t)$, donde

$$x_3(t) = x_2 + \frac{t}{2}, \quad x_4(t) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + 1 \cdot \bigl(t - (x_2 - x_1)\bigr) = t + \frac{1}{2}(3x_1 - x_2).$$

Formalmente, podemos escribir

$$u(x,t) = 2 + \llbracket u\bigl(x_4(t)\bigr) \rrbracket H\bigl(x - x_4(t)\bigr) + \llbracket u\bigl(x_3(t)\bigr) \rrbracket H\bigl(x - x_3(t)\bigr);$$

en general, para cada función constante por trozos, donde los áreas de constancia están separados por discontinuidades $x_j(t)$, podemos escribir

$$u(x,t) = u_{\mathrm{l}} + \sum_j \llbracket u\bigl(x_j(t)\bigr) \rrbracket H\bigl(x - x_j(t)\bigr),$$

donde u_{l} es el valor de la solución a la izquierda de la discontinuidad que corre a lo más a la izquierda.

Teniendo en cuenta que la velocidad de $x_4(t)$ es mayor que la de $x_3(t)$, estas discontinuidades van a colisionar, precisamente, la colisión ocurre en el instante $t = t_2 = 3(x_2 - x_1)$

en $x = x_5 = (5x_2 - 3x_1)/2$. Para describir la interacción de estas dos choques, tenemos que resolver el problema de Riemann con $u_\mathrm{l} = 2$ y $u_\mathrm{r} = 1$. Dado que f es lineal sobre $[1, 2]$, obtenemos una discontinuidad única con

$$s_5 = \frac{2 - \dfrac{1}{2}}{2 - 1} = \frac{3}{2}.$$

De aquí resulta que la solución para $t > t_2$ está definida por

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{para } x < (3/2)t - 3x_1 - 2x_2, \\ 1 & \text{para } x \geqslant (3/2)t - 3x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Dado que ahora tenemos una discontinuidad única que se propaga, hemos encontrado la solución para todo $t > t_2$.

El método de solución usado aquí se llama *front tracking*. Se usa el término *frente* tanto para choques como para discontinuidades a través de las cuales la función de flujo es lineal por trozos.

Algoritmo 3.1 (Front Tracking)**.**

1. *Se considera el siguiente problema de valores iniciales (problema de Cauchy) de una ley de conservación escalar y unidimensional:*
$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0. \tag{3.26}$$
2. *Aproximar f por una función f^δ continua y lineal por trozos.*
3. *Aproximar el dato inicial por una función u_0^η constante por trozos.*
4. *Resolver* exactamente *el problema de valores iniciales*
$$u_t + f^\delta(u)_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0^\eta$$
5. *Para $f^\delta \to f$ y $u_0^\eta \to u_0$, la solución aproximada $u_{\delta,\eta}$ converge a la solución de* (3.26)*.*

Vimos que la solución de un problema de Riemann siempre es una función monótona que asume valores entre u_l y u_r. Igualmente podemos decir que la solución del problema de valores iniciales con datos constantes por trozos satisface un *principio de máximo*, puesto que para un número de problemas de Riemann, todas las soluciones asumen valores entre el mínimo y el máximo de todos los estados izquierdos y derechos.

Fijamos ahora M y $u_i = i\delta$ para $-M \leqslant i\delta \leqslant M$. Supongamos que f es lineal por trozos con sus puntas en u_i. Además, sea u_0 constante por trozos con valores en $\{u_i\}$, y un número finito de discontinuidades. Ahora se pretende resolver el problema de valores iniciales

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{3.27}$$

Inicialmente, la solución consiste en un número de soluciones de problemas de Riemann que no interactuan. Cada solución es constante por trozos con discontinuidades que se propagan con velocidades respectivas finitas. En algún momento $t_1 > 0$, dos de esas discontinuidades van a colisionar. La solución puede ser continuada mas allá de t_1 si consideramos el siguiente problema de valores iniciales con la solución $v(x,t)$:

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad v(x, t_1) = u(x, t_1).$$

Dado que las soluciones de los problemas de Riemann iniciales exclusivamente asumen valores entre las puntas $\{u_i\}$, el "dato inicial" $u(x, t_1)$ es del mismo tipo que la función u_0. Entonces podemos continuar la construcción. Con la excepción del problema de Riemann en el punto de interacción, todos los problemas de Riemann ya estan resueltos, y la solución simplemente consiste en continuar las discontinuidades con velocidad constante. El problema de Riemann que aparece en el punto de interacción sí debe ser resuelto, lo que genera un nuevo abanico de discontinuidades. De esta manera, la solución puede ser continuada hasta la próxima interacción en $t = t_2$. Hay que enfatizar que no estamos haciendo un aproximación, sino que determinamos la solución de entropía *exacta* del problema (3.27). Este método puede ser continuado para $0 < t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant \ldots$.

Sin embargo, en este momento aun no podemos asegurar que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, es decir, que podemos continuar la solución hasta cualquier tiempo arbitrario. Podría ocurrir, por ejemplo, que el número de discontinuidades crece en cada paso de tiempo, y llega a ser infinito en un tiempo finito. Pero el siguiente lema asegura que esto *no* sucede.

Lema 3.4. *Para cada δ fijo y cada función u_0 constante por trozos con valores en $\{u_i\}$ hay sólo un número finito de interacciones de la solución débil de* (3.27) *para $t \in [0, \infty)$.*

Comentario 3.1. *Mediante el método del front tracking, podemos calcular la solución hasta $t = \infty$ con un número* finito *de operaciones. Tales métodos se llaman* híper-rápidos*.*

Demostración del Lema 3.4.

1.) Sea $N(t)$ el número total de los frentes de la solución del front tracking en el momento t. Si un frente corresponde a un salto entre u_l y u_r, decimos que "el frente posee l segmentos lineales" si la función de flujo posee $l-1$ puntas entre u_l y u_r. Sea $[\![u]\!]$ el salto en u a través de la discontinuidad, entonces

$$l = \big|[\![u]\!]\big|/\delta.$$

Sea $L(t)$ el número de *todos* los segmentos lineales en *todos* los frentes de $u(x,t)$ en el momento t. Enumerando los frentes de la izquierda a la derecha y suponiendo que el i-ésimo frente posee l_i segmentos lineales, entonces tenemos que

$$L(t) = \sum_i l_i = \frac{1}{\delta} \sum_i \big|[\![u]\!]_i\big|.$$

Sea Q el número de los segmentos lineales de la función de flujo lineal por trozos $f(u)$ para $u \in [-M, M]$. Ahora demostramos que

$$T(t) := QL(t) + N(t)$$

disminuye estrictamente a través de cada colisión de frentes. Puesto que $T(t) \in \mathbb{N}$, podrá haber sólo $T(0)$ colisiones.

2.) Consideramos ahora la colisión de dos frentes, los cuales supuestamente estan separados por los estados (valores de solución) u_l, u_m y u_r (de la izquierda a la derecha). Primero consideramos el caso $u_\mathrm{l} < u_\mathrm{m} < u_\mathrm{r}$; el caso $u_\mathrm{r} < u_\mathrm{m} < u_\mathrm{l}$ es tratado analogamente. Necesariamente la situación debe ser la situación presentada en la Figura 3.4 (a). Dado que un único frente conecta u_l con u_m, el grafo de f no puede intersectar con la secante que conecta $(u_\mathrm{l}, f(u_\mathrm{l}))$ con $(u_\mathrm{m}, f(u_\mathrm{m}))$. El grafo debe correr arriba de

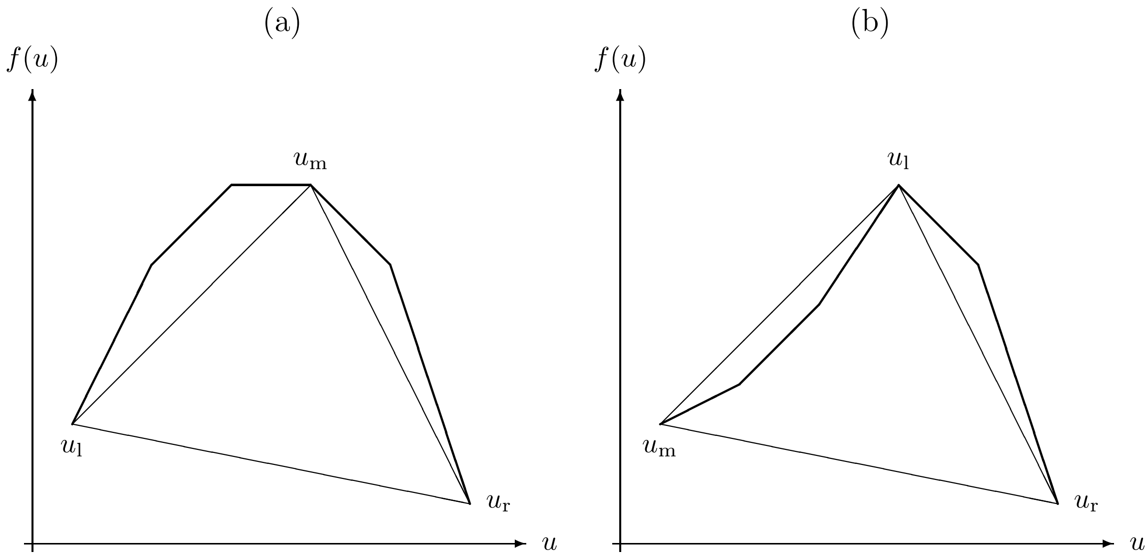


FIGURA 3.4. Demostración del Lema 3.4: (a) el caso $u_{\mathrm{l}} < u_{\mathrm{l}} < u_{\mathrm{r}}$, (b) el caso $u_{\mathrm{m}} < u_{\mathrm{m}} < u_{\mathrm{r}}$.

dicho segmento. Lo mismo es válido para u_{m} y u_{r}. Como los frentes chocan, el frente izquierdo debe ser más rápido que el frente derecho, lo cual implica que la pendiente del segmento izquierdo es mayor que la del segmento derecho. Por lo tanto, la envoltura convexa inferior consiste solamente en el segmento que conecta $(u_{\mathrm{l}}, f(u_{\mathrm{l}}))$ con $(u_{\mathrm{r}}, f(u_{\mathrm{r}}))$, entonces la solución del problema de Riemann consiste en un único frente. Concluimos que L queda constante a través de la colisión, pero N disminuye en uno y por lo tanto T disminuye en uno.

3.) El caso alternativo ocurre cuando u_{m} no está entre u_{l} y u_{r}; aquí es suficiente discutir el caso $u_{\mathrm{m}} < u_{\mathrm{l}} < u_{\mathrm{r}}$. Puesto que el problema de Riemann con el estado izquierdo u_{l} y el estado derecho u_{m} es solucionado por una única discontinuidad, podemos aplicar argumentos similares a los del caso anterior para concluir que la situación es la ilustrada por la Figura 3.4 (b). Entonces el problema de Riemann con el estado izquierdo u_{l} y el estado derecho u_{r} consiste en frentes cuyas velocidades son menores que o igual a la velocidad del frente derecho. El número máximo de frentes nuevos generados así es $|u_{\mathrm{l}} - u_{\mathrm{r}}|/\delta$. En virtud de $|u_{\mathrm{l}} - u_{\mathrm{r}}|/\delta < Q$, N incrementa a lo más en $Q - 1$, pero L disminuye por lo menos en uno. Por lo tanto, T debe disminuir por lo menos en uno.

■

El Lema 3.4 implica que para una función inicial constante por trozos con un número finito de discontinuidades y para una función de flujo continua y lineal por trozos, el problema de valores iniciales posee una solución débil que satisface la condición de entropía de Kružkov tanto que la condición del perfil viscoso para cada discontinuidad. Ahora es fácil demostrar el siguiente corolario.

Corolario 3.2. *Sea $f(u)$ continua y lineal por trozos con número finito de puntas para $u \in [-M, M]$, donde M es una constante. Supongamos que u_0 es una función constante por* *trozos con un número finito de discontinuidades,* $u_0 : \mathbb{R} \to [-M, M]$. *Entonces el problema de valores iniciales*

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0$$

posee una solución débil $u(x,t)$. *La solución es constante por trozos (como función de* x *para cada* t*), y* $u(x,t)$ *toma valores en el conjunto finito*

$$\{u_0(x)\} \cup \{\text{puntas de } f\}.$$

Además, existe un número finito de interacciones entre los frentes de u. *La distribución* u *también satisface la condición de entropía de Kružkov* (3.19).

Ahora habrá que aclarar los siguientes problema: ¿La solución es única? ¿Qué pasa cuando los datos iniciales y la función de flujo aproximan datos iniciales y funciones “generales”?

3.4. Existencia y unicidad

Consideramos dos soluciones $u = u(x,t)$ y $v = v(x,t)$ de

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad v|_{t=0} = v_0,$$

suponiendo que ambas satisfacen la condición de entropía de Kružkov, es decir, para cada función test $\phi \geqslant 0$ con soporte compacto se debe cumplir

$$\iint \bigl(|u-k|\phi_t + \operatorname{sgn}(u-k)\bigl(f(u)-f(k)\bigr)\phi_x\bigr)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int |u_0 - k|\phi(x,0)\,\mathrm{d}x \geqslant 0; \tag{3.28}$$

una desigualdad análoga debe ser válida para v. Suponemos que f es Lipschitz continua, o sea, existe una constante L tal que

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := \sup_{u \neq v} \left| \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \right| \leqslant L;$$

la constante $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$ se llama *constante de Lipschitz* (o semi-norma) de f. Si ϕ posee soporte compacto, entonces (3.28) se reduce a

$$\iint \bigl(|u-k|\phi_t + \operatorname{sgn}(u-k)\bigl(f(u)-f(k)\bigr)\phi_x\bigr)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geqslant 0. \tag{3.29}$$

Además, definimos la función

$$q(u,k) := \operatorname{sgn}(u-k)\bigl(f(u)-f(k)\bigr), \quad \|q\|_{\mathrm{Lip}} := \sup_{(u_1,v_1)\neq(u_2,v_2)} \frac{|q(u_1,v_1) - q(u_2,v_2)|}{|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|}.$$

Puesto que

$$\frac{\partial q}{\partial u}(u,k) = \operatorname{sgn}(u-k) f'(u), \quad \frac{\partial q}{\partial k}(u,k) = -\operatorname{sgn}(u-k) f'(k),$$

sabemos que

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant L \Longrightarrow \|q\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant L.$$

Ahora sea $\phi = \phi(x,t,y,s)$ una función test no negativa tanto en (x,t) como en (y,s) con soporte compacto en $t > 0$ y $s > 0$. Dado que ambas funciones u y v satisfacen (3.29), podemos elegir $k = v(y,s)$ en la desigualdad para u y $k = u(x,t)$ en la desigualdad para v.

Luego integramos la desigualdad para u con respecto a y y s y la desigualdad para v con respecto a x y t. La suma entrega

$$\iiiint \Big\{ \big|u(x,t) - v(y,s)\big|(\phi_t + \phi_s) + q(u,v)(\phi_x + \phi_y)\Big\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \geqslant 0. \tag{3.30}$$

Ahora juntamos algunos hechos básicos sobre las funciones *mollifier*. Estas funciones son "distribuciones δ aproximadas". Consideramos funciones ω_ε con $\omega_\varepsilon \to \delta_0$ para $\varepsilon \to 0$.

Sea $\omega = \omega(\sigma) \in C^\infty$, $0 \leqslant \omega(\sigma) \leqslant 1$, $\operatorname{supp} \omega \subseteq [-1,1]$, $\omega(-\sigma) = \omega(\sigma)$,

$$\int_{-1}^{1} \omega(\sigma)\, d\sigma = 1, \quad \omega_\varepsilon(\sigma) := \frac{1}{\varepsilon}\omega\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right).$$

Lema 3.5. *Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz continua y $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Sean $u, v \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$. Entonces*

$$\iiiint F\big(u(x,t), v(y,s)\big)\Psi\left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+s}{2}\right)\omega_\varepsilon(x-y)\omega_{\varepsilon_0}(t-s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$
$$\xrightarrow{\varepsilon,\varepsilon_0\downarrow 0} \iint F\big(u(x,t), v(x,t)\big)\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Demostración. Para simplificar la demostración, omitimos la variabilidad en el tiempo y deseamos demostrar que

$$\iint F\big(u(x), v(y)\big)\Psi\left(\frac{x+y}{2}\right)\omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} \int F\big(u(x), v(y)\big)\Psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Observamos primeramente que

$$\int F\big(u(x), v(y)\big)\Psi(x)\,\mathrm{d}x = \iint F\big(u(x), v(x)\big)\Psi(x)\omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

luego obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\iint F\big(u(x), v(y)\big)\Psi\left(\frac{x+y}{2}\right)\omega_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint F\big(u(x), v(x)\big)\Psi(x)\omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint \Big(F\big(u(x), v(y)\big) - F\big(u(x), v(x)\big)\Big)\Psi\left(\frac{x+y}{2}\right)\omega_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \iint F\big(u(x), v(x)\big)\left[\Psi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \Psi(x)\right]\omega_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Estimamos las dos integrales I_1 e I_2 por separado. Utilizando que u es acotada y la Lipschitz continuidad de F, obtenemos

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leqslant \|\Psi\|_{L^\infty} C \iint \big|v(x) - v(y)\big|\omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \|\Psi\|_{L^\infty} C \iint \big|v(y+z) - v(y)\big|\omega_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \|\Psi\|_{L^\infty} C \sup_{|z|\leqslant\varepsilon}\big\|v(\cdot+z) - v\big\|_{L^1}\int \omega_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z = \|\Psi\|_{L^\infty} C \sup_{|z|\leqslant\varepsilon}\big\|v(\cdot+z) - v\big\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Como la norma $\|\cdot\|_{L^1}$ es continua con respecto a traslaciones, concluimos que este término desaparece cuando $\varepsilon \downarrow 0$. Para el segundo término utilizamos un argumento similar:

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leqslant \big\|F(u,v)\big\|_{L^\infty} \iint \Big|\Psi\left(\frac{z}{2}+y\right) - \Psi(z+y)\Big|\omega_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \big\|F(u,v)\big\|_{L^\infty} \sup_{|z|\leqslant\varepsilon}\Big\|\Psi\Big(\cdot+\frac{z}{2}\Big) - \Psi\Big\|_{L^1} \int \omega_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \big\|F(u,v)\big\|_{L^\infty} \sup_{|z|\leqslant\varepsilon}\Big\|\Psi\Big(\cdot+\frac{z}{2}\Big) - \Psi\Big\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Nuevamente, la última expresión desaparece cuando $\varepsilon \downarrow 0$. ■

Regresando a leyes de conservación y a (3.30), elegimos $\psi(x,t)$ una función test con soporte en $t>0$ y definimos la función test $\phi(x,y,t,s)$ (para (3.30)) por

$$\phi(x,y,t,s) := \psi\left(\frac{x+y}{2},\frac{t+s}{2}\right)\omega_{\varepsilon_0}(t-s)\omega_\varepsilon(x-y),$$

donde $\varepsilon_0>0$ y $\varepsilon>0$ son números pequeños. Esta función satisface

$$\begin{aligned}
\phi_t+\phi_s &= \partial_2\psi\left(\frac{x+y}{2},\frac{t+s}{2}\right)\omega_{\varepsilon_0}(t-s)\omega_\varepsilon(x-y), \\
\phi_x+\phi_y &= \partial_1\psi\left(\frac{x+y}{2},\frac{t+s}{2}\right)\omega_{\varepsilon_0}(t-s)\omega_\varepsilon(x-y).
\end{aligned}$$

Observamos que las derivadas de ω_{ε_0} y ω_ε, las distribuciones δ aproximadas, se cancelan. Aplicando el Lema 3.5 a la función $F(u,v)=|u-v|$, $\Psi=\psi_t$ y $F(u,v)=q(u,v)$, $\Psi=\psi_x$, respectivamente, y dejando ε_0 y ε tender a cero, obtenemos en virtud de (3.30) y del Lema 3.5 la desigualdad

$$\iint\Big(\big|u(x,t)-v(x,t)\big|\psi_t + q(u,v)\psi_x\Big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

para dos soluciones débiles u y v y cada función test ψ no negativa con soporte en $t>\varepsilon$.

Si hubiesemos considerado (3.19) para el intervalo de tiempo $t\in[0,T]$ y funciones test para los cuales 0 y T pertenece al soporte, la desigualdad de la formulación de Kružkov implicaría la desigualdad

$$\begin{aligned}
&\iiiint\Big\{\big|u(x,t)-v(y,s)\big|(\phi_t+\phi_s)+q(u,v)(\phi_x+\phi_y)\Big\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&-\iiint\big|u(x,T)-v(y,s)\big|\phi(x,T,y,s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&-\iiint\big|u(x,t)-v(y,T)\big|\phi(x,t,y,T)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \\
&+\iiint\big|u_0(x)-v(y,s)\big|\phi(x,0,y,s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&+\iiint\big|u(x,t)-v_0(y)\big|\phi(x,t,y,0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Eligiendo la función test como arriba y considerando que estamos integrando solamente sobre la mitad del soporte de las funciones test, obtenemos un factor $1/2$ que multiplica cada uno de los términos de borde para $t=0$ y $t=T$. Terminamos con

$$\begin{aligned} &\iint \Bigl(\bigl|u(x,t)-v(x,t)\bigr|\psi_t + q(u,v)\psi_x \Bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &- \int \bigl|u(x,T)-v(x,T)\bigr|\psi(x,T)\,\mathrm{d}x + \int \bigl|u_0(x)-v_0(x)\bigr|\psi(x,0)\,\mathrm{d}x \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Para aprovechar esta identidad, escogimos

$$\psi(x,t) := \bigl(\chi_{[-M+Lt+\varepsilon, M-Lt-\varepsilon]} * \omega_\varepsilon\bigr)(x), \quad t\in[0,T].$$

Aquí $L = \|f\|_{\mathrm{Lip}}$, $\chi_{[a,b]}$ es la función característica del intervalo $[a,b]$, y $*$ denota el operador de convolución. Aquí elegimos M tan grande que

$$M-Lt-\varepsilon > -M+Lt+3\varepsilon \quad \text{para } t<T.$$

Para obtener una función test admisible, modificamos la función ψ de tal forma que desaparece suavemente para $t>T$. Para $t<T$ tenemos entonces

$$\begin{aligned} \psi_t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-M+Lt+\varepsilon}^{M-Lt-\varepsilon} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= -L\bigl(\omega_\varepsilon(x-M+Lt+\varepsilon)+\omega_\varepsilon(x+M-Lt-\varepsilon)\bigr) \leqslant 0, \\ \psi_x &= -\bigl(\omega_\varepsilon(x-M+Lt+\varepsilon)-\omega_\varepsilon(x+M-Lt-\varepsilon)\bigr). \end{aligned} \tag{3.32}$$

En virtud de nuestra selección de M ambas funciones que aparecen en el lado derecho de (3.32) tienen soportes disjuntos. Por lo tanto,

$$0 = \psi_t + L|\psi_x| \geqslant \psi_t + \frac{q(u,v)}{|u-v|}\psi_x.$$

Esto significa que $|u-v|\psi_t + q(u,v)\psi_x \leqslant 0$. Insertando esto en (3.31), obtenemos para $\varepsilon\to 0$

$$\int_{-M+Lt}^{M-Lt} \bigl|u(x,t)-v(x,t)\bigr|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-M}^{M} \bigl|u_0(x)-v_0(x)\bigr|\,\mathrm{d}x.$$

Supongamos que $u_0(x)=v_0(x)$ cuando $|x|$ es suficientemente grande (o $u_0-v_0\in L^1$), entonces $u(x,t)=v(x,t)$ para $|x|$ suficientemente grande. Entonces

$$\bigl\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\bigr\|_1 \leqslant \|u_0-v_0\|_1. \tag{3.33}$$

Teorema 3.2. *Sea f Lipschitz continua y sean $u,v\in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ dos soluciones débiles de los problemas de valores iniciales respectivos*

$$u_t+f(u)_x=0, \quad u|_{t=0}=u_0; \quad v_t+f(v)_x=0, \quad v|_{t=0}=v_0$$

que satisfacen la condición de entropía de Kružkov. Si u_0-v_0 es integrable, entonces la desigualdad (3.33) es válida. En particular, para $u_0=v_0$ tenemos que $u=v$.

Este resultado significa que el problema de valores iniciales posee una solución L^1-estable, donde por supuesto asumimos la existencia de soluciones. Ahora queremos demostrar constructivamente la existencia de soluciones débiles mediante el método del front tracking. Para funciones de flujo continuas y lineales por trozos y datos iniciales constantes o constantes por trozos este resultado ya está disponible.

Consideremos ahora dos problemas de Riemann con los mismos datos iniciales, pero con funciones de flujo diferentes. Efectivamente, sean u y v las soluciones débiles de

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad v_t + g(v)_x = 0, \quad u(x,0) = v(x,0) = \begin{cases} u_{\mathrm{l}} & \text{para } x < 0, \\ u_{\mathrm{r}} & \text{para } x > 0. \end{cases} \tag{3.34}$$

Las funciones f y g sean continuas y lineales por trozos con un número finito de puntas. Las soluciones de (3.34) son funciones constantes por trozos de x/t que coinciden fuera de un intervalo finito de x/t. Específicamente,

$$u(x,t) = v(x,t) = \begin{cases} u_{\mathrm{l}} & \text{para } x < \sigma_m t, \\ u_{\mathrm{r}} & \text{para } x > \sigma_M t. \end{cases}$$

Hay que acotar la diferencia en L^1 entre las soluciones u y v.

Lema 3.6. *Se tiene la siguiente desigualdad, done la seminorma de Lipschitz es tomada sobre todo u entre u_{l} y u_{r}:*

$$\big\| u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \big\|_{L^1} \leqslant t \, \|f-g\|_{\mathrm{Lip}} \, |u_{\mathrm{l}} - u_{\mathrm{r}}|.$$

La demostración del Lema 3.6 requiere del siguiente lema.

Lema 3.7 (Crandall-Tartar)**.** *Sea $D \subset L^1(\Omega)$, donde Ω es un espacio medible. Sean ϕ y $\psi \in D$, entonces también $\phi \vee \psi := \max\{\phi,\psi\} \in D$. Además se supone que existe una aplicación $T : D \to L^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega T(\phi) = \int_\Omega \phi, \quad \phi \in D.$$

Entonces los siguientes enunciados, válidos para todo $\phi, \psi \in D$, son equivalentes:

(i) $\phi \leqslant \psi \Longrightarrow T(\phi) \leqslant T(\psi)$,

(ii) $\displaystyle\int_\Omega \big(T(\phi) - T(\psi)\big)^+ \leqslant \int_\Omega (\phi - \psi)^+$, $\phi^+ := \phi \vee 0$,

(iii) $\displaystyle\int_\Omega \big|T(\phi) - T(\psi)\big| \leqslant \int_\Omega |\phi - \psi|$.

Demostración del Lema 3.7. Supongamos que (i) es válido. Entonces

$$T(\phi \vee \psi) - T(\phi) \geqslant 0$$

y por lo tanto

$$T(\phi) - T(\psi) \leqslant T(\phi \vee \psi) - T(\psi).$$

Integrando, se tiene que

$$\int_\Omega \big(T(\phi) - T(\psi)\big)^+ \leqslant \int_\Omega \big(T(\phi \vee \psi) - T(\psi)\big) = \int_\Omega (\phi \vee \psi - \psi) = \int_\Omega (\phi - \psi)^+,$$

lo que implica (ii). Luego, de (ii) obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big|T(\phi) - T(\psi)\big| &= \int_\Omega \big(T(\phi) - T(\psi)\big)^+ + \int_\Omega \big(T(\psi) - T(\phi)\big)^+ \\ &\leqslant \int_\Omega (\phi - \psi)^+ + \int_\Omega (\psi - \phi)^+ = \int_\Omega |\phi - \psi|,\end{aligned}$$

es decir, (iii). Falta demostrar que (iii) implica (i). Para tal efecto, sea $\phi \leqslant \psi$. En virtud de $x^+ = (|x| + x)/2$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big(T(\phi) - T(\psi)\big)^+ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \big|T(\phi) - T(\psi)\big| + \frac{1}{2} \int_\Omega \big(T(\phi) - T(\psi)\big) \\ &\leqslant \frac{1}{2} \int_\Omega |\phi - \psi| + \frac{1}{2} \int_\Omega (\phi - \psi) = 0,\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración del Lema 3.7. ∎

Demostración del Lema 3.6. Supongamos que $u_{\mathrm{l}} \leqslant u_{\mathrm{r}}$ (el caso opuesto puede ser tratado analogamente). Discutimos primero el caso que ambas funciones f y g son convexas. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que f y g tienen las mismas puntas $u_{\mathrm{l}} = w_1 < w_2 \ldots < w_n = u_{\mathrm{r}}$, además definimos las velocidades

$$s_j := f'|_{(w_j, w_{j+1})}, \quad \tilde{s}_j := g'|_{(w_j, w_{j+1})}.$$

Entonces

$$\int_{u_{\mathrm{l}}}^{u_{\mathrm{r}}} \big|f'(u) - g'(u)\big| \,\mathrm{d}u = \sum_{j=1}^{n-1} |s_j - \tilde{s}_j|(w_{j+1} - w_j).$$

Sea σ_j una ordenamiento (es decir, $\sigma_j < \sigma_{j+1}$) de todas las velocidades $\{s_j, \tilde{s}_j\}$. Entonces podemos escribir

$$u(x,t)|_{x \in (\sigma_j t, \sigma_{j+1} t)} = u_{j+1}, \quad v(x,t)|_{x \in (\sigma_j t, \sigma_{j+1} t)} = v_{j+1},$$

donde u_{j+1} y v_{j+1} pertencen al conjunto de las puntas posibles $\{w_1, \ldots, w_n\}$ y $u_j < u_{j+1}$, $v_j < v_{j+1}$. Por lo tanto,

$$\big\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\big\|_1 = t \sum_{j=1}^{m} |u_{j+1} - v_{j+1}|(\sigma_{j+1} - \sigma_j).$$

Utilizando la notación del corchete de Iverson

$$[P] = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ es verdadero,} \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1} |s_j - \tilde{s}_j|(w_{j+1} - w_j) &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{m}(\sigma_{k+1} - \sigma_k)(w_{j+1} - w_j)[\sigma_{k+1}, \sigma_k \in \mathcal{I}(s_j, \tilde{s}_j)] \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{m}(\sigma_{k+1} - \sigma_k)(w_{j+1} - w_j)[w_{j+1}, w_j \in \mathcal{I}(u_{k+1}, v_{k+1})] \quad (3.35)\\
&= \sum_{k=1}^{m} |u_{k+1} - v_{k+1}|(\sigma_{k+1} - \sigma_k).
\end{aligned}$$

(La desigualdad (3.35) afirma simplemente que

$$\int_{u_1}^{u_2} \bigl|F(u) - G(u)\bigr| \, \mathrm{d}u = \text{área entre } F \text{ y } G = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \bigl|F^{-1}(\xi) - G^{-1}(\xi)\bigr| \, \mathrm{d}\xi,$$

donde $F, G : [u_1, u_2] \to [\xi_1, \xi_2]$ son dos funciones no decrecientes tales que $F(u_j) = G(u_j) = \xi_j$ para $j = 1, 2$. En el caso presente, las funciones F y G son constantes a trozos con un número finito de saltos.) En virtud de lo anterior,

$$\bigl\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\bigr\|_{L^1} = t \int_{u_\mathrm{l}}^{u_\mathrm{r}} \bigl|f'(u) - g'(u)\bigr| \, \mathrm{d}u \leqslant t \, \|f - g\|_{\mathrm{Lip}} \, |u_\mathrm{l} - u_\mathrm{r}|. \tag{3.36}$$

El tratamiento del caso que f y g no necesariamente son convexas es más complicado. Demostramos ahora que

$$\int_{u_\mathrm{l}}^{u_\mathrm{r}} \bigl|\check{f}'(u) - \check{g}'(u)\bigr| \, \mathrm{d}u \leqslant \int_{u_\mathrm{l}}^{u_\mathrm{r}} \bigl|f'(u) - g'(u)\bigr| \, \mathrm{d}u, \tag{3.37}$$

donde las envolturas $\check{f}$ y $\check{g}$ se definen sobre el intervalo $[u_\mathrm{l}, u_\mathrm{r}]$. La desigualdad (3.37) conjuntamente con (3.36) implica el lema. Para la continuación de la demostración del Lema 3.6 utilizaremos el Lema 3.7 de la siguiente manera. Sea D el conjunto de las funciones constantes por trozos sobre $[u_\mathrm{l}, u_\mathrm{r}]$. Para cada función continua y lineal por trozos f tenemos que $f' \in D$, y sea $T(f') := (\check{f})'$. Entonces

$$\int_{u_\mathrm{l}}^{u_\mathrm{r}} T(f') \, \mathrm{d}u = \int_{u_\mathrm{l}}^{u_\mathrm{r}} (\check{f})' \, \mathrm{d}u = \check{f}(u_\mathrm{r}) - \check{f}(u_\mathrm{l}) = f(u_\mathrm{r}) - f(u_\mathrm{l}) = \int_{u_\mathrm{l}}^{u_\mathrm{r}} f'(u) \, \mathrm{d}u.$$

Para demostrar que (3.37) es válido es suficiente demostrar que la condición (i) está satisfecha, es decir, $f' \leqslant g' \Rightarrow T(f') \leqslant T(g')$ para otra función de flujo g continua y lineal por trozos. Supongamos que lo contrario es válido, es decir $(\check{f})'(u) > (\check{g})'(u)$ para algún $u \in (u_\mathrm{l}, u_\mathrm{r})$. Recordemos que ambas funciones $(\check{f})'$ y $(\check{g})'$ son constantes a trozos, por lo tanto definimos

$$u_1 := \inf_u (\check{f})'(u) > (\check{g})'(u), \quad u_2 := \sup_u (\check{f})'(u) > (\check{g})'(u).$$

Se tiene que $(\check{f})'(u_1^-) \leqslant (\check{f})'(u_1^+) > (\check{g})'(u_1^+)$, y como u_1 es el menor valor que satisface esto, se debe tener $(\check{f})'(u_1^-) < (\check{f})'(u_1^+)$, por lo tanto $f(u_1) = \check{f}(u_1)$. Análogamente deducimos que

$g(u_2) = \breve{g}(u_2)$. Utilizando esto obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{u_1}^{u_2} f'(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{u_1}^{u_2} g'(u)\,\mathrm{d}u = g(u_2) - g(u_1) \leqslant \breve{g}(u_2) - \breve{g}(u_1) = \int_{u_1}^{u_2} (\breve{g})'(u)\,\mathrm{d}u \\ < \int_{u_1}^{u_2} (\check{f})'(u)\,\mathrm{d}u = \check{f}(u_2) - \check{f}(u_1) \leqslant f(u_2) - f(u_1) = \int_{u_1}^{u_2} f'(u)\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

una contradicción. Concluimos que (3.37) es válida, luego a partir de (3.36),

$$\int_{\mathbb{R}} \bigl|u(x,t) - v(x,t)\bigr|\,\mathrm{d}x \leqslant t \int_{u_\mathrm{l}}^{u_\mathrm{r}} \bigl|f'(u) - g'(u)\bigr|\,\mathrm{d}u \leqslant t\,\|f-g\|_{\mathrm{Lip}}\,|u_\mathrm{r} - u_\mathrm{l}|.$$

■

Ahora sea $u_0(x)$ una función arbitraria y constante por trozos con un número finito de discontinuidades, y sean u y v ambas soluciones de (3.34), pero con

$$u(x,0) = v(x,0) = u_0(x).$$

En este caso, en virtud del Lema 3.6 aplicado a cada uno de los saltos del dato inicial, obtenemos que la siguiente desigualdad es válida para todo t hasta la primera colisión:

$$\bigl\|u(t) - v(t)\bigr\|_{L^1} \leqslant t\,\|f-g\|_{\mathrm{Lip}}\,\mathrm{TV}(u_0).$$

Esta desigualdad es válida hasta la primera interacción de u o v. Sea t_1 este primer tiempo de interacción y w la solución débil, construido por front tracking, del problema

$$w_t + f(w)_x = 0, \quad w(x,t_1) = v(x,t_1).$$

Entonces, si t_2 es el tiempo de la interacción siguiente, sabemos que para todo $t \in (t_1, t_2)$,

$$\begin{aligned}\bigl\|u(t) - v(t)\bigr\|_1 &\leqslant \bigl\|u(t) - w(t)\bigr\|_{L^1} + \bigl\|w(t) - v(t)\bigr\|_{L^1} \\ &\leqslant \bigl\|u(t_1) - v(t_1)\bigr\|_{L^1} + (t - t_1)\,\|f-g\|_{\mathrm{Lip}}\,\mathrm{TV}(v(t_1)).\end{aligned} \tag{3.38}$$

Ahora sabemos que

$$\bigl\|u(t_1) - w(t_1)\bigr\|_{L^1} = \bigl\|u(t_1) - v(t_1)\bigr\|_{L^1} \leqslant t_1\,\|f-g\|_{\mathrm{Lip}}\,\mathrm{TV}(u_0). \tag{3.39}$$

De acuerdo al Corolario 3.2, las soluciones generadas por front tracking tienen la característica de que la variación total de la función inicial, $\mathrm{TV}(u_0)$, es mayor o igual que la variación total $\mathrm{TV}(u(\cdot,t))$ de la solución generada por front tracking en el tiempo t. Esto es válido porque la solución del problema de Riemann generado por la interacción de dos frentes siempre es una función monótona, y no se introducen extremas nuevos. Usando esto e insertando (3.39) en (3.38), resulta que

$$\bigl\|u(t) - v(t)\bigr\|_{L^1} \leqslant t\,\|f-g\|_{\mathrm{Lip}}\,\mathrm{TV}(u_0). \tag{3.40}$$

Esto es válido primero sobre un intervalo (t_1, t_2); sin embargo, podemos extender este argumento a todos los tiempos de colisión t_i. Por lo tanto, (3.40) es válido para todo $t > 0$.

Podemos demostrar ahora la convergencia de la aproximación de front tracking cuando la función de flujo lineal a trozos y el dato inicial constante a trozos convergen. Sea entonces $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$ una función acotada tal que $u_0(x) \in [-M, M]$ para alguna constante

$M > 0$. Sean $\delta_n := M/2^n$ y $u_{j,n} := j\delta_n$ para $j = -2^n, \dots, 2^n$. Sea f dos veces continuamente diferenciable a trozos y el interpolante lineal a trozos de f definido por

$$f_n(u) = f(u_{j,n}) + \frac{u - u_{j,n}}{\delta_n}\bigl(f(u_{j+1,n}) - f(u_{j,n})\bigr) \quad \text{para } u \in (u_{j,n}, u_{j+1,n}]. \tag{3.41}$$

Se supone que que los posibles puntos en los que f no es dos veces continuamente diferenciable es contenido en los puntos $u_{j,n}$ para n suficientemente grande. Se define, además, el dato inicial aproximado $u_{0,n}$ como función constante a trozos que asume valores en el conjunto $\{u_{j,n}\}_{j=-2^n,\dots,2^n}$ tal que $\|u_{0,n} - u_0\|_{L^1} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Sea ahora u_n la solución de front tracking del problema

$$(u_n)_t + f_n(u_n)_x = 0, \quad u_n(x,0) = u_{0,n}(x).$$

Demostraremos que $\{u_n(\cdot,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\mathbb{R})$. Para tal efecto sea $n_2 > n_1$, y sea w la solución de

$$w_t + f_{n_2}(w)_x = 0, \quad w(x,0) = u_{0,n_1}(x),$$

luego

$$\begin{aligned} \bigl\|u_{n_2}(\cdot,t) - u_{n_1}(\cdot,t)\bigr\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leqslant \bigl\|u_{n_2}(\cdot,t) - w(\cdot,t)\bigr\|_{L^1(\mathbb{R})} + \bigl\|w(\cdot,t) - u_{n_1}(\cdot,t)\bigr\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leqslant \|u_{0,n_2} - u_{0,n_1}\|_{L^1(\mathbb{R})} + t\mathrm{TV}(u_0)\|f_{n_1} - f_{n_2}\|_{\mathrm{Lip}(-M,M)}. \end{aligned}$$

Se puede demostrar (Tarea) que existe una constante C tal que

$$\|f_{n_1} - f_{n_2}\|_{\mathrm{Lip}(-M,M)} \leqslant C\delta_{n_1}\|f''\|_{L^\infty(-M,M)}.$$

Utilizando esto resulta que $\{u_n(\cdot,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ efectivamente es una sucesión de Cauchy, la cual converge en $L^1(\mathbb{R})$ a alguna función $u(\cdot,t)$. De acuerdo al Corolario 3.2, se tiene, además, que para $s \leqslant t$,

$$\bigl\|u_n(\cdot,t) - u_n(\cdot,s)\bigr\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|f_n\|_{\mathrm{Lip}}\,\mathrm{TV}(u_0)(t-s).$$

Como

$$\|f_n\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \|f_n - f_m\|_{\mathrm{Lip}} + \|f_m\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \delta_m\|f''\|_{L^\infty} + \|f_m\|_{\mathrm{Lip}},$$

obtenemos que el límite u pertence a $C([0,\infty); L^1(\mathbb{R}))$.

Queda por demostrar que u es una solución de entropía. Para tal efecto, sea η una entropía convexa y

$$q_n := \int^u f_n'\eta'\,\mathrm{d}u$$

el flujo de entropía correspondiente. Como u_n es la solución de entropía única que asume el dato inicial $u_{0,n}$,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \bigl(\eta(u_n)\varphi_t + q_n(u_n)\varphi_x\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_{0,n})\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Como $u_n \to u$ y $q_n(u) \to q(u)$ en $C(-M,M)$, se tiene que $\eta(u_n) \to \eta(u)$, $q_n(u_n) \to q(u)$, y $\eta(u_{0,n}) \to \eta(u_0)$ en L^1, es decir el límite u efectivamente es la solución de entropía única.

Si v_n es la solución obtenida por front tracking del problema

$$(v_n)_t + g_n(v_n)_x = 0, \quad v_n(x,0) = v_{0,n}(x),$$

donde g_n es una aproximación lineal a trozos de la función $g \in C^2$, entonces podemos acotar la diferencia entre u_n y v_n como sigue. Sea w la solución del problema de valores iniciales

$$w_t + f_n(w)_x = 0, \quad w(x,0) = v_{0,n}(x).$$

Entonces, combinando el Teorema 3.2 y (3.40), obtenemos

$$\begin{aligned}\big\|u_n(\cdot,t) - v_n(\cdot,t)\big\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leqslant \big\|u_n(\cdot,t) - w(\cdot,t)\big\|_{L^1(\mathbb{R})} + \big\|w(\cdot,t) - v_n(\cdot,t)\big\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leqslant \|u_{0,n} - v_{0,n}\|_{L^1(\mathbb{R})} + t\,\|f_n - g_n\|_{\mathrm{Lip}} \operatorname{TV}(v_0).\end{aligned}$$

Intercambiando los roles de f y g y de $u_{0,n}$ y $v_{0,n}$ en la definición de w, obtenemos

$$\big\|u_n(\cdot,t) - v_n(\cdot,t)\big\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|u_{0,n} - v_{0,n}\|_{L^1(\mathbb{R})} + t\,\|f_n - g_n\|_{\mathrm{Lip}} \operatorname{mín}\big\{\operatorname{TV}(u_0), \operatorname{TV}(v_0)\big\}.$$

Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Sea $u_0 \in L^1 \cap BV$ y sea $f(u)$ una función dos veces continuamente diferenciable a trozos. Entonces el problema de valores iniciales*

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{3.42}$$

tiene una solución débil única $u = u(x,t)$ que satisface también la condición de entropía de Kružkov (3.28). *Ademas, si v_0 es otra función que pertenece a $L^1 \cap BV$, si $g(v)$ es dos veces continuamente diferenciable a trozos y v es la única solución débil de entropía del problema*

$$v_t + g(v)_x = 0, \quad v(x,0) = v_0(x),$$

sabemos que

$$\big\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\big\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R})} + t \operatorname{mín}\big\{\operatorname{TV}(u_0), \operatorname{TV}(v_0)\big\}\,\|f - g\|_{\mathrm{Lip}}\,. \tag{3.43}$$

Concluimos este capítulo con el siguiente teorema, el cual resume varias propiedades de soluciones de entropía de una ley de conservación.

Teorema 3.4. *Sea u_0 una función integrable de variación acotada, y sea $f(u)$ una función Lipschitz continua. Entonces la única solución débil de entropía $u = u(x,t)$ del problema de valores iniciales*

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

tiene las siguientes propiedades para todo $t \in [0,\infty)$:

(i) *El* principio del máximo*:* $\|u(\cdot,t)\|_\infty \leqslant \|u_0\|_\infty$.
(ii) *La* propiedad TVD (total variation diminishing)*:* $\operatorname{TV}(u(\cdot,t)) \leqslant \operatorname{TV}(u_0)$.
(iii) *La* L^1-contracción*: si $v_0 \in BV \cap L^1$ y $v = v(x,t)$ es la solución de entropía con el dato inicial v_0, entonces*

$$\big\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\big\|_1 \leqslant \|u_0 - v_0\|_1.$$

(iv) *La* conservación de la monotonía*: si u_0 es una función monótona, la función $u(\cdot,t)$ es monótona en el mismo sentido.*
(v) *La* monotonía*: sean $v_0 \in BV \cap L^1$ y $v = v(x,t)$ la solución de entropía con el dato inicial v_0. Entonces*

$$u_0 \leqslant v_0 \Longrightarrow u(\cdot,t) \leqslant v(\cdot,t).$$

(vi) *La* Lipschitz continuidad con respecto a t:

$$\forall s,t \in [0,\infty): \quad \big\|u(\cdot,t)-u(\cdot,s)\big\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{\mathrm{Lip}}\,\mathrm{TV}(u_0)|t-s|.$$

Demostración. Del análisis de los problemas de Riemann individuales proviene que (i) y (iv) son válidas para las aproximaciones de front tracking, y por lo tanto siguen válidas para la función límite. La monotonía (v) es una consecuencia del Lema 3.7 si usamos $u_0 \mapsto u(x,t)$ como operador T y tomamos en cuenta la L^1-contracción. La propiedad TVD sigue del Teorema 3.3 si definimos $g=f$, $v_0=u_0(\cdot+h)$ y tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned}\mathrm{TV}\big(u(\cdot,t)\big) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\big|u(x+h,t)-u(x,t)\big|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\big|u_0(x+h)-u_0(x)\big|\mathrm{d}x=\mathrm{TV}(u_0).\end{aligned}$$

La L^1-contracción es un caso especial de (3.43). Finalmente, para demostrar (vi), consideremos primeramente que debido a la invarianza respecto de traslación en el tiempo es suficiente demostrar el resultado para $s=0$, es decir

$$\big\|u(\cdot,t)-u_0\big\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant t\,\|f\|_{\mathrm{Lip}}\,\mathrm{TV}(u_0) \quad \text{para todo } t\in[0,\infty)$$

Sea $u_{0,n}$ una aproximación constante a trozos de u_0 y f_n una aproximación poligonal de f. Entonces el Corolario 3.2 implica que

$$\big\|u_n(\cdot,t)-u_{0,n}\big\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant t\,\|f_n\|_{\mathrm{Lip}}\,\mathrm{TV}(u_{0,n}) \quad \text{para todo } t\in[0,\infty) \tag{3.44}$$

A partir del Teorema 3.3 sabemos que $u_n(t)$ converge a $u(t)$, la solución de (3.42). Tomando el límite en (3.44) obtenemos el resultado. ■

Ejemplo 3.2 (Examen curso leyes de conservación, Escuela de Primavera 2014 (EPANUM 2014))**.** *Se considera el problema de valores iniciales para una ley de conservación*

$$u_t+f(u)_x=0, \quad x\in\mathbb{R}, \quad t>0, \tag{3.45}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}, \tag{3.46}$$

donde f es la función continua y lineal a trozos dada por

$$f(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}u & \text{para } 0\leqslant u<1,\\[2mm] \dfrac{3}{2}u-1 & \text{para } 1\leqslant u<2,\\[2mm] \dfrac{5}{2}u-3 & \text{para } 2\leqslant u\leqslant 3\end{cases}$$

(ver Figura 3.5 (a)), y la función u_0 viene dada por

$$u_0(x)=\begin{cases}0 & \text{para } x\leqslant 0,\\ 3 & \text{para } 0<x\leqslant 1,\\ 0 & \text{para } x>1.\end{cases}$$

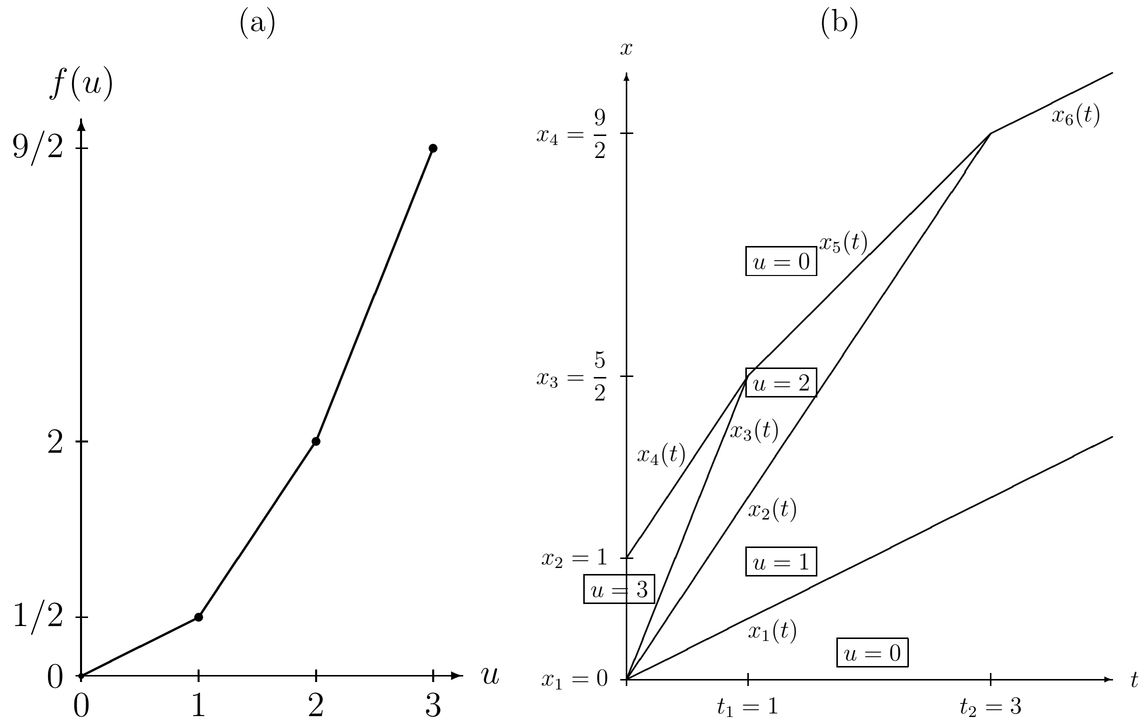


FIGURA 3.5. Ejemplo 3.2: (a) grafo de f, (b) solución global del problema.

Calcular la única solución de entropía de (3.45), (3.46) *mediante el método de Front Tracking.*

Solución sugerida. *El dato inicial consiste en dos problemas de Riemann, puestos en* $x_1 = 0$ *y* $x_2 = 1$ *al instante* $t = 0$.

1.) *El problema de Riemann definido en* $x_1 = 0$ *al instante* $t = 0$ *tiene los estados a izquierda y derecha dados por* $u_{\mathrm{L}} = 0$ *y* $u_{\mathrm{R}} = 3$, *repectivamente. Como* $u_{\mathrm{L}} < u_{\mathrm{R}}$, *la solución procede por la construcción de la envoltura convexa inferior de* f *entre* u_{L} *y* u_{R}. *Obtenemos para* x *cerca de* x_1, *y* $t > 0$ *suficientemente pequeño, la siguiente solución:*

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_1(t) := x_1 + s_1 t, \\ 1 & \text{para } x_1(t) \leqslant x < x_2(t) := x_1 + s_2 t, \\ 2 & \text{para } x_2(t) \leqslant x < x_3(t) := x_1 + s_3 t, \\ 3 & \text{para } x \geqslant x_3(t), \end{cases} \tag{3.47}$$

donde

$$s_1 = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{3}{2}, \quad s_3 = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{5}{2}.$$

2.) *A su vez, el problema de Riemann definido en* $x_2 = 1$ *al instante* $t = 0$ *tiene los estados a izquierda y derecha dados por* $u_{\mathrm{L}} = 3$ *y* $u_{\mathrm{R}} = 0$, *repectivamente. Como* $u_{\mathrm{L}} > u_{\mathrm{R}}$, *la* *solución procede por la construcción de la envoltura concava superior de* f *entre* u_{R} *y* u_{L}*. Obtenemos para* x *cerca de* x_2*, y* $t > 0$ *suficientemente pequeño, la siguiente solución:*

$$u(x,t) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < x_4(t) := x_2 + s_4 t, \\ 0 & \text{para } x \geqslant x_4(t), \end{cases}$$

donde

$$s_4 = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{3}{2}.$$

3.) *Observamos que los frentes* $x_3(t)$ *y* $x_4(t)$ *producen la primera colisión. Esta se realiza al instante obtenido resolviendo* $x_1 + s_3 t = x_2 + s_4 t$*, es decir para*

$$t = t_1 := \frac{x_2 - x_1}{s_3 - s_4} = \frac{1 - 0}{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}} = 1;$$

el lugar de la colisión es

$$x = x_3 := x_1 + s_3 t = \frac{5}{2}.$$

4.) *Concluimos que en* $x_3 = \frac{5}{2}$ *al instante* $t = t_1 = 1$ *se produce un nuevo problema de Riemann con los estados a izquierda y derecha dados por* $u_{\mathrm{L}} = 2$ *y* $u_{\mathrm{R}} = 0$*, repectivamente. Como* $u_{\mathrm{L}} > u_{\mathrm{R}}$*, la solución procede por la construcción de la envoltura concava superior de* f *entre* u_{R} *y* u_{L}*. Obtenemos para* x *cerca de* x_3*, y* $t > t_1$ *suficientemente pequeño, la siguiente solución:*

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{para } x < x_5(t) := x_3 + s_5(t - t_1), \\ 0 & \text{para } x \geqslant x_5(t), \end{cases}$$

donde

$$s_5 = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 1.$$

5.) *Observamos que los frentes* $x_5(t)$ *y* $x_2(t)$ *producen la segunda colisión. Esta se realiza al instante obtenido resolviendo* $x_1 + s_2 t = x_3 + s_5(t - t_1)$*, es decir para*

$$t = t_2 := \frac{x_3 - x_1 - s_5 t_1}{s_2 - s_5} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 3;$$

el lugar de la colisión es

$$x = x_4 := x_1 + s_2 t_2 = \frac{9}{2}.$$

6.) *Concluimos que en* $x_4 = \frac{9}{2}$ *al instante* $t = t_2 = 3$ *se produce un nuevo problema de Riemann con los estados a izquierda y derecha dados por* $u_{\mathrm{L}} = 1$ *y* $u_{\mathrm{R}} = 0$*, repectivamente. Como hay sólo un segmento lineal de* f *entre* u_{L} *y* u_{R}*, la solución para* x *cerca de* x_4*, y* $t > t_2$ *suficientemente pequeño es la siguiente:*

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < x_6(t) := x_4 + s_6(t - t_2), \\ 0 & \text{para } x \geqslant x_6(t), \end{cases} \tag{3.48}$$

donde

$$s_6 = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

7.) *Observamos que los frentes* $x_6(t)$ *y* $x_1(t)$ *son paralelos, por lo tanto no sucede ninguna otra colisón. Resumiendo las soluciones* (3.47)–(3.48) *para los problemas de Riemann individuales, obtenemos la siguiente solución global (ver Figura 3.5 (b)):*

$$\text{Para } 0 \leqslant t < t_1\text{:} \quad u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_1(t), \\ 1 & \text{para } x_1(t) \leqslant x < x_2(t), \\ 2 & \text{para } x_2(t) \leqslant x < x_3(t), \\ 3 & \text{para } x_3(t) \leqslant x < x_4(t), \\ 0 & \text{para } x \geqslant x_4(t); \end{cases}$$

$$\text{para } t_1 \leqslant t < t_2\text{:} \quad u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_1(t), \\ 1 & \text{para } x_1(t) \leqslant x < x_2(t), \\ 2 & \text{para } x_2(t) \leqslant x < x_5(t), \\ 0 & \text{para } x \geqslant x_5(t); \end{cases}$$

$$\text{para } t \geqslant t_2\text{:} \quad u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_1(t), \\ 1 & \text{para } x_1(t) \leqslant x < x_6(t), \\ 0 & \text{para } x \geqslant x_6(t). \end{cases}$$

Esta función es la única solución de entropía del problema de acuerdo al Corolario 3.1 y el Teorema 3.2 de los apuntes.

Ejemplo 3.3 (Evaluación 1, Curso 2020)**.** *Se consideran las funciones continua y lineal por trozos y constante por trozos, respectivamente,*

$$f(u) = \begin{cases} 3u & \text{si } 0 \leqslant u \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ u + \dfrac{1}{2} & \text{si } \dfrac{1}{4} \leqslant u < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{3}{2} - u & \text{si } \dfrac{1}{2} \leqslant u < \dfrac{3}{4}, \\ 3 - 3u & \text{si } \dfrac{3}{4} \leqslant u \leqslant 1, \end{cases} \qquad u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x \leqslant 2, \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases} \tag{3.49}$$

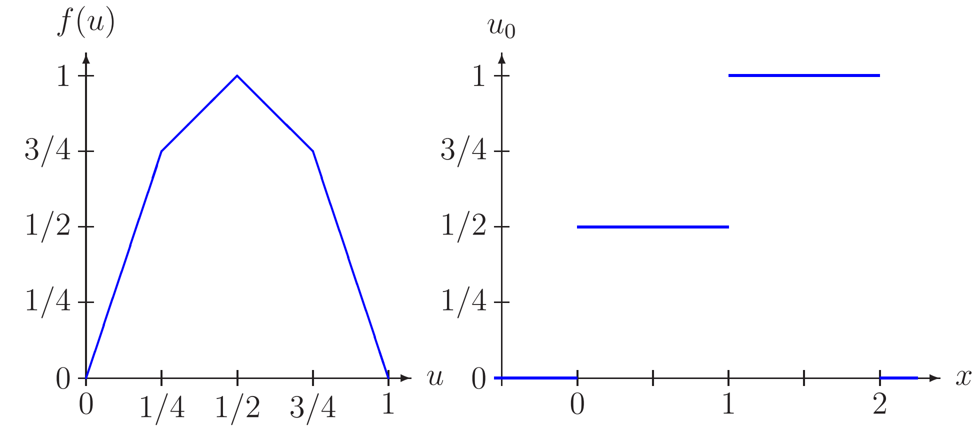


Figura 3.6. Funciones f y u_0 dadas por (3.49).

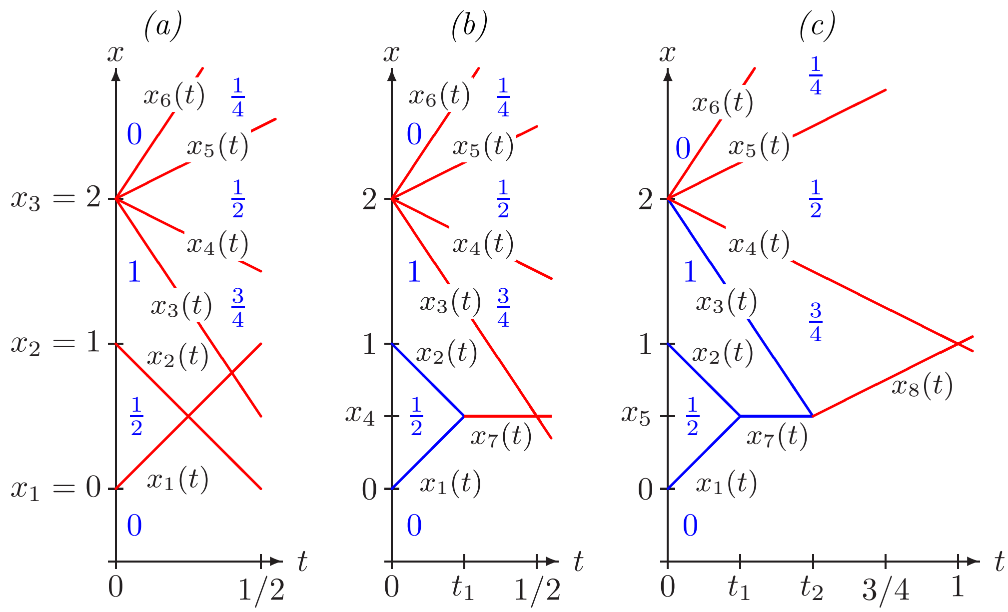


Figura 3.7. Construcción de la solución de entropía del problema (3.49), (3.50): (a) solución de los problemas de Riemann iniciales, (b) detección de la primera colisión y solución del problema de Riemann en torno a (t_1, x_4), (c) detección de la segunda colisión y solución del problema de Riemann en torno a (t_2, x_5). Aquí y en las Figuras 3.8 y 3.9 se dibujan en rojo los frentes que aún pueden colisionar con otros, y en azul los frentes que ya son parte de la solución definitiva del problema.

Mediante el método del Front Tracking, determinar la solución de entropía de

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.50}$$

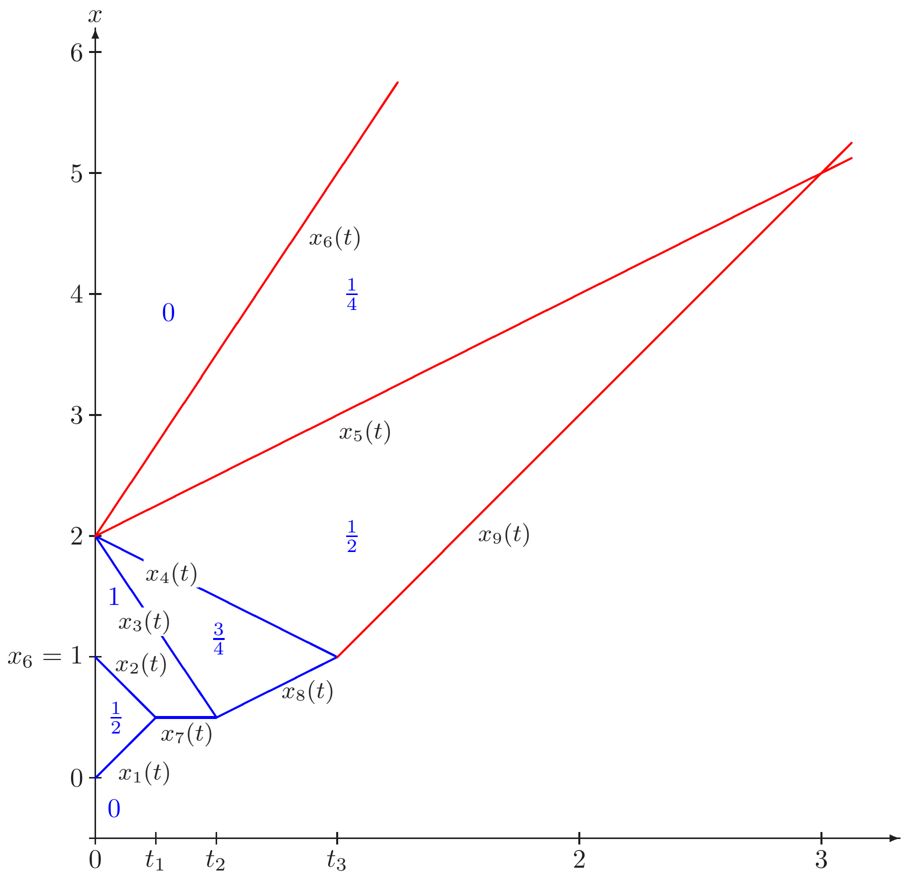


FIGURA 3.8. Construcción de la solución de entropía del problema (3.49), (3.50) (continuación): detección de la tercera colisión y solución del problema de Riemann en torno a (t_3, x_6).

Solución sugerida. *La Figura 3.6 muestra las funciones f y u_0 dadas por* (3.49). *Observamos que la función u_0 asume sus valores de constancia en las puntas de f, asi que reconfirmamos que efectivamente f es una función continua y lineal a trozos; además, u_0 asume valores en las puntas de f así que podemos aplicar el método de front tracking. La construcción consiste en los siguientes pasos.*

1.) *Empezamos resolviendo los problemas de Riemann iniciales. El problema puesto en $x_1 = 0$ tiene como estados a izquierda y a derecha $u_{\mathrm{l}} = 0$ y $u_{\mathrm{r}} = 1/2$. Como $u_{\mathrm{r}} > u_{\mathrm{l}}$, la solución de este problema de Riemann viene dada por la envoltura convexa inferior $\check{f}(u)$. El problema de Riemann se resuelve por una sóla discontinuidad, la cual se propaga con la velocidad*

$$s_1 := \frac{f(1/2) - f(0)}{1/2 - 0} = 2.$$

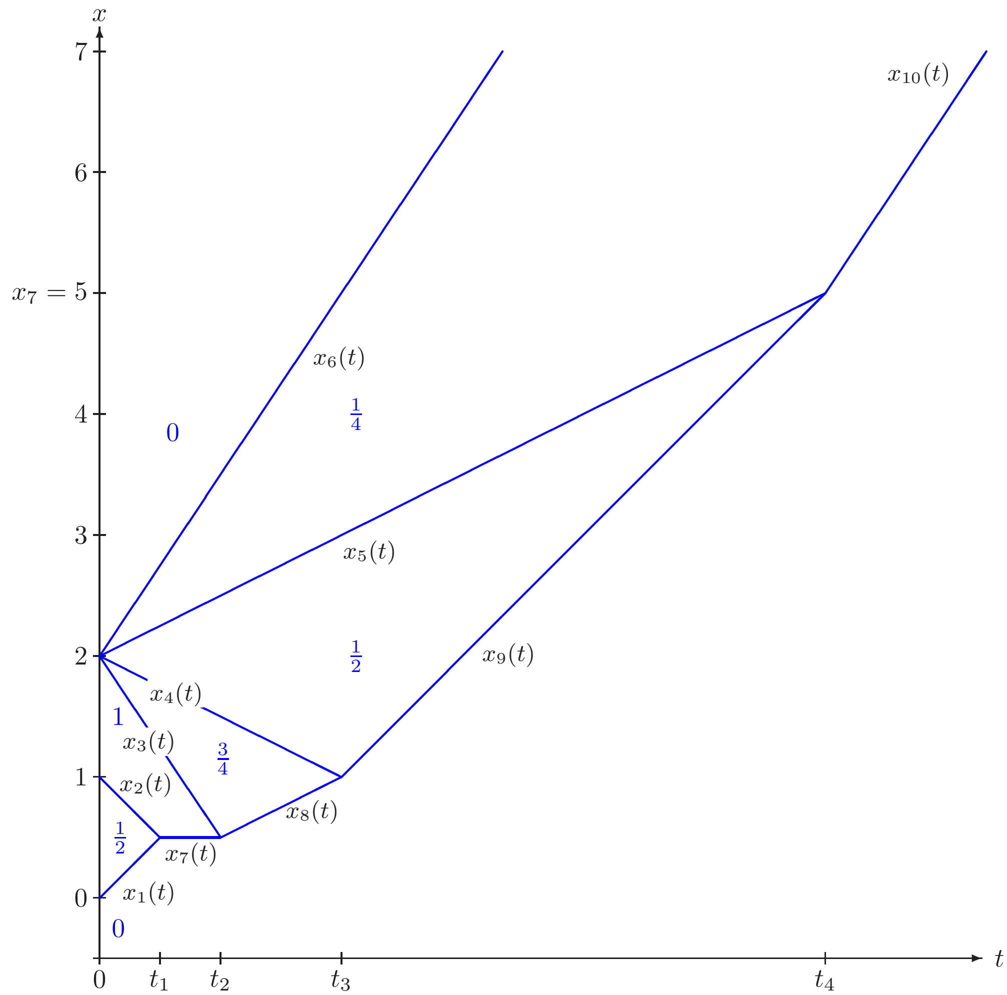


FIGURA 3.9. Construcción de la solución de entropía del problema (3.49), (3.50) (continuación y fin): detección de la cuarta colisión y solución del problema de Riemann en torno a (t_4, x_7) (solución final del problema).

Concluimos que para x cerca de x_1 y $t > 0$ suficientemente pequeño, la solución es dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_1(t) := s_1 t = 2t, \\ 1/2 & \text{para } x > x_1(t). \end{cases}$$

Un análisis similar puede ser aplicado al problema de Riemann inicial definido en $x_2 = 1$. Aquí $1/2 = u_{\mathrm{l}} < u_{\mathrm{r}} = 1$, así que nuevamente la construcción de la solución del problema de Riemann es a través de $\check{f}(u)$. El problema de Riemann se resuelve por una sóla discontinuidad, la cual se propaga con la velocidad

$$s_2 := \frac{f(1/2) - f(1)}{1/2 - 1} = -2.$$

Concluimos que para x cerca de x_2 y $t > 0$ suficientemente pequeño, la solución es dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} 1/2 & \text{para } x < x_2(t) := x_2 + s_2 t = 1 - 2t, \\ 1 & \text{para } x > x_2(t). \end{cases}$$

El problema de Riemann puesto en $x_3 := 2$ corresponde a $1 = u_\mathrm{l} > u_\mathrm{r} = 0$. Así, su solución involucra la envoltura concava superior $\hat{f}$, la cual coincide con f en este caso. De acuerdo a lo anterior, y considerando la definición de f, este problema de Riemann se resuelve por un abanico de cuatro discontinuidades que se propagan con las velocidades $s_3 = -3$, $s_4 = -1$, $s_5 = 1$, y $s_6 = 3$. Para x cerca de x_3 y $t > 0$ suficientemente pequeño, la solución es dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < x_3(t) := x_3 + s_3 t = 2 - 3t, \\ 3/4 & \text{para } x \in [x_3(t), x_4(t)),\ x_4(t) := x_3 + s_4 t = 2 - t, \\ 1/2 & \text{para } x \in [x_4(t), x_5(t)),\ x_5(t) := x_3 + s_5 t = 2 + t, \\ 1/4 & \text{para } x \in [x_5(t), x_6(t)),\ x_6(t) := x_3 + s_6 t = 2 + 3t, \\ 0 & \text{para } x \geqslant x_6(t). \end{cases}$$

La Figura 3.7 (a) muestra esta solución.

2. *Con todos los problemas de Riemann resueltos, detectamos cuando sucede la primera interacción. Esta ocurre cuando colisionan los frentes $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Esto sucede cuando $x_1 + s_1 t = x_2 + s_2 t$, es decir el instante t_1 y el lugar x_4 de esta colisión están dados por*

$$t = t_1 := \frac{x_2 - x_1}{s_1 - s_2} = \frac{1}{4}, \quad x_4 = x_1(t_1) = x_2(t_1) = \frac{1}{2}.$$

3. *La solución del problema de Riemann en torno a (x_4, t_1) corresponde a los estados $0 = u_\mathrm{l} < u_\mathrm{r} = 1$. La solución es una discontinuidad, denotada $x_7(t)$, que se propaga a la velocidad*

$$s_7 = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 0.$$

De acuerdo a lo anterior, cerca de x_4 y para $t - t_1$ pequeño pero positivo, la solución es dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_7(t) := x_4 + s_7 t = 1/2, \\ 1 & \text{para } x \geqslant x_7(t). \end{cases}$$

La Figura 3.7 (b) muestra esta solución.

4. *La próxima colisión ocurre cuando colisionan los frentes $x_7(t)$ y $x_3(t)$. Esto sucede cuando $x_4 = x_3 + s_3 t$, es decir el instante t_2 y el lugar x_5 de esta colisión están dados por*

$$t = t_2 := \frac{x_4 - x_3}{s_3 - s_4} = \frac{\frac{1}{2} - 2}{-3 - 0} = \frac{1}{2}, \quad x_5 = x_4 = x_3 + s_3 t_2 = \frac{1}{2}.$$

5. *La solución del problema de Riemann en torno a* (t_2, x_5) *corresponde a los estados* $0 = u_{\mathrm{l}} < u_{\mathrm{r}} = 3/4$*. La solución es una discontinuidad, denotada* $x_8(t)$*, que se propaga a la velocidad*
$$s_8 = \frac{f(3/4) - f(0)}{3/4 - 0} = 1.$$
De acuerdo a lo anterior, cerca de x_5 *y para* $t - t_2$ *pequeño pero positivo, la solución es dada por*
$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_8(t) := x_5 + s_8(t - t_2), \\ 3/4 & \text{para } x \geqslant x_8(t). \end{cases}$$
La Figura 3.7 (c) muestra esta solución.
6. *La próxima colisión ocurre cuando colisionan los frentes* $x_8(t)$ *y* $x_4(t)$*. Esto sucede cuando* $x_5 + s_8(t - t_2) = x_3 + s_4 t$*, es decir el instante* t_3 *y el lugar* x_6 *de esta colisión están dados por*
$$t = t_3 = \frac{x_5 - x_3 - t_2 s_8}{s_4 - s_8} = 1, \quad x_6 = x_4(t_3) = x_3 - t_2 = 1.$$
7. *La solución del problema de Riemann en torno a* (t_3, x_6) *corresponde a los estados* $0 = u_{\mathrm{l}} < u_{\mathrm{r}} = 1/2$*. La solución es una discontinuidad, denotada* $x_9(t)$*, que se propaga a la velocidad*
$$s_9 = \frac{f(1/2) - f(0)}{1/2 - 0} = 2.$$
De acuerdo a lo anterior, cerca de x_6 *y para* $t - t_3$ *pequeño pero positivo, la solución es dada por*
$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_9(t) := x_6 + s_9(t - t_3), \\ 1/2 & \text{para } x \geqslant x_9(t). \end{cases}$$
La Figura 3.8 muestra esta solución.
8. *La próxima colisión ocurre cuando colisionan los frentes* $x_9(t)$ *y* $x_5(t)$*. Esto sucede cuando* $x_6 + s_9(t - t_3) = x_3 + s_5 t$*, es decir el instante* t_4 *y el lugar* x_7 *de esta colisión están dados por*
$$t = t_4 = \frac{x_6 - x_3 - t_3 s_9}{s_5 - s_9} = 3, \quad x_7 = x_5(t_4) = 5.$$
9. *La solución del problema de Riemann en torno a* (t_4, x_9) *corresponde a los estados* $0 = u_{\mathrm{l}} < u_{\mathrm{r}} = 1/4$*. La solución es una discontinuidad, denotada* $x_{10}(t)$*, que se propaga a la velocidad* $s_{10} = 3$*. Dada que esta discontinuidad se propaga con la velocidad igual a* s_6*, vemos que la solución global para* $t \geqslant t_4$ *es dada por*
$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x > x_6(t) = 2 + 3t, \\ 1/4 & \text{para } x_{10}(t) = x_7 + s_{10}(t - t_3) = -4 + 3t < x \leqslant x_6(t), \\ 0 & \text{para } x \leqslant x_{10}(t). \end{cases}$$
No habrá más colisiones para $t > t_4$*. La Figura 3.9 muestra esta solución final.*

Observamos que para $t \geqslant t_4$,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(x_6(t) - u_{10}(t)) = \frac{3}{2} = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.5. Ejercicios

Problem 3.1 (Certamen 1, Curso 2012)**.** Se considera la función continua y lineal por trozos

$$f(u) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x-1)+\frac{1}{2} & \text{si } x \geqslant 1, \\ \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leqslant x < 1, \\ -\frac{1}{2}x & \text{si } -1 \leqslant x < 0, \\ -\frac{3}{2}(x+1)+\frac{1}{2} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

y la función constante por trozos

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ -1 & \text{si } 0 < x \leqslant 1, \\ 2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2, \\ -2 & \text{si } 2 < x < 3, \\ 0 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

Mediante el método del Front Tracking, determinar la solución de entropía de

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demostrar porqué la solución encontrada es la solución de entropía.

Problem 3.2 (Certamen 1, Curso 2012)**.** Se consideran las funciones

$$g(v) = \frac{1}{2}v^2, \quad u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -0{,}2, \\ -1 & \text{si } -0{,}2 < x \leqslant 1{,}2, \\ 2 & \text{si } 1{,}2 < x \leqslant 1{,}9, \\ -2 & \text{si } 1{,}9 < x < 3{,}1, \\ 0 & \text{si } x > 3{,}1. \end{cases}$$

a) Acotar $\|u(\cdot,1) - v(\cdot,1)\|_1$, donde u es la solución del problema anterior y v es la solución de entropía del problema $v_t + g(v)_x = 0$, $v(x,0) = v_0(x)$.

b) Se desea resolver mediante el método del Front Tracking el problema de valores iniciales

$$v_t + g(v)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad v(x,0) = v_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x < -1/2, \\ 2x & \text{para } -1/2 < x < 1/2, \\ 1 & \text{para } x > 1/2, \end{cases}$$

mediante una aproximación de g continua y lineal a trozos, y de v_0 conservativa y constante a trozos, ambas referidas a puntas $v_i = i\delta$, $\delta := 1/M(\delta)$, $i \in \mathbb{Z}$. ¿Cómo hay que elegir δ para asegurar que en $\|v(\cdot,1) - v^{\delta}(\cdot,1)\|_1 \leqslant 0{,}05$, donde v y v^{δ} son las soluciones de entropía exactas y obtenidas por FT, respectivamente?

c) ¿Cuántas interacciones de frentes puede haber a lo más para este valor de δ?

Problem 3.3 (Certamen 1, Curso 2012)**.** Se considera el problema de valores iniciales

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

para una función $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Demostrar por un ejemplo explícito que la solución de entropía este problema puede desarrollar discontinuidades después de un tiempo finito.

Problem 3.4. Se considera el problema de valores iniciales

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.51}$$

a) Sea $\eta(u) = \frac{1}{2}u^2$. Hallar el flujo de entropía correspondiente.
b) Eligiendo una función test $\psi = \psi(x,t)$ adecuada, demostrar que

$$\big\|u(\cdot,t)\big\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

c) Sea v otra solución de entropía acotada con el dato inicial v_0. Demostrar o refutar que

$$\big\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\big\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|u_0 - v_0\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

d) Demostrar que la solución de (3.51) con $u_0(x) = x^2$ para $x \geqslant 0$ está dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2t^2}\Big(1 + 2xt - \sqrt{1 + 4xt}\Big).$$

Capítulo 4

Métodos de diferencias finitas

4.1. Métodos conservativos

En este capítulo, trataremos exclusivamente métodos para ecuaciones escalares y espacialmente uni-dimensionales, y nos restringimos al problema de valores iniciales

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0. \tag{4.1}$$

Un método de diferencias finitas puede ser formulado si reemplazamos las derivadas parciales por diferencias finitas, por ejemplo,

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\Delta f(u)}{\Delta x} = 0, \quad \Delta t,\ \Delta x \text{ "pequeños"}. \tag{4.2}$$

Aquí definimos

$$\boldsymbol{u}^n := (u^n_{-K}, \dots, u^n_j, \dots, u^n_K),$$

donde u_j^n ahora es la aproximación numérica de la solución u de (4.1) en el punto $(j\Delta x, n\Delta t)$. En general, conocemos u_j^0 para $-K \leqslant j \leqslant K$, y queremos utilizar (4.2) para calcular $\boldsymbol{u}^n$ para $n \in \mathbb{N}$. No consideraremos condiciones de borde. En muchos casos, se usa la condición de periodicidad

$$u^0_{-K+j} = u^0_{K+j} \quad \text{para } 0 \leqslant j \leqslant 2K,$$

la cual implica que $u^n_{-K+j} = u^n_{K+j}$. Alternativamente, podemos considerar la condición $\partial f(u)/\partial x = 0$ en el borde del dominio computacional, lo cual implica

$$f\bigl(u^n_{-K-j}\bigr) = f\bigl(u^n_{-K}\bigr), \quad f\bigl(u^n_{K+j}\bigr) = f\bigl(u^n_K\bigr) \quad \text{para } j > 0.$$

Para ecuaciones no lineales los métodos explícitos del tipo

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}^n, \dots, \boldsymbol{u}^{n-l}) \tag{4.3}$$

son los más comunes.

Definición 4.1. *Se dice que el método* (4.3) *es* conservativo *o* posee forma de conservación *si para $\lambda := \Delta t/\Delta x$ se tiene que*

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= G\bigl(u^n_{j-1-p}, \dots, u^n_{j+q}\bigr) \\ &= u_j^n - \lambda\bigl[F\bigl(u^n_{j-p}, \dots, u^n_{j+q}\bigr) - F\bigl(u^n_{j-1-p}, \dots, u^n_{j-1+q}\bigr)\bigr]; \end{aligned} \tag{4.4}$$

la función F se llama (función de) flujo numérico*.*

También escribimos

$$G_j(\boldsymbol{u}) = G\bigl(u_{j-1-p}, \dots, u_{j+q}\bigr), \quad F_{j+1/2}(\boldsymbol{u}) = F\bigl(u_{j-p}, \dots, u_{j+q}\bigr),$$

lo que nos permite escribir (4.4) como

$$u_j^{n+1} = G_j(\boldsymbol{u}^n) = u_j^n - \lambda\bigl(F_{j+1/2}(\boldsymbol{u}^n) - F_{j-1/2}(\boldsymbol{u}^n)\bigr). \tag{4.5}$$

Esta ecuación puede formalmente ser explicada como sigue. Sean $x_j = j\Delta x$ y $x_{j+1/2} = x_j + \Delta x/2$ para $j \in \mathbb{Z}$, además sea $t_n = n\Delta t$ para $n \in \mathbb{N}_0$. Se define el intervalo $I_j := [x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ y la celda $I_j^n := I_j \times [t_n, t_{n+1})$. Integrando la ley de conservación $u_t + f(u)_x = 0$ sobre la celda I_j^n obtenemos

$$\int_{I_j} u(x, t_{n+1})\,\mathrm{d}x = \int_{I_j} u(x, t_n)\,\mathrm{d}x - \biggl(\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\bigl(u(x_{j+1/2}, t)\bigr)\,\mathrm{d}t - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\bigl(u(x_{j-1/2}, t)\bigr)\,\mathrm{d}t\biggr).$$

Definiendo u_j^n como el promedio de $u(x, t_n)$ en I_j, es decir

$$u_j^n := \frac{1}{\Delta x}\int_{I_j} u(x, t_n)\,\mathrm{d}x,$$

obtenemos la expresión exacta

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\biggl(\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\bigl(u(x_{j+1/2}, t)\bigr)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\bigl(u(x_{j-1/2}, t)\bigr)\,\mathrm{d}t\biggr).$$

Comparando esto con (4.5) vemos que es razonable que el flujo numérico $F_{j+1/2}$ aproxime el promedio del flujo a través del segmento recto $\{x_{j+1/2}\} \times [t_n, t_{n+1}]$, es decir

$$F_{j+1/2}(\boldsymbol{u}^n) \approx \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\bigl(u(x_{j+1/2}, t)\bigr)\,\mathrm{d}t.$$

Con esta interpretación de

$$F_{j+1/2}^n = F_{j+1/2}(\boldsymbol{u}^n),$$

la ecuación (4.5) expresa que el cambio del monto total de u en el interior del "volumen" I_j es (aproximadamente) igual al flujo de entrada menos el flujo de salida. Los métodos que pueden ser escritos en la forma (4.5) frecuentamente son llamados *métodos de volumenes finitos.*

Si $u(x, t_n)$ es la función constante a trozos definida por

$$u(x, t_n) = u_j^n \quad \text{para } x \in I_j,$$

podemos resolver la ley de conservacióm en forma exacta para

$$0 \leqslant t - t_n \leqslant \frac{\Delta x}{2\,\mathrm{máx}_u\,|f'(u)|},$$

ya que el dato inicial es una sucesión de problemas de Riemann cuyas respectivas soluciones no interactuarán durante este intervalo de tiempo pequeño. Tambien vemos que

$f(u(x_{j+1/2},t))$ es independiente de t, y depende solamente de u_j^n y u_{j+1}^n. Es decir, si definimos $v = w(x/t)$ como solución de entropía del problema de Riemann

$$v_t + f(v)_x = 0; \quad v(x,0) = \begin{cases} u_j^n & \text{para } x < 0, \\ u_{j+1}^n & \text{para } x > 0, \end{cases}$$

entonces

$$F_{j+1/2}^n = f\big(w(0)\big).$$

Este método se llama *método de Godunov*. Este método es bien definido bajo la condición CFL

$$\Delta t \max_u \big|f'(u)\big| \leqslant \Delta x. \tag{4.6}$$

Si $f'(u) \geqslant 0$ para todo u, entonces $v(0) = u_j^n$ y el método de Godunov se simplifica al *método upwind* dado por

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\big(f\big(u_j^n\big) - f\big(u_{j-1}^n\big)\big).$$

.

Los métodos en forma de conservación se denominan así porque poseen la siguiente *propiedad de conservación discreta*. Notamos primeramente que

$$\sum_{j=-K}^{K} u_j^{n+1} \Delta x = \sum_{j=-K}^{K} u_j^n \Delta x - \Delta t\big(F_{K+1/2}^n - F_{-K-1/2}^n\big).$$

Ahora si los valores iniciales discretos están dados por los promedios de celda

$$u_j^0 := \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} u_0(x)\,\mathrm{d}x,$$

y se supone por el momento que $F_{-K-1/2}^n = F_{K+1/2}^n$, entonces se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} u^n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

Un método conservativo se llama *consistente* si su flujo numérico posee la siguiente *propiedad de consistencia*:

$$F(u,\dots,u) = f(u),$$

además exigimos que F sea una función Lipschitz continua en todos sus argumentos, es decir debe existir una constante L tal que

$$\big|F(a_{j-p},\dots,a_{j+q}) - F(b_{j-p},\dots,b_{j+q})\big| \leqslant L \sum_{i=-p}^{q} |a_{j+i} - b_{j+i}|.$$

Ejemplo 4.1 (Discretizaciones no conservativas)**.** *Para subrayar la importancia del uso de métodos conservativos para la aproximación ilustramos las consecuencias del uso de métodos* no *conservativos. Para tal efecto consideremos la ecuación de Burgers, $u_t + f(u)_x = 0$ con $f(u) = u^2/2$, escrita en forma* no *conservativa como*

$$u_t + uu_x = 0.$$

Basados en la ecuación de transporte lineal (ver Sección 2.5), una discretización natural de esta ecuación es

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda u_j^n \bigl(u_j^n - u_{j-1}^n\bigr), \quad \lambda := \Delta t/\Delta x. \tag{4.7}$$

Como este método es basado en la formulación no conservativa, no esta asegurada la conservación de u (es de decir, de la masa total definida por la integral de u). Efectivamente, para este método calculamos

$$\begin{aligned}\Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j^{n+1} &= \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j^n - \lambda \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j^n \bigl(u_j^n - u_{j-1}^n\bigr) \\ &= \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j^n - \frac{\lambda \Delta x}{2} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Bigl(\bigl(u_j^n\bigr)^2 - \bigl(u_{j-1}^n\bigr)^2 + \bigl(u_j^n - u_{j-1}^n\bigr)^2\Bigr) \\ &= \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j^n - \frac{\lambda \Delta x}{2} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \bigl(u_j^n - u_{j-1}^n\bigr)^2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Podria pasar que la segunda suma en el lado derecho tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$. Sin embargo, consideremos el caso específico del dato inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En este caso la solución de entropía de la ecuación de Burgers consiste en una onda de rarefacción centrada en $x = 0$ y un choque con valores $u_{\mathrm{l}} = 1$ y $u_{\mathrm{r}} = 0$ que se propaga hacia la derecha con velocidad $1/2$. En el instante $t = 2$ la onda de rarefacción alcanza el choque, por lo tanto la solución de entropía en este instante es

$$u(x,2) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(La Figura 4.1 (izquierda) muestra la solución de entropía, junto con la aproximación por el método upwind *(conservativo) $u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n))$.) Utilizamos $u_j^0 = u_0(j\Delta x)$ como dato inicial para el esquema* (4.7)*. Entonces para todo j tal que $j\Delta x > 1$, $u_j^n = 0$ para todo $n \geqslant 0$. Es decir si $N\Delta t = 2$, entonces $u_j^N = 0$, y claramente $u_j^N \neq u(j\Delta x, 2)$ para $1 \leqslant j\Delta x \leqslant 2$. Este método simplemente falla en "detectar" la discontinuidad que se mueve. La solución numérica es mostrada en la Figura 4.1 (centro), la cual ilustra también la pérdida de masa indicada por* (4.8)*.*

Uno podría pensar que la situación mejora al utilizar una aproximación de segundo orden de la derivada u_x, lo que resulta en el método

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\bigl(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\bigr) - \frac{\lambda}{2} u_j^n \bigl(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\bigr). \tag{4.9}$$

Efectivamente, este método calcula algo que se mueve hacia la derecha, pero la parte de la onda de rarefacción de la solución no es bien aproximada, tal como ilustra la Figura 4.1 (derecha). A partir de ahora no discutiremos métodos no conservativos.

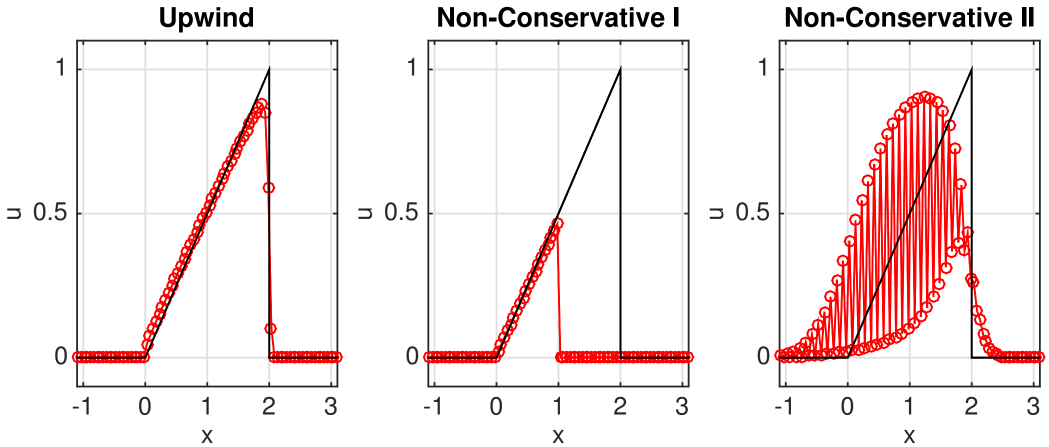


FIGURA 4.1. Ejemplo 4.1: (izquierda) Solución de entropía de la ecuación de Burgers (línea sólida, trazada en los tres plots) con aproximación por un método conservativo (método *upwind*), (centro) aproximación por el método no conservativo (4.7), (derecha) aproximación por el método no conservativo (4.9). En cada caso, $\Delta x = 1/20$, $\lambda = 1/2$.

Ejemplo 4.2. *Entre los métodos conservativos y consistentes elementales más comunes se encuentra el* método upwind *definido por el flujo numérico*

$$F_{j+1/2}^n = f\bigl(u_j^n\bigr),$$

el método de Lax-Friedrichs

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\bigl(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\bigr) - \frac{\lambda}{2}\bigl[f\bigl(u_{j+1}^n\bigr) - f\bigl(u_{j-1}^n\bigr)\bigr]$$

con el flujo numérico

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2\lambda}\bigl(u_j^n - u_{j+1}^n\bigr) + \frac{1}{2}\bigl[f\bigl(u_j^n\bigr) + f\bigl(u_{j+1}^n\bigr)\bigr],$$

el método Richtmyer-Lax-Wendroff de dos pasos *dado por*

$$F_{j+1/2}^n = f\left(\frac{1}{2}\bigl(u_{j+1}^n + u_j^n\bigr) - \lambda\bigl[f\bigl(u_{j+1}^n\bigr) - f\bigl(u_j^n\bigr)\bigr]\right),$$

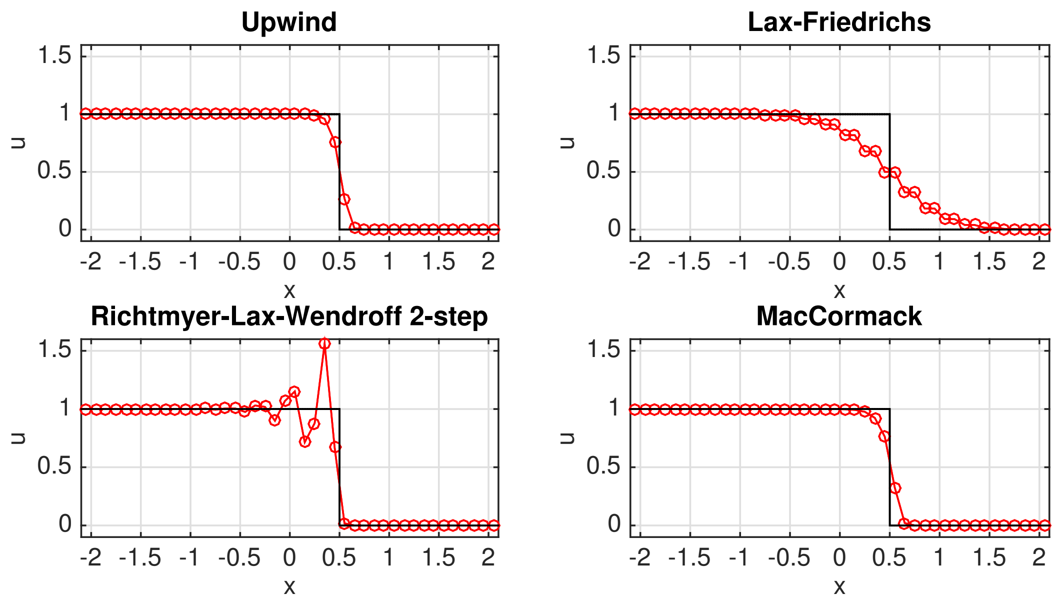
y el método de MacCormack

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}\left(f\Bigl(u_j^n - \lambda\bigl[f\bigl(u_{j+1}^n\bigr) - f\bigl(u_j^n\bigr)\bigr]\Bigr) + f\bigl(u_j^n\bigr)\right).$$

Ilustramos los métodos mencionados en este ejemplo en las Figuras 4.2 y 4.3. En la Figura 4.2 mostramos la solución numérica del problema de Riemann para la ecuación de Burgers, $u_t + (u^2/2)_x = 0$, *con*

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leqslant 0, \\ 0 & \text{para } x \geqslant 0, \end{cases} \tag{4.10}$$

(a) Soluciones con $\Delta x = 0{,}1$



(b) Soluciones con $\Delta x = 0{,}025$

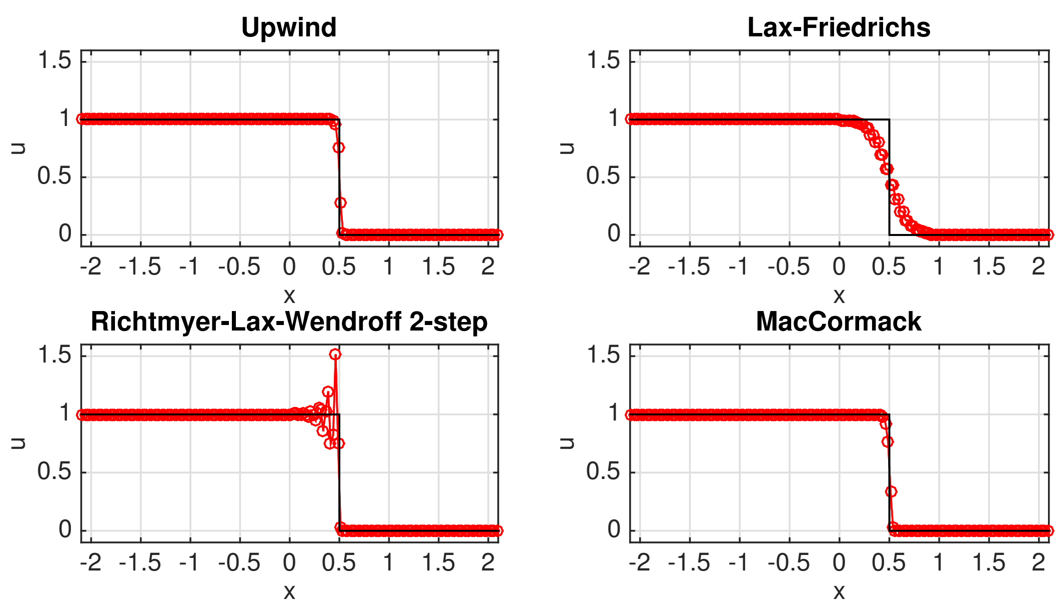
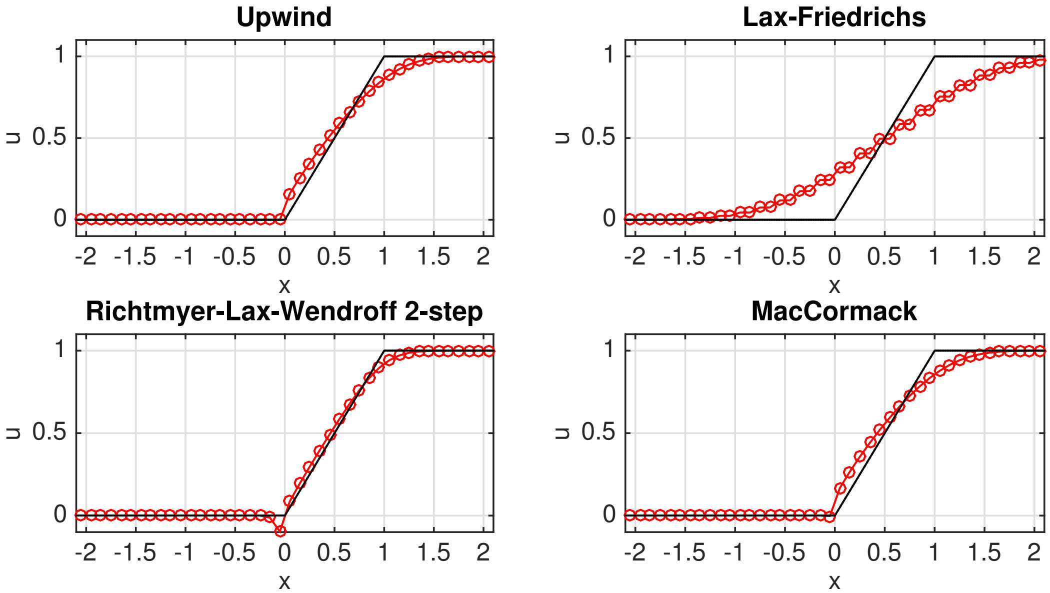


FIGURA 4.2. Ejemplo 4.2: solución numérica del problema de Riemann (4.10). La línea sólida es la solución exacta.

mientras que la Figura 4.3 muestra los resultados numéricos para

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{para } x \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.11}$$

(a) Soluciones con $\Delta x = 0{,}1$



(b) Soluciones con $\Delta x = 0{,}025$

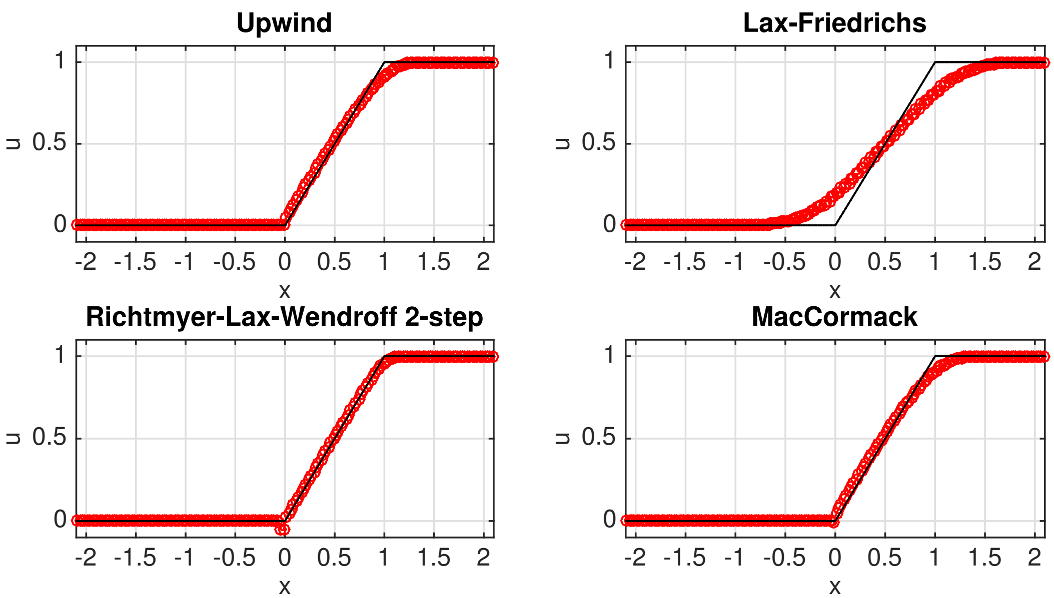


FIGURA 4.3. Ejemplo 4.2: solución numérica del problema de Riemann (4.11). La línea sólida es la solución exacta.

En ambos casos se muestra la solución para el tiempo simulado $T = 1$ calculada con $\lambda = 0{,}25$ para $\Delta x = 0{,}1$ y $\Delta t = 0{,}025$.

En lo siguiente siempre se supone que $\lambda = \Delta t/\Delta x =$ const. cuando $\Delta t, \Delta x \to 0$. Tanto el método de Lax-Friedrichs como el método de Godunov son métodos de primer orden en el sentido de que el error local de truncación es de primer orden. Los métodos de Lax-Wendroff y de MacCormack son de segundo orden. Esto significa que estos métodos aproximan soluciones suaves con gran precisión. Sin embargo cerca de discontinuidades se pueden producir oscilaciones en la solución numérica.

Una manera de combinar las respectivas ventajas de métodos de primer y segundo orden (aproximación no oscilatoria de discontinuidades y aproximación con gran exactitud de partes suaves de la solución, respectivamente) consiste en el diseño de métodos *híbridos* dados por

$$F^n_{j+1/2} = \theta_{j+1/2}(\boldsymbol{u}^n) F^n_{\mathrm{low},j+1/2} + \bigl(1 - \theta_{j+1/2}(\boldsymbol{u}^n)\bigr) F^n_{\mathrm{high},j+1/2},$$

donde F_{low} y F_{high} son el flujo numérico del método de bajo y alto orden, respectivamente. El "switch" $\theta_{j+1/2}$ debe tener un valor cerca de uno cerca de discontinuidades y cerca de cero en partes suaves de la solución. La elección apropiada de θ es tópico de amplia discusión en la literatura. Por ejemplo, un método *flux limiter* puede ser definido por

$$\theta_{j+1/2} := 1 - \frac{1}{1 + |\mathrm{D}_+\mathrm{D}_- u^n_j|},$$

donde D_+ y D_- son las diferencias divididas en (2.30) y

$$\mathrm{D}_+\mathrm{D}_- u_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} \approx u_{xx}|_{x=x_j},$$

y como F_{low} y F_{high} utilizamos los flujos de Lax-Friedrichs (de primer orden) y de MacCormack (de segundo orden), respectivamente. A este método nos referiremos como "método *fluxlim*" en adelante.

Otro concepto consiste en la generalización del método de Godunov, en el sentido de que los datos constantes a trozos u^n son reemplazados por funciones "más suaves". El reemplazo más simple consiste en una función lineal a trozos. En tal caso habría que resolver un problema de Riemann generalizado con datos lineales a la izquierda y a la derecha del salto. La solución exacta de este problema es difícil de encontrar, es decir nuevamente hay que utilizar aproximaciones. Un ejemplo es el método *slopelim* definido por

$$\begin{aligned}
&F_{j+1/2} = \frac{1}{2}\bigl(g_j + g_{j+1}\bigr) - \frac{1}{2\lambda}\Delta_+ u^n_j, \quad \Delta_\pm u^n_j := \pm\bigl(u^n_{j\pm1} - u^n_j\bigr),\\
&g_j := f\bigl(u_j^{n+1/2}\bigr) + \frac{1}{2\lambda} u'_j, \quad u'_j := \operatorname{minmod}\bigl(\Delta_- u^n_j, \Delta_+ u^n_j\bigr),\\
&u_j^{n+1/2} := u^n_j - \frac{\lambda}{2} f'\bigl(u^n_j\bigr) u'_j, \quad \operatorname{minmod}(a,b) := \frac{1}{2}\bigl(\operatorname{sgn}(a) + \operatorname{sgn}(b)\bigr) \operatorname{mín}\bigl\{|a|,|b|\bigr\}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Ejemplo 4.3 (Ecuación de Buckley-Leverett)**.** *Se considera la función de flujo*

$$f(u) = \frac{u^2}{u^2 + (1-u)^2}, \tag{4.13}$$

la que se encuentra ploteada junto con su derivada

$$f'(u) = \frac{2u(1-u)}{(u^2 + (1-u)^2)^2} \tag{4.14}$$

en la Figura 4.4.

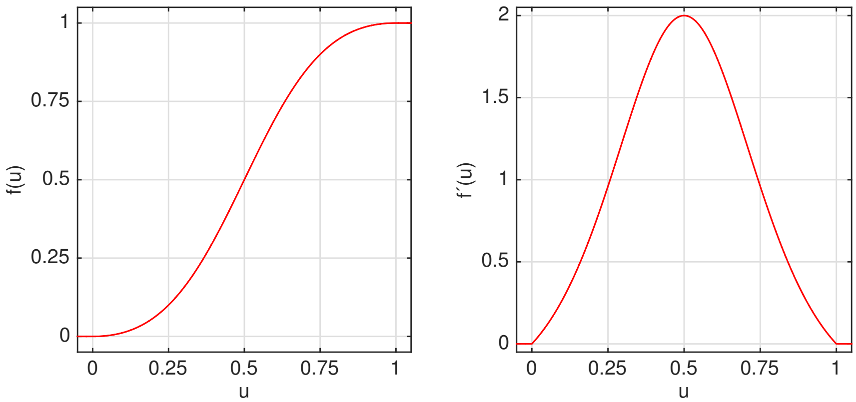


FIGURA 4.4. Ejemplo 4.3: (izquierda) la función $f(u)$ definida por (4.13), (derecha) su derivada $f'(u)$ (4.14).

Este ejemplo es motivado por aplicaciones en la recuperación de petróleo, donde frecuentemente aparecen funciones de flujo de forma similar, es decir $f' \geqslant 0$ y $f''(u) = 0$ en un punto de inflexón único. Este ejemplo se llama ecuación de Buckley-Leverett. *El primer caso esta basado en el dato inicial*

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leqslant 0, \\ 0 & \text{para } x > 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

La Figura 4.5 muestra la solución numérica obtenida por el método de Lax-Friedrichs; el método upwind*; el método de Lax-Wendroff definido por*

$$F^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}\Big(f\big(u^n_j\big) + f\big(u^n_{j+1}\big) - \lambda\big(\nu^n_{j+1}\big)^2\big(u^n_{j+1} - u^n_j\big)\Big), \quad \nu^n_{j+1/2} := \frac{f(u^n_{j+1}) - f(u^n_j)}{u^n_{j+1} - u^n_j}; \tag{4.16}$$

el método de de MacCormack; el método fluxlim *y el método* slopelim. *En cada caso se evalú la solución numérica en $T = 1$, se elige $\lambda = \Delta t/\Delta x = 1/2$ (considerando que* $\max_{u\in[0,1]} |f'(u)| = 2$*), y se simula con $\Delta x = 1/20$ y $\Delta x = 1/100$ (ver Figura 4.5). En cada caso se muestra la solución de referencia obtenida por el método de Lax-Friedrichs con* $\Delta x = 1/2000$. *Observamos que el método de Lax-Wendroff parece* no *converger a la solución de entropía. La Figura 4.6 muestra los resultados análogos, también para $T = 1$, $\lambda = 1/2$ y para $\Delta x = 1/20$ y $\Delta x = 1/100$, para el dato inicial*

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in [0,1], \\ 0 & \text{para } x < 0 \text{ y } x > 1. \end{cases} \tag{4.17}$$

4.2. El error de truncación y la ecuación modelo

El *error local de truncación* de un método numérico $L_{\Delta t}$ viene dado por

$$L_{\Delta t}(x) := \frac{1}{\Delta t}\big(S(\Delta t)u - S_N(\Delta t)u\big)(x),$$

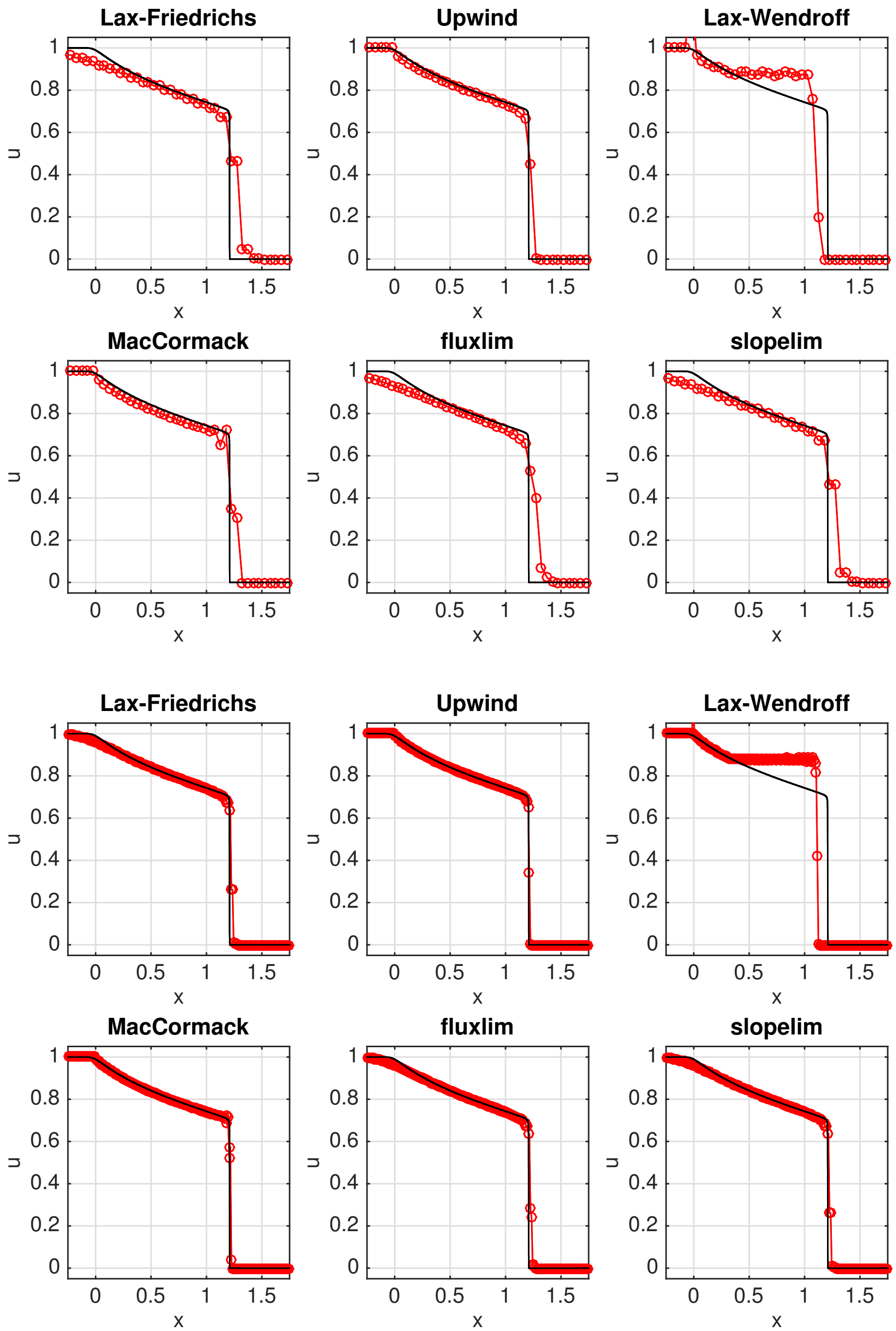


FIGURA 4.5. Ejemplo 4.3: solución numérica de la ecuación de Buckley-Leverett con u_0 dada por (4.15). Arriba: $\Delta x = 1/20$; abajo: $\Delta x = 1/100$. La línea sólida es la solución de referencia.

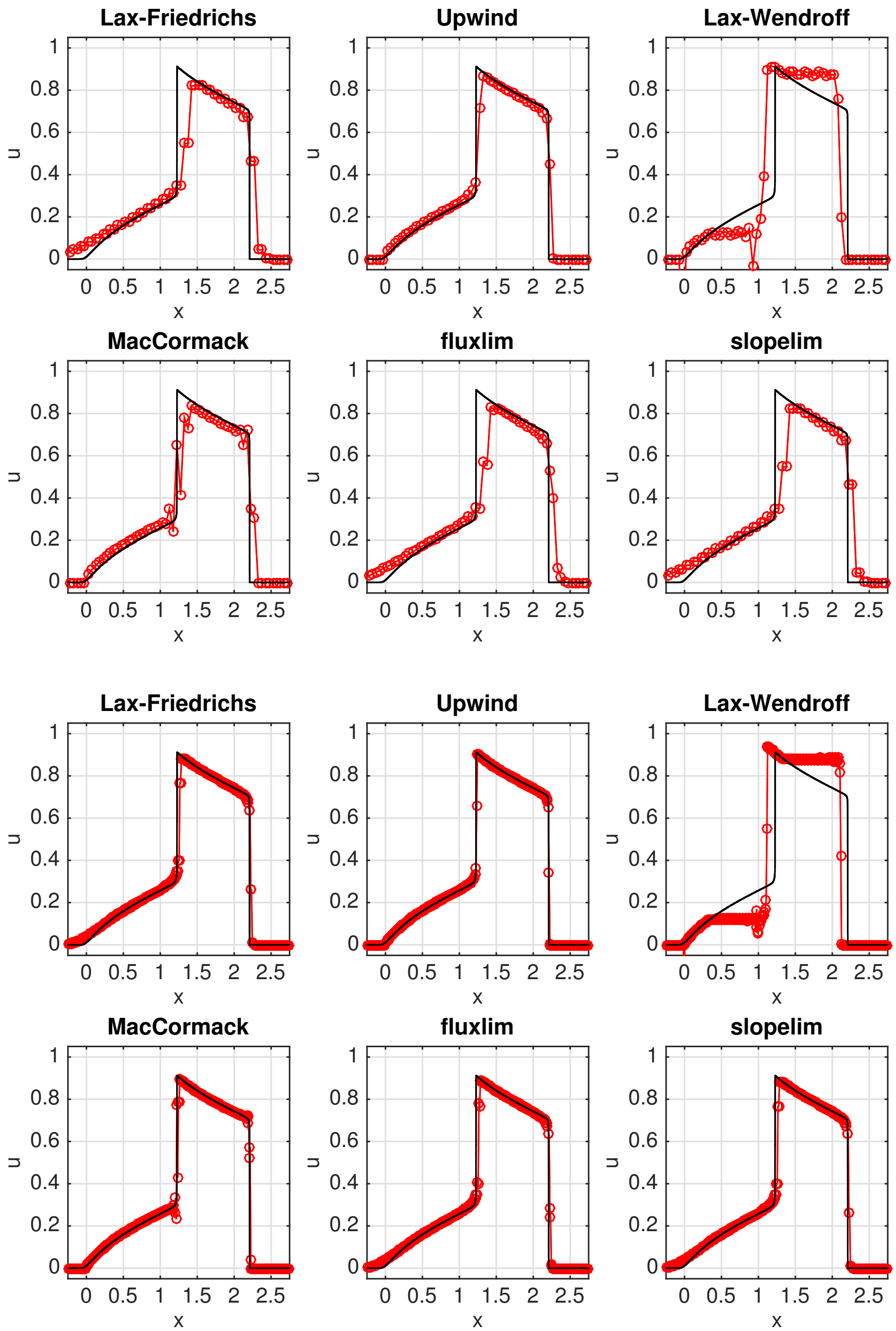


Figura 4.6. Ejemplo 4.3: solución numérica de la ecuación de Buckley-Leverett con u_0 dada por (4.17). Arriba: $\Delta x = 1/20$; abajo: $\Delta x = 1/100$. La línea sólida es la solución de referencia.

donde $S(t)$ es el operador de solución exacta (4.1) y $S_N(t)$ es el operador de solución formal del método numérico, es decir

$$S_N(\Delta t)u(x) = u(x) - \lambda\big(F_{j+1/2}(\boldsymbol{u}) - F_{j-1/2}(\boldsymbol{u})\big).$$

Suponiendo que u es una solución *suave* de la ley de conservación $u_t + f(u)_x = 0$, lo cual nos permite expandir todas las cantidades relevantes en series de Taylor, se dice que el método es *del orden de precisión* k si para todas las soluciones suaves y $\Delta t \to 0$ se tiene que

$$\big|L_{\Delta t}(x)\big| = \mathcal{O}(\Delta t^k).$$

Para calcular $L_{\Delta t}(x)$ se utiliza un desarrollo en serie de Taylor de $u(x,t)$ cerca de x. Se sabe que u puede exhibir discontinuidades, por lo tanto no necesariamente debe poseer un desarrollo en serie de Taylor. Por lo tanto, el concepto del error de truncación es *formal*. Sin embargo, si $u(x,t)$ es suave cerca de (x,t), entonces se espera que un método de alto orden aproxima u mejor que un método de orden bajo cerca de (x,t).

Ejemplo 4.4 (Error de truncación local)**.** *Se considera el método* upwind*:*

$$S_N(\Delta t)u(x) = u(x) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\big[f\big(u(x)\big) - f\big(u(x-\Delta x)\big)\big].$$

Para verificar que este método efectivamente es de primer orden calculamos

$$\begin{aligned}
L_{\Delta t}(x) &= \frac{1}{\Delta t}\bigg(u(x,t+\Delta t) - u(x) + \frac{\Delta t}{\Delta x}\big[f\big(u(x)\big) - f\big(u(x-\Delta x)\big)\big]\bigg)\\
&= \frac{1}{\Delta t}\bigg(u + \Delta t u_t + \frac{\Delta t^2}{2}u_{tt} + \dots - \lambda\bigg[f'(u)\bigg(-\Delta x u_x + \frac{\Delta x^2}{2}u_{xx} + \dots\bigg)\\
&\quad + \frac{1}{2}f''(u)\bigg(-\Delta x u_x + \dots\bigg)^2\bigg]\bigg)\\
&= \frac{1}{\Delta t}\bigg(\Delta t\big(u_t + f(u)_x\big) + \frac{\Delta t^2}{2}u_{tt} - \frac{\Delta t\Delta x}{2}\big(f'(u)u_{xx} + f''(u)(u_x)^2\big) + \dots\bigg)\\
&= u_t + f(u)_x + \frac{1}{2}\big[\Delta t u_{tt} - \Delta x\big(f'(u)u_x\big)_x\big] + \mathcal{O}(\Delta t^2)\\
&= u_t + f(u)_x + \frac{\Delta x}{2}\big[\lambda u_{tt} - \big(f'(u)u_x\big)_x\big] + \mathcal{O}(\Delta t^2).
\end{aligned}$$

Suponiendo u como solución suave de (4.1) *obtenemos*

$$u_{tt} = \Big(\big(f'(u)\big)^2 u_x\Big)_x,$$

luego

$$L_{\Delta t} = \frac{\Delta t}{2\lambda}\big(f'(u)\big(\lambda f'(u) - 1\big)u_x\big)_x + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Concluimos que el método upwind es de primer orden.

En forma similar podemos demostrar que el método de Godunov es de primer orden. Por otro lado para el método de Lax-Friedrichs obtenemos que

$$L_{\Delta t} = \frac{\Delta t}{2\lambda^2}\bigg(\Big(\big(\lambda f'(u)\big)^2 - 1\Big)u_x\bigg)_x + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Concluimos que el método de Lax-Friedrichs es de primer orden, pero es de segundo orden para la ecuación

$$u_t + f(u)_x = \frac{\Delta t}{2\lambda^2}\Bigl(\Bigl(1 - \bigl(\lambda f'(u)\bigr)^2\Bigr)u_x\Bigr)_x \tag{4.18}$$

llamada ecuación modelo *o* ecuación modificada *para el método de Lax-Friedrichs. Para que* (4.18) *esté bien puesta, el coeficiente de u_{xx} en el lado derecho debe ser no negativo, lo que entrega la condición*

$$\bigl|\lambda f'(u)\bigr| \leqslant 1,$$

lo que precisamente es la condición CFL (ver (2.42) *y* (4.6)*).*

La ecuación modificada para el método upwind es

$$u_t + f(u)_x = \frac{\Delta t}{2\lambda}\Bigl(f'(u)\bigl(1 - \lambda f'(u)\bigr)u_x\Bigr)_x.$$

Para que esta ecuación esté bien puesta se debe satisfacer $f'(u) \geqslant 0$ y $\lambda f'(u) \leqslant 1$.

Observamos que los métodos de primer y segundo orden poseen ecuaciones modificadas con un término de difusión y dispersión, respectivamente. Por lo tanto nos esperamos que los métodos de segundo orden generan soluciones numéricas oscilatorias. Sea ahora

$$u_{\Delta t}(x,t) = u_j^n \quad \text{para } (x,t) \in I_j^n. \tag{4.19}$$

Entonces tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} u_{\Delta t}(x,t)\,\mathrm{d}x = \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j^n \quad \text{para } t_n \leqslant t < t_{n+1}. \tag{4.20}$$

Teorema 4.1 (Teorema de Lax-Wendroff)**.** *Sea $u_{\Delta t}$ definida por* (4.19), (4.20) *y la solución numérica $\{u_j^n\}_{j\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}_0}$ calculada por un método conservativo y consistente. Sea $\mathrm{TV}_x(u_{\Delta t})$ uniformemente acotada respecto de Δt. Se considera una subsucesión $u_{\Delta t_k}$ con $\Delta t_k \to 0$. Supongamos que $u_{\Delta t_k}$ converge en L^1_{loc} a un límite u. Entonces u es una solución débil de* (4.1)*.*

Demostración del Teorema 4.1. Sea $\varphi(x,t)$ una función test. Entonces, en virtud de la definición de u_j^{n+1} se tiene que

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\varphi(x_j,t_n)\bigl(u_j^{n+1}-u_j^n\bigr) + \frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\varphi(x_j,t_n)\bigl(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n\bigr) = 0,$$

donde $T = N\Delta t$ sea escogido tal que $\varphi = 0$ para $t \geqslant T$. Así obtenemos, después de una sumación por partes,

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty}\varphi_j^0 u_j^0 - \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}\bigl(\varphi_j^n - \varphi_j^{n-1}\bigr)u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\bigl(\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n\bigr)F_{j+1/2}^n = 0.$$

Esta ecuación también puede ser escrita como

$$\Delta t\Delta x\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_j^n - \varphi_j^{n-1}}{\Delta t}u_j^n + \Delta t\Delta x\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n}{\Delta x}F_{j+1/2}^n = -\Delta x\sum_{j=-\infty}^{\infty}\varphi(x_j,0)u_j^0.$$

Hasta el término que contiene F esta expresión es muy parecida a una suma de Riemann para la formulación débil de (4.1), luego

$$\Delta x \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(x_j,0)u_j^0 \overset{\Delta x\to 0}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,0)u_0(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\Delta t\Delta x \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_j^n-\varphi_j^{n-1}}{\Delta t}u_j^n \overset{\Delta x,\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_t(x,t)u(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Como

$$\Delta t\Delta x \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_j^n-\varphi_{j-1}^{n}}{\Delta x}f\bigl(u_j^n\bigr) \overset{\Delta x,\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x,t)f\bigl(u(x,t)\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

hay que demostrar que

$$\Delta t\Delta x \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \bigl|F_{j+1/2}^n - f(u_j^n)\bigr| \overset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{4.21}$$

para poder concluir que el límite efectivamente es una solución débil. Utilizando la Lipschitz continuidad de F obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta t\Delta x \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \bigl|F_{j+1/2}^n - f(u_j^n)\bigr| &= \Delta t\Delta x \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \bigl|F\bigl(u_{j-p}^n,\dots,u_{j+q}^n\bigr)-F\bigl(u_j^n,\dots,u_j^n\bigr)\bigr| \\ &< \Delta t\Delta x M \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-p}^{q} \bigl|u_{j+k}^n-u_j^n\bigr| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\bigl(q(q+1)+p(p+1)\bigr)\Delta t\Delta x M \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \bigl|u_{j+1}^n-u_j^n\bigr| \\ &\leqslant (p^2+q^2)\Delta x M\,\mathrm{TV}(u_{\Delta t})T\end{aligned}$$

con $M > \|f\|_{\mathrm{Lip}}$. Concluimos que el lado izquierdo de (4.21) es pequeño cuando Δx es pequeño, por lo tanto el límite efectivamente es una solución débil. ■

En el Teorema 3.4 constatamos varias propiedades de la solución de entropía exacta. Para métodos numéricos se define análogamente lo siguiente.

Definición 4.2. *Sea $u_{\Delta t}$ la solución numérica generada por un método consistente y conservativo. Se dice que el método es ...*

- ... TV-estable, *si la variación total de $\boldsymbol{u}^n$ es uniformemente acotada con respecto a Δx y Δt.*
- ... preservador de monotonía *si la monotonía de los datos iniciales implica la monotonía de $\boldsymbol{u}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
- ... total variation diminishing (TVD) *si*

$$\mathrm{TV}(\boldsymbol{u}^{n+1}) \leqslant \mathrm{TV}(\boldsymbol{u}^n) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

- ... L^1-contractivo *si para una segunda solución numérica* $v_{\Delta t}$ *se tiene que*
$$\forall t \geqslant 0: \quad \left\|u_{\Delta t}(t) - v_{\Delta t}(t)\right\|_{L^1} \leqslant \left\|u_{\Delta t}(0) - v_{\Delta t}(0)\right\|_{L^1}.$$
Alternativamente podemos expresar esto como
$$\forall n \in \mathbb{N}_0: \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|u_j^{n+1} - v_j^{n+1}\right| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|u_j^n - v_j^n\right|.$$
- ... monótono, *si*
$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_j^0 \leqslant v_j^0,\ j \in \mathbb{Z} \Longrightarrow u_j^n \leqslant v_j^n,\ j \in \mathbb{Z}.$$

Estas propiedades son relacionadas de acuerdo al siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Para métodos conservativos y consistentes se tienen los siguientes enunciados:*
(i) *Cada método monótono es* L^1*-contractivo si suponemos que* u_0 *es integrable.*
(ii) *Cada método* L^1*-contractivo es TVD.*
(iii) *Cada método TVD es preservador de monotonía.*

Concluimos que tenemos las siguientes implicaciones:
$$\text{monotonía} \Rightarrow \text{contracción en } L^1 \Rightarrow \text{TVD} \Rightarrow \text{preservación de monotonía.}$$

Demostración del Teorema 4.2.
(i) Utilizaremos el Lema 3.7 con $\Omega = \mathbb{R}$ y D dado por el conjunto de las funciones en L^1 que sean constantes a trozos sobre la malla I_j, $j \in \mathbb{Z}$, además sea la aplicación T definida por $T(\boldsymbol{u}^0) = \boldsymbol{u}^n$. Como el método es conservativo se tiene que
$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j^n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j^0$$
o bien
$$\int T(\boldsymbol{u}^0)\,\mathrm{d}x = \int \boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}x = \int \boldsymbol{u}^0\,\mathrm{d}x.$$
El Lema 3.7 implica que
$$\begin{aligned}\left\|u_{\Delta t}(t_n) - v_{\Delta t}(t_n)\right\|_{L^1} &= \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|u_j^n - v_j^n\right| \leqslant \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|u_j^0 - v_j^0\right| \\ &= \left\|u_{\Delta t}(0) - v_{\Delta t}(0)\right\|_{L^1}.\end{aligned}$$
(ii) Sea
$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|u_j^{n+1} - v_j^{n+1}\right| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|u_j^n - v_j^n\right|,$$
donde $\boldsymbol{v}^n$ denota la solución numérica obtenida a partir de $v_i^0 = u_{i+1}^0$. Entonces en virtud de la invarianza respecto a traslaciones de (4.4) se tiene que $v_i^n = u_{i+1}^n$ para todo n, además
$$\mathrm{TV}(\boldsymbol{u}^{n+1}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}\right| = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|u_j^{n+1} - v_j^{n+1}\right| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|u_j^n - v_j^n\right| = \mathrm{TV}(\boldsymbol{u}^n).$$

(iii) Consideremos un método TVD y datos iniciales monótonos. Como $\mathrm{TV}(u_0) < \infty$ existen las siguientes cantidades:

$$u_{\mathrm{l}} := \lim_{j\to-\infty} u_j^0, \quad u_{\mathrm{r}} := \lim_{j\to\infty} u_j^0,$$

luego $\mathrm{TV}(\boldsymbol{u}^0) = |u_{\mathrm{r}} - u_{\mathrm{l}}|$. Si $\boldsymbol{u}^1$ no fuera monótono se tendría que $\mathrm{TV}(\boldsymbol{u}^1) > |u_{\mathrm{r}} - u_{\mathrm{l}}| = \mathrm{TV}(\boldsymbol{u}^0)$, lo que se contradice con la propiedad TVD. ■

Ejemplo 4.5. *Para métodos explícitos se puede verificar facilmente si un método es monótono. Por ejemplo el método de Lax-Friedrichs es definido por*

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\bigl(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\bigr) - \frac{\lambda}{2}\bigl[f\bigl(u_{j+1}^n\bigr) - f\bigl(u_{j-1}^n\bigr)\bigr],$$

por lo tanto

$$\frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial u_k^n} = \frac{1}{2}\cdot\begin{cases} 1-\lambda f'(u_k^n) & \text{para } k=j+1,\\ 1+\lambda f'(u_k^n) & \text{para } k=j-1,\\ 0 & \text{en los demás casos,}\end{cases}$$

luego el método es monótono, es decir

$$\frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial u_k^n} \geqslant 0 \quad \text{para } j,k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

bajo la condición CFL $\lambda|f'(u)| < 1$.

En lo siguiente estudiaremos la convergencia de métodos conservativos. En primer lugar comentamos que el Teorema 4.1 *presupone* la convergencia de un método para luego concluir que el límite es una solución débil. El siguiente teorema establece criterios que nos permiten asegurar la convergencia de un método.

4.3. La convergencia de métodos conservativos

Teorema 4.3. *Sea $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ una función de variación acotada. Sea la aproximación numérica $u_{\Delta t}$ generada por un método consistente, conservativo, TV-estable y uniformemente acotado, es decir sean $\mathrm{TV}(u_{\Delta t}) \leqslant M$ y $\|u_{\Delta t}\|_\infty \leqslant M$ con una constante M que sea independiente de Δt y Δx. Sea $T>0$. Entonces la sucesión $\{u_{\Delta t}\}$ posee una subsucesión que converge en $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ a una solución débil $u(t)$ para todo $t\in[0,T]$. La convergencia tiene lugar en $C([0,T];L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$.*

La demostración del Teorema 4.3 requiere utilizar los resultados sobre la variación total y la compacidad del Capítulo 1.

Demostración. Queremos aplicar el Teorema 1.6. Para tal efecto hay que demostrar que

$$\int_a^b \bigl|u_{\Delta t}(x,t) - u_{\Delta t}(x,s)\bigr|\,\mathrm{d}x \leqslant C|t-s| + \nu(\Delta t) \quad \text{cuando } \Delta t\to 0,\ s,t\in[0,T],$$

para una función no negativa y continua ν con $\nu(0)=0$. En virtud de la consistencia del método se tiene para cada Δt fijo, y escogiendo $L = \|F\|_{\mathrm{Lip}}$, que

$$\bigl|u_j^{n+1} - u_j^n\bigr| = \lambda\bigl|F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n\bigr| = \lambda\bigl|F\bigl(u_{j-p}^n,\dots,u_{j+q}^n\bigr) - F\bigl(u_{j-p-1}^n,\dots,u_{j+q-1}^n\bigr)\bigr|$$

$$\leqslant \lambda L\big(\big|u^n_{j-p} - u^n_{j-p-1}\big| + \cdots + \big|u^n_{j+q} - u^n_{j+q-1}\big|\big).$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}\big\|u_{\Delta t}(\cdot, t_{n+1}) - u_{\Delta t}(\cdot, t_n)\big\|_{L^1} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|u^{n+1}_j - u^n_j\big|\Delta x \\ &\leqslant L(p+q+1)\mathrm{TV}(\boldsymbol{u}^n)\Delta t \leqslant L(p+q+1)M\Delta t.\end{aligned}$$

En general tenemos

$$\big\|u_{\Delta t}(\cdot, t_m) - u_{\Delta t}(\cdot, t_n)\big\|_{L^1} \leqslant L(p+q+1)M|n-m|\Delta t = L(p+q+1)M|t_n - t_m|.$$

Ahora escogimos $\tau_1, \tau_2 \in [0,T]$ y $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in \{n\Delta t \,|\, 0 \leqslant n \leqslant T/\Delta t\}$ tal que

$$0 \leqslant \tau_j - \tilde{t}_j < \Delta t, \quad j = 1, 2.$$

Según nuestra construcción, $u_{\Delta t}(\tau_j) = u_{\Delta t}(\tilde{t}_j)$, $j = 1, 2$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\big\|u_{\Delta t}(\cdot, \tau_1) - u_{\Delta t}(\cdot, \tau_2)\big\|_{L^1} &\leqslant \big\|u_{\Delta t}(\cdot, \tau_1) - u_{\Delta t}(\cdot, \tilde{t}_1)\big\|_{L^1} + \big\|u_{\Delta t}(\cdot, \tilde{t}_1) - u_{\Delta t}(\cdot, \tilde{t}_2)\big\|_{L^1} \\ &\quad + \big\|u_{\Delta t}(\cdot, \tilde{t}_2) - u_{\Delta t}(\cdot, \tau_2)\big\|_{L^1} \\ &\leqslant (p+q+1)LM\big|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2\big| \\ &\leqslant (p+q+1)LM|\tau_1 - \tau_2| + \mathcal{O}(\Delta t).\end{aligned}$$

Esta desigualdad es uniforme respecto de $\tau_1, \tau_2 \in [0,T]$, por lo tanto

$$u_{\Delta t} \to u \quad \text{en } C([0,T]; L^1([a,b]))$$

para una sucesión $\Delta t \to 0$. Según el Teorema de Lax-Wendroff este límite es una solución débil. ■

Queda por analizar si la función límite u es, además, una solución de entropía (y no solamente una solución débil) de (4.1). Recordamos que un par de funciones $(\eta(u), q(u))$ con una función η convexa se llama *par de entropía* si $q'(u) = f'(u)\eta'(u)$. Una solución débil u de la ley de conservación es la *solución de entropía* si para todos los pares de entropía,

$$\eta(u)_t + q(u)_x \leqslant 0 \tag{4.22}$$

en el sentido distribucional. Para $\eta(u) = |u-k|$ obtenemos la condición de entropía de Kružkov, y ya demostramos que (4.22) es válida para todas las funciones $\eta(u)$ flujos de entropía correspondientes si y sólo si la desigualdad de entropía de Kružkov está satisfecha para todo k.

En lo siguiente especificamos el análogo de un par de entropía para métodos de diferencias. Definimos $a \vee b := \max\{a,b\}$, $a \wedge b := \min\{a,b\}$, observando la identidad trivial

$$|a-b| = a \vee b - a \wedge b,$$

y el *flujo de entropía numérico*

$$Q_{j+1/2}(\boldsymbol{u}) := F_{j+1/2}(\boldsymbol{u} \vee k) - F_{j+1/2}(\boldsymbol{u} \wedge k),$$

o más explícitamente,

$$Q\big(u_{j-p}, \dots, u_{j+q}\big) = F\big(u_{j-p} \vee k, \dots, u_{j+q} \vee k\big) - F\big(u_{j-p} \wedge k, \dots, u_{j+q} \wedge k\big).$$

Entonces Q es consistente con el flujo de entropía habitual, es decir,

$$Q(u,\dots,u)=\operatorname{sgn}(u-k)\big(f(u)-f(k)\big).$$

Teorema 4.4. *Sea $T>0$. Sea la función f Lipschitz continua. Supongamos que $u_0\in L^1(\mathbb{R})$ y que u_0 tiene variación acotada. Supongamos que $u_{\Delta t}$ es calculada por un método conservativo, consistente, y monótono. Entonces para cada sucesión $\Delta t_k\to 0$ la familia $\{u_{\Delta t_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a la solución de entropía de Kružkov $u(t)$ para todo $t\in[0,T]$. El límite se efectua en $C([0,T];L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$.*

Demostración del Teorema 4.4. El Teorema 4.3 implica que $\{u_{\Delta t}\}$ posee una subsucesión que converge en $C([0,T];L^1([a,b]))$ a una solución débil. Queda por demostrar que el límite satisface una condición de Kružkov discreta. Se tiene que

$$\begin{aligned}
&G_j(\boldsymbol{u}^n\vee k)-G_j(\boldsymbol{u}^n\wedge k)\\
&=u_j^n\vee k-u_j^n\wedge k\\
&\quad-\lambda\Big(\big(F_{j+1/2}(\boldsymbol{u}^n\vee k)-F_{j-1/2}(\boldsymbol{u}^n\vee k)\big)-\big(F_{j+1/2}(\boldsymbol{u}^n\wedge k)-F_{j-1/2}(\boldsymbol{u}^n\wedge k)\big)\Big)\\
&=\big|u_j^n-k\big|\\
&\quad-\lambda\Big(\big(F_{j+1/2}(\boldsymbol{u}^n\vee k)-F_{j+1/2}(\boldsymbol{u}^n\wedge k)\big)-\big(F_{j-1/2}(\boldsymbol{u}^n\vee k)-F_{j-1/2}(\boldsymbol{u}^n\wedge k)\big)\Big)\\
&=\big|u_j^n-k\big|-\lambda\big(Q_{j+1/2}^n-Q_{j-1/2}^n\big).
\end{aligned}\tag{4.23}$$

En virtud de $u_j^{n+1}=G_j(\boldsymbol{u}^n)$ y $k=G_j(k,\dots,k)=G_j(\boldsymbol{k})$, la monotonía del método implica que

$$\begin{aligned}
G_j(\boldsymbol{u}^n\vee k)&\geqslant G_j(\boldsymbol{u}^n)\vee G_j(\boldsymbol{k})=G_j(\boldsymbol{u}^n)\vee k=u_j^{n+1}\vee k,\\
-G_j(\boldsymbol{u}^n\wedge k)&\geqslant -\big(G_j(\boldsymbol{u}^n)\wedge G_j(\boldsymbol{k})\big)=-\big(G_j(\boldsymbol{u}^n)\wedge k\big)=-\big(u_j^{n+1}\wedge k\big),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$G_j(\boldsymbol{u}^n\vee k)-G_j(\boldsymbol{u}^n\wedge k)\geqslant u_j^{n+1}\vee k-\big(u_j^{n+1}\wedge k\big)=\big|u_j^{n+1}-k\big|.$$

Combinando esto con (4.23) obtenemos

$$\big|u_j^{n+1}-k\big|-\big|u_j^n-k\big|+\lambda\big(Q_{j+1/2}^n-Q_{j-1/2}^n\big)\leqslant 0,$$

y aplicando una técnica de demostración similar a la del Teorema 4.1 podemos deducir la siguiente desigualdad para el límite u:

$$\begin{aligned}
&\iint\big(|u-k|\varphi_t+\operatorname{sgn}(u-k)\big(f(u)-f(k)\big)\varphi_x\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&+\int_{\mathbb{R}}|u_0-k|\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}}\big(|u-k|\varphi\big)\big|_{t=T}\,\mathrm{d}x\geqslant 0,
\end{aligned}$$

válida, para toda función test no negativa $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}\times[0,T))$ y todo $k\in\mathbb{R}$. ■

El Teorema 4.4 también puede ser considerado como demostración de existencia de una solución de entropía.

En lo siguiente analizaremos el error de truncación de un método consistente, conservativo y monótono. En virtud de

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = G_j(\boldsymbol{u}^n) =& G\big(u_{j-p-1}^n, \dots, u_{j+q}^n\big) \\ =& u_j^n - \lambda\big[F\big(u_{j-p}^n, \dots, u_{j+q}^n\big) - F\big(u_{j-p-1}^n, \dots, u_{j+q-1}^n\big)\big] \end{aligned}$$

podemos escribir $G = G(\alpha_0, \dots, \alpha_{p+q+1})$ y $F = F(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+q+1})$. La función F pertenezca a C^3 (lo mismo será válido para G), y escribiremos $\partial_i F$ y $\partial_i G$, respectivamente, para denotar la derivada de F y G respecto a su i-ésimo argumento, donde ponemos formalmente $\partial_i F = 0$ para $i = 0$. Se supone, además, que el j-ésimo argumento de G contiene u_j^n, es decir

$$G(\alpha_0, \dots, \alpha_{p+q+1}) = u_j - \lambda[\dots].$$

Por razones de consistencia se tiene que $G(u, \dots, u) = u$ y $F(u, \dots, u) = f(u)$, lo cual implica

$$\sum_{i=1}^{p+q+1} \partial_i F(u, \dots, u) = f'(u),$$
$$\partial_i G = \delta_{ij} - \lambda(\partial_{i-1} F - \partial_i F), \quad \partial_{ik}^2 G = -\lambda\big(\partial_{i-1,k-1}^2 F - \partial_{ik}^2 F\big),$$

luego

$$\sum_{i=0}^{p+q+1} \partial_i G(u, \dots, u) = \sum_{i=0}^{p+q+1} \delta_{ij} = 1. \tag{4.24}$$

Además se tiene que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{p+q+1} (i-j)\partial_i G(u, \dots, u) \\ &= \sum_{i=0}^{p+q+1} \Big((i-j)\delta_{i,j} - \lambda(i-j)\big(\partial_{i-1} F(u, \dots, u) - \partial_i F(u, \dots, u)\big)\Big) \\ &= -\lambda \sum_{i=0}^{p+q+1} \big((i+1) - i\big)\partial_i F(u, \dots, u) = -\lambda f'(u), \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} &\sum_{i,k=0}^{p+q+1} (i-k)^2 \partial_{i,k}^2 G(u, \dots, u) \\ &= -\lambda \sum_{i,k=0}^{p+q+1} (i-k)^2 \big(\partial_{i-1,k-1}^2 F(u, \dots, u) - \partial_{i,k}^2 F(u, \dots, u)\big) \qquad (4.25) \\ &= -\lambda \sum_{i,k=0}^{p+q+1} \Big(\big((i+1)-(k+1)\big)^2 - (i-k)^2\Big)\partial_{i,k}^2 F(u, \dots u) = 0. \end{aligned}$$

Sea ahora u una solución *suave* de la ley de conservación (4.1). Queremos aplicar G a u, es decir queremos calcular

$$G\bigl(u(x-(p+1)\Delta x,t),\dots,u(x,t),\dots,u(x+q\Delta x,t)\bigr).$$

Para $i=0,\dots,p+q+1$ sea $u_i := u(x+(i-(p+1))\Delta x,t)$, luego tenemos

$$\begin{aligned}
&G(u_0,\dots,u_{p+q+1})\\
&= G(u_j,\dots,u_j)+\sum_{i=0}^{p+q+1}\partial_i G(u_j,\dots,u_j)(u_i-u_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,k=0}^{p+q+1}\partial_{i,k}^2 G(u_j,\dots,u_j)(u_i-u_j)(u_k-u_j)+\mathcal{O}(\Delta x^3)\\
&= u(x,t)+u_x(x,t)\Delta x\sum_{i=0}^{p+q+1}(i-j)\partial_i G(u_j,\dots,u_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}u_{xx}(x,t)\Delta x^2\sum_{i=0}^{p+q+1}(i-j)^2\partial_i G(u_j,\dots,u_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\bigl(u_x(x,t)\bigr)^2\Delta x^2\sum_{i,k=0}^{p+q+1}(i-j)(k-j)\partial_{i,k}^2 G(u_j,\dots,u_j)+\mathcal{O}(\Delta x^3)\\
&= u(x,t)+u_x(x,t)\Delta x\sum_{i=0}^{p+q+1}(i-j)\partial_i G(u_j,\dots,u_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\Delta x^2\sum_{i=0}^{p+q+1}(i-j)^2\bigl(\partial_i G(u_j,\dots,u_j)u_x(x,t)\bigr)_x\\
&\quad-\frac{1}{2}\bigl(u_x(x,t)\bigr)^2\Delta x^2\sum_{i,k=0}^{p+q+1}\bigl((i-j)^2-(i-j)(k-j)\bigr)\partial_{i,k}^2 G(u_j,\dots,u_j)+\mathcal{O}(\Delta x^3).
\end{aligned}$$

En virtud de $\partial_{ik}^2 G=\partial_{ki}^2 G$ y (4.25) se tiene que

$$\begin{aligned}
0=\sum_{i,k=0}^{p+q+1}(i-k)^2\partial_{i,k}^2 G &= \sum_{i,k=0}^{p+q+1}\bigl((i-j)-(k-j)\bigr)^2\partial_{i,k}^2 G\\
&= \sum_{i,k=0}^{p+q+1}\bigl((i-j)^2-2(i-j)(k-j)\bigr)\partial_{i,k}^2 G+\sum_{i,k=0}^{p+q+1}(k-j)^2\partial_{k,i}^2 G\\
&= 2\sum_{i,k=0}^{p+q+1}\bigl((i-j)^2-(i-j)(k-j)\bigr)\partial_{i,k}^2 G,
\end{aligned}$$

por lo tanto el último término en el desarrollo en serie de Taylor de G desaparece y obtenemos

$$G\bigl(u(x-(p+1)\Delta x,t),\dots,u(x,t),\dots,u(x+q\Delta x,t)\bigr)$$

$$= u(x,t) - \Delta t f\big(u(x,t)\big)_x + \frac{\Delta x^2}{2} \sum_{i=1}^{p+q+1} (i-j)^2 \big(\partial_i G\big(u(x,t),\dots,u(x,t)\big) u_x\big)_x + \mathcal{O}(\Delta x^3).$$

Como u es una solución suave, se tiene que

$$u(x,t+\Delta t) = u(x,t) - \Delta t f\big(u(x,t)\big)_x + \frac{\Delta x^2}{2} \big((f'(u))^2 u_x\big)_x + \mathcal{O}(\Delta t^3).$$

Es decir, definiendo

$$\beta(u) := \sum_{i=0}^{p+q+1} (i-j)^2 \partial_i G(u,\dots,u) - \lambda^2 \big(f'(u)\big)^2$$

obtenemos la relación

$$L_{\Delta t} = \frac{\Delta t}{2\lambda} \big(\beta(u) u_x\big)_x + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Es decir, si $\beta > 0$, el método es de primer orden.

En nuestros cálculos aún no hemos utilizado que el método es monótono. La monotonía significa que $\partial_i G \geqslant 0$, por lo tanto $\sqrt{\partial_i G}$ es bien definida. En este caso se tiene que

$$\big|-\lambda f'(u)\big| = \left| \sum_{i=0}^{p+q+1} (i-j) \partial_i G(u,\dots,u) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{p+q+1} |i-j| \sqrt{\partial_i G(u,\dots,u)} \sqrt{\partial_i G(u,\dots,u)}.$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (4.24) obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda^2 \big(f'(u)\big)^2 &\leqslant \left(\sum_{i=0}^{p+q+1} (i-j)^2 \partial_i G(u,\dots,u) \right) \left(\sum_{i=0}^{p+q+1} \partial_i G(u,\dots,u) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{p+q+1} (i-j)^2 \partial_i G(u,\dots,u). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Es decir, $\beta(u) \geqslant 0$, e incluso $\beta(u) > 0$ si más de un término en la suma en (4.26) es diferente de cero. Pero si

$$\partial_i G(u,\dots u) \begin{cases} \neq 0 & \text{para } i = k \\ = 0 & \text{en los demás casos,} \end{cases}$$

entonces se tiene que

$$G(u_0,\dots,u_{p+q+1}) = u_k,$$

y el método es una traslación lineal, y a partir de la consistencia se tiene que

$$f(u) = cu, \quad c = \frac{j-k}{\lambda}.$$

Acabamos de demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.5. *Si el flujo numérico F es tres veces continuamente diferenciable y el método correspondiente es monótono, entonces este método posee el orden precisión a lo más uno.*

4.4. Métodos de orden mayor

4.4.1. Métodos de orden mayor discretos en el espacio y en el tiempo. En lo siguiente queremos desarrollar una aproximación de segundo orden a la solución de una ley de conservación $u_t + f(u)_x = 0$. Para desarrollar un método que sea de segundo orden de precisión, el error de truncación local debe ser de tercer orden en Δt. Para una solución suave se tiene que

$$\begin{aligned} u(x,t+\Delta t) &= u(x,t) + \Delta t u_t(x,t) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(x,t) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &= u(x,t) - \Delta t f\bigl(u(x,t)\bigr)_x - \frac{\Delta t^2}{2} f\bigl(u(x,t)\bigr)_{xt} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &= u - \Delta t f(u)_x + \frac{\Delta t^2}{2}\bigl(f'(u)f(u)_x\bigr)_x + \mathcal{O}(\Delta t^3). \end{aligned}$$

Para un método de diferencias se tiene $\Delta x = \mathcal{O}(\Delta t)$, es decir si el método resultante es de segundo orden, entonces la aproximación de diferencias de $f(u)_x$ debe ser de segundo orden y la aproximación de $(f(u)f(u)_x)_x$ puede ser de primer orden. Definiendo

$$\mathrm{D}_0 g(x) = \frac{g(x+\Delta x) - g(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

podemos utilizar el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} f\bigl(u(x,t)\bigr)_x &= \mathrm{D}_0 f\bigl(u(x,t)\bigr) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ &= \frac{f(u(x+\Delta x),t) - f(u(x-\Delta x),t)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ \Bigl(f'\bigl(u(x,t)\bigr) f\bigl(u(x,t)\bigr)_x\Bigr)_x &= \frac{1}{\Delta x}\Biggl(f'\biggl(u\biggl(x+\frac{\Delta x}{2},t\biggr)\biggr)\frac{f(u(x+\Delta x),t) - f(u(x,t))}{\Delta x} \\ &\qquad - f'\biggl(u\biggl(x-\frac{\Delta x}{2},t\biggr)\biggr)\frac{f(u(x,t)) - f(u(x-\Delta x),t)}{\Delta x}\Biggr) + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ f'\biggl(u\biggl(x\pm\frac{\Delta x}{2},t\biggr)\biggr) &= \frac{f(u(x\pm\Delta x,t)) - f(u(x,t))}{u(x\pm\Delta x,t) - u(x,t)} + \mathcal{O}(\Delta u^2). \end{aligned}$$

Esto implica el método numérico

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}\bigl(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n\bigr) + \frac{\lambda^2}{2}\bigl(\nu_{j+1/2}^2 \Delta_+ u_j^n - \nu_{j-1/2}^2 \Delta_- u_j^n\bigr), \tag{4.27}$$

donde

$$\lambda = \Delta t/\Delta x, \quad f_j^n = f\bigl(u_j^n\bigr), \quad \Delta_\pm v_j = \pm(v_{j\pm1} - v_j), \quad \nu_{j+1/2} = \Delta_+ f_j^n / \Delta_+ u_j^n.$$

El método (4.27) es el *método de Lax-Wendroff* que es de segundo orden por construcción. Este es un método conservativo definido por el flujo numérico $F_{j+1/2} = F(u_j, u_{j+1})$, donde

$$F(u,v) = \frac{1}{2}\bigl(f(v) + f(u) - \lambda\nu^2(u,v)(v-u)\bigr), \quad \nu(u,v) = \frac{f(v) - f(u)}{v-u}.$$

Este flujo numérico ya ha sido utilizado en el Ejemplo 4.3, ver (4.16).

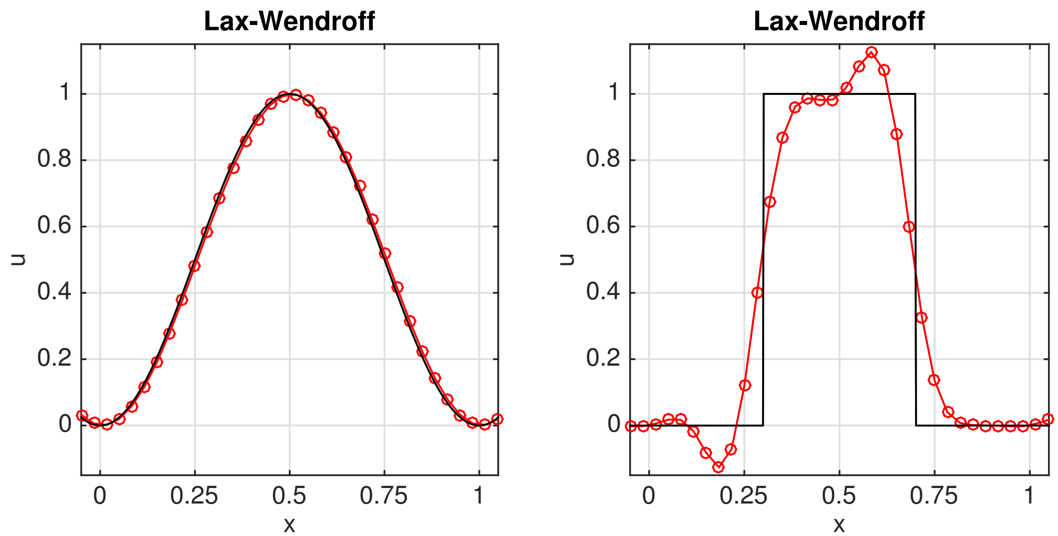


FIGURA 4.7. Ejemplo 4.6: solución de la ecuación de transporte $u_t + u_x = 0$ con el método de Lax-Wendroff con dato inicial (izquierda) suave, (derecha) discontinuo constante a trozos.

Ejemplo 4.6 (Comportamiento del método de Lax-Wendroff)**.** *Consideramos la ecuación de transporte $u_t + u_x = 0$ con los datos iniciales 1-periódicos*

$$u_{0,1}(x) = \sin^2(\pi x); \quad u_{0,2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lfloor x \rfloor \in [0{,}3, 0{,}7], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La Figura 4.7 muestra el resultado numérico obtenido a partir de cada una de estas funciones iniciales con el método de Lax-Wendroff al tiempo $T = 3$ (para el cual $u(x,t) = u_{0,i}(x)$, $i = 1, 2$), obtenido con $\Delta x = 1/30$ y $\lambda = \Delta t/\Delta x = 0{,}95$. Observamos que para la solución exacta suave, el método entrega resultados de alta precisión, y los errores efectivamente son de segundo orden. Para la solución discontinua los errores parecen ser grandes, y observamos también marcadas oscilaciones.

Supongamos por ahora que $f' \geqslant 0$, lo que asegura que el método *upwind* es monótono (y por lo tanto TVD). Si f no es monótona, entonces el flujo *upwind* utilizado abajo debe ser reemplazado por un flujo numérico que entrega un método monótono.

El flujo numérico de Lax-Wendroff puede ser escrito como

$$F^n_{j+1/2} = \underbrace{f\bigl(u^n_j\bigr)}_{\text{upwind}} - \underbrace{\frac{\nu_{j+1/2}}{2}(\lambda\nu_{j+1/2} - 1)\Delta_+ u^n_j}_{\text{corrección de segundo orden}}.$$

Queremos modificar el método de Lax-Wendroff de tal manera que el método sea localmente de segundo orden donde la solución es suave, y de primer orden y monótono cerca de discontinuidades. Por lo tanto queremos “apagar” la corrección de segundo orden cerca de discontinuidades. Una manera de llevar esto a cabo consiste en observar que las oscilaciones ocurren cerca de discontinuidades (éste es el fenómeno de Gibbs), y utilizar las oscilaciones como indicador cuando los términos de segundo orden deberían ser apagados. Un importante efecto secundario consiste en que esto convierte el método resultante en un método TVD. Para tal efecto sea r_j (cuya forma exacta será especificada más adelante) un "indicador de oscilaciones cerca de x_j". Se supone que si hay oscilaciones, entonces $r_j < 0$. Supongamos, además, que $\phi = \phi(r)$ es una función continua tal que $\phi(r) = 0$ si $r < 0$. De acuerdo a lo anterior, modificamos el flujo numérico de Lax-Wendroff como sigue:

$$F_{j+1/2}^n = f\big(u_j^n\big) - \phi(r_j)\frac{\nu_{j+1/2}}{2}(\lambda\nu_{j+1/2} - 1)\Delta_+ u_j^n. \tag{4.28}$$

Si definimos

$$\alpha_{j+1/2} := \frac{\nu_{j+1/2}}{2}(1 - \lambda\nu_{j+1/2}),$$

entonces el método modificado puede ser escrito como

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda\Delta_- f_j^n - \lambda\Delta_-\big(\phi(r_j)\alpha_{j+1/2}\Delta_+ u_j^n\big) \\ &= u_j^n - \lambda\nu_{j-1/2}\Delta_- u_j^n - \lambda\Delta_-\big(\phi(r_j)\alpha_{j+1/2}\Delta_+ u_j^n\big) \\ &= u_j^n - \lambda\left(\nu_{j-1/2} + \frac{\Delta_-(\phi(r_j)\alpha_{j+1/2}\Delta_+ u_j^n)}{\Delta_- u_j^n}\right)\Delta_- u_j^n \\ &= u_j^n - A_{j-1/2}\Delta_- u_j^n, \end{aligned}$$

donde definimos

$$A_{j-1/2} := \lambda\nu_{j-1/2} + \lambda\frac{\Delta_-(\phi(r_j)\alpha_{j+1/2}\Delta_+ u_j^n)}{\Delta_- u_j^n}.$$

En este punto el siguiente lema es conveniente.

Lema 4.1 (Lema de Harten). *Sea* $\Delta_\pm u_j = \pm(u_{j\pm 1} - u_j)$ *y* v_j *dado por*

$$v_j = u_j - A_{j-1/2}\Delta_- u_j + B_{j+1/2}\Delta_+ u_j. \tag{4.29}$$

(i) *Supongamos que para todo* $j \in \mathbb{Z}$,

$$A_{j+1/2} \geqslant 0, \quad B_{j+1/2} \geqslant 0, \quad A_{j+1/2} + B_{j+1/2} \leqslant 1.$$

Entonces $\mathrm{TV}(\boldsymbol{v}) \leqslant \mathrm{TV}(\boldsymbol{u})$.

(ii) *Supongamos que para todo* $j \in \mathbb{Z}$,

$$A_{j+1/2} \geqslant 0, \quad B_{j+1/2} \geqslant 0, \quad A_{j-1/2} + B_{j+1/2} \leqslant 1.$$

Entonces para todo $j \in \mathbb{Z}$, $\min_{k\in\mathbb{Z}} u_k \leqslant v_j \leqslant \max_{k\in\mathbb{Z}} u_k$.

Demostración.

(i) Tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_+ v_j &= u_{j+1} - u_j - A_{j+1/2}\Delta_+ u_j + B_{j+3/2}\Delta_+ u_{j+1} \\ &\qquad + A_{j-1/2}\Delta_- u_j - B_{j+1/2}\Delta_+ u_j \\ &= (1 - A_{j+1/2} - B_{j+1/2})\Delta_+ u_j + A_{j-1/2}\Delta_- u_j + B_{j+3/2}\Delta_+ u_{j+3/2}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_+ v_j| &\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}(1-A_{j+1/2}-B_{j+1/2})|\Delta_+ u_j| + \sum_{j\in\mathbb{Z}} A_{j-1/2}|\Delta_- u_j| \\ &\quad + \sum_{j\in\mathbb{Z}} B_{j+3/2}|\Delta_+ u_{j+3/2}| \\ &\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_+ u_j|.\end{aligned}$$

(ii) Podemos escribir (4.29) como

$$v_j = A_{j-1/2}u_{j-1} + (1-A_{j-1/2}-B_{j+1/2})u_j + B_{j+1/2}u_{j+1},$$

lo que implica el enunciado.

■

Ahora deseamos elegir ϕ y r en tal forma que podemos utilizar el Lema 4.1 con $B_{j+1/2}=0$ para concluir que el método resultante es TVD. Notamos que en virtud de la condición CFL, $\lambda \max_u f'(u) \leqslant 1$, luego $\alpha_{j+1/2} \geqslant 0$ y $\lambda\alpha_{j+1/2} \leqslant 1$. Definimos ahora

$$r_j = \frac{\alpha_{j-1/2}\Delta_- u_j}{\alpha_{j+1/2}\Delta_+ u_j}. \tag{4.30}$$

Para comprobar que esta cantidad efectivamente es un "indicador de oscilaciones", notamos que como hemos supuesto que $f' \geqslant 0$, se tiene que $\nu_{j+1/2} \geqslant 0$ para todo j, y en virtud de la condición CFL, $\lambda\nu_{j+1/2} \leqslant 1$ para todo j, luego $\alpha_{j+1/2} \geqslant 0$ para todo j. Decimos que "oscilaciones" están presentes en x_j si u_j es un máximo o mínimo local. Si esto sucede, entonces $\operatorname{sgn}(\Delta_- u_j) \neq \operatorname{sgn}(\Delta_+ u_j)$, y por lo tanto $r_j \leqslant 0$. También calculamos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_-(\phi(r_j)\alpha_{j+1/2}\Delta_+ u_j^n)}{\Delta_- u_j^n} &= \frac{\phi(r_j)\alpha_{j+1/2}\Delta_+ u_j^n - \phi(r_{j-1})\alpha_{j-1/2}\Delta_- u_j^n}{\Delta_- u_j^n} \\ &= \alpha_{j-1/2}\biggl(\frac{\phi(r_j)}{r_j} - \phi(r_{j-1})\biggr),\end{aligned}$$

es decir

$$A_{j+1/2} = \lambda\biggl(\nu_{j+1/2} + \alpha_{j+1/2}\biggl(\frac{\phi(r_{j+1})}{r_{j+1}} - \phi(r_j)\biggr)\biggr).$$

Supongamos que

$$\max\biggl\{\frac{\phi(r)}{r}, \phi(r)\biggr\} \leqslant 2, \quad \text{o } 0 \leqslant \phi(r) \leqslant \max\bigl\{0, \min\{2r, 2\}\bigr\}. \tag{4.31}$$

Bajo esta hipótesis, se tiene que

$$\left|\frac{\phi(r)}{r} - \phi(s)\right| \leqslant 2 \quad \text{para todo } r \text{ y } s,$$

lo que implica que

$$A_{j+1/2} \leqslant \lambda(\nu_{j+1/2} + 2\alpha_{j+1/2}) = \lambda\bigl(\nu_{j+1/2} + \nu_{j+1/2}(1-\lambda\nu_{j+1/2})\bigr) = \lambda\bigl(2\nu_{j+1/2} - \lambda\nu_{j+1/2}^2\bigr)$$

$$= 1 - (1 - \lambda\nu_{j+1/2})^2 \leqslant 1,$$

$$A_{j+1/2} \geqslant \lambda(\nu_{j+1/2} - 2\alpha_{j+1/2}) = \lambda\bigl(\nu_{j+1/2} - \nu_{j+1/2}(1 - \lambda\nu_{j+1/2})\bigr) = (\lambda\nu_{j+1/2})^2 \geqslant 0.$$

Resumiendo, acabamos de demostrar el siguiente resultado.

Lema 4.2. *Supongamos que $f' \geqslant 0$. Sea r_j definido por* (4.30), *y supongamos que $\lambda > 0$ satisface la condición CFL $\lambda \max_u f'(u) \leqslant 1$. Supongamos, además, que la función ϕ es elegida tal que $\phi(r) = 0$ para $r \leqslant 0$ y que la condición* (4.31) *está satisfecha. Entonces el método de volumenes finitos definido por el flujo numérico* (4.28) *es TVD.*

Eligiendo $\phi(r) = r$ obtenemos otro método, conocido como *método de Beam-Warming* (BW). Este método también es de segundo orden, pero no es TVD. Obviamente, el método de Lax-Wendroff (LW) corresponde a $\phi \equiv 1$.

Si (por el momento) no nos preocupamos de la propiedad TVD, podemos definir una familia de métodos de segundo orden por interpolación lineal entre los métodos de Beam-Warming y de Lax-Wendroff. Esta interpolación puede ser realizada localmente, es decir eligimos

$$\phi(r) = \bigl(1 - \theta(r)\bigr)\phi_{\mathrm{LW}}(r) + \theta(r)\phi_{\mathrm{BW}}(r).$$

El método correspondiente es

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda\Delta_- f_j^n - \lambda\Delta_-\bigl(\phi(r_j)\alpha_{j+1/2}\Delta_+ u_j^n\bigr) \\ &= u_j^n - \lambda\Delta_-\bigl(f_j^n + \phi(r_j)\alpha_{j+1/2}\Delta_+ u_j^n\bigr). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Sea ahora $u_j^n = u(x_j, t_n)$ la solución exacta, entonces podemos calcular

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j - \lambda\Delta_- f_j - \lambda\Delta_-\Bigl(\bigl((1 - \theta(r_j)) + \theta(r_j) r_j\bigr)\alpha_{j+1/2}\Delta_+ u_j\Bigr) \\ &= \bigl(1 - \theta(r_j)\bigr)\bigl(u_j - \lambda\Delta_- f_j - \lambda\Delta_-(\alpha_{j+1/2}\Delta_+ u_j)\bigr) \\ &\quad + \theta(r_j)\bigl(u_j - \lambda\Delta_- f_j - \lambda\Delta_-(r_j\alpha_{j+1/2}\Delta_+ u_j)\bigr) - \lambda\alpha_{j-1/2}(r_{j-1} - 1)\Delta_- u_j \Delta_-\theta(r_j). \end{aligned}$$

Esto significa que

$$\begin{aligned} u(x_j, t + \Delta t) - u_j^{n+1} &= \bigl(1 - \theta(r_j)\bigr)\{\text{“error truncación LW”}\} \\ &\quad + \theta(r_j)\{\text{“error truncación BW”}\} - \lambda \underbrace{\alpha_{j-1/2}(r_{j-1} - 1)\Delta_- u_j \Delta_-\theta(r_j)}_{=:I}. \end{aligned}$$

Si $I = \mathcal{O}(\Delta t^2)$, entonces la combinación de los métodos LW y BW es de segundo orden. En virtud de la condición CFL, $0 \leqslant \lambda\alpha_{j-1/2} \leqslant 1$. Además, si u es una solución exacta suave,

$$\alpha_{j+1/2}\frac{\Delta_+ u_j}{\Delta x} = f'(u)\bigl(1 - \lambda f'(u)\bigr)u_x\big|_{x = x_{j+1/2}} + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Recordando la defintión (4.30) de r_j y definiendo $h(x) := f'(u(x,t))(1 - \lambda f'(u(x,t)))u_x$ obtenemos

$$\begin{aligned} \bigl|\alpha_{j-1/2}(r_{j-1} - 1)\Delta_- u_j\bigr| &= \bigl|\Delta_-(\alpha_{j-1/2}\Delta_+ u_{j-1})\bigr| = \Delta x\bigl|h(x_{j-1/2}) - h(x_{j-3/2}) + \mathcal{O}(\Delta x^2)\bigr| \\ &\leqslant \Delta x^2 \max_{(x,t)}\bigl|h'(x)\bigr| + \mathcal{O}(\Delta x^3). \end{aligned}$$

Esto significa que para demostrar que $I = \mathcal{O}(\Delta t^3)$ basta demostrar que $\Delta_- \theta_j = \mathcal{O}(\Delta t)$. Pero como θ es una función suave con valores en $[0,1]$, tenemos

$$\begin{aligned}
\bigl|\Delta_-\theta(r_j)\bigr| &= \bigl|\theta(r_j) - \theta(r_{j-1})\bigr| \leqslant C|r_j - r_{j-1}| \\
&\leqslant C\left|\frac{\alpha_{j-1/2}\Delta_- u_j}{\alpha_{j+1/2}\Delta_+ u_j} - \frac{\alpha_{j-3/2}\Delta_- u_{j-1}}{\alpha_{j-1/2}\Delta_- u_j}\right| \\
&= C\left|\frac{h_{j-1/2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)}{h_{j+1/2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)} - \frac{h_{j-3/2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)}{h_{j-1/2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)}\right| \\
&= C\left|\frac{h_{j-1/2}^2 - h_{j+1/2}h_{j-3/2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)}{h_{j+1/2}h_{j-1/2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)}\right| \\
&\leqslant C\frac{\Delta x \operatorname{máx}_{(x,t)} |h'(x)| + \mathcal{O}(\Delta x^2)}{h_{j+1/2}h_{j-1/2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)} = \mathcal{O}(\Delta t).
\end{aligned}$$

Así hemos demostrado que si θ es una función Lipschitz continua, entonces el método resultante es de segundo orden.

Volviendo a la función ϕ, hemos demostrado que el método (4.32) es de segundo orden si ϕ es Lipschitz continua y

$$\operatorname{mín}\{1, r\} \leqslant \phi(r) \leqslant \operatorname{máx}\{1, r\}. \tag{4.33}$$

Si ϕ satisface tanto (4.31) como (4.33), entonces el método resultante (4.32) es TVD y de segundo orden lejos de extremos locales. El método también genera una sucesión convergente de aproximaciones, y el límite es una solución débil (demostrar esto es una tarea).

La función ϕ se llama limitador o *limiter*; a continuación presentamos una selección de funciones populares de este tipo. Tal como ilustra la Figura 4.8, todas de ellas satisfacen tanto (4.31) como (4.33):

$$\phi(r) = \operatorname{máx}\bigl\{0, \operatorname{mín}\{r, 1\}\bigr\} \qquad \text{(minmod)}, \tag{4.34}$$

$$\phi(r) = \operatorname{máx}\bigl\{0, \operatorname{mín}\{2r, 1\}, \operatorname{mín}\{r, 2\}\bigr\} \qquad \text{(superbee)}, \tag{4.35}$$

$$\phi(r) = \frac{|r| + r}{1 + r} \qquad \text{(van Leer)}, \tag{4.36}$$

$$\phi(r) = \frac{r^2 + r}{1 + r^2} \qquad \text{(van Albada)}, \tag{4.37}$$

$$\phi(r) = \operatorname{máx}\bigl\{0, \operatorname{mín}\{r, \beta\}\bigr\}, \quad 1 \leqslant \beta \leqslant 2 \qquad \text{(Chakravarthy \& Osher)}. \tag{4.38}$$

Ejemplo 4.7 (Uso del *limiter* de van Leer)**.** *En este ejemplo consideramos nuevamente la ecuación $u_t + f(u)_x = 0$ con la función inicial $u_{0,2}$ del Ejemplo 4.6. Calculamos la solución numérica para $T = 3$ y $\lambda = 0{,}95$ con los métodos* upwind*, de Lax-Wendroff, de Beam-Warming, y con el método* (4.32) *basado en el* limiter *de van Leer* (4.36)*. La Figura 4.9 muestra los resultados numéricos (la solución numérica para el método de Lax-Wendroff es la misma del Ejemplo 4.6). Observamos que ambos esquemas de Lax-Wendroff y de Beam-Warming generan oscilaciones marcadas, pero la solución generada por el uso del* limiter

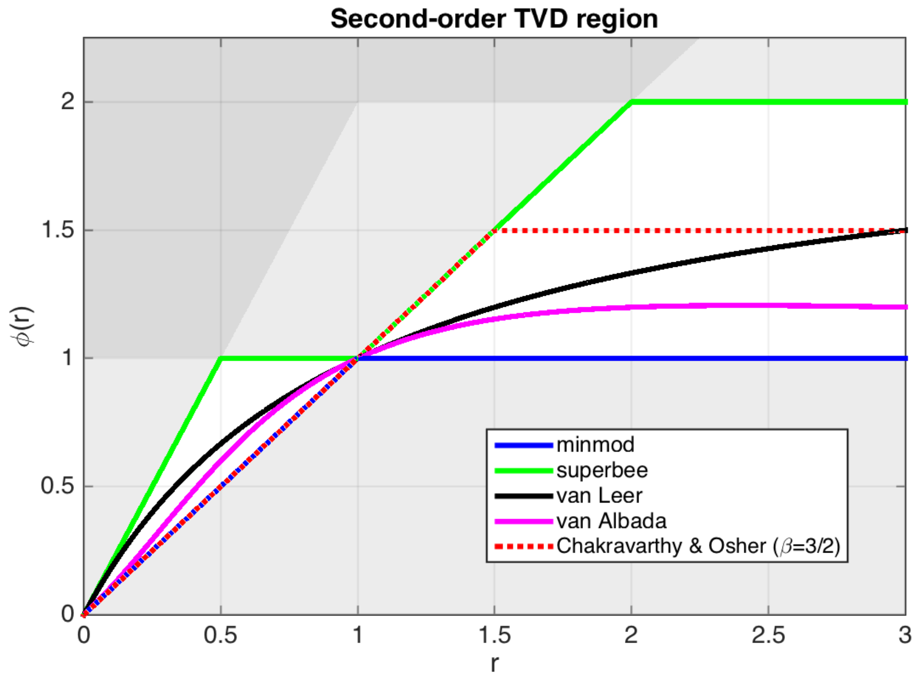


FIGURA 4.8. Grafos de funciones *limiter* $\phi = \phi(r)$. El grafo debe pertencer a la región blanca, en la cual ambas condiciones, tanto (4.31) como (4.33), están satisfechas. En la región gris claro solamente una de las condiciones está satisfecha; en la zona gris oscuro ninguna.

de van Leer no es oscilatoria. A su vez, esta solución es de calidad superior que la solución generada por el método upwind. *Los métodos de este tipo son frecuentamente llamados métodos* flux limiter, *ya que limitan la contribución del flujo numérico de orden mayor.*

4.4.2. Métodos de orden mayor semi-discretos. Consideremos ahora métodos de orden mayor donde (inicialmente) no se discretiza el tiempo, sólo el espacio. Basándonos en el planteo de métodos de volumenes finitos podemos escribir tales métodos como

$$u_j'(t) = -\frac{1}{\Delta x}(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{4.39}$$

donde $u_j(t)$ es alguna aproximación del promedio de u sobre la celda $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$. Si el lado derecho de (4.39) es una aproximación de segundo orden de $-f(u)_x$ para funciones suaves $u = u(x)$, entonces se dice que el método tiene precisión de segundo orden. Para lograr segundo orden también en el tiempo, podríamos utilizar un método Runge-Kutta para integrar (4.39) numéricamente. Un método de este tipo es el *método de Heun*:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j^n &= u_j^n - \lambda(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}), \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\lambda}{2}(\tilde{F}_{j+1/2} - \tilde{F}_{j-1/2}) - \frac{\lambda}{2}(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}). \end{aligned} \tag{4.40}$$

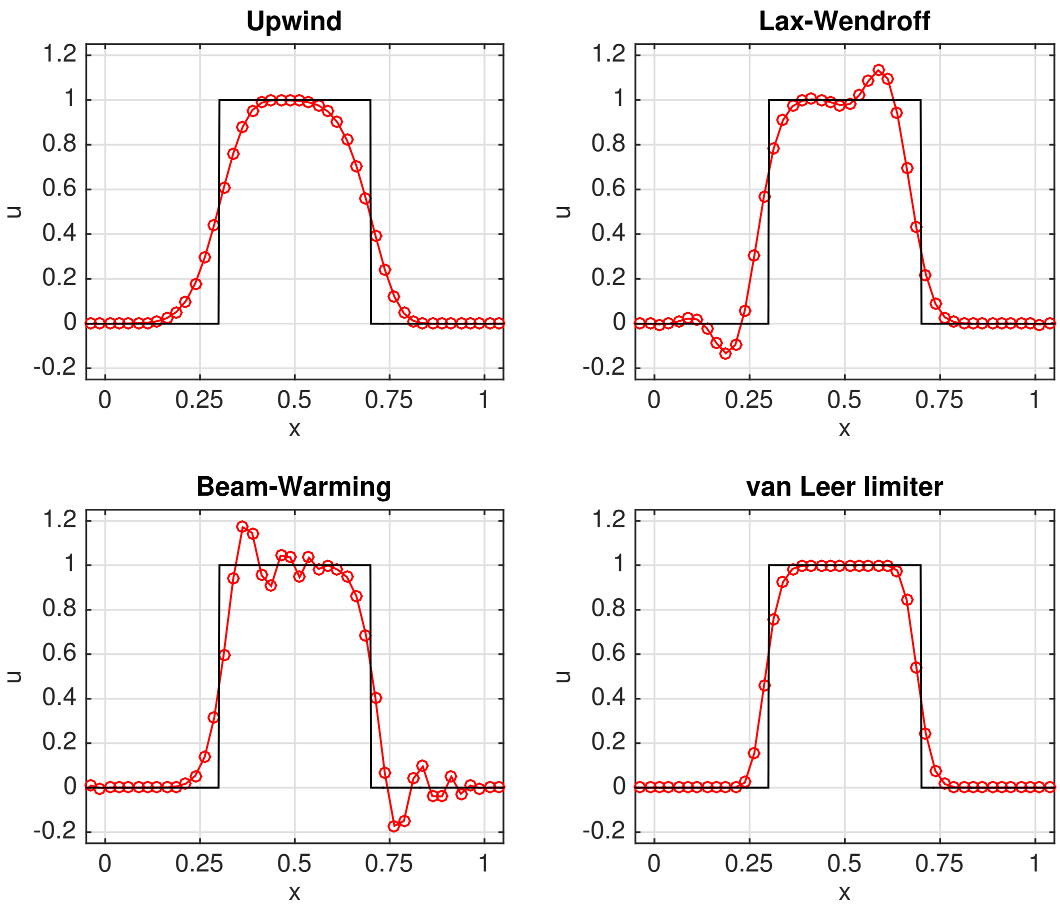


FIGURA 4.9. Ejemplo 4.7: solución numérica de la ecuación de transporte por los métodos *upwind*, de Lax-Wendroff, de Beam-Warming, y el método (4.32) basado en el *limiter* de van Leer (4.36).

La manera más simple de lograr precisión de segundo orden consiste en elegir

$$F_{j+1/2} = f\left(\frac{u_j + u_{j+1}}{2}\right). \tag{4.41}$$

Sin embargo esto no resulta en un método viable en combinación con un método de Euler de primer orden para la discretización en el tiempo. Esta combinación no es estable (en el sentido de la estabilidad de von Neumann. Para ver esto, consideremos $f(u) = u$. Utilizando el método de Euler explícito, obtenemos

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j+1} - u_{j-1}).$$

Utilizando el planteo $u_j^n = \mu_n \exp(\mathrm{i}j\Delta x)$ (donde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$) obtenemos

$$\mu_{n+1} = \mu_n(1 + \mathrm{i}\lambda \sin(\Delta x)).$$

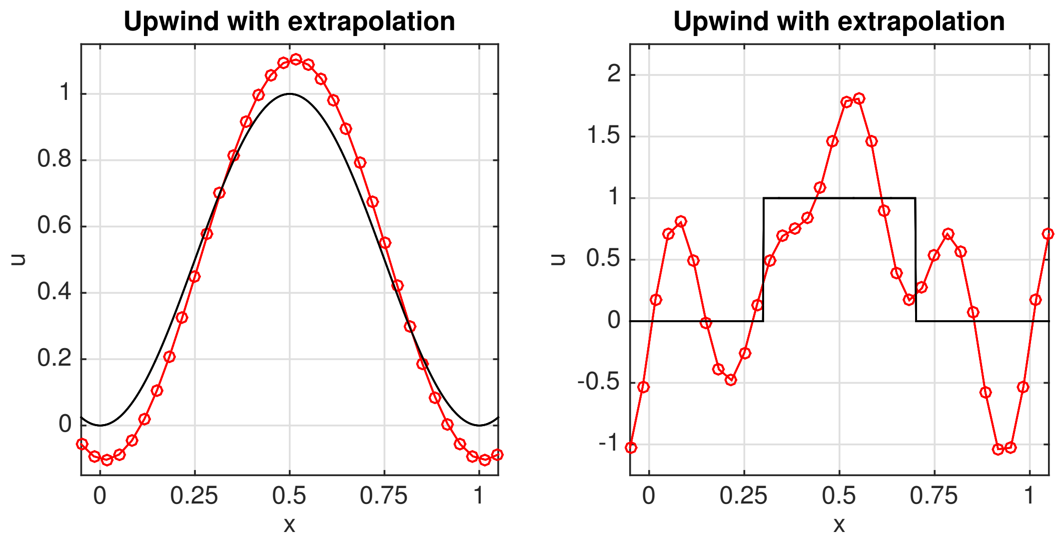


FIGURA 4.10. Ejemplo 4.8: solución de la ecuación de transporte $u_t + u_x = 0$ con el método *upwind* con extrapolación con dato inicial (izquierda) suave, (derecha) discontinuo constante a trozos.

Esto significa que

$$|\mu_{n+1}| = |\mu_n|\sqrt{1+\lambda^2\sin^2(\Delta x)} \Rightarrow |\mu_n| = |\mu_0|\bigl(1+\lambda^2\sin^2(\Delta x)\bigr)^{n/2},$$

es decir el método es incondicionalmente inestable. También utilizando el método de segundo orden de Heun en combinación con (4.41) resulta en un método inestable (Tarea). Es decir la elección (4.41) es de segundo orden pero inútil.

Una medida para corregir esto consiste en el uso de variables extrapoladas. Se definen los siguientes valores asociados con el extremo izquierdo y derecho de una celda:

$$u^{\mathrm{L}}_{j+1/2} = u_j + \frac{1}{2}\Delta_- u_j, \quad u^{\mathrm{R}}_{j-1/2} = u_j - \frac{1}{2}\Delta_+ u_j. \tag{4.42}$$

Luego podemos utilizar cualquier flujo monótono de primer orden de dos puntos para definir una aproximación de segundo orden

$$f\bigl(u(x)\bigr)_x = \frac{1}{\Delta x}\Bigl(F\bigl(u^{\mathrm{L}}_{j+1/2}, u^{\mathrm{R}}_{j+1/2}\bigr) - F\bigl(u^{\mathrm{L}}_{j-1/2}, u^{\mathrm{R}}_{j-1/2}\bigr)\Bigr) + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Pero incluso si utilizamos el método de Heun, los valores extrapolados (4.42) no entregan un método TVD. Esto no es sorpresa, considerando que el método es de segundo orden. Para simplificar la discusión supongamos que $f' \geqslant 0$, y que el flujo numérico es el flujo *upwind*, es decir $F(u,v) = f(u)$. En este caso resulta el método

$$u^{n+1}_j = u^n_j - \lambda\bigl(f\bigl(u^{\mathrm{L}}_{j+1/2}\bigr) - f\bigl(u^{\mathrm{L}}_{j-1/2}\bigr)\bigr). \tag{4.43}$$

Ejemplo 4.8 (Método upwind con extrapolación). *Consideremos nuevamente el problema de valores iniciales del Ejemplo 4.6. La Figura 4.10 muestra los resultados numéricos obtenidos para $\Delta x = 1/30$ y $\lambda = 0{,}3$ al instante $T = 1$, para el cual la solución exacta coincide con* *el dato inicial periódico. Utilizamos el flujo numérico* upwind $F(u,v)=f(u)=u$ *en combinación con la extrapolación* (4.42)*, es decir el método numérico* (4.43)*. Observamos que para el dato inicial suave* $u_{0,1}$*, la aproximación es "razonablemente cerca" de la función correcta, mientras que para el dato inicial discontinuo* $u_{0,2}$*, la aproximación tiene poca relación con la solució exacta.*

Estos resultados sugieren que el método mejora si utilizamos algún *limiter* para definir los valores extrapolados $u^{\mathrm{L,R}}_{j+1/2}$. Para tal efecto sea $\phi=\phi(r_j)$, donde r_j está por definir, y redefinimos las extrapolaciones como

$$u^{\mathrm{L}}_{j+1/2}=u_j+\frac{1}{2}\phi_j\Delta_-u_j,\quad u^{\mathrm{R}}_{j-1/2}=u_j-\frac{1}{2}\phi_j\Delta_+u_j. \tag{4.44}$$

Seguimos suponiendo que $f'\geqslant 0$. Por ejemplo, si el flujo numérico es el flujo *upwind*, es decir $F(u,v)=f(u)$, seguimos trabajando el flujo numérico (4.43), pero se utiliza la definición de las variables extrapoladas (4.44) (con la debida definición de ϕ_j en lugar de (4.42)).

Queremos definir r_j e identificar condiciones para ϕ que aseguran que este método es TVD pero formalmente preserva la precisión de segundo orden lejos de oscilaciones. Para poder aplicar el Lema 4.1, escribimos el esquema como

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\lambda\frac{\Delta_-f(u^{\mathrm{L}}_{j+1/2})}{\Delta_-u_j^n}\Delta_-u_j^n,$$

donde hemos utilizado un método de Euler de primer orden para la integración en el tiempo. Esto, por supuesto, destruirá la precisión de segundo orden, pero la medida es conveniente para el análisis. Si definimos

$$A_{j-1/2}:=\lambda\frac{\Delta_-f(u^{\mathrm{L}}_{j+1/2})}{\Delta_-u_j^n},$$

el método será TVD si $0\leqslant A_{j+1/2}\leqslant 1$. Omitiendo el índice superior n, calculamos

$$\begin{aligned}A_{j-1/2}&=\lambda f'(\tilde{u}_j)\frac{1}{\Delta_-u_j}\biggl(u_j+\frac{\phi_j}{2}\Delta_-u_j-u_{j-1}-\frac{\phi_{j-1}}{2}\Delta_-u_{j-1}\biggr)\\&=\lambda f'(\bar{u}_j)\biggl(\biggl(1+\frac{\phi_j}{2}\biggr)-\frac{\phi_{j-1}}{2}\frac{\Delta_-u_{j-1}}{\Delta_-u_j}\biggr),\end{aligned}$$

donde $\bar{u}_j$ el algún valor entre $u^{\mathrm{L}}_{j-1/2}$ y $u^{\mathrm{L}}_{j+1/2}$. Si elegimos $r_j=\Delta_+u_j/\Delta_-u_j$, esto puede ser escrito como

$$A_{j-1/2}=\lambda f'(\bar{u}_j)\biggl(1-\frac{1}{2}\biggl(\frac{\phi(r_{j-1})}{r_{j-1}}-\phi(r_j)\biggr)\biggr).$$

Queremos asegurar que el método satisface la condición CFL $\lambda\max_u f'(u)\leqslant 1/2$. En este caso se tiene $0\leqslant A_{j-1/2}\leqslant 1$ si

$$0\leqslant 1-\frac{1}{2}\biggl(\frac{\phi(r_{j-1})}{r_{j-1}}-\phi(r_j)\biggr)\leqslant 2,$$

o equivalentemente

$$-2 \leqslant \frac{\phi_{j-1}}{r_{j-1}} - \phi_j \leqslant 2.$$

Esto sucede si $0 \leqslant \phi(r) \leqslant \min\{2r, 2\}$, lo que entrega la misma región TVD que para el método *flux limiter*, ver Figura 4.8.

La elección con $\phi \equiv 1$ no es TVD, pero de segundo orden, y la opción $\phi(r) = r$ entrega el método (inútil) de segundo orden con el flujo numérico (4.41). Tal como antes concluimos que cualquier combinación convexa suave (en r) de estos dos métodos será de segundo orden, es decir se obtiene la misma región de segundo orden que en la Figura 4.8. Concluimos que la selección de las funciones *limiter* es la misma que antes. Cada elección entrega un esquema formalmente de segundo orden de precisión lejos de extremos locales. Este método se llama *método MUSCL* (*monotone upstream centered scheme for conservation laws*).

Ejemplo 4.9 (Métodos *upwind* y métodos de alta resolución)**.** *Para ilustrar algunos de los métodos definidos anteriormente consideremos nuevamente los dos escenarios del Ejemplo 4.6. Se evalua la solución en* $T = 3$ *(instante en el cual coincide con el dato inicial) y se utiliza* $\lambda = \Delta t/\Delta x = 0{,}49$*. La Figuras 4.11 y 4.12 muestran los resultados obtenidos por el método upwind de primer orden; el método* flux limiter *basado en el* limiter *de van Leer* (4.36) *pero con discretización de primer orden en el tiempo; el método MUSCL basado en el método* upwind*, la extrapolación espacial limitada por el* limiter *de van Leer* (4.36) *con discretización temporal de primer orden (MUSCL-1), y el método MUSCL basado en el método* upwind*, la extrapolación espacial limitada por el* limiter *de van Leer* (4.36) *pero con discretización temporal de segundo orden (MUSCL-2) de acuerdo al método de Heun* (4.40)*. La Figuras 4.11 muestra los resultados para* $\Delta x = 1/10$ *y* $\Delta x = 1/20$*, y la Figura 4.12, para* $\Delta x = 1/40$ *y* $\Delta x = 1/200$*. Observamos que todos los métodos convergen a la solución exacta respectiva. Es interesante notar que para el caso de la función inicial suave, el método MUSCL-1 genera una solución con "peldaños", mientras que el método MUSCL-2 genera una aproximación mejor de la verdadera solución suave.*

4.5. Ejercicios

Problem 4.1. Consideremos el método no conservativo (4.7). Demostrar que si

$$u_j^0 = \begin{cases} 0 & \text{para } j < 0, \\ 1 & \text{para } j \geqslant 0, \end{cases}$$

entonces $u_j^n = u_j^0$ para todo n, lo que indica la solución $u(x,t) = \chi_{[0,\infty)}(x)$. Comparar con la solución de entropía del problema.

Problem 4.2. Se considera la ley de conservación

$$v_t + av_x = 0, \quad a > 0, \quad \text{es decir } f(v) = av,$$

junto con el par de entropía (η, q) dado por $\eta(u) = |u - c|$ y $q(u) = \operatorname{sgn}(u - c)(f(u) - f(c))$, $c \in \mathbb{R}$, y el esquema numérico

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda a\big(u_j^n - u_{j-1}^n\big), \quad \lambda = \Delta t/\Delta x.$$

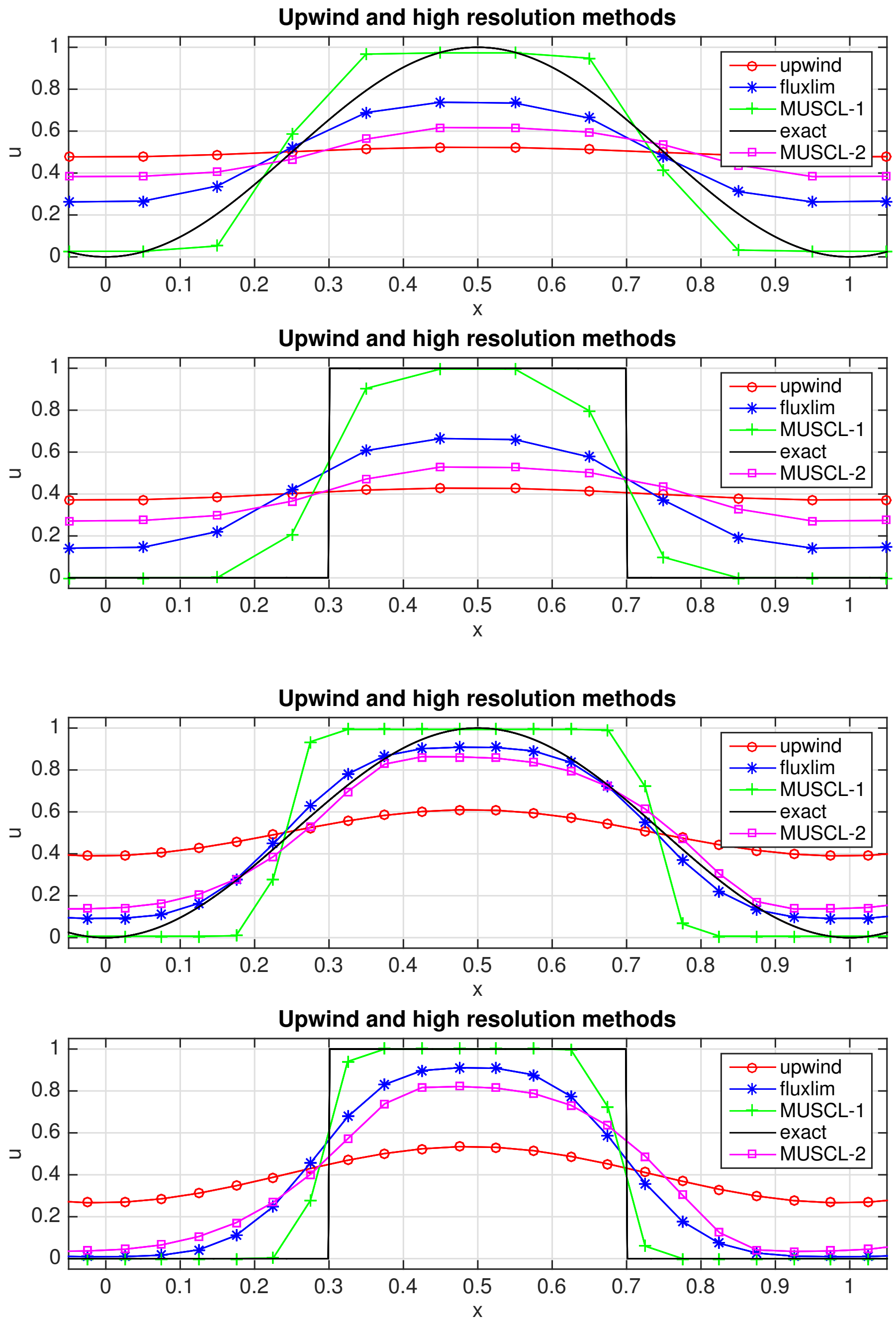


FIGURA 4.11. Ejemplo 4.9: soluciones numéricas para $\Delta x = 1/10$ (arriba) y $\Delta x = 1/20$ (abajo).

Demostrar que bajo la condición de estabilidad (condición CFL), la función de flujo de entropía numérico

$$Q(U^n; j) = Q\big(u_j^n, u_{j+1}^n\big) = a \max\{u_j^n, c\} - a \min\{u_j^n, c\}$$

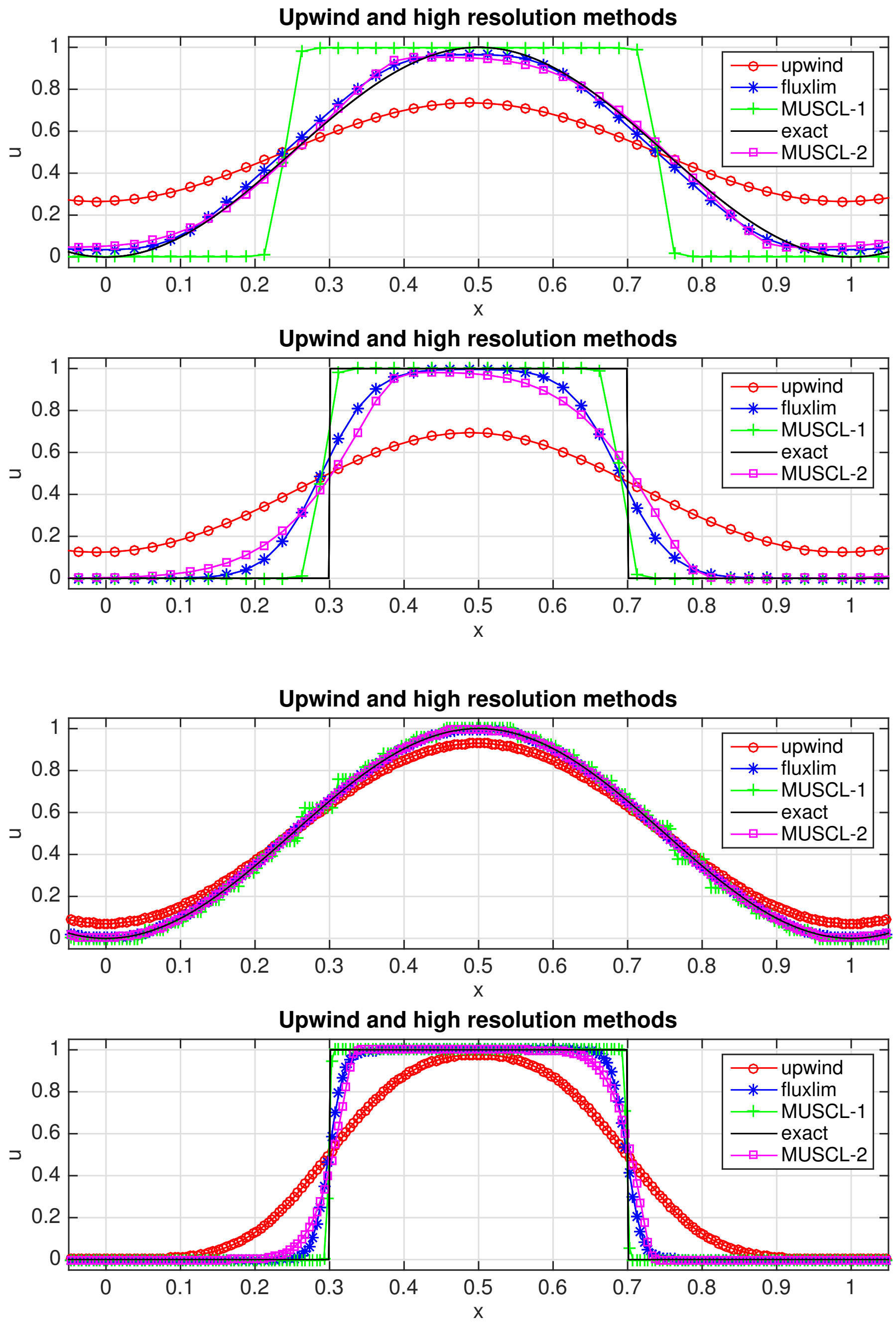


FIGURA 4.12. Ejemplo 4.9 (continuación): soluciones numéricas para $\Delta x = 1/40$ (arriba) y $\Delta x = 1/200$ (abajo).

satisface la desigualdad

$$\eta\bigl(u_j^{n+1}\bigr) \leqslant \eta\bigl(u_j^n\bigr) - \lambda\bigl(Q(U^n;j) - Q(U^n;j-1)\bigr), \tag{4.45}$$

y es consistente con el flujo de entropía q.

Problem 4.3. Se considera la ecuación de Burgers

$$u_t + uu_x = 0, \quad \text{es decir } f(u) = \frac{1}{2}u^2,$$

junto con el par de entropía (η, q) dado por $\eta(u) = |u - c|$ y $q(u) = \operatorname{sgn}(u-c)(f(u) - f(c))$, y el esquema numérico

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\bigl(f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)\bigr), \quad \lambda = \Delta t/\Delta x. \tag{4.46}$$

Encontrar una función de flujo de entropía numérico $Q(U^n; j)$ que es consistente con el fujo de entropía q y que satisface la desigualdad (4.45) para el esquema (4.46).

Problem 4.4. Para la aproximación de una ley de conservación $u_t + f(u)_x = 0$ con el dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, es útil considerar la forma incremental

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}^n\bigl(u_{j+1}^n - u_j^n\bigr) - D_{j-1/2}^n\bigl(u_j^n - u_{j-1}^n\bigr), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.47}$$

donde $C_{j+1/2}^n$ y $D_{j-1/2}^n$ dependen de u_j^n y sus vecinos.

a) Demostrar que el esquema (4.59) es conservativo, e identificar el flujo numérico $F(U^n; j)$.
b) Escribir los esquemas (4.46) y de Lax-Friedrichs en la forma (4.59).
c) Demostrar que si un esquema en forma (4.59) satisface

$$C_{j+1/2}^n \geqslant 0, \quad D_{j+1/2}^n \geqslant 0, \quad C_{j+1/2}^n + D_{j+1/2}^n \leqslant 1,$$

entonces es TVD.
d) ¿Bajo qué condiciones los esquemas (4.46) y de Lax-Friedrichs son TVD?

Problem 4.5. Un esquema se llama lineal si puede ser escrita en la forma

$$u_j^{n+1} = \sum_{k=-q}^{p} a_k u_{j+k}^n. \tag{4.48}$$

Obviamente, un tal esquema solo puede ser consistente con una ley de conservación lineal. Discutiendo el caso

$$u_j^n = \begin{cases} 1 & \text{si } j \leqslant 0, \\ 0 & \text{si } j > 0, \end{cases}$$

demostrar que si el esquema (4.48) es TVD, entonces es exacto a lo máximo del orden 1.

Problem 4.6. Para el problema de valores iniciales de una ley de conservación

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.49}$$

se consideran los métodos de Engquist-Osher, definido por su flujo numérico

$$\begin{aligned} &F(U; j) = f^{\mathrm{EO}}(U_j, U_{j+1}); \\ &f^{\mathrm{EO}}(u, v) = f(0) + \int_0^u \text{máx}\bigl\{f'(s), 0\bigr\}\,\mathrm{d}s + \int_0^v \text{mín}\bigl\{f'(s), 0\bigr\}\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{4.50}$$

y el método de Godunov definido por

$$F(U;j) = f^{\mathrm{G}}(U_j, U_{j+1}); \quad f^{\mathrm{G}}(u,v) = \begin{cases} \min_{u\leqslant\phi\leqslant v} f(\phi) & \text{si } u \leqslant v, \\ \max_{u\geqslant\phi\geqslant v} f(\phi) & \text{si } u > v. \end{cases} \tag{4.51}$$

a) Demostrar que bajo hipótesis sobre u_0 y f y una condición CFL apropiadas, estos dos métodos dan origen a soluciones aproximadas $\{u_{\Delta t}\}$ que convergen a la solución de entropía del problema (4.54).
b) ¿En qué situaciones se puede garantizar a priori, y para todo dato inicial u_0, que ambos métodos generan la misma solución numérica?
c) Sea $f(u) = \sin u$. Calcular numéricamente la solución de (4.54) para

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ 2\pi & \text{para } x > 0, \end{cases} \tag{4.52}$$

$\Delta x = 1/25$, $\Delta x = 1/50$ y $\Delta x = 1/100$, y $\Delta t = 98\,\%$ de su valor máximo permitido por la condición CFL. Comparar los resultados con la solución exacta.

Problem 4.7. Se desea comparar el comportamiento de los métodos de Lax-Friedrichs, Engquist-Osher y Godunov, que son de primer orden, con los métodos de Lax-Wendroff y el de MacCormack, que son de segundo orden. Aplicar los cinco metodos al problema

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(u) = \frac{1}{2}u^2, \quad u(x,0) = \begin{cases} u_{\mathrm{L}} & \text{para } x < 0, \\ u_{\mathrm{R}} & \text{para } x > 0, \end{cases} \tag{4.53}$$

para (i) $u_{\mathrm{L}} = -1$, $u_{\mathrm{R}} = 1$ y (ii) $u_{\mathrm{L}} = 1$, $u_{\mathrm{R}} = -1$.

a) Calcular la solución numérica para $t = T = 1$ utilizando $\Delta x = 1/20$, $\Delta x = 1/50$, $\Delta x = 1/100$, $\Delta x = 1/200$ y $\Delta x = 1/400$, calcular el error aproximado
$$e(T) = \|u_\Delta(T) - u(T)\|_{L^1(-2,2)},$$
donde u_Δ es la solución numérica en cada caso,
b) Para cada uno de los casos (i) y (ii), plotear el error versus el tiempo CPU para cada una de las 25 combinaciones de método y discretización en cada caso e interpretar los resultados. Utilizar escalas logarítmicas para ambas cantidades.

Problem 4.8 (Evaluación 1, Curso 2020)**.** Para el problema de valores iniciales de una ley de conservación

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.54}$$

se consideran los métodos de Engquist-Osher, definido por su flujo numérico

$$\begin{aligned} &F(U;j) = f^{\mathrm{EO}}(U_j, U_{j+1}); \\ &f^{\mathrm{EO}}(u,v) = f(0) + \int_0^u \max\bigl\{f'(s), 0\bigr\}\,\mathrm{d}s + \int_0^v \min\bigl\{f'(s), 0\bigr\}\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{4.55}$$

y el método de Godunov definido por

$$F(U;j) = f^{\mathrm{G}}(U_j, U_{j+1}); \quad f^{\mathrm{G}}(u,v) = \begin{cases} \min_{u\leqslant\phi\leqslant v} f(\phi) & \text{si } u \leqslant v, \\ \max_{u\geqslant\phi\geqslant v} f(\phi) & \text{si } u > v. \end{cases} \tag{4.56}$$

a) Se considera el método numérico

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\bigl(F(U^n; j) - F(U^n; j-1)\bigr), \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \tag{4.57}$$

con $F(U; j) = f^{\mathrm{EO}}(U_j, U_{j+1})$ o $F(U; j) = f^{\mathrm{G}}(U_j, U_{j+1})$, y $f \in C^3$. Demostrar que cada uno de estos métodos es de primer orden de precisión, bajo una condición CFL apropiada.

b) Para el flujo $f(u) = u(1-u)^2$, desarrollar una fórmula de $f^{\mathrm{EO}}(u, v)$ sin integrales (pero puede haber diferentes casos de valores de u y v). Desarrollar una fórmula análoga de $f^{\mathrm{G}}(u, v)$ que elimine el uso de "mín" y "máx" (es decir, que entregue el valor del flujo numérico directamente).

c) Se considera un problema de valores iniciales con la siguiente discretización de la función inicial, y donde $f(u) = u(1-u)^2$:

$$u_j^0 \begin{cases} = 0 & \text{para } j \leqslant 0, \\ \in [0,1] & \text{para } j = 1, 2, \dots, M-1, \\ = 1 & \text{para } j \geqslant M. \end{cases} \tag{4.58}$$

¿Se tiene la misma propiedad para todo u_j^n, $n = 0, 1, 2, \dots$, si u_j^n es calculado a través de (4.57) para los métodos de Godunov o Engquist-Osher, bajo una condición CFL apropiada?

d) Para ambos métodos, identificar sus coeficientes de la forma incremental

$$\begin{aligned} &u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}^n\bigl(u_{j+1}^n - u_j^n\bigr) - D_{j-1/2}^n\bigl(u_j^n - u_{j-1}^n\bigr), \\ &j \in \mathbb{Z}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{4.59}$$

donde $C_{j+1/2}^n$ y $D_{j-1/2}^n$ dependen de u_j^n y sus vecinos, y verificar que ambos métodos son TVD.

Solución sugerida.

a) Para contestar esta pregunta basta notar que en caso de una función $f(u)$ con $f'(u) \geqslant 0$, se tiene $f^{\mathrm{EO}}(u, v) = f(u)$ y $f^{\mathrm{G}}(u, v) = f(u)$, es decir en este caso cada método se reduce al método upwinf. Como este método es de primer orden (según lo visto en clase), los métodos de Engquist-Osher y de Godunov son de primer orden.

b) Se tiene $f'(u) = (1-u)(1-3u)$, es decir $f'(u) > 0$ para $u < u^* := 1/3$, $f'(u) < 0$ para $u^* < u < u^{**} := 1$ y $f'(u) > 0$ para $u > u^{**}$. De acuerdo a lo anterior, podemos escribir

$$\begin{aligned} F_1(u) &:= \int_0^u \max\{f'(s), 0\} \, \mathrm{d}s \\ &= \begin{cases} f(u) - f(0) & \text{si } u < u^*, \\ f(u^*) - f(0) & \text{si } u^* \leqslant u < u^{**}, \\ f(u) - f(u^{**}) + f(u^*) - f(0) & \text{si } u \geqslant u^{**}, \end{cases} \\ F_2(v) &:= \int_0^v \min\{f'(s), 0\} \, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } v < u^*, \\ f(v) - f(u^*) & \text{si } u^* \leqslant v < u^{**}, \\ f(u^{**}) - f(u^*) & \text{si } v \geqslant u^{**}, \end{cases}$$

$$F^{\mathrm{EO}}(u,v) = f(0) + F_1(u) + F_2(v).$$

Para discutir el resultado para el flujo numérico de Godunov, supongamos que $u \leqslant v$. Entonces definimos

$$G_1(u,v) := \min_{u \leqslant \phi \leqslant v} f(\phi) = \begin{cases} \min\{f(u), f(v)\} & \text{si } u, v < u^{**}, \\ f(u^{**}) & \text{si } u < u^{**} \leqslant v, \\ f(u) & \text{si } u^{**} \leqslant u, v. \end{cases}$$

Para $u > v$ se define

$$G_2(u,v) := \max_{u \geqslant \phi \geqslant v} f(\phi) = \begin{cases} f(u) & \text{si } u, v < u^*, \\ f(u^*) & \text{si } v < u^* \leqslant u, \\ \max\{f(u), f(v)\} & \text{si } u^* \leqslant u, v. \end{cases}$$

y el flujo numérico de Godunov

$$f^{\mathrm{G}}(u,v) = \begin{cases} G_1(u,v) & \text{si } u \leqslant v, \\ G_2(u,v) & \text{si } u > v. \end{cases}$$

c) Ambos métodos son monótonos bajo la condición CFL apropiada. Si escribimos

$$u_j^{n+1} = \mathcal{H}^X\big(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\big),$$
$$\mathcal{H}^X\big(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\big) = u_j^n - \lambda\Big(f^X\big(u_j^n, u_{j+1}^n\big) - f^X\big(u_{j-1}^n, u_j^n\big)\Big), \quad X \in \{\mathrm{EO}, \mathrm{G}\},$$

observamos que

$$\mathcal{H}^X(0,0,0) = 0, \quad \mathcal{H}^X(1,1,1) = 1, \quad X \in \{\mathrm{EO}, \mathrm{G}\}, \tag{4.60}$$

además como ambos métodos son monótonos,

$$\begin{aligned} &(0,0,0) \leqslant \big(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\big) \leqslant (1,1,1) \\ &\Rightarrow 0 \leqslant u_j^{n+1} \leqslant \mathcal{H}^X\big(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\big) \leqslant 1, \quad X \in \{\mathrm{EO}, \mathrm{G}\}. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Para examinar la propiedad solicitada basta considerar el primer paso ($n = 0$). Para ambos métodos y bajo la respectiva condición CFL, (4.60) y (4.61) implican que bajo la hipótesis (4.58),

$$u_j^1 \begin{cases} = 0 & \text{para } j \leqslant -1, \\ \in [0,1] & \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, M-1, M, \\ = 1 & \text{para } j \geqslant M+1. \end{cases} \tag{4.62}$$

Queda por analizar u_0^1 y u_M^1. Para el método de Engquist-Osher se tiene

$$\begin{aligned} u_0^1 &= \mathcal{H}^{\mathrm{EO}}\left(u_{-1}^0, u_0^0, u_1^0\right) = \mathcal{H}^{\mathrm{EO}}\left(0, 0, u_1^0\right) \\ &= -\lambda\big(f^{\mathrm{EO}}(0, u_1^0) - f^{\mathrm{EO}}(0,0)\big) = -\lambda\big(f(0) + F_1(0) + F_2(u_1^0)\big) = -\lambda F_2(u_1^0). \end{aligned}$$

Si $u_1^0 > u^* = 1/3$, obtenemos $F_2(u_1^0) < 0$ y luego $u_0^1 > 0$. Por lo tanto, la respuesta es negativa (no se tiene la misma propiedad) para el flujo numérico de Engquist-Osher.

Consideremos ahora el método de Godunov. Ahora

$$\begin{aligned} u_0^1 &= \mathcal{H}^{\mathrm{G}}\left(u_{-1}^0, u_0^0, u_1^0\right) = \mathcal{H}^{\mathrm{G}}\left(0, 0, u_1^0\right) \\ &= -\lambda\big(f^{\mathrm{G}}(0, u_1^0) - f^{\mathrm{G}}(0,0)\big) = -\lambda G_1(0, u_1^0). \end{aligned}$$

Como $u_1^0 \in [0,1]$ según hipótesis y recordamos que $u^{**} = 1$, se tiene que $G_1(0, u_1^0) = 0$, por lo tanto $u_0^1 = 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} u_M^1 &= \mathcal{H}^{\mathrm{G}}\left(u_{M-1}^0, u_M^0, u_{M+1}^0\right) = \mathcal{H}^{\mathrm{G}}\left(u_{M-1}^0, 1, 1\right) \\ &= 1 - \lambda\big(f^{\mathrm{G}}(1,1) - f^{\mathrm{G}}(u_{M-1}^0, 1)\big) = 1 + \lambda G_1(u_{M-1}^0, 1). \end{aligned}$$

Como $u_{M-1}^0 \in [0,1]$ según hipótesis, se tiene $G_1(u_{M-1}^0, 1) = 0$, luego $u_M^1 = 1$. Concluimos que en el caso del flujo de Godunov, la respuesta el positiva (la propiedad sí sigue válida).

d) Ambos métodos pueden ser escritos como

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda\big(f^X(u_j^n, u_{j+1}^n) - f^X(u_{j-1}^n, u_j^n)\big) \\ &= u_j^n + \lambda \frac{f^X(u_j^n, u_j^n) - f^X(u_j^n, u_{j+1}^n)}{u_{j+1}^n - u_j^n}\big(u_{j+1}^n - u_j^n\big) \\ &\quad - \lambda \frac{f^X(u_j^n, u_j^n) - f^X(u_{j-1}^n, u_j^n)}{u_j^n - u_{j-1}^n}\big(u_j^n - u_{j-1}^n\big), \end{aligned}$$

donde se supone que $u_{j+1}^n \neq u_j^n$ y $u_j^n \neq u_{j-1}^n$. En general, podemos escribir ambos métodos en la forma solicitada para

$$C_{j+1/2}^n := \begin{cases} \lambda \dfrac{f^X(u_j^n, u_j^n) - f^X(u_j^n, u_{j+1}^n)}{u_{j+1}^n - u_j^n} & \text{si } u_{j+1}^n \neq u_j^n, \\ 0 & \text{si } u_{j+1}^n = u_j^n, \end{cases}$$

$$D_{j-1/2}^n := \begin{cases} \lambda \dfrac{f^X(u_j^n, u_j^n) - f^X(u_{j-1}^n, u_j^n)}{u_j^n - u_{j-1}^n} & \text{si } u_j^n \neq u_{j-1}^n, \\ 0 & \text{si } u_j^n = u_{j-1}^n. \end{cases}$$

Cada uno de los flujos numéricos f^{EO} y f^{G} es creciente en su primer argumento y decreciente en su segundo argumento, luego

$$C_{j+1/2}^n \geqslant 0, \quad D_{j-1/2}^n \geqslant 0.$$

Además, en el caso del método Engquist-Osher y suponiendo que $u_{j+1}^n \neq u_j^n$,

$$\begin{aligned} C_{j+1/2}^n + D_{j+1/2}^n &= \frac{\lambda}{u_{j+1}^n - u_j^n} \int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n} \Big(\max\big\{f'(s), 0\big\} - \min\big\{f'(s), 0\big\}\Big)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\lambda}{u_{j+1}^n - u_j^n} \int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n} \big|f'(s)\big|\,\mathrm{d}s \leqslant \lambda \|f'\|_\infty \leqslant 1 \end{aligned}$$

(debido a la condición CFL). Para el método de Godunov obtenemos (suponiendo que $u_{j+1}^n \neq u_j^n$)

$$\begin{aligned}
C_{j+1/2}^n + D_{j+1/2}^n &= \frac{\lambda}{u_{j+1}^n - u_j^n}\bigl(f^{\mathrm{G}}(u_j^n, u_j^n) - f^{\mathrm{G}}(u_j^n, u_{j+1}^n) \\
&\qquad + f^{\mathrm{G}}(u_{j+1}^n, u_{j+1}^n) - f^{\mathrm{G}}(u_j^n, u_{j+1}^n)\bigr) \\
&= \frac{\lambda}{u_{j+1}^n - u_j^n}\int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n}\bigl(\partial_1 f^{\mathrm{G}}(z, u_{j+1}^n) - \partial_2 f^{\mathrm{G}}(u_j^n, z)\bigr)\,\mathrm{d}z \\
&\leqslant \lambda\bigl|\partial_1 f^{\mathrm{G}}(\zeta, u_{j+1}^n) - \partial_2 f^{\mathrm{G}}(u_j^n, \zeta)\bigr|,
\end{aligned}$$

ζ entre u_j^n y u_{j+1}^n, donde la notación ∂_1 y ∂_2 denota la derivada con respecto al primer y el segundo argumento, respectivamente. Tomando en cuenta que

$$\partial_1 f^{\mathrm{G}}(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(s),\ s \neq u, \\ f'(u) & \text{si } f^{\mathrm{G}}(u,v) = f(u) \text{ (posible solamente si } f'(u) \geqslant 0), \end{cases}$$

$$\partial_2 f^{\mathrm{G}}(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(s),\ s \neq v, \\ f'(v) & \text{si } f^{\mathrm{G}}(u,v) = f(v) \text{ (posible solamente si } f'(v) \leqslant 0), \end{cases}$$

observamos que (discutiendo todos los casos posibles)

$$\partial_1 f^{\mathrm{G}}(z, u_{j+1}^n) - \partial_2 f^{\mathrm{G}}(u_j^n, z) \in \bigl\{-f'(z), 0, f'(z)\bigr\},$$

lo que implica que

$$\bigl|\partial_1 f^{\mathrm{G}}(z, u_{j+1}^n) - \partial_2 f^{\mathrm{G}}(u_j^n, z)\bigr| \leqslant \bigl|f'(z)\bigr|.$$

Por lo tanto,

$$C_{j+1/2}^n + D_{j+1/2}^n \leqslant \lambda\bigl|f'(\zeta)\bigr| \leqslant \lambda\|f'\|_\infty \leqslant 1,$$

lo que concluye la demostración si tomamos en cuenta que el caso $u_j^n = u_{j+1}^n$ es fácil de tratar.

Capítulo 5

Leyes de conservación escalares multi-dimensionales

5.1. *Splitting* por dimensiones

En este capítulo limitaremos las demostraciones a dos dimensiones espaciales. Sin embargo todos los argumentos pueden ser generalizados a más de dos dimensiones espaciales. Consideramos el problema de valores iniciales

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0; \quad u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{5.1}$$

Para tratar este problema definimos $\mathcal{S}_t^{f,x} u_0$ como la solución del problema de valores iniciales uni-dimensional

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0; \quad v(x,y,0) = u_0(x,y), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

en el cual y aparece como parámetro pasivo; análogamente definimos $\mathcal{S}_t^{g,y} w_0$ como la solución de

$$w_t + g(w)_y = 0, \quad y \in \mathbb{R},\ t > 0; \quad w(x,y,0) = w_0(x,y), \quad y \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

con x como parámetro pasivo. La idea del *splitting* por dimensiones consiste en resolver la ecuación multi-dimensional (5.1) aproximadamente alternando entre las soluciones de los problemas uni-dimensionales (5.2) y (5.3) en las direcciones x e y, respectivamente, durante un intervalo de tiempo Δt corto, es decir

$$u(x,y,n\Delta t) \approx \bigl(\mathcal{S}_{\Delta t}^{g,y} \circ \mathcal{S}_{\Delta t}^{f,x}\bigr)^n u_0.$$

Ejemplo 5.1. *Sea*

$$f(u) = g(u) = \frac{u^2}{2}, \quad u_0(x,y) = \begin{cases} u_{\mathrm{l}} & \text{para } x < y, \\ u_{\mathrm{r}} & \text{para } x \geqslant y, \end{cases} \quad u_{\mathrm{r}} > u_{\mathrm{l}}.$$

La solución en la dirección x (con y fijo) entrega una onda de rarefacción para la cual sus extremos a izquierda y a derecha se propagan con las respectivas velocidades u_{l} y u_{r}. Con un flujo cuadrático la onda de rarefacción se convierte en una interpolación lineal entre los estados a izquierda y a derecha, es decir

$$u^{1/2} := \mathcal{S}_{\Delta t}^{f,x} u_0 = \begin{cases} u_{\mathrm{l}} & \text{para } x < y + u_{\mathrm{l}}\Delta t, \\ \dfrac{x-y}{\Delta t} & \text{para } y + u_{\mathrm{l}}\Delta t < x < y + u_{\mathrm{r}}\Delta t, \\ u_{\mathrm{r}} & \text{para } x > y + u_{\mathrm{r}}\Delta t. \end{cases}$$

La solución en la dirección y para x fijo y un estado inicial $u^{1/2}$ producirá una focalización de las características. El estado a izquierda, que ahora es igual a u_{r}, se propagará con una *velocidad dada por la derivada de la función de flujo, en este caso u_{r}, y adelantará el estado a derecha, en este caso dado por u_{l}. Las características interactuan en un instante dado por*

$$u_{\mathrm{r}}t + x - u_{\mathrm{r}}\Delta t = u_{\mathrm{l}}t + x - u_{\mathrm{l}}\Delta t,$$

es decir $t = \Delta t$. En este instante hemos regresado a a nuestro problema de Riemann inicial, es decir

$$u^1 := \mathcal{S}_{\Delta t}^{g,y} u^{1/2} = u_0.$$

Una nueva aplicación de $\mathcal{S}_{\Delta t}^{f,x}$ entrega

$$u^{3/2} := \mathcal{S}_{\Delta t}^{f,x} u^1 = u^{1/2};$$

por lo tanto $u^n = u_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definiendo

$$\xi := \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad \eta := \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

obtenemos el problema valores iniciales uni-dimensional

$$u_t + \left(\frac{u^2}{\sqrt{2}}\right)_\xi = 0, \quad u(\xi,\eta,0) = \begin{cases} u_{\mathrm{l}} & \text{para } \eta \leqslant 0, \\ u_{\mathrm{r}} & \text{para } \eta > 0. \end{cases}$$

Entonces se tiene que $u(x,y,t) = u_0(x,y)$ y

$$\lim_{\Delta t \to 0} u^n = u_0$$

(con $n\Delta t = t$ fijo). El splitting *por dimensiones, en este caso, entrega soluciones aproximadas que convergen a la solución correcta.*

En lo siguiente consideremos el caso general espacialmente multi-dimensional, sin embargo limitaremos las demostraciones a dos dimensiones espaciales. El problema de valores iniciales espacialmente m-dimensional sea

$$u_t + \sum_{j=1}^m f_j(u)_{x_j} = 0, \quad u(x_1,\dots,x_m,0) = u_0(x_1,\dots,x_m). \tag{5.4}$$

Aquí u es una solución (débil) de entropía de (5.4) en el sentido de Kružkov si se tiene que

$$\begin{aligned} &\forall k \in \mathbb{R},\ \forall \varphi \in C_0^\infty\bigl(\mathbb{R}^m \times [0,T]\bigr),\ \varphi \geqslant 0: \\ &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \left(|u-k|\varphi_t + \operatorname{sgn}(u-k) \sum_{j=1}^m \bigl(f_j(u) - f_j(k)\bigr)\varphi_{x_j} \right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m \,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^m} \Bigl(|u_0 - k|\varphi|_{t=0} - \bigl(|u-k|\varphi\bigr)\big|_{t=T} \Bigr) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m \geqslant 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Tal como en el caso uni-dimensional, (5.5) implica que u es una solución débil, es decir

$$\begin{aligned} &\forall \varphi \in C_0^\infty\bigl(\mathbb{R}^m \times [0,\infty)\bigr): \\ &\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^m} \left(u\varphi_t + \sum_{j=1}^m f_j(u)\varphi_{x_j} \right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m \,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^m} u_0 \varphi|_{t=0} \,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m = 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Ahora queremos demostrar que el *splitting* por dimensiones efectivamente genera una sucesión de funciones que converge a la solución de la ecuación multi-dimensional (5.4); además queremos demostrar como el Front Tracking puede ser utilizado como operador de solución uni-dimensional en el contexto del *splitting* por dimensiones.

Primeramente demostraremos que el *splitting* por dimensiones genera una sucesión que converge a una solución de entropía, es decir, que su límite satisface (5.5). Sea u_0 una función con soporte compacto tal que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2) \cap BV(\mathbb{R}^2)$; es decir se supone que

$$\mathrm{TV}_{x,y}(u_0) = \int \bigl(\mathrm{TV}_x(u_0)\bigr)(y)\,\mathrm{d}y + \int \bigl(\mathrm{TV}_y(u_0)\bigr)(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

(ver Sección 1.1). Sean $t_n := n\Delta t$ y $t_{n+1/2} := (n+1/2)\Delta t$ y además

$$u^0 := u_0, \quad u^{n+1/2} = \mathcal{S}^{f,x}_{\Delta t} u^n, \quad u^{n+1} = \mathcal{S}^{g,y}_{\Delta t} u^{n+1/2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ahora necesitamos una solución aproximada para $t \neq t_n$. Sea la aproximación una solución exacta de una ley de conservación uni-dimensional en el intervalo $[t_j, t_{j+1/2}]$, $j = k/2$, $k \in \mathbb{N}_0$. Para lograr esto hacemos correr el tiempo dos veces más rápidamente, es decir ponemos

$$u_{\Delta t}(x,t) = \begin{cases} \mathcal{S}^{f,x}_{2(t-t_n)} u^n & \text{para } t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1/2}, \\ \mathcal{S}^{g,y}_{2(t-t_{n+1/2})} u^{n+1/2} & \text{para } t_{n+1/2} \leqslant t \leqslant t_{n+1}. \end{cases} \tag{5.7}$$

Ahora demostraremos la compacidad de la sucesión $\{u_{\Delta t}\}$. Como ningún de los operadores $\mathcal{S}^{f,x}$ y $\mathcal{S}^{g,y}$ incrementa la norma L^∞, se tiene que

$$\|u_{\Delta t}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$$

independientemente de Δt.

Luego analizamos la variación total, empezando con

$$\begin{aligned} \int \mathrm{TV}_y\bigl(\mathcal{S}^{f,x}_{\Delta t} u^n\bigr)\,\mathrm{d}x &\leqslant \int \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int \bigl|u^{n+1/2}(x,y+h) - u^{n+1/2}(x,y)\bigr|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \iint \bigl|u^{n+1/2}(x,y+h) - u^{n+1/2}(x,y)\bigr|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \iint \bigl|u^{n}(x,y+h) - u^{n}(x,y)\bigr|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int \bigl|u^{n}(x,y+h) - u^{n}(x,y)\bigr|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{TV}_y(u^n)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Aquí aprovechamos el Lema 1.1, y la L^1-estabilidad respecto de x. En la transformación (5.9) se utilizó, además, el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue para justificar el intercambio de integrales y límites. Para la solución generada por *splitting* por dimensiones se tiene ahora

$$\begin{aligned} \mathrm{TV}_{x,y}(u^{n+1/2}) &= \int \mathrm{TV}_x\bigl(\mathcal{S}^{f,x}_{\Delta t} u^n\bigr)\mathrm{d}y + \int \mathrm{TV}_y\bigl(\mathcal{S}^{f,x}_{\Delta t} u^n\bigr)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int \mathrm{TV}_x(u^n)\mathrm{d}y + \int \mathrm{TV}_y(u^n)\mathrm{d}x = \mathrm{TV}_{x,y}(u^n), \end{aligned} \tag{5.9}$$

donde utilizamos la propiedad TVD de $\mathcal{S}^{f,x}$ y (5.8). Análogamente a (5.9) obtenemos

$$\mathrm{TV}_{x,y}(u^{n+1}) \leqslant \mathrm{TV}_{x,y}(u^{n+1/2}),$$

luego, por inducción,

$$\mathrm{TV}_{x,y}(u^{n}) \leqslant \mathrm{TV}_{x,y}(u_0).$$

Esto se convierte en

$$\mathrm{TV}_{x,y}(u_{\Delta t}) \leqslant \mathrm{TV}_{x,y}(u_0).$$

Ahora queremos demostrar la Lipschitz continuidad respecto del tiempo en la norma L^1, es decir

$$\big\|u_{\Delta t}(t) - u_{\Delta t}(s)\big\|_{L^1} \leqslant C|t-s|. \tag{5.10}$$

Es suficiente tomar en cuenta que aplicando la desigualdad triangular repetidamente,

$$\begin{aligned}
&\big\|u_{\Delta t}\big((n+1)\Delta t\big) - u_{\Delta t}(n\Delta t)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
&\leqslant \|u^{n+1} - u^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|u^{n+1/2} - u^{n}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
&= \big\|\mathcal{S}^{f,x}_{\Delta t}u^n - u^n\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \big\|\mathcal{S}^{g,y}_{\Delta t}u^{n+1/2} - u^{n+1/2}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Utilizando la parte (vi) del Teorema 3.4, concluimos que

$$\big\|\mathcal{S}^{f,x}_{\Delta t}u^n - u^n\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{Lip}}\Delta t\mathrm{TV}_{x,y}(u^n).$$

Utilizando este mismo resultado y (5.8), obtenemos

$$\big\|\mathcal{S}^{g,y}_{\Delta t}u^{n+1/2} - u^{n+1/2}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|g\|_{\mathrm{Lip}}\Delta t\mathrm{TV}_{x,y}(u^n)$$

Esto demuestra que

$$\big\|u_{\Delta t}(t_{n+1}) - u_{\Delta t}(t_n)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leqslant \Delta t\,\mathrm{máx}\big\{\|f\|_{\mathrm{Lip}}, \|g\|_{\mathrm{Lip}}\big\}\mathrm{TV}_{x,y}(u_0). \tag{5.12}$$

Utilizando interpolación, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\big\|u_{\Delta t}(t) - u_{\Delta t}(s)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
&\leqslant \big\|u_{\Delta t}(t) - u_{\Delta t}(t_n)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \big\|u_{\Delta t}(t_n) - u_{\Delta t}(t_m)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \big\|u_{\Delta t}(s) - u_{\Delta t}(t_m)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
&\leqslant \big(|t_n - t_m| + 2\Delta t\big)\,\mathrm{máx}\big\{\|f\|_{\mathrm{Lip}}, \|g\|_{\mathrm{Lip}}\big\}\mathrm{TV}_{x,y}(u_0) \\
&\leqslant \big(|t - s| + 4\Delta t\big)\,\mathrm{máx}\big\{\|f\|_{\mathrm{Lip}}, \|g\|_{\mathrm{Lip}}\big\}\mathrm{TV}_{x,y}(u_0),
\end{aligned} \tag{5.13}$$

donde $t \in [t_n, t_{n+1})$ y $s \in [t_m, t_{m+1})$. Utilizando el Teorema 1.6, podemos deducir la existencia de una subsucesión convergente igualmente llamada $\{u_{\Delta t}\}$. Se define

$$u = \lim_{\Delta t \to 0} u_{\Delta t}.$$

Luego habrá que demostrar que esta función límite u es una solución de entropía.

Sea ahora $\phi=\phi(x,y,t)$ una función test no negativa y sea $\varphi(x,y,t)=\phi(x,y,t_n+t/2)$. Si definimos $\tau:=2(t-n\Delta t)$, entonces para todo y la función $u_{\Delta t}$ es una solución débil respecto de x sobre la banda $t\in[t_n,t_{n+1/2}]$, la cual satisface la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}\forall k\in\mathbb{R}:\quad &\int_0^{\Delta t}\int\bigl(|u_{\Delta t}-k|\varphi_\tau+q^f(u_{\Delta t},k)\varphi_x\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\ &\geqslant\int|u^{n+1/2}-k|\varphi(\Delta t)\,\mathrm{d}x-\int|u^n-k|\varphi(0)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

donde $q^f(u,k):=\operatorname{sgn}(u-k)(f(u)-f(k))$. Respecto de t tenemos entonces

$$\begin{aligned}\forall k\in\mathbb{R}:\quad &2\int_{t_n}^{t_{n+1/2}}\int\left(\frac{1}{2}|u_{\Delta t}-k|\phi_t+q^f(u_{\Delta t},k)\phi_x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant\int|u^{n+1/2}-k|\phi(t_{n+1/2})\,\mathrm{d}x-\int|u^n-k|\phi(t_n)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Análogamente obtenemos

$$\begin{aligned}\forall k\in\mathbb{R}:\quad &2\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}}\int\left(\frac{1}{2}|u_{\Delta t}-k|\phi_t+q^g(u_{\Delta t},k)\phi_y\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant\int|u^{n+1}-k|\phi(t_{n+1})\,\mathrm{d}y-\int|u^{n+1/2}-k|\phi(t_{n+1/2})\,\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Integrando (5.14) respecto de y y (5.15) respecto de x, sumando los resultados, y sumando sobre n obtenemos

$$\begin{aligned}&2\int_0^T\iint\left(\frac{1}{2}|u_{\Delta t}-k|\phi_t+\sum_n\chi_n q^f(u_{\Delta t},k)\phi_x+\sum_n\tilde{\chi}_n q^g(u_{\Delta t},k)\phi_y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant\iint\bigl(|u_{\Delta t}-k|\phi\bigr)\big|_{t=T}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint|u_0-k|\phi(0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

donde χ_n y $\tilde{\chi}_n$ denotan las funciones características de los intervalos $t_n\leqslant t\leqslant t_{n+1/2}$ y $t_{n+1/2}\leqslant t\leqslant t_{n+1}$, respectivamente. Para $\Delta t\to 0$ obtenemos

$$\sum_n\chi_n\overset{*}{\rightharpoonup}\frac{1}{2},\quad\sum_n\tilde{\chi}_n\overset{*}{\rightharpoonup}\frac{1}{2}.$$

Específicamente para funciones ψ continuas se tiene que

$$\sum_n\int_0^T\chi_n\psi\,\mathrm{d}t=\sum_n\int_{t_n}^{t_{n+1/2}}\psi\,\mathrm{d}t=\sum_n\psi\bigl(t_n^*\bigr)\frac{\Delta t}{2}=\frac{1}{2}\sum_n\psi\bigl(t_n^*\bigr)\Delta t\xrightarrow{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\int_0^T\psi\,\mathrm{d}t$$

con $t_n^*\in[t_n,t_{n+1/2}]$, de acuerdo a la definición de la integral de Riemann. (El caso general sigue por aproximación.) Concluimos que para $\Delta t\to 0$,

$$\begin{aligned}&\int_0^T\iint\left(|u-k|\phi_t+q^f(u,k)\phi_x+q^g(u,k)\phi_y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t+\iint|u_0-k|\phi|_{t=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\geqslant\iint\bigl(|u(t)-k|\phi\bigr)\big|_{t=T}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

es decir efectivamente $u(x,y,t)$ es una solución de (5.1) que satisface la condición de entropía de Kružkov.

En lo siguiente demostraremos la unicidad de soluciones de leyes de conservación multi-dimensionales. Sean u y v dos soluciones de entropía de Kružkov de la ley de conservación

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0$$

con los respectivos datos iniciales u_0 y v_0. El argumento utilizado en la Sección 3.4 entrega, sin ningún cambio fundamental en el caso multi-dimensional, el mismo resultado que en el caso uni-dimensional, es decir

$$\big\|u(t) - v(t)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)},$$

lo que demuestra la unicidad. Si utilizamos que si cada subsucesión de una sucesión posee a su vez otra subsucesión que converge a un y el mismo límite, entonces la sucesión misma converge a este límite (único), entonces podemos concluir que $\{u_{\Delta t}\}$ (y no sólo una subsucesión) converge. Acabamos de demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.1. *Sean las funciones f_j dos veces continuamente diferenciables a trozos y sea $u_0 \in BV(\mathbb{R}^m)$ una función integrable. Definimos la sucesión de funciones $\{u^n\}$ por $u^0 := u_0$ y*

$$u^{n+j/m} = \mathcal{S}_{\Delta t}^{f_j,x_j} u^{n+(j-1)/m}, \quad j = 1,\dots,m,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Se definen las funciones $u_{\Delta t} = u_{\Delta t}(x_1,\dots,x_m,t)$ por

$$u_{\Delta t}(x_1,\dots,x_m,t) := \mathcal{S}^{f_j,x_j}_{m(t-t_{n+(j-1)/m})} u^{n+(j-1)/m},$$

donde definimos $t_r = r\Delta t$ para $r \in \mathbb{Q}$, para $t \in [t_{n+(j-1)/m}, t_{n+j/m}]$. Sea $T > 0$ fijo. Para cada sucesión $\{\Delta t\}$ con $\Delta t \to 0$ $u_{\Delta t}$ converge para todo $t \in [0,T]$ a la única solución débil de (5.4) *que satisfaga la condición de entropía de Kružkov* (5.5)*. La convergencia tiene lugar en $C([0,T]; L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m))$.*

Para demostrar la estabilidad respecto de la función de flujo demostraremos ahora que el resultado de estabilidad uni-dimensional queda válido en el caso multi-dimensional (bajo modificaciones obvias). Sean u y v las soluciones únicas de

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x + g(u)_y &= 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \\ v_t + \tilde{f}(v)_x + \tilde{g}(v)_y &= 0, \quad v|_{t=0} = v_0, \end{aligned}$$

que satisfagan la condición de entropía de Kružkov, y deseamos acotar la norma L^1 de la diferencia. Para tal efecto notamos primeramente que

$$\begin{aligned} \|u^{n+1/2} - v^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &= \iint |u^{n+1/2} - v^{n+1/2}| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \int \left(\int |u^n - v^n| \,\mathrm{d}x + \Delta t \min\big\{\mathrm{TV}_x(u^n), \mathrm{TV}_x(v^n)\big\} \, \|f - \tilde{f}\|_{\mathrm{Lip}} \right) \mathrm{d}y \\ &= \|u^n - v^n\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \Delta t \, \|f - \tilde{f}\|_{\mathrm{Lip}} \int \min\big\{\mathrm{TV}_x(u^n), \mathrm{TV}_x(v^n)\big\} \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

En virtud de la desigualdad trivial (pero útil)

$$a \wedge b + c \wedge d \leqslant (a + c) \wedge (b + d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
&\|u^{n+1} - v^{n+1}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
&= \iint |u^{n+1} - v^{n+1}| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \int \left(\int |u^{n+1/2} - v^{n+1/2}| \,\mathrm{d}y + \Delta t \,\text{mín}\big\{\mathrm{TV}_y(u^{n+1/2}), \mathrm{TV}_y(v^{n+1/2})\big\} \,\|g - \tilde{g}\|_{\mathrm{Lip}} \right) \mathrm{d}x \\
&\leqslant \|u^{n+1/2} - v^{n+1/2}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \Delta t \,\|g - \tilde{g}\|_{\mathrm{Lip}} \int \text{mín}\big\{\mathrm{TV}_y(u^{n+1/2}), \mathrm{TV}_y(v^{n+1/2})\big\} \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \|u^n - v^n\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \Delta t \,\text{máx}\big\{\big\|f - \tilde{f}\big\|_{\mathrm{Lip}}, \|g - \tilde{g}\|_{\mathrm{Lip}}\big\} \times \\
&\quad \times \left(\text{mín}\left\{ \int \mathrm{TV}_x(u^n) \,\mathrm{d}y, \int \mathrm{TV}_x(v^n) \,\mathrm{d}y \right\} + \text{mín}\left\{ \int \mathrm{TV}_y(u^n) \,\mathrm{d}x, \int \mathrm{TV}_y(v^n) \,\mathrm{d}x \right\} \right) \\
&\leqslant \|u^n - v^n\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \Delta t \,\text{máx}\big\{\big\|f - \tilde{f}\big\|_{\mathrm{Lip}}, \|g - \tilde{g}\|_{\mathrm{Lip}}\big\} \times \\
&\quad \times \text{mín}\left\{ \int \mathrm{TV}_x(u^n) \,\mathrm{d}y + \int \mathrm{TV}_y(u^n) \,\mathrm{d}x, \int \mathrm{TV}_x(v^n) \,\mathrm{d}y + \int \mathrm{TV}_y(v^n) \,\mathrm{d}x \right\} \\
&\leqslant \|u^n - v^n\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \Delta t \,\text{máx}\big\{\big\|f - \tilde{f}\big\|_{\mathrm{Lip}}, \|g - \tilde{g}\|_{\mathrm{Lip}}\big\} \,\text{mín}\big\{\mathrm{TV}(u_0), \mathrm{TV}(v_0)\big\}
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|u^n - v^n\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &\leqslant \|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
&\qquad + n\Delta t \,\text{máx}\big\{\big\|f - \tilde{f}\big\|_{\mathrm{Lip}}, \|g - \tilde{g}\|_{\mathrm{Lip}}\big\} \,\text{mín}\big\{\mathrm{TV}(u_0), \mathrm{TV}(v_0)\big\}.
\end{aligned}$$

Sea ahora $t \in [t_n, t_{n+1/2})$. Entonces los interpolantes continuos definidos por (5.7) satisfacen

$$\begin{aligned}
&\big\|u_{\Delta t}(t) - v_{\Delta t}(t)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
&= \big\|\mathcal{S}^{f,x}_{2(t-t_n)} u^n - \mathcal{S}^{\tilde{f},x}_{2(t-t_n)} v^n\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
&\leqslant \int \left(\int |u^n - v^n| \,\mathrm{d}x + 2(t - t_n) \,\text{mín}\big\{\mathrm{TV}_x(u^n), \mathrm{TV}_x(v^n)\big\} \,\big\|f - \tilde{f}\big\|_{\mathrm{Lip}} \right) \mathrm{d}y \\
&= \|u^n - v^n\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + 2(t - t_n) \,\big\|f - \tilde{f}\big\|_{\mathrm{Lip}} \int \text{mín}\big\{\mathrm{TV}_x(u^n), \mathrm{TV}_x(v^n)\big\} \,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + t_n \,\text{máx}\big\{\big\|f - \tilde{f}\big\|_{\mathrm{Lip}}, \|g - \tilde{g}\|_{\mathrm{Lip}}\big\} \,\text{mín}\big\{\mathrm{TV}(u_0), \mathrm{TV}(v_0)\big\} \\
&\quad + 2(t - t_n) \,\text{mín}\big\{\mathrm{TV}(u_0), \mathrm{TV}(v_0)\big\} \,\text{máx}\big\{\big\|f - \tilde{f}\big\|_{\mathrm{Lip}}, \|g - \tilde{g}\|_{\mathrm{Lip}}\big\} \\
&\leqslant \|u_0 - v_0\|_1 + (t + \Delta t) \,\text{mín}\big\{\mathrm{TV}(u_0), \mathrm{TV}(v_0)\big\} \,\text{máx}\big\{\big\|f - \tilde{f}\big\|_{\mathrm{Lip}}, \|g - \tilde{g}\|_{\mathrm{Lip}}\big\}.
\end{aligned}$$

Este argumento, bajo modificaciones adecuadas, sigue siendo válido para leyes de conservación arbitrarias en múltiples dimensiones espaciales. Acabamos de demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.2. *Sea $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\mathbb{R}^m) \cap BV(\mathbb{R}^m)$ y sean $f_1, \dots, f_m$ funciones dos veces continuamente diferenciables a trozos. Entonces existe una solución única $u(x_1, \dots, x_m, t)$ del problema de valores iniciales*

$$u_t + \sum_{j=1}^{m} f_j(u)_{x_j} = 0, \quad u(x_1, \dots x_m, 0) = u_0(x_1, \dots, x_m)$$

que satisfaga la condición de entropía de Kružkov (5.5). *Esta solución posee la propiedad*

$$\mathrm{TV}\big(u(t)\big) \leqslant \mathrm{TV}(u_0).$$

Si v_0 y g poseen las mismas propiedaes que u_0 y f, respectivamente, entonces la única solución (débil) de entropía en el sentido de Kružkov de

$$v_t + \sum_{j=1}^{m} g_j(v)_{x_j} = 0, \quad v(x_1, \dots x_m, 0) = v_0(x_1, \dots, x_m)$$

satisface la desigualdad

$$\big\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\big\|_{L^1} \leqslant \|u_0 - v_0\|_1 + t \min\big\{\mathrm{TV}(u_0), \mathrm{TV}(v_0)\big\} \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \big\{\|f_j - g_j\|_{\mathrm{Lip}}\big\}. \tag{5.16}$$

Si $u_0 \leqslant v_0$ y $f = g$, entonces también $u \leqslant v$ sobre la totalidad de $\mathbb{R}^m \times [0, \infty)$.

Demostración. La Lipschitz continuidad en L^1 respecto del tiempo sigue a partir de (5.13). El enunciado final sobre la monotonicidad sigue a partir de la L^1-contractividad (el caso especial de (5.16) para $f = g$ como en el caso uni-dimensional utilizando el Lema 3.7 (de Crandall y Tartar). ∎

5.2. *Splitting* por dimensiones y Front Tracking

Ahora remplazamos f y g (en el caso bi-dimensional) por funciones continuas y lineales a trozos f^δ y g^δ con una distancia entre los puntos de interpolación dada por δ. Para evitar que el número de discontinuidades crezca ilimitadamente, se proyecta la solución uni-dimensional $\mathcal{S}^{f^\delta,x}u$ sobre una malla fija del plano (x,y) antes de que se aplique el operador $\mathcal{S}^{g^\delta,y}$, ver Figura 5.1.

Sean los tamaños de malla en dirección x e y dados por Δx y Δy; además sea

$$I_{ij} := \big\{(x,y) \,\big|\, i\Delta x \leqslant x \leqslant (i+1)\Delta x \wedge j\Delta y \leqslant y \leqslant (j+1)\Delta y\big\}.$$

El operador de proyección π está dado por

$$\pi u(x,y) := \frac{1}{\Delta x \Delta y} \iint_{I_{ij}} u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad (x,y) \in I_{ij}.$$

Sea la solución aproximada en los instantes discretos t_l dada por

$$u^{n+1/2} = \pi \circ \mathcal{S}_{\Delta t}^{f^\delta,x} u^n, \quad u^{n+1} = \pi \circ \mathcal{S}_{\Delta t}^{g^\delta,y} u^{n+1/2}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

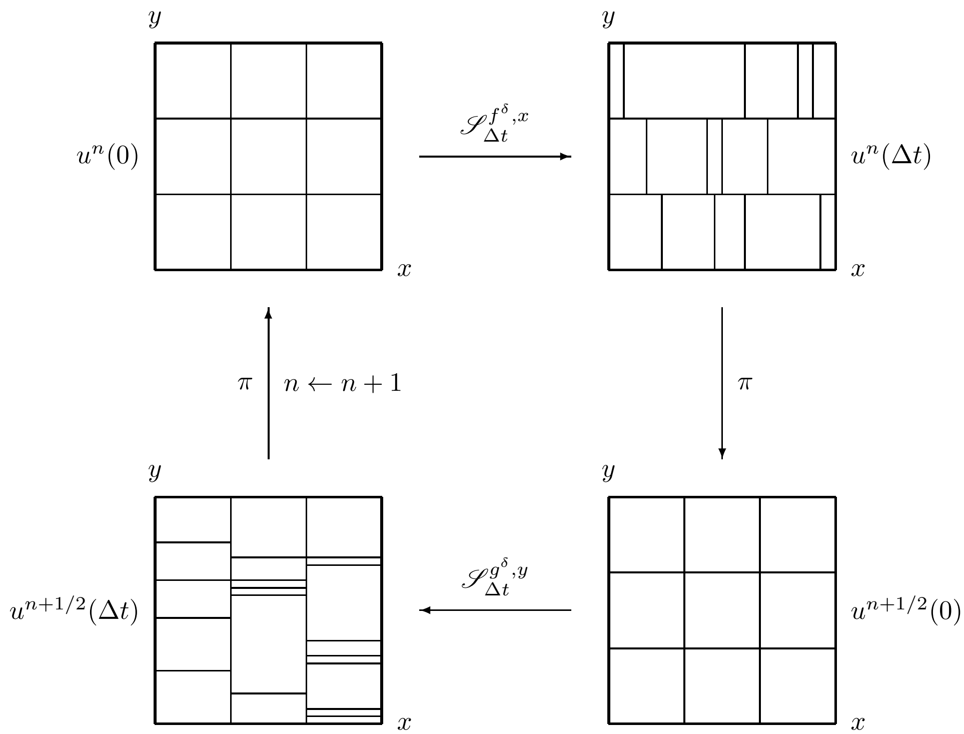


FIGURA 5.1. *Splitting* por dimensiones y Front Tracking para una malla 3×3.

donde $u^0 := \pi u_0$. Definimos el vector de los parámetros de discretización $\boldsymbol{\eta} := (\delta, \Delta x, \Delta y, \Delta t)$. En analogía con (5.7) se define, además,

$$u_{\boldsymbol{\eta}}(t) = \begin{cases} \mathcal{S}_{2(t-t_n)}^{f^\delta,x} u^n & \text{para } t_n \leqslant t < t_{n+1/2}, \\ u^{n+1/2} & \text{para } t = t_{n+1/2}, \\ \mathcal{S}_{2(t-t_{n+1/2})}^{g^\delta,y} u^{n+1/2} & \text{para } t_{n+1/2} \leqslant t < t_{n+1}, \\ u^{n+1} & \text{para } t = t_{n+1}. \end{cases}$$

Para demostrar que $u_{\boldsymbol{\eta}}$ converge a la solución única cuando $\boldsymbol{\eta} \to 0$ repetimos esencialmente la demostración del Teorema 5.1. Como $\mathcal{S}_{\Delta t}^{f^\delta,x}$, $\mathcal{S}_{\Delta t}^{g^\delta,y}$ y π satisfacen un principio del máximo se tiene que

$$\left\| u_{\boldsymbol{\eta}}(t) \right\|_\infty \leqslant \| u^0 \|_\infty.$$

Sobre cada rectángulo I_{ij} la función $u_{\boldsymbol{\eta}}$ es constante para $t = \Delta t$. Para simplificar la notación definimos

$$u_{ij}^n := u_{\boldsymbol{\eta}}(x, y, \Delta t) \quad \text{para } (x,y) \in I_{ij}.$$

Ahora seguiremos un paso de tiempo de esta construcción, empezando con u_{ij}^n. En cada paso introduciremos una notación especial. Considerando u_{ij}^n como función solamente de x definimos

$$u_j^n(0) := u_{ij}^n = u_{\boldsymbol{\eta}}(\cdot, j\Delta y, n\Delta t).$$

Avanzando la solución en intervalo de tiempo Δt aplicando front tracking en la dirección x obtenemos

$$u_j^n(\Delta t) = \bigl(S_{\Delta t}^{f^\delta,x} u_j^n\bigr)(x).$$

Aplicando π entrega

$$u_{ij}^{n+1/2} = \pi u_j^n(\Delta t),$$

luego

$$u_i^{n+1/2}(0) = u_{ij}^{n+1/2} = u_{\boldsymbol{\eta}}\bigl(i\Delta x, \cdot, (n+1/2)\Delta t\bigr).$$

Después obtenemos

$$u_i^{n+1/2}(\Delta t) = \bigl(\mathcal{S}_{\Delta t}^{g^\delta,y} u_i^{n+1/2}\bigr)(y).$$

El paso de tiempo se termina poniendo

$$u_{ij}^{n+1} = \pi u_i^{n+1/2}(\Delta t).$$

Utilizando esta notación queremos demostrar que

$$\mathrm{TV}(u^n) \leqslant \mathrm{TV}(u_0). \tag{5.17}$$

Para tal efecto demostramos que $\mathrm{TV}(u^{n+1/2}) \leqslant \mathrm{TV}(u^n)$; un argumento análogo entrega que $\mathrm{TV}(u^{n+1}) \leqslant \mathrm{TV}(u^{n+1/2})$, lo que implica que $\mathrm{TV}(u^{n+1}) \leqslant \mathrm{TV}(u^n)$ y finalmente (por inducción) (5.17).

Por definición se tiene que

$$\mathrm{TV}(u^{n+1/2}) = \sum_{i,j} \Bigl(\bigl|u_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{ij}^{n+1/2}\bigr|\Delta y + \bigl|u_{i,j+1}^{n+1/2} - u_{ij}^{n+1/2}\bigr|\Delta x\Bigr), \tag{5.18}$$

mientras que

$$\mathrm{TV}(u^n) = \sum_{i,j} \Bigl(\bigl|u_{i+1,j}^n - u_{ij}^n\bigr|\Delta y + \bigl|u_{i,j+1}^n - u_{ij}^n\bigr|\Delta x\Bigr).$$

Primeramente consideramos

$$\begin{aligned} \sum_i \bigl|u_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{ij}^{n+1/2}\bigr| &= \mathrm{TV}_x\bigl(\pi u_j^n(\Delta t)\bigr) \leqslant \mathrm{TV}_x\bigl(u_j^n(\Delta t)\bigr) \leqslant \mathrm{TV}_x\bigl(u_j^n(0)\bigr) \\ &= \sum_i \bigl|u_{i+1,j}^n - u_{ij}^n\bigr|, \end{aligned} \tag{5.19}$$

donde utilizamos que $\mathrm{TV}(\pi\phi) \leqslant \mathrm{TV}(\phi)$ para funciones escalonadas ϕ, y que $\mathrm{TV}(v) \leqslant \mathrm{TV}(v_0)$ para soluciones v de leyes de conservación uni-dimensionales con datos iniciales v_0. Para el segundo término en (5.18) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j} \big|u_{i,j+1}^{n+1/2} - u_{ij}^{n+1/2}\big| \Delta x \Delta y &= \sum_{i,j} \int_{I_{ij}} \big|u_{i,j+1}^{n+1/2} - u_{ij}^{n+1/2}\big| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{i,j} \int_{I_{ij}} \big|\pi\big(u_{j+1}^{n}(\Delta t) - u_{j}^{n}(\Delta t)\big)\big| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \sum_{i,j} \int_{I_{ij}} \pi\big(\big|u_{j+1}^{n}(\Delta t) - u_{j}^{n}(\Delta t)\big|\big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{i,j} \int_{I_{ij}} \big|u_{j+1}^{n}(\Delta t) - u_{j}^{n}(\Delta t)\big| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{i,j} \Delta y \int_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x} \big|u_{j+1}^{n}(\Delta t) - u_{j}^{n}(\Delta t)\big| \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j} \Delta y \int_{\mathbb{R}} \big|u_{j+1}^{n}(x,\Delta t) - u_{j}^{n}(x,\Delta t)\big| \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{j} \Delta y \int_{\mathbb{R}} \big|u_{j+1}^{n}(x,0) - u_{j}^{n}(x,0)\big| \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i,j} \big|u_{i,j+1}^{n} - u_{ij}^{n}\big| \Delta x \Delta y.
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

La primera desigualdad sigue de $|\pi\phi| \leqslant \pi|\phi|$; después se utiliza $\int_{I_{ij}} \pi\phi \,\mathrm{d}x = \int_{I_{ij}} \phi \,\mathrm{d}x$; y finalmente se utiliza que $\|v - w\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|v_0 - w_0\|_{L^1(\mathbb{R})}$ para soluciones de leyes de conservación uni-dimensionales.

Multiplicando (5.19) por Δy, sumando el resultado sobre j, dividiendo (5.20) por Δx y sumando los resultados se tiene que $\mathrm{TV}(u^{n+1/2}) \leqslant \mathrm{TV}(u^n)$.

Ahora demostraremos la L^1-Lipschitz continuidad en el tiempo, es decir comprobaremos que

$$
\begin{aligned}
\big\|u_{\boldsymbol{\eta}}(t_m) - u_{\boldsymbol{\eta}}(t_n)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &= \sum_{i,j} \big|u_{ij}^{m} - u_{ij}^{n}\big| \Delta x \Delta y \\
&\leqslant \big(\mathrm{máx}\big\{\big\|f^\delta\big\|_{\mathrm{Lip}}, \big\|g^\delta\big\|_{\mathrm{Lip}}\big\}\Delta t + 2(\Delta x + \Delta y)\big)\mathrm{TV}(u^0)|m-n|.
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

Para establecer (5.21) basta demostrar la desigualdad

$$
\sum_{i,j} \big|u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n}\big| \leqslant \big(\mathrm{máx}\big\{\big\|f^\delta\big\|_{\mathrm{Lip}}, \big\|g^\delta\big\|_{\mathrm{Lip}}\big\}\Delta t + 2(\Delta x + \Delta y)\big)\mathrm{TV}(u^0). \tag{5.22}
$$

Para tal efecto notamos que

$$
\begin{aligned}
\big|u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n}\big| \leqslant{}& \big|u_{ij}^{n+1} - u_{i}^{n+1/2}(\Delta t)\big| + \big|u_{ij}^{n+1/2} - u_{j}^{n}(\Delta t)\big| \\
&+ \big|u_{i}^{n+1/2}(\Delta t) - u_{i}^{n+1/2}(0)\big| + \big|u_{j}^{n}(\Delta t) - u_{j}^{n}(0)\big|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigl|\pi u_i^{n+1/2}(\Delta t) - u_i^{n+1/2}(\Delta t)\bigr| + \bigl|\pi u_j^{n}(\Delta t) - u_j^{n}(\Delta t)\bigr| \\
&\quad + \bigl|u_i^{n+1/2}(\Delta t) - u_i^{n+1/2}(0)\bigr| + \bigl|u_j^{n}(\Delta t) - u_j^{n}(0)\bigr|.
\end{aligned}
$$

Integrando esta desigualdad sobre $\mathbb{R}^2$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j}\bigl|u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n}\bigr|\Delta x\Delta y \leqslant {}& \iint \bigl|\pi u_i^{n+1/2}(\Delta t) - u_i^{n+1/2}(\Delta t)\bigr| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&+ \iint \bigl|\pi u_j^{n}(\Delta t) - u_j^{n}(\Delta t)\bigr| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&+ \iint \bigl|u_i^{n+1/2}(\Delta t) - u_i^{n+1/2}(0)\bigr| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&+ \iint \bigl|u_j^{n}(\Delta t) - u_j^{n}(0)\bigr| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

Dos de los términos en (5.23) contienen el operador de proyección. Para estos términos demostraremos que

$$
\iint |\pi\psi - \psi| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant (\Delta x + \Delta y)\mathrm{TV}(\psi). \tag{5.24}
$$

Demostraremos (5.24) en el caso uni-dimensional solamente. Para $I_i := (i\Delta x, (i+1)\Delta x)$ se tiene en este caso

$$
\begin{aligned}
\int |\pi\psi - \psi| \,\mathrm{d}x &= \sum_i \int_{I_i} \bigl|\pi\psi(x) - \psi(x)\bigr| \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_i \int_{I_i} \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} \psi(y)\,\mathrm{d}y - \psi(x) \right| \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Delta x} \sum_i \int_{I_i} \left| \int_{I_i} \bigl(\psi(y) - \psi(x)\bigr)\,\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{\Delta x} \sum_i \int_{I_i} \int_{I_i} \bigl|\psi(y) - \psi(x)\bigr| \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Delta x} \sum_i \int_{I_i} \int_{-x+I_i} \bigl|\psi(x+\xi) - \psi(x)\bigr| \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{\Delta x} \sum_i \int_{I_i} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \bigl|\psi(x+\xi) - \psi(x)\bigr| \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \int_{\mathbb{R}} \bigl|\psi(x+\xi) - \psi(x)\bigr| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi \\
&\leqslant \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} |\xi|\mathrm{TV}(\psi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \Delta x \mathrm{TV}(\psi).
\end{aligned}
$$

Para los demás términos en (5.23) obtenemos, utilizando la L^1-Lipschitz continuidad en el tiempo,

$$\iint \left|u_j^n(\Delta t) - u_j^n(0)\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \Delta t \left\|f^\delta\right\|_{\mathrm{Lip}} \int \mathrm{TV}_x\big(u_j^n(0)\big)\,\mathrm{d}y \leqslant \Delta t \left\|f^\delta\right\|_{\mathrm{Lip}} \mathrm{TV}(u^n).$$

Combinado con (5.24) sigue (5.22) y luego (5.21).

Entonces tenemos ahora:

(i) la cota L^∞ uniforme

$$\|u_{\boldsymbol{\eta}}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},$$

(ii) la cota uniforme de la variación total

$$\mathrm{TV}(u^n) \leqslant \mathrm{TV}(u_0),$$

(iii) y la L^1 Lipschitz continuidad en el tiempo,

$$\begin{aligned}&\left\|u_{\boldsymbol{\eta}}(t_m) - u_{\boldsymbol{\eta}}(t_n)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\\ &\leqslant \left(\max\bigl\{\|f^\delta\|_{\mathrm{Lip}} + \|g^\delta\|_{\mathrm{Lip}}\bigr\} + 2\frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta t}\right)\mathrm{TV}(u_0)(t_n - t_m).\end{aligned}$$

En virtud del Teorema 1.6 podemos concluir que la sucesión $\{u_{\boldsymbol{\eta}}\}$ posee una subsucesión que converge para $\boldsymbol{\eta} \to 0$ siempre que $\max\{\Delta x, \Delta y\}/\Delta t$ esté uniformemente acotado. Sea el límite correspondiente denotado por u. La sucesión converge en $C([0,T]; L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2))$ para cada $T > 0$. Queda por demostrar que este límite efectivamente es una solución de entropía de la ley de conservación escalar bidimensional.

Utilizaremos primeramente que $u_j^n(x,t)$ es una solución de la ley de conservación unidimensional en el período $[t_n, t_{n+1/2}]$. Por lo tanto para todo $k \in \mathbb{R}$ y funciones test no negativas ϕ se tiene que

$$\begin{gathered}\int_{\mathbb{R}} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \left(\frac{1}{2}\left|u_j^n(x,t) - k\right|\phi_t + q^{f^\delta}\big(u_j^n(x,t),k\big)\phi_x\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\ -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left|u_j^n\big(x,t_{n+1/2}^-\big) - k\right|\phi(x,t_{n+1/2})\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left|u_j^n(x,t_n) - k\right|\phi(x,t_n)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.\end{gathered}$$

Para la dirección y se tiene análogamente

$$\begin{gathered}\int_{\mathbb{R}} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \left(\frac{1}{2}\left|u_i^{n+1/2}(y,t) - k\right|\phi_t + q^{g^\delta}\big(u_i^{n+1/2}(y,t),k\big)\phi_y\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\\ -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left|u_i^{n+1/2}\big(y,t_{n+1}^-\big) - k\right|\phi(y,t_{n+1})\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left|u_i^{n+1/2}\big(y,t_{n+1/2}^+\big) - k\right|\phi(y,t_{n+1/2})\,\mathrm{d}y \geqslant 0.\end{gathered}$$

Integrando la primera desigualdad sobre y y la segunda sobre x, sumando los resultados y sumando sobre n con $T = N\Delta t$ obtenemos

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^2}\int_0^T \left(\frac{1}{2}|u_{\boldsymbol{\eta}} - k|\phi_t + \sum_n \chi_n q^{f^\delta}(u_{\boldsymbol{\eta}},k)\phi_x + \sum_n \tilde{\chi}_n q^{g^\delta}(u_{\boldsymbol{\eta}},k)\phi_y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\iint_{\mathbb{R}^2}\left|u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,T) - k\right|\phi(x,y,T)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\mathbb{R}^2}\left|u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,0) - k\right|\phi(x,y,0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2N-1}\iint_{\mathbb{R}^2}\Big(\big|u_{\boldsymbol{\eta}}\big(x,y,t_{n/2}^{+}\big)-k\big|-\big|u_{\boldsymbol{\eta}}\big(x,y,t_{n/2}^{-}\big)-k\big|\Big)\phi(x,y,t_{n/2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=: -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2N-1} I_n,
\end{aligned}
$$

donde χ_n y $\tilde{\chi}_n$ son las funciones características sobre

$$
\big\{(x,y,t)\,\big|\,t\in[t_n,t_{n+1/2}]\big\}\quad \text{y}\quad \big\{(x,y,t)\,\big|\,t\in[t_{n+1/2},t_{n+1}]\big\},
$$

respectivamente. Hay que tomar en cuenta que obtuvimos el lado derecho por una proyección en cada paso de tiempo. Para $n\to\infty$ y $\Delta t\to 0$, pero T fijo, se tiene que

$$
\sum_n \chi_n \overset{*}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.
$$

Para acotar el lado derecho notamos que

$$
u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{+})-k=\pi\big(u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{-})-k\big).
$$

Como la función $|\cdot|$ es convexo, en virtud de la desigualdad de Jensen se tiene que

$$
\big|u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{+})-k\big|-\big|u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{-})-k\big|\leqslant 0. \tag{5.25}
$$

Entonces obtenemos

$$
\begin{aligned}
I_n &= -\iint_{\mathbb{R}^2}\Big(\big|u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{+})-k\big|-\big|u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{-})-k\big|\Big)\phi(x,y,t_{n/2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= -\sum_{i,j}\iint_{I_{i,j}}\Big(\big|u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{+})-k\big|-\big|u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{-})-k\big|\Big)\phi(x_i,y_i,t_{n/2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\quad -\sum_{i,j}\iint_{I_{i,j}}\Big(\big|u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{+})-k\big|-\big|u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{-})-k\big|\Big)\\
&\qquad\qquad\times\big(\phi(x,y,t_{n/2})-\phi(x_i,y_i,t_{n/2})\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\geqslant -\sum_{i,j}\iint_{I_{i,j}}\Big(\big|u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{+})-k\big|-\big|u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{-})-k\big|\Big)\\
&\qquad\qquad\times\big(\phi(x,y,t_{n/2})-\phi(x_i,y_i,t_{n/2})\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=:\tilde{I}_n,
\end{aligned}
$$

Esto implica que

$$
\begin{aligned}
|\tilde{I}_n| &\leqslant \sum_{i,j}\iint_{I_{i,j}}\big|u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{+})-u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{-})\big|\big|\phi(x,y,t_{n/2})-\phi(x_i,y_i,t_{n/2})\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\leqslant (\Delta x+\Delta y)\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\sum_{i,j}\iint_{I_{i,j}}\big|u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{+})-u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{-})\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\leqslant (\Delta x+\Delta y)\iint_{\mathbb{R}^2}\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\big|\pi u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{-})-u_{\boldsymbol{\eta}}(x,y,t_{n/2}^{-})\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\leqslant (\Delta x+\Delta y)^2\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\mathrm{TV}(u_0),
\end{aligned}
$$

considerando que

$$\begin{aligned}\left|\phi(x,y)-\phi(x_i,y_j)\right| &\leqslant \left|(x-x_i,y-y_j)\right| \int_0^1 \left|\nabla\phi\big(r(x-x_i,y-y_j)\big)\right| \mathrm{d}r \\ &\leqslant (\Delta x+\Delta y)\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},\end{aligned}$$

donde utilizamos (5.24). Concluimos que

$$\sum_{n=1}^{2N-1} |\tilde{I}_n| \leqslant \frac{(\Delta x+\Delta y)^2}{\Delta t}\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\mathrm{TV}(u_0). \tag{5.26}$$

Para poder concluir que u es una solución de entropía hay que demostrar que el lado derecho de (5.26) tiende a cero cuando $\Delta x, \Delta y, \Delta t \to 0$. Por lo tanto, se debe suponer que existe una constante C tal que

$$(\Delta x+\Delta y)/\Delta t \leqslant C \quad \text{cuando } \boldsymbol{\eta} \to 0.$$

Bajo esta hipótesis se tiene que

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^2}\int_0^T \Big(|u-k|\phi_t + q^f(u,k)\phi_x + q^g(u,k)\phi_y\Big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &-\iint_{\mathbb{R}^2}\left|u(x,y,T)-k\right|\phi(x,y,T)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\mathbb{R}^2}\left|u(x,y,0)-k\right|\phi(x,y,0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant 0.\end{aligned}$$

Teorema 5.3. *Sea $u_0 \in L^\infty \cap BV(\mathbb{R}^m)$ una función con soporte compacto y sean las funciones $f_1,\dots,f_m$ Lipschitz continuas. Se construye una solución aproximada $u_{\boldsymbol{\eta}}$ mediante Front Tracking:*

$$u^0 = \pi u_0, \quad u^{n+j/m} = \pi \circ \mathcal{S}_{\Delta t}^{f_j^\delta, x_j} u^{n+(j-1)/m}, \quad j=1,\dots,m,\ n\in\mathbb{N},$$
$$u_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} \mathcal{S}_{m(t-t_{n+(j-1)/m})}^{f_j^\delta, x_j} u^{n+(j-1)/m} & \text{para } t \in [t_{n+(j-1)/m}, t_{n+j/m}), \\ u^{n+j/m} & \text{para } t = t_{n+j/m} \end{cases}$$

donde $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_m)$. Para cada sucesión $\{\boldsymbol{\eta}\}$ con

$$\boldsymbol{\eta} = (\Delta x_1,\dots,\Delta x_m,\Delta t,\delta), \quad \boldsymbol{\eta}\to\mathbf{0},$$

y donde

$$\text{máx}\{\Delta x_1,\dots,\Delta x_m\}/\Delta t \quad \text{queda acotado}$$

$\{u_{\boldsymbol{\eta}}\}$ converge a la solución única $u=u(\boldsymbol{x},t)$ del problema de valores iniciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j(u)}{\partial x_j} = 0, \quad u(\boldsymbol{x},0)=u_0(\boldsymbol{x})$$

que satisface la condición de entropía de Kružkov.

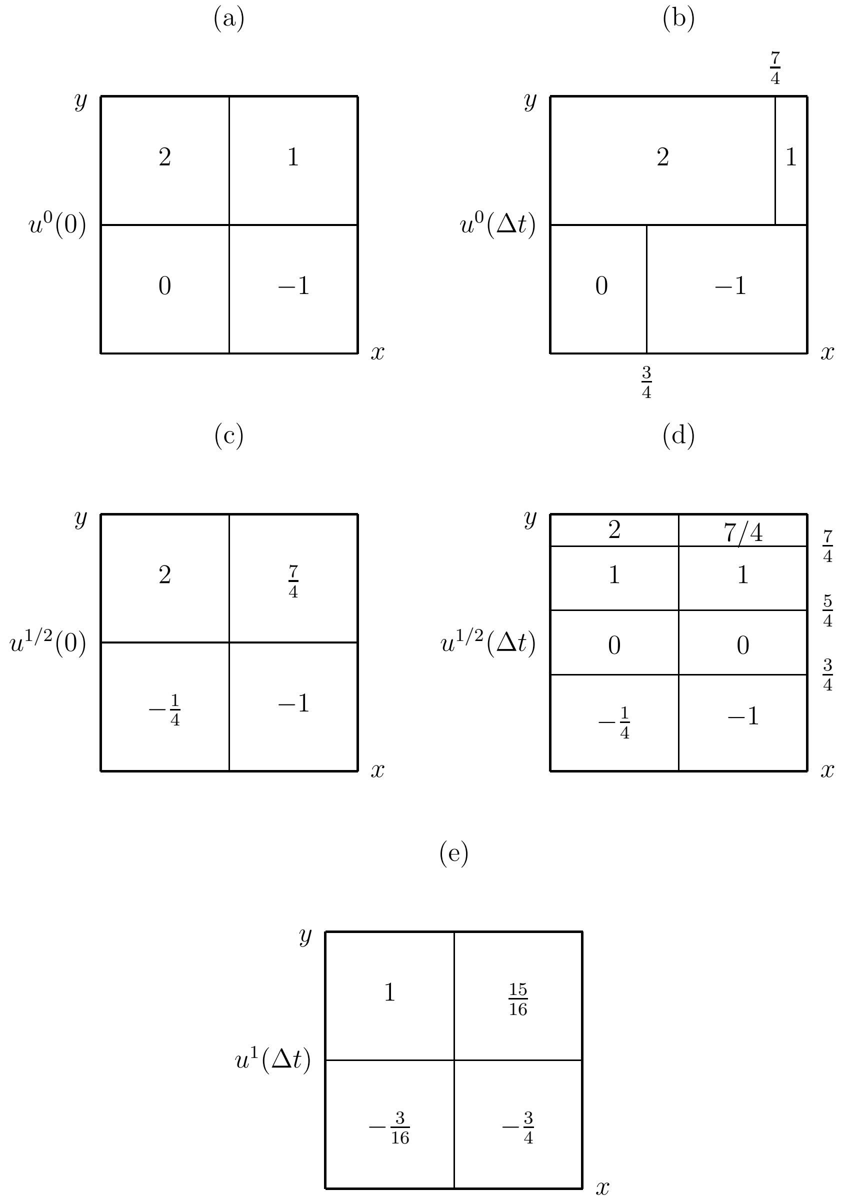


FIGURA 5.2. Ejemplo 5.2: (a) función inicial (5.28), (b) solución intermedia después de aplicar el operador $\mathcal{S}^{f,x}_{\Delta t}$, (c) siguiente solución intermedia después de aplicar π, (d) solución intermedia después de aplicar el operador $\mathcal{S}^{g,y}_{\Delta t}$, (e) aproximación final $u^1(\Delta t) = u^1(1/2) \approx u(\cdot,\cdot,1/2)$.

Ejemplo 5.2 (Certamen 2, Curso 2020)**.** *Se considera el siguiente problema de valores iniciales de una ley de conservación en dos dimensiones espaciales:*

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0, \quad (x,y) \in D := [0,2]^2, \quad t > 0; \tag{5.27}$$

$$f(u) = g(u) = \begin{cases} -u/2 & \text{para } -1 \leqslant u \leqslant 0, \\ u(2 & \text{para } 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ 1/2 + 3(u-1)/2 & \text{para } 1 \leqslant u \leqslant 2, \end{cases}$$

$$u(x,y,0) = \begin{cases} 2 & \text{para } (x,y) \in [0,1) \times [1,2], \\ 1 & \text{para } (x,y) \in [1,2] \times [1,2], \\ 0 & \text{para } (x,y) \in [0,1) \times [0,1), \\ -1 & \text{para } (x,y) \in [1,2] \times [0,1). \end{cases} \tag{5.28}$$

Calcular una solución aproximada de $u(x,y,t)$ para $t = 1/2$, utilizando el método de splitting por dimensiones y Front Tracking descrito en la Sección 5.2 considerando los parámetros $\Delta x = \Delta y = 1$ (arreglo "2×2" del dominio computacional) y $\Delta t = 1/2$ (es decir, ejecutar un ciclo del método de acuerdo a la Figura 5.1.

Solución sugerida.

1.) *El dato inicial puede ser dibujado como indicado en la Figura 5.2 (a). El primer paso corresponde a la aplicación del operador $\mathcal{S}_{\Delta t}^{f,x}$. Para tal efecto consideramos primero para $y \in [1,2]$ el problema de Riemann en x, centrado en $x = 1$ con estados a izquierda y a derecha $u_{\mathrm{L}} = 2$ y $u_{\mathrm{R}} = 1$. Este problema de Riemann se resuelve mediante un frente único que se propaga con velocidad $3/2$. Por lo tanto, la posición de la interfaz que separa los estados 2 y 1 después del intervalo $\Delta t = 1/2$ es dada por $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$. Análogamente, para $y \in [0,1)$ resolvemos el problema de Riemann en x, centrado en $x = 1$ con estados a izquierda y a derecha $u_{\mathrm{L}} = 0$ y $u_{\mathrm{R}} = -1$. Este problema se resuelve mediante una discontinuidad que se desplaza con la velocidad $-\frac{1}{2}$. Por lo tanto, su nueva posición sera $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Resumiendo, la solución intermedia después de aplicar el operador $\mathcal{S}_{\Delta t}^{f,x}$ dibujada en la Figura 5.2 (b).*
2.) *En el siguiente paso hay que aplicar el operador de proyección π. Denominando los cuatro sub-cuadrados por I_{00}, I_{10}, I_{01} e I_{11}, obtenemos los valores*

$$\begin{aligned} u_{01}^{1/2} &= \pi_{I_{01}} u_1^0(\Delta t) = 2, \\ u_{11}^{1/2} &= \pi_{I_{11}} u_1^0(\Delta t) = \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}, \\ u_{00}^{1/2} &= \pi_{I_{00}} u_0^0(\Delta t) = \frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-1) = -\frac{1}{4}, \\ u_{10}^{1/2} &= \pi_{I_{10}} u_0^0(\Delta t) = -1. \end{aligned}$$

La nueva solución intermedia es dibujada en la Figura 5.2 (c).

3.) *En el siguiente paso hay que resolver los problemas de Riemann en dirección y. Para $x \in [0,1)$ se plantea un problema de Riemann con estados a izquierda $u_{\mathrm{L}} = -\frac{1}{4}$ y a derecha $u_{\mathrm{R}} = 2$. Como $u_{\mathrm{L}} < u_{\mathrm{R}}$, la construcción de la solución procede por la envoltura* *convexa inferior y es dada por*

$$u(x,y,t) = \begin{cases} 2 & \text{para } y > y_3(t) := 1 + \frac{3}{2}t, \\ 1 & \text{para } y_2(t) := 1 + \frac{1}{2}t < y \leqslant y_3(t), \\ 0 & \text{para } y_1(t) := 1 - \frac{1}{2}t < y \leqslant y_2(t), \\ -\frac{1}{4} & \text{para } y \leqslant y_1(t). \end{cases}$$

Notamos que $y_3(\frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$, $y_2(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ *y* $y_1(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. *Por otro lado, para* $x \in [1,2]$ *se produce un problema de Riemann con estados a izquierda* $u_{\mathrm{L}} = -1$ *y a derecha* $u_{\mathrm{R}} = \frac{7}{4}$. *Como nuevamente* $u_{\mathrm{L}} < u_{\mathrm{R}}$, *la construcción de la solución procede por la envoltura convexa inferior y es dada por*

$$u(x,y,t) = \begin{cases} \frac{7}{4} & \text{para } y > y_6(t) := 1 + \frac{3}{2}t, \\ 1 & \text{para } y_5(t) := 1 + \frac{1}{2}t < y \leqslant y_6(t), \\ 0 & \text{para } y_4(t) := 1 - \frac{1}{2}t < y \leqslant y_5(t), \\ -1 & \text{para } y \leqslant y_4(t). \end{cases}$$

Notamos que $y_6(\frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$, $y_5(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ *y* $y_4(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. *Ver Figura 5.2 (d).*

4.) *En el último paso hay que aplicar el operador de proyección* π. *Denominando los cuatro sub-cuadrados por* I_{00}, I_{10}, I_{01} *e* I_{11}, *obtenemos los valores*

$$\begin{aligned} u_{01}^1 &= \pi_{I_{01}} u_1^{1/2}(\Delta t) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1, \\ u_{11}^1 &= \pi_{I_{11}} u_1^{1/2}(\Delta t) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{15}{16}, \\ u_{00}^1 &= \pi_{I_{00}} u_0^{1/2}(\Delta t) = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot 0 = -\frac{3}{16}, \\ u_{10}^1 &= \pi_{I_{10}} u_0^{1/2}(\Delta t) = \frac{3}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot 0 = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

La nueva solución $u^1(\Delta t)$ *es dibujada en la Figura 5.2 (e).*

Capítulo 6

El problema de Riemann para sistemas de leyes de conservación

En el presente capítulo volveremos a estudiar la ley de conservación (2.1), pero nos concentraremos ahora en el caso de un sistema de leyes de conservación, es decir nos interesan ahora problemas del tipo

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} \in (C^2)^n. \tag{6.1}$$

Se considera solamente el caso de una dimensión espacial. En el Capítulo 3 demostramos la existencia, unicidad, y estabilidad de soluciones de una ley de conservación escalar y unidimensional, es decir establecimos el bien planteamiento en el sentido de Hadamard. Sin embargo éste es un problema más delicado para sistemas de leyes de conservación. Aquí discutiremos primeramente los conceptos básicos para sistemas, es decir las propiedades fundamentales de ondas de choque y de ondas de rarefacción. En particular discutiremos varias condiciones de entropía para seleccionar las soluciones apropiadas a partir de la condición de Rankine-Hugoniot. Utilizando tales resultados podremos demostrar el buen planteamiento del problema de Cauchy para soluciones con pequeña variación de los datos iniciales.

6.1. La hiperbolicidad y algunos ejemplos

Antes de definir las propiedades principales de sistemas de leyes de conservación discutiremos algunos ejemplos importantes e interesantes. El primer ejemplo es un modelo de ondas en aguas someras (*shallow water waves*) y se utilizara en todo este capítulo como motivación y ejemplo de los conceptos básicos.

Ejemplo 6.1 (Ecuaciones *shallow water*)**.** *Consideremos un canal uni-dimensional a lo largo del eje x lleno de un fluido ideal e invíscido de una densidad constante ϱ, y supongamos que el fondo del canal es horizontal. En la aproximación de ondas largas o* shallow water*, se supone que la velocidad v del fluido es solamente una función del tiempo y de la posición x a lo largo del canal. Se supone, además, que no hay movimiento vertical en el fluido. La distancia del fluido desde el fondo es denotada por $h = h(x,t)$ (ver Figura 6.1). El flujo del fluido es determinado por* la conservación de masa *y* la conservación del momento lineal*.*

Consideremos primero la conservación de masa. Sean $x_1 < x_2$ dos puntos a lo largo del canal. La tasa de cambio de masa de fluido entre los dos puntos está dada por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{h(x,t)} \varrho \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = -\int_0^{h(x_2,t)} \varrho v(x_2,t)\,\mathrm{d}y + \int_0^{h(x_1,t)} \varrho v(x_1,t)\,\mathrm{d}y.$$

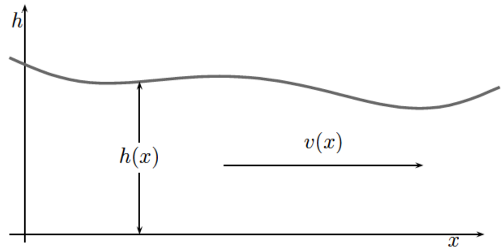


FIGURA 6.1. Ejemplo 6.1 (ecuaciones *shallow water*): un canal somero

Suponiendo que las funciones involucradas son suaves, podemos reescribir el lado derecho como una integral sobre la derivada de ϱvh. *Así obtenemos*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{h(x,t)}\varrho\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2}\big(\varrho v(x,t)h(x,t)\big)_x\,\mathrm{d}x,$$

o equivalentemente,

$$\int_{x_1}^{x_2}\Big(\big(\varrho h(x,t)\big)_t + \big(\varrho v(x,t)h(x,t)\big)_x\Big)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Dividiendo esto por $(x_2 - x_1)\varrho$ *y dejando* $x_2 - x_1 \to 0$ *obtenemos la ecuación conocida*

$$h_t + (vh)_x = 0.$$

Para desarrollar la ecuación del momento lineal hay que suponer que el fluido está en balance hidrostático. Para tal efecto se introduce la presión $P = P(x,y,t)$, *y se considera un pequeño elemento de fluido* $[x_1,x_2]\times[y,y+\Delta y]$. *Entonces el estado de balance hidrostático significa que la presión precisamente balancea el efecto de la gravitación, es decir,*

$$\big(P(\tilde{x},y+\Delta y,t) - P(\tilde{x},y,t)\big)(x_2 - x_1) = -(x_2 - x_1)\varrho g\Delta y$$

para algún punto $\tilde{x}\in[x_1,x_2]$, *donde* g *denote la aceleración gravitacional. Dividiendo esto por* $(x_2 - x_1)\Delta y$ *y tomando* $x_1, x_2 \to x$ *y* $\Delta y \to 0$, *obtenemos* $P_y(x,y,t) = -\varrho g$. *Integrando y normalizando la presión suponiendo que ésta se anula en la superficie del fluido concluimos que*

$$P(x,y,t) = \varrho g\big(h(x,t) - y\big). \tag{6.2}$$

Si ahora estudiamos nuevamente el comportamiento del fluido entre dos puntos $x_1 < x_2$ *a lo largo del canal y calculamos el cambio del momento lineal para esta parte del fluido, obtenemos*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{h(x,t)}\varrho v(x,t)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = &-\int_0^{h(x_2,t)}P(x_2,y,t)\,\mathrm{d}x + \int_0^{h(x_1,t)}P(x_1,y,t)\,\mathrm{d}x\\ &-\int_0^{h(x_2,t)}\varrho v(x_2,t)^2\,\mathrm{d}x + \int_0^{h(x_1,t)}\varrho v(x_1,t)^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Análogamente con la derivación de la ecuación de la conservación de masa y utilizando (6.2), *podemos escribir esto como*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2} \varrho v h \,\mathrm{d}x &= -\varrho g\left(h(x_2,t)^2 - \frac{1}{2}h(x_2,t)^2\right) + \varrho g\left(h(x_1,t)^2 - \frac{1}{2}h(x_1,t)^2\right) \\ &\quad - \int_{x_1}^{x_2} (\varrho h v^2)_x \,\mathrm{d}x \\ &= -\varrho g \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{1}{2}h^2\right)_x \mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} (\varrho v^2 h)_x \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Dividiendo esto por $(x_2 - x_1)\varrho$ *y tomando* $x_1 - x_2 \to 0$, *además escalando* g *a* $g = 1$, *obtenemos*

$$(vh)_t + \left(v^2 h + \frac{1}{2}h^2\right)_x = 0.$$

En otras palabras, obtenemos el sistema de leyes de conservación

$$h_t + (vh)_x = 0, \quad (vh)_t + \left(v^2 h + \frac{1}{2}h^2\right)_x = 0, \tag{6.3}$$

donde h *y* v *denotan la altura (profundidad) y velocidad del fluido, respectivamente. Definiendo la variable*

$$q := vh,$$

podemos escribir las ecuaciones shallow water *como*

$$\begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} q \\ \dfrac{q^2}{h} + \dfrac{h^2}{2} \end{pmatrix}_x = \mathbf{0}, \tag{6.4}$$

la cual será la forma a ser utilizada en estos apuntes.

Ejemplo 6.2 (La ecuación de la onda)**.** *Sea* $\phi = \phi(x,t)$ *la posición transversal fuera del equilibrio de una cuerda uni-dimensional. Si se supone que la amplitud de las ondas transversales es baja, obtenemos la ecuación de la onda*

$$\phi_{tt} = (c^2 \phi_x)_x, \tag{6.5}$$

donde c *denota la velocidad de la onda. Definiendo variables nuevas* $u = \phi_x$ *y* $v = \phi_t$, *podemos re-escribir* (6.5) *como el sistema*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t - \begin{pmatrix} v \\ c^2 u \end{pmatrix}_x = \mathbf{0}.$$

Si c *es constante, recuperamos la ecuación de la onda clásica,* $\phi_{tt} = c^2 \phi_{xx}$.

Ejemplo 6.3 (El p-sistema)**.** *El* p*-sistema es un modelo clásico de un gas isentrópico donde se tiene conservación de la masa y del momento lineal, pero no de la energía. En coordenadas Lagrangianas este sistema es dado por*

$$\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} -u \\ p(v) \end{pmatrix}_x = \mathbf{0}.$$

Aquí v *denota el volumen específico, es decir, la inversa de la densidad,* u *es la velocidad, y* $p = p(v)$ *es la presión (una función dada).*

Ejemplo 6.4 (Las ecuaciones de Euler de la dinámica de fluidos)**.** *Las ecuaciones de Euler de la dinámica de gases forman un ejemplo importante de un sistema hiperbólico no lineal de leyes de conservación. En ese sistema aparecen un balance de masa, un balance de momento lineal y un balance de energía. En lo siguiente,* E *denota la energía total y* p *la presión del gas. A continuación desarrollaremos estas ecuaciones en* d *dimensiones espaciales, considerando después la reducción a una dimensión espacial (*$d = 1$*).*

En la ecuación de continuidad, el flujo de masa es $\varrho \boldsymbol{v}$*. Ahora si* z *denota* cualquier *cantidad transportada con el flujo, el caudal de esta cantidad posee una contribución convectiva de la forma* $z\boldsymbol{v}$*, por lo tanto la parte convectiva del flujo de la ecuación de conservación del momento lineal es* $(\varrho \boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = \varrho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$*, y en la ecuación de conservación de energía la parte convectiva del flujo es* $E\boldsymbol{v}$*. Además, ciertas fuerzas actuan sobre el fluido, las que causan aceleración y por lo tanto cambios del momento lineal. En la ausencia de fuerzas exteriores, las fuerzas efectivas son sólo fuerzas generadas por fluctuaciones en el interior del fluido, las que son proporcionales al gradiente* ∇p *de la presión* p*. En virtud de esta discusión resulta la ecuación de conservación del momento lineal*

$$(\varrho v_i)_t + \sum_{j=1}^{d} (\varrho v_i v_j + p\delta_{ij})_{x_j} = 0, \quad i = 1, \dots, d,$$

donde $\delta_{ij} = 1$ *si* $i = j$ *y* $\delta_{ij} = 0$ *sino. La energía total* E *se descompone de la forma*

$$E = \frac{1}{2}\varrho \|\boldsymbol{v}\|_2^2 + \varrho e,$$

donde $\frac{1}{2}\varrho\|\boldsymbol{v}\|_2^2$ *es la energía cinética y* e *es la energía interna específica por masa unitaria. Se supone que el gas se encuentra en un equilibrio termodinámico y químico, y que la energía interna puede ser especificada como una función dada de la presión y de la densidad:*

$$e = e(p, \varrho). \tag{6.6}$$

La ecuación (6.6) *se llama ecuación del estado, y depende de la naturaleza del gas bajo consideración.*

La energía total es transportada con el flujo y simultáneamente cambiada por trabajo aplicado al sistema. En la ausencia de fuerzas exteriores, el trabajo es ejecutado sólo por fuerzas de presión, las que son proporcionales al gradiente de $p\boldsymbol{v}$*. Entonces la ecuación de conservación de la energía total es*

$$E_t + \operatorname{div}\bigl((E + p)\boldsymbol{v}\bigr) = 0.$$

Para un flujo tri-dimensional, podemos ahora escribir las ecuaciones de Euler en la forma (2.1) *con*

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho v_1 \\ \varrho v_2 \\ \varrho v_3 \\ E \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \varrho v_1 \\ p + \varrho v_1^2 \\ \varrho v_1 v_2 \\ \varrho v_1 v_3 \\ (E+p)v_1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \varrho v_2 \\ \varrho v_1 v_2 \\ p + \varrho v_2^2 \\ \varrho v_2 v_3 \\ (E+p)v_2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \varrho v_3 \\ \varrho v_1 v_3 \\ \varrho v_2 v_3 \\ p + \varrho v_3^2 \\ (E+p)v_3 \end{pmatrix}.$$

Si se supone que el gas bajo consideración es politrópico, es decir, su energía interior es aproximadamente proporcional a la temperatura, entonces se puede derivar la ecuación de estado

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\varrho}$$

con una constante γ específica del gas ($\gamma = 1{,}4$ para aire), tal que se llega a la ecuación

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\varrho\|\boldsymbol{v}\|_2^2.$$

De aquí proviene que en una dimensión espacial, las ecuaciones de Euler de la dinámica de fluidos son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho v \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \varrho v \\ \varrho v^2 + p \\ v(E+p) \end{pmatrix}_x = \mathbf{0}, \quad E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\varrho v^2. \tag{6.7}$$

En lo siguiente hay que imponer condiciones a la función (vectorial) $\boldsymbol{f}$ para asegurar que las propiedades del caso escalar también sean válidas para el caso de un sistema. Para asegurar que la velocidad de propagación de información sea finita, lo que caracteriza las ecuaciones hiperbólicas, hay que considerar la matriz jacobiana

$$\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial u_1(\boldsymbol{u}) & \dots & \partial f_1/\partial u_n(\boldsymbol{u}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n/\partial u_1(\boldsymbol{u}) & \dots & \partial f_n/\partial u_n(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix}.$$

Definición 6.1 (Hiperbolicidad)**.** *Se dice que el sistema* (6.1) *es* hiperbólico en un estado $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *si en este estado, la matriz jacobiana $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$ posee n valores propios reales*

$$\lambda_1(\boldsymbol{u}) \leqslant \lambda_2(\boldsymbol{u}) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\boldsymbol{u})$$

y un sistema completo de vectores propios $\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \boldsymbol{r}_n(\boldsymbol{u})$ tal que

$$\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}) = \lambda_j(\boldsymbol{u})\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Si, además, los valores propios son distintos a pares ($\lambda_i(\boldsymbol{u}) \neq \lambda_j(\boldsymbol{u})$ para $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$), entonces (6.1) *se llama* estrictamente hiperbólico en $\boldsymbol{u}$. *Se dice que* (6.1) *es* hiperbólico *o* estrictamente hiperbólico *si posee la propiedad respectiva para todo $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 6.5 (Ecuaciones *shallow water*, continuación)**.** *Para las ecuaciones* shallow water (6.4) *obtenemos la matriz jacobiana*

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(h, q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h - \dfrac{q^2}{h^2} & \dfrac{2q}{h} \end{bmatrix}, \tag{6.8}$$

cuyos valores propios son

$$\lambda_1(\boldsymbol{u}) = \frac{q}{h} - \sqrt{h} < \frac{q}{h} + \sqrt{h} = \lambda_2(\boldsymbol{u}), \tag{6.9}$$

con los vectores propios correspondientes

$$\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \tag{6.10}$$

por lo tanto las ecuaciones shallow water *son estrictamente hiperbólicas fuera de* $h \leqslant 0$.

6.2. Ondas de rarefacción

Consideremos ahora el problema de valores iniciales de un sistema de leyes de conservación

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \boldsymbol{0}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{6.11}$$

conjuntamente con datos iniciales de Riemann

$$\boldsymbol{u}(x,0) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x < 0, \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant 0. \end{cases} \tag{6.12}$$

Observamos que como tanto los datos iniciales como la ecuación son invariantes de escala o autosimilares, es decir invariantes bajo el mapeo $x \mapsto kx$ y $t \mapsto kt$, la solución de (6.11), (6.12) debe tener la misma propiedad. Nos interesa entonces buscar soluciones del tipo

$$\boldsymbol{u}(x,t) = \boldsymbol{w}(x/t) = \boldsymbol{w}(\xi), \quad \xi := x/t.$$

Insertando esto en (6.11) y denotando $\dot{\boldsymbol{w}} := \mathrm{d}\boldsymbol{w}/\mathrm{d}\xi$, obtenemos

$$-\frac{x}{t^2}\dot{\boldsymbol{w}} + \frac{1}{t}\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{w})\dot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{0},$$

o equivalentemente,

$$\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{w})\dot{\boldsymbol{w}} = \xi\dot{\boldsymbol{w}}.$$

Observamos entonces que $\dot{\boldsymbol{w}}$ es un vector propio de la matriz jacobiana $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{w})$ correspondiente al valor propio ξ. A partir de nuestras hipótesis sobre la función $\boldsymbol{f}$ sabemos que existe un $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$\dot{\boldsymbol{w}}(\xi) = \boldsymbol{r}_j\big(\boldsymbol{w}(\xi)\big), \quad \lambda_j\big(\boldsymbol{w}(\xi)\big) = \xi. \tag{6.13}$$

Supongamos, además, que

$$\boldsymbol{w}\big(\lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\big) = \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \quad \boldsymbol{w}\big(\lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})\big) = \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}. \tag{6.14}$$

Entonces para un tiempo fijo t, la función $\boldsymbol{w}(x/t)$ conecta en forma continua el estado a izquierda dado $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ con el estado a derecha dado $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$. Esto significa que ξ debe incrementar, y por lo tanto $\lambda_j(\boldsymbol{w}(x/t))$ debe incrementar. Si esto sucede, tenemos una solución de (6.11), (6.12) del tipo

$$\boldsymbol{u}(x,t) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x \leqslant \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})t, \\ \boldsymbol{w}(x/t) & \text{para } \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})t \leqslant x \leqslant \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})t, \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})t, \end{cases} \tag{6.15}$$

donde $\boldsymbol{w}$ satisface (6.13) y (6.14). Estas soluciones se llaman *ondas de rarefacción*, un nombre que proviene de la aplicación a la gasdinámica. Observamos, además, que (6.13) estipula la normalización del vector propio $\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u})$. Efectivamente, tomando la derivada con respecto a ξ obtenemos

$$\nabla\lambda_j(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}) = 1. \tag{6.16}$$

La identidad (6.16) impone una condición adicional sobre los campos de vectores propios, ya que claramente necesitamos que el producto escalar entre $\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u})$ y $\lambda_j(\boldsymbol{u})$ no se anule para poder normalizar el vector propio adecuadamente. Esto puede ser realizado en muchas aplicaciones, pero las ecuaciones de Euler de la dinámica de fluidos tienen la propiedad de que en una de las familias de vectores propios, el vector propio y el gradiente del valor propio correspondiente son ortogonales. Se dice que la j-ésima familia es *genuinamente no lineal* (GNL) si

$$\nabla\lambda_j(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}) \neq 0 \quad \text{para todo } \boldsymbol{u},$$

y es *linealmente degenerada* si

$$\nabla\lambda_j(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{para todo } \boldsymbol{u}. \tag{6.17}$$

No discutiremos aquí casos mixtos donde una familia es linealmente degenerada solamente en cierta sub-region del espacio de fase, por ejemplo a lo largo curvas o puntos aislados.

Antes de discutir ambos casos (de una familia genuinamente no lineal y de una familia linealmente degenerada) cambiamos el punto de vista ligeramente. En lugar de considerar estados a izquierda y a derecha dados como en (6.12), suponemos que solamente $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ viene dado y consideremos aquellos estados $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ para los que existe una solución tipo onda de rarefacción. A partir de (6.13) y (6.15) concluimos que para punto $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ en el espacio de fase existen n curvas que emanan desde $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ y en las cuales el estado $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ puede ser localizado permitiendo definir una solución del tipo (6.15). Cada una de estas curvas es una curva integral de los campos vectoriales de los valores propios de $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$. Entonces el espacio de fase ahora es el espacio de estados $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$. La discusión precedente puede ser resumida en el caso GNL en el siguiente teorema.

Teorema 6.1. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio. Supongamos que la ley de conservación* (6.1) *es estrictamente hiperbólica para $\boldsymbol{u} \in D$ y que la j-ésima familia de ondas es genuinamente no lineal en D. Sea el j-ésimo vector propio $\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u})$ de $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$ normalizado tal que* (6.16) *es válido en D. Sea $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} \in D$. Entonces existe una curva $R_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \subset D$, que emana desde $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$, tal que para cada $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in R_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ el problema de valores iniciales* (6.11), (6.12) *posee la solución* (6.15), *donde $\boldsymbol{w}$ satisface* (6.13) *y* (6.14).

Demostración. La discusión precedente del teorema genera el cálculo central y la motivación necesaria del argumento siguiente. Supongamos que tenemos una ley de conservación estrictamente hiperbólica y genuinamente no lineal con el j-ésimo vector propio debidamente normalizado. Debido a las hipótesis respecto de $\boldsymbol{f}$, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{\boldsymbol{w}}(\xi) = \boldsymbol{r}_j\bigl(\boldsymbol{w}(\xi)\bigr), \quad \xi > \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}); \quad \boldsymbol{w}\bigl(\lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\bigr) = \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} \tag{6.18}$$

posee una solución para todo $\xi \in [\lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}), \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \eta)$ para algún $\eta > 0$. Para esta solución sabemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\lambda_j\big(\boldsymbol{w}(\xi)\big) = \nabla\lambda_j\big(\boldsymbol{w}(\xi)\big) \cdot \boldsymbol{w}(\xi) = 1, \tag{6.19}$$

lo que demuestra la segunda mitad de (6.13). Se denota la órbita de (6.18) por $R_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$. Si $\boldsymbol{u}(x,t)$ es definida por (6.15), entonces un cómputo directo demuestra que $\boldsymbol{u}$ efectivamente satisface la ecuación y el dato inicial. ■

Notamos que el problema (6.18) también puede ser resuelto para $\xi < \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$. Pero en este caso $\lambda_j(\boldsymbol{u})$ sera decreciente. Además, la solución $\boldsymbol{u}$ en (6.15) es continua, pero no necesariamente es diferenciable, por lo tanto (6.15) no es necesariamente una solución regular sino que una solución débil de (6.11), (6.12).

Se definirá ahora otra parametrización de $R_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$, la cual será conveniente para la construcción de curvas de onda para la solución del problema de Riemann. A partir de (6.19) observamos que $\lambda_j(\boldsymbol{u})$ crece a lo largo de $R_j(\boldsymbol{u})$, luego podemos definir el parámetro $\varepsilon > 0$ mediante

$$\varepsilon := \xi - \xi_{\mathrm{L}} = \lambda_j(\boldsymbol{u}) - \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) > 0.$$

Sea $\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}$ el valor de $\boldsymbol{u}$ correspondiente, es decir

$$\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon} = \boldsymbol{w}(\xi) = \boldsymbol{w}\big(\lambda_j(\boldsymbol{u})\big) = \boldsymbol{w}\big(\varepsilon + \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\big).$$

Claramente,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}). \tag{6.20}$$

Supongamos ahora que la j-ésima familia característica es linealmente degenerada, es decir satisface (6.17). Consideremos entonces el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u}|_{\varepsilon=0} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \tag{6.21}$$

con la solución $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}$ para $\varepsilon \in (-\eta, \eta)$ para algún $\eta > 0$. Esta órbita es denotada $C_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$, y a lo largo de $C_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$, el valor propio $\lambda_j(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon})$ es constante porque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\lambda_j(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}) = \nabla\lambda_j(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}) \cdot \boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}) = 0.$$

Además a lo largo de $C_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ la condición de Rankine-Hugoniot está satisfecha en virtud de

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}) - \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}\big) &= \mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}}{\mathrm{d}\varepsilon} - \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{I}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}}{\mathrm{d}\varepsilon} \\
&= \big(\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}) - \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{I}\big)\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}) \\
&= \big(\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}) - \lambda_j(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon})\big)\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}) = \boldsymbol{0},
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}) - \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) - \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}.$$

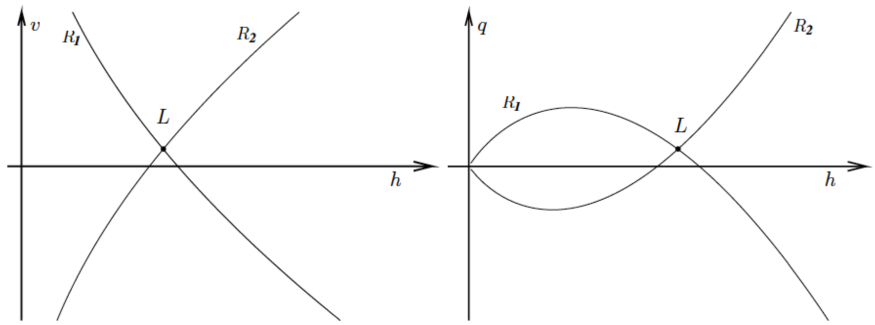


FIGURA 6.2. Ejemplo 6.6 (ecuaciones *shallow water*: ondas de rarefacción): curvas de rarefacción en los planos (h, v) (izquierda) y (q, v) (derecha). Se ilustra la solución completa (6.18) para las ecuaciones *shallow water*. Solamente las partes dadas por (6.26) y (6.27) efectivamente serán curvas de rarefacción.

Sea ahora $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in C_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$, es decir $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{u}_{j,\varepsilon_0}$ para algún ε_0. Entonces una solución débil del problema de Riemann (6.11), (6.12) viene dada por

$$\boldsymbol{u}(x,t) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x < \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})t, \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})t. \end{cases} \tag{6.22}$$

Esta solución es llamada *discontinuidad de contacto*. La discusión anterior es resumida en el siguiente teorema.

Teorema 6.2. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio. Supongamos que la ley de conservación* (6.1) *es estrictamente hiperbólica para $\boldsymbol{u} \in D$ y que la j-ésima familia de ondas es linealmente degenerada en D. Sea $\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u})$ el j-ésimo vector propio de $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$. Sea $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} \in D$. Entonces existe una curva $C_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \subset D$, la cual atraviesa $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$, tal que para cada $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in C_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ el problema de valores iniciales* (6.11), (6.12) *posee la solución* (6.22), *donde $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ es determinado como sigue: se considera la función $\varepsilon \mapsto u_\varepsilon$ determinada por*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}\varepsilon} = r_j(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u}|_{\varepsilon=0} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}},$$

entonces $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{u}_{\varepsilon_0}$ para algún ε_0.

Ejemplo 6.6 (Ecuaciones *shallow water*, continuación: ondas de rarefacción)**.** *Las ecuaciones* shallow water *permiten la computación explícita de ondas de rarefacción. Utilizaremos la forma $\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \boldsymbol{0}$ con*

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} q \\ \dfrac{q^2}{h} + \dfrac{h^2}{2} \end{pmatrix}$$

y recordemos que los valores propios $\lambda_j(\boldsymbol{u})$ y los vectores propios asociados $\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u})$, $j = 1, 2$, están dados por (6.9) *y* (6.10), *respectivamente. Bajo la normalización de $\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u})$ presente en*

(6.10),

$$\nabla\lambda_j(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}) = (-1)^j\frac{3}{2\sqrt{h}}, \quad j=1,2,$$

lo que indica que las ecuaciones shallow water *son genuinamente no lineales (GNL) en ambas familias de onda. En lo siguiente normalizaremos los vectores propios para satisfacer* (6.16), *es decir trabajaremos con*

$$\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}) = (-1)^j\frac{2}{3}\sqrt{h}\begin{pmatrix}1\\ \lambda_j(\boldsymbol{u})\end{pmatrix}, \quad j=1,2. \tag{6.23}$$

Para la familia 1,

$$\begin{pmatrix}\dot{h}\\ \dot{q}\end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\sqrt{h}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{q}{h}-\sqrt{h}\end{pmatrix},$$

lo cual implica que

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}h} = \lambda_1 = \frac{q}{h}-\sqrt{h}.$$

Esta ecuación diferencial ordinaria puede ser integrada. Obtenemos la relación

$$q = q(h) = q_{\mathrm{L}}\frac{h}{h_{\mathrm{L}}} - 2h\bigl(\sqrt{h}-\sqrt{h_{\mathrm{L}}}\bigr). \tag{6.24}$$

Como $\lambda_1(\boldsymbol{u})$ debe incrementar a lo largo de la onda de rarefacción, obtenemos a partir de (6.9) *(insertando la expresión* (6.24) *para q) que en* (6.24) *hay que utilizar $h \leqslant h_{\mathrm{L}}$.*

Para la familia 2 obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}h} = \lambda_2 = \frac{q}{h}+\sqrt{h},$$

con la solución

$$q = q(h) = q_{\mathrm{L}}\frac{h}{h_{\mathrm{L}}} + 2h\bigl(\sqrt{h}-\sqrt{h_{\mathrm{L}}}\bigr). \tag{6.25}$$

En este caso resulta que hay que utilizar $h \geqslant h_{\mathrm{L}}$, y observamos que (6.24) *y* (6.25) *resultarían a partir de* cualquier *normalización del vector propio $\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u})$. Ver Figura 6.2.*

Resumiendo, obtenemos las siguientes ondas de rarefacción expresadas como funciones de h:

$$R_1: \quad q = R_1(h;\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) := q_{\mathrm{L}}\frac{h}{h_{\mathrm{L}}} - 2h\bigl(\sqrt{h}-\sqrt{h_{\mathrm{L}}}\bigr), \quad h\in(0,h_{\mathrm{L}}]; \tag{6.26}$$

$$R_2: \quad q = R_2(h;\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) := q_{\mathrm{L}}\frac{h}{h_{\mathrm{L}}} + 2h\bigl(\sqrt{h}-\sqrt{h_{\mathrm{L}}}\bigr), \quad h\geqslant h_{\mathrm{L}}. \tag{6.27}$$

Alternativamente, en las variables (h,v) (con $v=q/h$),

$$R_1: \quad v = R_1(h;\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) := v_{\mathrm{L}} - 2\bigl(\sqrt{h}-\sqrt{h_{\mathrm{L}}}\bigr), \quad h\in(0,h_{\mathrm{L}}]; \tag{6.28}$$

$$R_2: \quad v = R_2(h;\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) := v_{\mathrm{L}} + 2\bigl(\sqrt{h}-\sqrt{h_{\mathrm{L}}}\bigr), \quad h\geqslant h_{\mathrm{L}}. \tag{6.29}$$

Sin embargo, si deseamos calcular las ondas de rarefacción en términos del parámetro ξ o ε, se debe utilizar la normalización apropiada de los vectores propios dada por (6.23)*. Para la familia 1 obtenemos*

$$\dot{h} = -\frac{2}{3}\sqrt{h}, \quad \dot{q} = \frac{2}{3}\biggl(-\frac{q}{\sqrt{h}} + h\biggr).$$

Integrando la primera ecuación directamente e insertando el resultado en la segunda, otenemos

$$\boldsymbol{w}_1(\xi) = \begin{pmatrix} h_1 \\ q_1 \end{pmatrix}(\xi) = R_1(\xi;\boldsymbol{u}_\mathrm{L}) := \begin{pmatrix} \dfrac{1}{9}\bigl(v_\mathrm{L} + 2\sqrt{h_\mathrm{L}} - \xi\bigr)^2 \\ \dfrac{1}{27}\bigl(v_\mathrm{L} + 2\sqrt{h_\mathrm{L}} + 2\xi\bigr)\bigl(v_\mathrm{L} + 2\sqrt{h_\mathrm{L}} - \xi\bigr)^2 \end{pmatrix}, \tag{6.30}$$
$$\xi \in [v_\mathrm{L} - \sqrt{h_\mathrm{L}}, v_\mathrm{L} + 2\sqrt{h_\mathrm{L}}].$$

Análogamente obtenemos para la familia 2

$$\boldsymbol{w}_2(\xi) = \begin{pmatrix} h_2 \\ q_2 \end{pmatrix}(\xi) = R_2(\xi;\boldsymbol{u}_\mathrm{L}) := \begin{pmatrix} \dfrac{1}{9}\bigl(-v_\mathrm{L} + 2\sqrt{h_\mathrm{L}} + \xi\bigr)^2 \\ \dfrac{1}{27}\bigl(v_\mathrm{L} - 2\sqrt{h_\mathrm{L}} + 2\xi\bigr)\bigl(-v_\mathrm{L} + 2\sqrt{h_\mathrm{L}} + \xi\bigr)^2 \end{pmatrix}, \tag{6.31}$$
$$\xi \in [\lambda_2(\boldsymbol{u}_\mathrm{L}), \infty).$$

En virtud de lo anterior, la solución viene dada por

$$\boldsymbol{u}(x,t) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_\mathrm{L} & \text{para } x \leqslant \lambda_j(\boldsymbol{u}_\mathrm{L})t, \\ R_j(x/t;\boldsymbol{u}_\mathrm{L}) & \text{para } \lambda_j(\boldsymbol{u}_\mathrm{L})t \leqslant x \leqslant \lambda_j(\boldsymbol{u}_\mathrm{R})t, \\ \boldsymbol{u}_\mathrm{R} & \text{para } x \geqslant \lambda_j(\boldsymbol{u}_\mathrm{R})t. \end{cases} \tag{6.32}$$

En las variables (h,v) *(con* $v = q/h$*) obtenemos las siguientes expresiones para las familias 1 y 2, respectivamente:*

$$v_1(\xi) = \frac{1}{3}\bigl(v_\mathrm{L} + 2\sqrt{h_\mathrm{L}} + 2\xi\bigr); \quad v_2(\xi) = \frac{1}{3}\bigl(v_\mathrm{L} - 2\sqrt{h_\mathrm{L}} + 2\xi\bigr). \tag{6.33}$$

En términos del parámetro ε *podemos escribir* (6.30) *como*

$$\boldsymbol{u}_{1,\varepsilon} = \begin{pmatrix} h_{1,\varepsilon} \\ q_{1,\varepsilon} \end{pmatrix} = R_{1,\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\mathrm{L}) := \begin{pmatrix} \bigl(\sqrt{h_\mathrm{L}} - \varepsilon/3\bigr)^2 \\ (v_\mathrm{L} + 2\varepsilon/3)\bigl(\sqrt{h_\mathrm{L}} - \varepsilon/3\bigr)^2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in [0, 3\sqrt{h_\mathrm{L}}], \tag{6.34}$$

y (6.31) *como*

$$\boldsymbol{u}_{2,\varepsilon} = \begin{pmatrix} h_{2,\varepsilon} \\ q_{2,\varepsilon} \end{pmatrix} = R_{2,\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\mathrm{L}) := \begin{pmatrix} \bigl(\sqrt{h_\mathrm{L}} + \varepsilon/3\bigr)^2 \\ (v_\mathrm{L} + 2\varepsilon/3)\bigl(\sqrt{h_\mathrm{L}} + \varepsilon/3\bigr)^2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in [0, \infty). \tag{6.35}$$

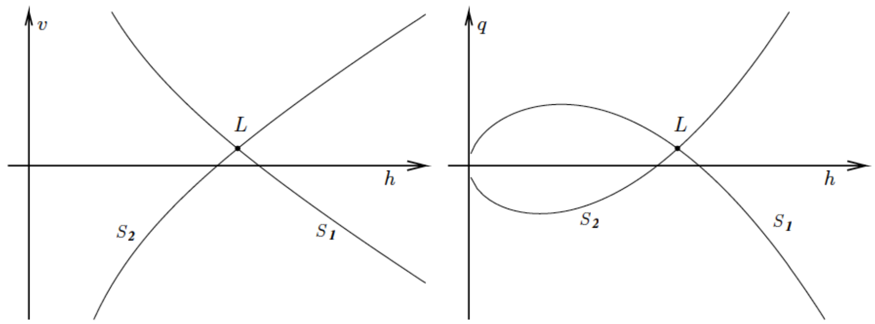


FIGURA 6.3. Ejemplo 6.7 (ecuaciones *shallow water*: curvas de choque): curvas de chqoue en los planos (h,v) (izquierda) y (q,v) (derecha). Se indican los choques lentos (S_1) y rápidos (S_2) (ver (6.60) y (6.61), respectivamente).

6.3. El lugar de Hugoniot y curvas de choque

La discusión del Capítulo 2, en partícular la condición de Rankine-Hugoniot (2.15), se extiende al caso de sistemas sin restricciones. Sin embargo el concepto de la entropía es considerablemente más complicado y todavía forma un área de investigación original. Por mientras, nuestra primera preocupación en esta sección es la caracterización de soluciones de la relación de Rankine-Hugoniot. Nuevamente asumiremos el punto de vista de la sección anterior, considerando posibles estados a derecha $\boldsymbol{u}$ que satisfacen la condición de Rankine-Hugoniot

$$s(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \tag{6.36}$$

para alguna velocidad s. Si definimos el salto en alguna cantidad $\boldsymbol{\phi}$ por $[\![\boldsymbol{\phi}]\!]:=\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{R}}-\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{L}}$, entonces (6.36) asume la forma conocida

$$s[\![\boldsymbol{u}]\!]=[\![\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})]\!].$$

Las soluciones de (6.36) para un estado a izquierda $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ dado forman un conjunto, llamado el *lugar de Hugoniot de* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$, denotado por $H(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ y que es definido por

$$H(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}):=\bigl\{\boldsymbol{u}\mid\exists s\in\mathbb{R}:s(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\bigr\}.$$

Ejemplo 6.7 (Ecuaciones *shallow water*, continuación: lugar de Hugoniot y curvas de choque)**.** *Para las ecuaciones* shallow water*, la condición de Rankine-Hugoniot* (6.36) *asume la forma*

$$s(h-h_{\mathrm{L}})=q-q_{\mathrm{L}},\quad s(q-q_{\mathrm{L}})=\frac{q^2}{h}+\frac{h^2}{2}-\left(\frac{q_{\mathrm{L}}^2}{h_{\mathrm{L}}}+\frac{h_{\mathrm{L}}^2}{2}\right), \tag{6.37}$$

donde como siempre s denota la velocidad de propagación del salto entre el estado a izquierda $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}=(h_{\mathrm{L}},q_{\mathrm{L}})^{\mathrm{T}}$ y el estado a derecha $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}=(h_{\mathrm{R}},q_{\mathrm{R}})^{\mathrm{T}}$. La solución del problema de Riemann correspondiente es

$$\begin{pmatrix}h\\q\end{pmatrix}(x,t)=\begin{cases}(h_{\mathrm{L}},q_{\mathrm{L}})^{\mathrm{T}} & \text{para } x<st,\\(h_{\mathrm{R}},q_{\mathrm{R}})^{\mathrm{T}} & \text{para } x\geqslant st.\end{cases}$$

Eliminando s en (6.37) obtenemos la ecuación

$$[\![h]\!]\left(\left[\!\!\left[\frac{q^2}{h}\right]\!\!\right] + \frac{1}{2}[\![h^2]\!]\right) = [\![q]\!]^2. \tag{6.38}$$

Introduciendo la variable v, dada por $q = vh$, obtenemos a partir de (6.38)

$$[\![h]\!]\left([\![hv^2]\!] + \frac{1}{2}[\![h^2]\!]\right) = [\![vh]\!]^2$$

con la solución

$$v = v_{\mathrm{L}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(h - h_{\mathrm{L}})\sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{h_{\mathrm{L}}}}$$

o alternativamente,

$$q = vh = q_{\mathrm{L}}\frac{h}{h_{\mathrm{L}}} \pm \frac{h}{\sqrt{2}}(h - h_{\mathrm{L}})\sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{h_{\mathrm{L}}}},$$

ver Figura 6.3. Para el uso posterior también desarrollaremos fórmulas para las velocidades de choque involucradas. Obtenemos

$$s = \frac{[\![vh]\!]}{[\![h]\!]} = \frac{v(h - h_{\mathrm{L}}) + (v - v_{\mathrm{L}})h_{\mathrm{L}}}{h - h_{\mathrm{L}}} = v + \frac{[\![v]\!]}{[\![h]\!]}h_{\mathrm{L}} = v \pm \frac{h_{\mathrm{L}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{h_{\mathrm{L}}}}$$

o equivalentemente

$$s = v + \frac{[\![v]\!]}{[\![h]\!]}h_{\mathrm{L}} = v_{\mathrm{L}} + [\![v]\!] + \frac{[\![v]\!]}{[\![h]\!]}h_{\mathrm{L}} = v_{\mathrm{L}} \pm \frac{h}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{h_{\mathrm{L}}}}. \tag{6.39}$$

Si queremos indicar la familia de onda, escribimos

$$s_j = s_j(h; v_{\mathrm{L}}) = v_{\mathrm{L}} + (-1)^j\frac{h}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{h_{\mathrm{L}}}} = v + (-1)^j\frac{h_{\mathrm{L}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{h_{\mathrm{L}}}}, \quad j = 1, 2.$$

Observamos que un estado a izquierda dado $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ es atravesado por dos curvas sobre las cuales la condición de Rankine-Hugoniot es válida, a saber:

$$H_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) := \left\{\left(h, q_{\mathrm{L}}\frac{h}{h_{\mathrm{L}}} - \frac{h}{\sqrt{2}}(h - h_{\mathrm{L}})\sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{h_{\mathrm{L}}}}\right)^{\mathrm{T}} \middle| h > 0\right\}, \tag{6.40}$$

$$H_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) := \left\{\left(h, q_{\mathrm{L}}\frac{h}{h_{\mathrm{L}}} + \frac{h}{\sqrt{2}}(h - h_{\mathrm{L}})\sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{h_{\mathrm{L}}}}\right)^{\mathrm{T}} \middle| h > 0\right\}. \tag{6.41}$$

Los choques correspondientes seran denominados choques lentos *o* 1-choques *y* choques rápidos *o* 2-choques, *respectivamente. Finalmente, comentamos que*

$$H(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \left\{\boldsymbol{u} \mid \exists s \in \mathbb{R} : s(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\right\} = H_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \cup H_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$$

es el lugar de Hugoniot correspondiente.

Pronto veremos que las propiedades básicas del lugar de Hugoniot de las ecuaciones *shallow water* pueden ser extendidas al caso general de sistemas estrictamente hiperbólicos, por lo menos para choques "pequeños" para los que $\boldsymbol{u}$ está cerca de $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$. El problema que se presenta es la solución implícita de un sistema de n ecuaciones

$$\mathcal{H}(s,\boldsymbol{u};\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) := s(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) - \bigl(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\bigr) = \boldsymbol{0} \tag{6.42}$$

para las $n+1$ incógnitas $u_1,\dots,u_n$ y s para $\boldsymbol{u}$ cerca del estado dado $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$. El problema esencial consiste en el hecho de que tenemos una ecuación menos que el número de incógnitas, y que $\mathcal{H}(s,\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}};\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \boldsymbol{0}$ para todos valores de s. Entonces el Teorema de Funciones Implícitas no puede ser utilizado antes de remover la singularidad en $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$. La versión relevante de este teorema es la siguiente.

Teorema 6.3 (Teorema de Funciones Implícitas)**.** *Sea la función*

$$\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1,\dots,\Phi_p)^{\mathrm{T}}: \quad \mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$$

de clase C^1 en una vecindad de $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$, $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^q$, $\boldsymbol{y}_0\in\mathbb{R}^p$ con $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{0}$. Sea la matriz

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \partial\Phi_1/\partial y_1 & \cdots & \partial\Phi_1/\partial y_p \\ \vdots & & \vdots \\ \partial\Phi_p/\partial y_1 & \cdots & \partial\Phi_p/\partial y_p \end{bmatrix}$$

no singular en el punto $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$. Entonces existen una vecindad N de $\boldsymbol{x}_0$ y una función diferenciable única $\boldsymbol{\phi}: N\to\mathbb{R}^p$ tal que

$$\boldsymbol{\Phi}\bigl(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\bigr)=\boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}_0.$$

Escribiremos (6.42) como un problema de valores propios que podemos estudiar localmente alrededor de cada valor propio $\lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$. Esto levanta la singularidad y el Teorema 6.3 puede ser aplicado.

Teorema 6.4. *Sea D un dominio en $\mathbb{R}^n$. Se considera la ecuación estrictamente hiperbólica $\boldsymbol{u}_t+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x=\boldsymbol{0}$ con $\boldsymbol{u}\in D$. Sea $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}\in D$. Entonces existen n curvas suaves $H_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}),\dots,H_n(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ localmente que atraviesan $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ sobre las cuales la condición de Rankine-Hugoniot está satisfecha.*

Demostración. Escribiendo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\boldsymbol{f}\bigl((1-\alpha)\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}+\alpha\boldsymbol{u}\bigr)\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_0^1 \mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}\bigl((1-\alpha)\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}+\alpha\boldsymbol{u}\bigr)(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\,\mathrm{d}\alpha = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}), \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ denota el promedio de la matriz jacobiana

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \int_0^1 \mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}\bigl((1-\alpha)\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}+\alpha\boldsymbol{u}\bigr)\,\mathrm{d}\alpha,$$

obtenemos que (6.42) puede ser escrito como

$$\mathcal{H}(s,\boldsymbol{u};\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \bigl(s-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\bigr)(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \boldsymbol{0}.$$

Aquí $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ es un vector propio de la matriz $\boldsymbol{M}$ correspondiente al valor propio s. La matriz $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ posee n valores propios distintos a pares $\lambda_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}), \dots, \lambda_n(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$, luego sabemos que existe un conjunto abierto N tal que para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} \in N$, la matriz $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ posee vectores propios dos veces diferenciables y valores propios distintos a pares, es decir

$$\bigl(\mu_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\bigr)\boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \boldsymbol{0}, \quad j = 1, \dots, n.$$

(Las propiedades de los valores propios siguen a partir del Teorema de Funciones Implícitas aplicado a $\det(\mu \boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}))$, y las propiedades de los vectores propios están basadas en considerar las proyecciones propias uni-dimensionales

$$\int \bigl(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) - \mu \boldsymbol{I}\bigr)^{-1} \,\mathrm{d}\mu$$

integradas alrededor de una pequeña curva que incluye el valor propio $\lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$.) Sean $\boldsymbol{w}_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$, $k = 1, \dots, N$, los vectores propios a izquierda normalizados tales que

$$\boldsymbol{w}_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

En esta terminología los estados $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ satisfacen la condición de Rankine-Hugoniot con una velocidad s si y sólo si existe un índice j tal que

$$\boldsymbol{w}_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = 0 \quad \text{para todo } k \neq j, \quad s = \mu_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}), \tag{6.43}$$

y $\boldsymbol{w}_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \neq 0$. Definimos funciones $\boldsymbol{F}_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mediante

$$\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{u}, \varepsilon) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) - \varepsilon\delta_{1j} \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) - \varepsilon\delta_{nj} \end{pmatrix}.$$

La condición de Rankine-Hugoniot está satisfecha si y sólo si $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{u}, \varepsilon) = \boldsymbol{0}$ para algún ε y j. Además sabemos que $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, 0) = \boldsymbol{0}$. Una computación directa entrega que

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}_j}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, 0) = \begin{bmatrix} \partial F_{j,1}/\partial u_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) & \dots & \partial F_{j,1}/\partial u_n(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial F_{j,n}/\partial u_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) & \cdots & \partial F_{j,n}/\partial u_n(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{l}_n(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \end{bmatrix}, \tag{6.44}$$

donde $\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}), \dots, \boldsymbol{l}_n(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ son los vectores propios a izquierda de $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$. Como la matriz (6.44) es no singular, el Teorema de Funciones Implícitas implica la existencia de una solución $\boldsymbol{u}_j(\varepsilon)$ única de

$$\boldsymbol{F}_j\bigl(\boldsymbol{u}_j(\varepsilon), \varepsilon\bigr) = \boldsymbol{0} \tag{6.45}$$

para ε pequeño. ■

Comentamos que derivando cada componente de (6.45) y evaluándola en $\varepsilon = 0$, obtenemos

$$\boldsymbol{l}_k(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{u}_j'(0) = \delta_{j,k} \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n, \tag{6.46}$$

lo que implica que efectivamente

$$\boldsymbol{u}_j'(0) = \boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}). \tag{6.47}$$

A partir de la definición de $\boldsymbol{M}$ tenemos que $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u})$, y esta simetría implica que

$$\begin{aligned} \mu_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) &= \mu_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}), \quad \mu_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}), \\ \boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) &= \boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}), \\ \boldsymbol{w}_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) &= \boldsymbol{w}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{w}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \boldsymbol{l}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}). \end{aligned} \tag{6.48}$$

Sea $\nabla_k h(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ el gradiente de una función $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con respecto al k-ésimo argumento $\boldsymbol{u}_k$, $k = 1, 2$. Entonces las simetrías (6.48) implican que

$$\nabla_1 \mu_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \nabla_2 \mu_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}),$$

luego

$$\nabla \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \nabla_1 \mu_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \nabla_2 \mu_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = 2\nabla_1 \mu_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}).$$

Para una función vectorial $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) = (\phi_1(\boldsymbol{u}), \dots, \phi_n(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}$ denotamos por $\boldsymbol{\nabla\phi}(\boldsymbol{u})$ la matriz

$$\boldsymbol{\nabla\phi}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \nabla \phi_1(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \\ \nabla \phi_n(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix}. \tag{6.49}$$

Ahora las simetrías (6.48) implican que

$$\boldsymbol{\nabla l}_k(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = 2\boldsymbol{\nabla}_1 \boldsymbol{w}_k(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}), \quad k = 1, \dots, n, \tag{6.50}$$

en notación obvia.

6.4. La condición de entropía

Después de haber desarrollado el concepto del lugar de Hugoniot en la sección anterior, tenemos que elegir aquellas partes de las curvas que dan origen a choques admisibles, es decir a discontinuidades que satisfacen una condición de admisibilidad. Esto será significativamente más complicado en el caso de sistemas que para ecuaciones escalares. Para guiar nuestra intuición volveremos al caso de las ecuaciones *shallow water*.

Ejemplo 6.8 (Ecuaciones *shallow water*, continuación: admisibilidad de choques)**.** *Estudiaremos en primer lugar los puntos en* $H_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ *(ver* (6.40)*); un análisis similar se aplica a* $H_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ *dado por* (6.41)*. Se trabaja con las variables* (h, v) *en lugar de* (h, q)*. Consideremos el problema de Riemann donde tenemos un cuerpo de agua alto y en reposo a la izquierda del origen y otro cuerpo de agua de baja altura y con velocidad positiva a la derecha del origen. En otras palabras, el fluido del cuerpo de altura inicialmente baja se aleja del origen. Precisamente, para* $h_{\mathrm{L}} > h_{\mathrm{R}}$ *imponemos*

$$\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}(x, 0) = \begin{cases} (h_{\mathrm{L}}, 0)^{\mathrm{T}} & \text{para } x < 0, \\ \left(h_{\mathrm{R}}, \dfrac{h_{\mathrm{L}} - h_{\mathrm{R}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\dfrac{1}{h_{\mathrm{R}}} + \dfrac{1}{h_{\mathrm{L}}}} \right)^{\mathrm{T}} & \text{para } x \geqslant 0, \end{cases} \tag{6.51}$$

donde elegimos $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ *en tal forma que* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in H_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$*, es decir la condición de Rankine-Hugoniot está satisfecha para alguna velocidad* s*. Esto implica que*

$$\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}(x,t) = \begin{cases} (h_{\mathrm{L}}, 0)^{\mathrm{T}} & \text{para } x < st, \\ \left(h_{\mathrm{R}}, \dfrac{h_{\mathrm{L}} - h_{\mathrm{R}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\dfrac{1}{h_{\mathrm{R}}} + \dfrac{1}{h_{\mathrm{L}}}}\right)^{\mathrm{T}} & \text{para } x \geqslant st \end{cases} \tag{6.52}$$

para $h_{\mathrm{L}} > h_{\mathrm{R}}$*, donde la velocidad* s *es dada por*

$$s = -\frac{h_{\mathrm{R}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{h_{\mathrm{R}}} + \frac{1}{h_{\mathrm{L}}}} < 0. \tag{6.53}$$

Esto es una solución débil del problema perfectamente legítima, pero esta solución no es para nada razonable porque ahora pronostica que un cuerpo de agua de gran altura es empujado por un cuerpo de baja altura. Si cambiamos el estado inicial de tal manera que el estado a derecha $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ *esta localizado en la otra rama de* $H_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$*, es decir que un cuerpo de agua de gran altura de agua se mueve hacia un cuerpo de agua de baja altura en reposo, es decir imponemos* $h_{\mathrm{L}} < h_{\mathrm{R}}$ *y*

$$\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}(x,0) = \begin{cases} (h_{\mathrm{L}}, 0)^{\mathrm{T}} & \text{para } x < 0, \\ \left(h_{\mathrm{R}}, \dfrac{h_{\mathrm{L}} - h_{\mathrm{R}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\dfrac{1}{h_{\mathrm{R}}} + \dfrac{1}{h_{\mathrm{L}}}}\right)^{\mathrm{T}} & \text{para } x \geqslant 0, \end{cases} \tag{6.54}$$

con $h_{\mathrm{L}} < h_{\mathrm{R}}$*, entonces la solución*

$$\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}(x,t) = \begin{cases} (h_{\mathrm{L}}, 0)^{\mathrm{T}} & \text{para } x < st, \\ \left(h_{\mathrm{R}}, \dfrac{h_{\mathrm{L}} - h_{\mathrm{R}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\dfrac{1}{h_{\mathrm{R}}} + \dfrac{1}{h_{\mathrm{L}}}}\right)^{\mathrm{T}} & \text{para } x \geqslant st \end{cases} \tag{6.55}$$

con $h_{\mathrm{L}} < h_{\mathrm{R}}$ *y* s *dada por* (6.53) *ahora es físicamente razonable porque ahora el cuerpo de agua de gran altura "empuja" el cuerpo de baja altura.*

Comentamos que quizas llama a atención que el choque es preservado, es decir no hay deformacón del perfil de deformación. Esto se debe a la particular selección de $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in H_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$*; normalmente la solución contendrá tanto un choque como una onda de rarefacción. Esto se aclarará cuando resolvemos el problema de Riemann completo.*

Consideremos también como este ejemplo funciona si consideramos la conservación de la energía. En nuestra derivación de las ecuaciones shallow water *utilizamos solamente la conservación de la masa y del momento lineal. Para soluciones suaves de estas ecuaciones se puede deducir la conservación de la energía mecánica. Efectivamente, si denotamos por*

$$E_{\mathrm{kin}}(x,t) := \frac{1}{2} h(x,t) v(x,t)^2$$

la energía cinética de un corte vertical del sistema shallow water *en la posición* x *al instante* t *y por*

$$E_{\mathrm{pot}}(x,t) := \frac{1}{2} h(x,t)^2$$

la energía potencial correspondiente, entonces la energía mecánica total es

$$E_{\mathrm{tot}}(x,t) = E_{\mathrm{kin}}(x,t) + E_{\mathrm{pot}}(x,t).$$

Consideremos ahora un segmento de un canal localizado entre $x_1 < x_2$ *y supongamos que tenemos una solución clásica (suave) de las ecuaciones* shallow water. *Entonces la tasa de cambio de energía mecánica es dada por el flujo de energía entre* x_1 *y* x_2 *más el trabajo efectuado por la presión. La conservación de energía entrega que*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{hv^2}{2}+\frac{h^2}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{hv^3}{2}+\frac{h^2v}{2}\right)_x \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^{h(x_2,t)} P(x_2,y,t)v(x_2,t)\,\mathrm{d}y - \int_0^{h(x_1,t)} P(x_1,y,t)v(x_1,t)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{hv^2}{2}+\frac{h^2}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{hv^3}{2}+\frac{h^2v}{2}\right)_x \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{h^2v}{2}\right)_x \mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{hv^2}{2}+\frac{h^2}{2}\right)_t \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{hv^3}{2}+h^2v\right)_x \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

donde utilizamos que $P(x,y,t) = h(x,t) - y$ *para soluciones suaves. Concluimos que*

$$\left(\frac{hv^2}{2}+\frac{h^2}{2}\right)_t + \left(\frac{hv^3}{2}+h^2v\right)_x = 0$$

para soluciones suaves. Esta ecuación sigue directamente de (6.3) *para soluciones suaves.*

Sin embargo, para soluciones discontinuas la energía mecánica E_{tot} *en general no será conservada. Debido a la disipación de energía esperamos una pérdida de energía a través de una discontinuidad. Calculemos el cambio de energía* ΔE_{tot} *a través de una discontinuidad en los dos ejemplos arriba. Sea* t *un tiempo tal que* $x_1 < st < x_2$. *Obtenemos*

$$\begin{aligned} \Delta E_{\mathrm{tot}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{hv^2}{2}+\frac{h^2}{2}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{hv^3}{2}+\frac{h^2v}{2}\right)\bigg|_{x_1}^{x_2} \\ &= -s\left[\!\!\left[\frac{hv^2}{2}+\frac{h^2}{2}\right]\!\!\right] + \left[\!\!\left[\frac{hv^3}{2}+h^2v\right]\!\!\right] \\ &= \frac{\delta h_{\mathrm{R}}}{2}\bigl([\![h]\!]^2\delta^2 h_{\mathrm{R}} + h_{\mathrm{R}}^2 - h_{\mathrm{L}}^2\bigr) + \bigl(-[\![h]\!]^3\delta^3 h_{\mathrm{R}} - 2[\![h]\!]\delta h_{\mathrm{R}}^2\bigr) = -\frac{[\![h]\!]^3\delta}{4}, \end{aligned}$$

donde definimos

$$\delta := \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{h_{\mathrm{L}}}+\frac{1}{h_{\mathrm{R}}}}$$

y recordamos que $v_{\mathrm{L}} = 0$ *y* $v_{\mathrm{R}} = [\![v]\!] = -[\![h]\!]\delta$ *de acuerdo a la condición de Rankine-Hugoniot. Aquí utilizamos que la solución es suave, con la energía conservada, en cada uno de los intervalos* $[x_1, st]$ *y* $[st, x_2]$. *En el primer caso, de los datos* (6.51) *y la solución* (6.52) *con* $h_{\mathrm{L}} > h_{\mathrm{R}}$, *obtenemos efectivamente* $\Delta E_{\mathrm{tot}} > 0$, *mientras en el caso alternativo de los datos* (6.54) *y la solución* (6.55) *con* $h_{\mathrm{L}} < h_{\mathrm{R}}$, *resulta* $\Delta E_{\mathrm{tot}} < 0$, *lo que es físicamente mucho más razonable.*

La discusión precedente indica que solamente una rama de $H_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ *es físicamente aceptable. Traduciremos esto ahora en condiciones sobre la existencia de perfiles viscosos y en condiciones relacionados con los valores propios de* $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$ *en* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ *y* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$, *las cuales utilizaremos en casos cuando no podemos aplicar la intuición.*

En el Capítulo 3 discutimos el concepto de ondas viajeras en el contexto de leyes de conservación escalares. Este concepto puede ser extendido al caso de sistemas de conservación, en particular a las ecuaciones shallow water*, como sigue. Motivados por* (3.6) *en el caso escalar, se dice que un choque entre dos estados fijos* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ *y* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$*, que se propaga con velocidad* s*, es decir*

$$\boldsymbol{u}(x,t) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x < st, \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant st, \end{cases}$$

admite un perfil viscoso *si* $\boldsymbol{u}(x,t)$ *es el límite cuando* $\varepsilon \to 0$ *de*

$$\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(x,t) = \boldsymbol{y}\left(\frac{x-st}{\varepsilon}\right) = \boldsymbol{y}(\xi), \quad \xi = \frac{x-st}{\varepsilon},$$

que satisface el sistema parabólico

$$\boldsymbol{u}_t^{\varepsilon} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^{\varepsilon})_x = \varepsilon \boldsymbol{u}_{xx}^{\varepsilon}.$$

Integrando esta ecuación y utilizando que $\lim_{\varepsilon\to 0} \boldsymbol{y}(\xi) = \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ *si* $\xi < 0$*, obtenemos*

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{a}(h,q) := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) - s(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}), \tag{6.56}$$

donde la diferenciación es con respecto a ξ*. Veremos que es posible conectar el estado a izquierda con el estado a derecha mediante un perfil viscoso solamente para la rama de* $H_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ *que satisface* $h_{\mathrm{R}} > h_{\mathrm{L}}$*, lo que corresponde a la solución físicamente correcta.*

Desde un punto de vista computacional, será más facil trabajar con perfiles viscosos en las variables (h,v) *que en las variables* (h,q)*. Utilizando* $\dot{q} = \dot{v}h + v\dot{h}$ *y* (6.56)*, obtenemos que existe un perfil viscoso en* (h,q) *si y sólo si* (h,v) *satisface*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{h} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}(h,v) &:= \begin{pmatrix} vh - v_{\mathrm{L}}h_{\mathrm{L}} - s(h-h_{\mathrm{L}}) \\ (v-v_{\mathrm{L}})(v_{\mathrm{L}}-s)\dfrac{h_{\mathrm{L}}}{h} + \dfrac{h^2-h_{\mathrm{L}}^2}{2h} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} vh - v_{\mathrm{L}}h_{\mathrm{L}} - s(h-h_{\mathrm{L}}) \\ (v-v_{\mathrm{L}})\dfrac{h_{\mathrm{L}}h_{\mathrm{R}}}{h}\delta + \dfrac{h^2-h_{\mathrm{L}}^2}{2h} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Analizaremos el campo vectorial $\boldsymbol{b}(h,v)$ *cuidadosamente. Su matriz jacobiana viene dada por*

$$\mathcal{J}_{\boldsymbol{b}}(h,v) = \begin{bmatrix} v-s & h \\ \dfrac{h^2+h_{\mathrm{L}}^2}{2h^2} - (v-v_{\mathrm{L}})\dfrac{h_{\mathrm{L}}h_{\mathrm{R}}}{h^2}\delta & \dfrac{h_{\mathrm{L}}h_{\mathrm{R}}}{h}\delta \end{bmatrix}. \tag{6.57}$$

Evaluando (6.57) *en* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ *obtenemos*

$$\mathcal{J}_{\boldsymbol{b}}(h_{\mathrm{L}},v_{\mathrm{L}}) = \begin{bmatrix} v_{\mathrm{L}}-s & h_{\mathrm{L}} \\ 1 & h_{\mathrm{R}}\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{\mathrm{R}}\delta & h_{\mathrm{L}} \\ 1 & h_{\mathrm{R}}\delta \end{bmatrix},$$

donde utilizamos el valor de la velocidad de propagación s *dada por* (6.39)*. Los valores propios de* $\mathcal{J}_{\boldsymbol{b}}(h_{\mathrm{L}},v_{\mathrm{L}})$ *son* $h_{\mathrm{R}}\delta \pm \sqrt{h_{\mathrm{L}}}$*. Es facil ver que ambos son positivos cuando* $h_{\mathrm{R}} > h_{\mathrm{L}}$*;*

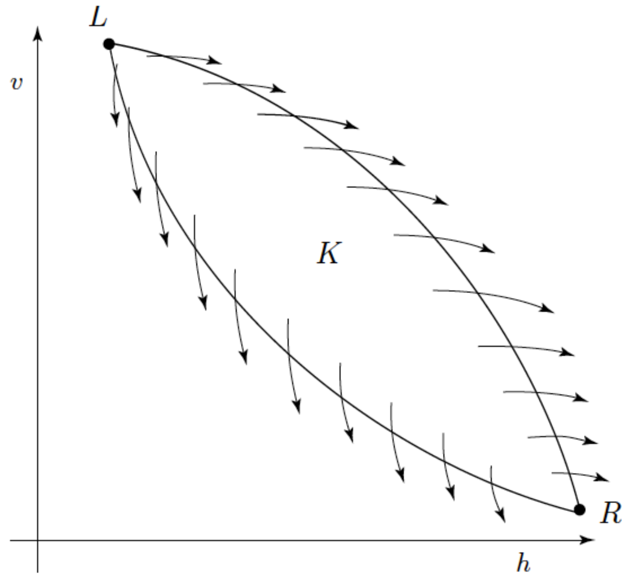


Figura 6.4. Ejemplo 6.8 (ecuaciones *shallow water*, continuación: admisibilidad de choques): el campo vectorial $\boldsymbol{b}$.

en este caso $(h_{\mathrm{L}}, v_{\mathrm{L}})$ *es una fuente. Similarmente, obtenemos*

$$\mathcal{J}_{\boldsymbol{b}}(h_{\mathrm{R}}, v_{\mathrm{R}}) = \begin{bmatrix} h_{\mathrm{L}}\delta & h_{\mathrm{R}} \\ 1 & h_{\mathrm{L}}\delta \end{bmatrix},$$

con valores propios $h_{\mathrm{L}}\delta \pm \sqrt{h_{\mathrm{R}}}$. *En el caso* $h_{\mathrm{R}} > h_{\mathrm{L}}$ *uno es positivo y otro negativo, por lo tanto* $(h_{\mathrm{R}}, v_{\mathrm{R}})$ *es un punto de silla. Sin embargo falta construir una órbita que conecta los dos estados. Para tal efecto construimos una región* K *con* $(h_{\mathrm{L}}, v_{\mathrm{L}})$ *y* $(h_{\mathrm{R}}, v_{\mathrm{R}})$ *en la frontera de* K *tal que una órbita que conecta* $(h_{\mathrm{L}}, v_{\mathrm{L}})$ *con* $(h_{\mathrm{R}}, v_{\mathrm{R}})$ *lo hace en el interior de* K. *La frontera de* K *es dada por dos curvas a lo largo de las cuales la primera y la segunda componente de* $\boldsymbol{b}$ *se anula, respectivamente. De acuerdo a lo anterior, la primera de estas curvas, denotada* C_h, *es definida por*

$$vh - v_{\mathrm{L}}h_{\mathrm{L}} - s(h - h_{\mathrm{L}}) = 0, \quad h \in [h_{\mathrm{L}}, h_{\mathrm{R}}],$$

o equivalentemente,

$$v = v_{\mathrm{L}} - (h - h_{\mathrm{L}})\frac{h_{\mathrm{R}}}{h}\delta, \quad h \in [h_{\mathrm{L}}, h_{\mathrm{R}}].$$

Para la segunda curva, denotada C_v, *tenemos*

$$(v - v_{\mathrm{L}})(v_{\mathrm{L}} - s)\frac{h_{\mathrm{L}}}{h} + \frac{h^2 - h_{\mathrm{L}}^2}{2h} = 0, \quad h \in [h_{\mathrm{L}}, h_{\mathrm{R}}],$$

o equivalentemente,

$$v = v_{\mathrm{L}} - \frac{h^2 - h_{\mathrm{L}}^2}{2h_{\mathrm{L}}h_{\mathrm{R}}\delta}, \quad h \in [h_{\mathrm{L}}, h_{\mathrm{R}}].$$

Estudiaremos ahora el comportamiento de la segunda componente de $\boldsymbol{b}$ *a lo largo de la* *curva C_h donde la primera componente se anula, es decir*

$$\left.\left((v-v_{\mathrm{L}})\frac{h_{\mathrm{L}}h_{\mathrm{R}}}{h}\delta+\frac{h^2-h_{\mathrm{L}}^2}{2h}\right)\right|_{C_h}=-\frac{h_{\mathrm{L}}}{2h^2}(h_{\mathrm{R}}-h)(h-h_{\mathrm{L}})\left(1+\frac{h+h_{\mathrm{R}}}{h_{\mathrm{L}}}\right)<0.$$

Análogamente, para primera componente de $\boldsymbol{b}$ a lo largo de la curva C_v,

$$\big(vh-v_{\mathrm{L}}h_{\mathrm{L}}-s(h-h_{\mathrm{L}})\big)\big|_{C_v}=\frac{h-h_{\mathrm{L}}}{2h_{\mathrm{R}}h_{\mathrm{L}}\delta}\big(h_{\mathrm{R}}(h_{\mathrm{L}}+h_{\mathrm{R}})-h(h+h_{\mathrm{L}})\big)>0$$

lo que es ilustrado en la Figura 6.4. El flujo del campo vectorial sale de la región K a lo largo de las curvas C_h y C_v. Localmente, alrededor de $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}=(h_{\mathrm{R}},v_{\mathrm{R}})^{\mathrm{T}}$ debe existir una órbita que entra a K cuando ξ decae desde ∞. Esta curva no puede escapar K y debe conectar con una curva que proviene de $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}=(h_{\mathrm{L}},v_{\mathrm{L}})$. Por lo tanto, acabamos de demostrar la existencia de un perfil viscoso.

Vimos que los valores relativos de la velocidad del choque s y los valores propios de la matriz jacobiana $\mathcal{J}_{\boldsymbol{b}}$, y por lo tanto los valores propios de $\mathcal{J}_{\boldsymbol{a}}$, en $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ y $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ son cruciales para la validez de este análisis. Reformularemos ahora estas hipótesis como hipótesis sobre los valores propios de $\mathcal{J}_{\boldsymbol{a}}$. A partir de (6.56) *obtenemos*

$$\mathcal{J}_{\boldsymbol{a}}(h,q)=\begin{bmatrix}-s & 1\\ h-\dfrac{q^2}{h^2} & \dfrac{2q}{h}-s\end{bmatrix}=\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})-s\boldsymbol{I},$$

donde $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$ es la matriz jacobiana de las ecuaciones shallow water *(ver* (6.8)*). Utilizando los valores propios $\lambda_{1,2}(\boldsymbol{u})$ de $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$ dados por* (6.9)*, obtenemos que los valores propios $\mu_{1,2}(\boldsymbol{u})$ de $\mathcal{J}_{\boldsymbol{a}}(h,q)$ son*

$$\mu_{1,2}(\boldsymbol{u})=-s+\frac{q}{h}\pm\sqrt{h}=-s+\lambda_{1,2}(\boldsymbol{u}).$$

Observamos que $\mu_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})>0$ y $\mu_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})>0$, por lo tanto $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ es una fuente, mientras que $\mu_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})<0$ y $\mu_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})>0$, luego $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ es un punto de silla. Podemoso escribir esto como

$$\lambda_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})<s<\lambda_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}),\quad s<\lambda_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}).\tag{6.58}$$

Estas se llaman desigualdades de Lax*, y se dice que un choque que satisface estas desigualdes es un* 1-choque de Lax *o un* choque lento de Lax. *Acabamos de demostrar que para las ecuaciones* shallow water *existe un perfil viscoso, y que las condiciones de choque de Lax están satisfechas. Dichas condiciones fueron introducidas por Lax en* [65]*; este trabajo presenta los fundamentos de la solución del problema de Riemann para sistemas de leyes de conservación.*

Para la "solución" no física consideramos $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}\in H_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ con $h_{\mathrm{R}}<h_{\mathrm{L}}$, tal que los valores propios en $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}=(h_{\mathrm{L}},v_{\mathrm{L}})$ asumen signos diferentes, por lo tanto $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ es un punto de silla. Por otra parte, ambos valores propios en $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}=(h_{\mathrm{R}},v_{\mathrm{R}})$ son positivos, por lo tanto $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ es una fuente. Concluimos que no existe ninguna órbita que conecte $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ con $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$.

Un análisis similar puede ser aplicado a $H_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$, con el resultado de que existe un perfil viscoso que satisface la condición de Rankine-Hugoniot si y sólo si las siguientes condiciones de entropía de Lax están satisfechas:

$$\lambda_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})<s<\lambda_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}),\quad s>\lambda_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}).\tag{6.59}$$

En este caso tenemos un 2-choque de Lax, *también llamado* choque rápido de Lax.

Podemos resumir el argumento como sigue. Un choque posee un perfil viscoso si y sólo si las condiciones de choque de Lax están satisfechas. Tales choques se llaman admisibles. *Denotaremos aquella parte del lugar de Hugoniot donde las condiciones de Lax para un j-choque (para un sistema de dos ecuaciones,* (6.58) *para $j = 1$ y* (6.59) *para $j = 2$) por S_j. En el caso de las ecuaciones* shallow water, *obtenemos*

$$S_1(\boldsymbol{u}_\mathrm{L}) := \left\{ \left(h, q_\mathrm{L} \frac{h}{h_\mathrm{L}} - \frac{h}{\sqrt{2}}(h - h_\mathrm{L}) \sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{h_\mathrm{L}}} \right)^\mathrm{T} \middle| h \geqslant h_\mathrm{L} \right\}, \tag{6.60}$$

$$S_2(\boldsymbol{u}_\mathrm{L}) := \left\{ \left(h, q_\mathrm{L} \frac{h}{h_\mathrm{L}} + \frac{h}{\sqrt{2}}(h - h_\mathrm{L}) \sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{h_\mathrm{L}}} \right)^\mathrm{T} \middle| 0 < h \leqslant h_\mathrm{L} \right\} \tag{6.61}$$

(ver Figura 6.3). Tambien podemos parametrizar los choques admisibles en forma diferente. Para los choques lentos de Lax definimos

$$h_{1,\varepsilon} := h_\mathrm{L} - \frac{2}{3}\sqrt{h_\mathrm{L}}\varepsilon, \quad \varepsilon < 0.$$

Esto entrega

$$q_{1,\varepsilon} := q_\mathrm{L} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3\sqrt{h_\mathrm{L}}} \right) + \frac{\varepsilon}{9} \sqrt{2h_\mathrm{L}\big(6\sqrt{h_\mathrm{L}} - 2\varepsilon\big)\big(3\sqrt{h_\mathrm{L}} - 2\varepsilon\big)},$$

lo que implica que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \begin{pmatrix} h_{1,\varepsilon} \\ q_{1,\varepsilon} \end{pmatrix} \bigg|_{\varepsilon=0} = \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{u}_\mathrm{L}),$$

donde $\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{u}_\mathrm{L})$ viene dado por (6.23). *Análogamente para los choques rápidos de Lax obtenemos*

$$h_{2,\varepsilon} := h_\mathrm{L} + \frac{2}{3}\sqrt{h_\mathrm{L}}\varepsilon, \quad \varepsilon < 0.$$

Esto entrega

$$q_{2,\varepsilon} := q_\mathrm{L} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{3\sqrt{h_\mathrm{L}}} \right) + \frac{\varepsilon}{9} \sqrt{2h_\mathrm{L}\big(6\sqrt{h_\mathrm{L}} + 2\varepsilon\big)\big(3\sqrt{h_\mathrm{L}} + 2\varepsilon\big)},$$

lo que implica que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \begin{pmatrix} h_{2,\varepsilon} \\ q_{2,\varepsilon} \end{pmatrix} \bigg|_{\varepsilon=0} = \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{u}_\mathrm{L}),$$

donde $\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{u}_\mathrm{L})$ viene dado por (6.23).

El Ejemplo 6.8 ilustra la equivalencia de la existencia de un perfil viscoso con la satisfacción de las condiciones de entropía de Lax para las ecuaciones *shallow water*. Queda pendiente hacer el mismo análisis para sistemas generales. Utilizaremos el Ejemplo 6.8 para motivar la siguiente definición, formulada para sistemas generales.

Definición 6.2 (Condición de entropía de Lax)**.** *Para el sistema de leyes de conservación* (6.1) *se dice que un choque*

$$u(x,t) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x < st, \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant st \end{cases}$$

*es un j-*choque de Lax*, $j = 1, \dots, n$, si la velocidad de propagación del choque s satisface la condición de Rankine-Hugoniot $s[\![\boldsymbol{u}]\!] = [\![\boldsymbol{f}]\!]$ y la* condición de entropía de Lax

$$\lambda_{j-1}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) < s < \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}), \quad \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}) < s < \lambda_{j+1}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}),$$

donde definimos $\lambda_0 := -\infty$ y $\lambda_{n+1} := \infty$.

Comentario 6.1. *Notamos que para sistemas estrictamente hiperbólicos, para los cuales los valores propios de $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$ son distintos a pares, es suficiente verificar las desigualdades $\lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}) < s < \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ para j-choques de Lax pequeños si los valores propios son continuous en $\boldsymbol{u}$.*

El siguiente teorema es una consecuencia del Teorema 6.4.

Teorema 6.5 (Sobre j-choques de Lax para un sistema de leyes de conservación)**.** *Se considera el sistema estrictamente hiperbólico $\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = 0$ en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea $j \in \{1, \dots, n\}$ un índice fijo y $\nabla\lambda_j \cdot \boldsymbol{r}_j = 1$. Sea $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} \in D$. Entonces un estado $\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon} \in H_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ es un j-choque de Lax cerca de $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ si $|\varepsilon|$ es suficientemente pequeño y $\varepsilon < 0$. Si $\varepsilon > 0$, entonces el choque* no *es un j-choque de Lax.*

Demostración.

1.) Utilizando la ε-parametrización del lugar de Hugoniot vemos que el choque es un j-choque de Lax si y sólo si

$$\lambda_{j-1}(0) < s(\varepsilon) < \lambda_j(0), \quad \lambda_j(\varepsilon) < s(\varepsilon) < \lambda_{j+1}(\varepsilon),$$

donde por simplicidad escribimos $\boldsymbol{u}(\varepsilon) = \boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}$, $s(\varepsilon) = s_{j,\varepsilon}$, y $\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_k(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon})$. De acuerdo al Comentario 6.1, basta verificar la satisfacción de las desigualdades

$$\lambda_j(\varepsilon) < s(\varepsilon) < \lambda_j(0).$$

2.) Para tal efecto, supongamos primeramente que $\boldsymbol{u}(\varepsilon) \in H_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ y que $\varepsilon < 0$. A partir del Teorema de Funciones Implícitas (Teorema 6.3) sabemos que $s(\varepsilon) \to \lambda_j(0)$ cuando $\varepsilon \to 0$. Como tambien $\lambda_j(\varepsilon) \to \lambda_j(0)$ cuando $\varepsilon \to 0$ y

$$\left.\frac{\mathrm{d}\lambda_j(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \nabla\lambda_j(0) \cdot \boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = 1,$$

basta demostrar que $0 < s'(0) < 1$. Efectivamente demostraremos que $s'(0) = 1/2$. Para tal efecto recordemos a partir de (6.43) que s es un valor propio de la matriz $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$, es decir

$$s(\varepsilon) = \mu_j\bigl(\boldsymbol{u}(\varepsilon), \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}\bigr).$$

Entonces

$$s'(0) = \nabla_1\mu_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \cdot \boldsymbol{u}'(0) = \frac{1}{2}\nabla\lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \cdot \boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \frac{1}{2},$$

aprovechando la simetría (6.50) y la normalización del valor propio a derecha.

3.) Si $\varepsilon > 0$, observamos inmediatamente que $s(\varepsilon) > s(0) = \lambda_j(0)$, y en este caso no podemos tener un j-choque de Lax.

■

6.5. La solución del problema de Riemann

En esta sección combinaremos las propiedades de ondas de rarefacción y de ondas de choque para construir la solución única del problema de Riemann para datos pequeños. Nuestro planteo sera el siguiente. Supongamos que el estado a izquierda $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ está dado, y consideremos el espacio de todos los estados a derecha $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ posibles. Para cada estado a derecha queremos describir la solución del problema de Riemann. (Podríamos, por supuesto, alternativamente asumir el punto de vista opuesto, considerando $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ como fijo y construyendo la solución para todos los estados $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ posibles.) Para tal efecto definimos las llamadas *curvas de onda* (*wave curves*). Si la j-ésima familia de onda es genuinamente no lineal, definimos

$$W_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) := R_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \cup S_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}),$$

donde $R_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ es la curva definida por el Teorema 6.1 y $S_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ es aquella parte de $H_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ donde las condiciones j de Lax estan satisfechas, ver Definición 6.2. Si la j-ésima familia de onda es linealmente degenerada, definimos

$$W_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) := C_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}),$$

donde $C_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ es definida por (6.21). Recordamos que las curvas de choque y de rarefacción han sido parametrizadas separadamente mediante un parámetro ε tal que $\varepsilon > 0$ corresponde a una solución de onda de rarefacción, y $\varepsilon < 0$ a una solución onda de choque, en el caso de una familia de onda genuinamente no lineal. El hecho importante acerca de las curvas de onda es el hecho de que estas curvas casi forman un sistema de coordenadas alrededor de $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$, lo que posibilitará demostrar la existencia de soluciones del problema de Riemann para $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ cerca de $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$.

Empezamos a partir del estado a izquierda $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ conectándolo a un estado intermedio cercano $\boldsymbol{u}_{m_1} = \boldsymbol{u}_{1,\varepsilon_1} \in W_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ utilizando o una solución onda de rarefacción ($\varepsilon_1 > 0$) o una solución onda de choque ($\varepsilon_1 < 0$) si la primera familia es genuinamente no lineal. Si la primera familia es linealmente degenerada, se utiliza una discontinuidad de contacto para todo ε_1. A partir del estado $\boldsymbol{u}_{m_1}$ se hallará otro estado intermedio $\boldsymbol{u}_{m_2} = \boldsymbol{u}_{2,\varepsilon_2} \in W_2(\boldsymbol{u}_{m_1})$. Se continua de esta forma hasta llegar a un estado intermedio $\boldsymbol{u}_{m_{n-1}}$ tal que $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{u}_{n,\varepsilon_n} \in W_n(\boldsymbol{u}_{m_{n-1}})$. El problema consiste en demostrar que existe una n-tupla $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ única tal que "achuntamos" $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ desde $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ mediante esta construcción.

Ilustraremos la discusión precedente mediante el ejemplo de las ecuaciones *shallow water*. Este ejemplo contiene la descripción fundamental de la solución, la cual en un principio puede ser generalizada al caso general.

Ejemplo 6.9 (Ecuaciones *shallow water*, continuación: solución del problema de Riemann)**.** *Fijamos* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$*. Entonces para cada estado a derecha* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ *hay que determinar un estado intermedio* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$ *tal que* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} \in W_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ *y* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} \in W_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})$*. (En el caso particular de que* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in$

$W_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \cup W_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ *no se necesita un estado intermedio* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$*.) Para sistemas de leyes de conservación* 2×2 *(tales como las ecuaciones* shallow water*) es más fácil considerar la curva de onda "hacia atrás"* $W_2^-(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})$ *que consiste en los estados* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$ *que pueden ser conectados con* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ *por una onda* rápida*. El problema de Riemann con el estado a izquierda* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ *y el estado a derecha* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ *posee una solución única si y sólo si* $W_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ *y* $W_2^-(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})$ *poseen una intersección única. En este caso, obviamente, la intersección será el estado intermedio* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$*. Aquí la curva* $W_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ *viene dada por*

$$W_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}): \quad v = v(h) = \begin{cases} v_{\mathrm{L}} - 2\bigl(\sqrt{h} - \sqrt{h_{\mathrm{L}}}\bigr) & \text{para } h \in [0, h_{\mathrm{L}}], \\ v_{\mathrm{L}} - \dfrac{h - h_{\mathrm{L}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{1}{h} + \dfrac{1}{h_{\mathrm{L}}}} & \text{para } h \geqslant h_{\mathrm{L}}, \end{cases}$$

y es fácil ver que $W_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ *es estrictamente decreciente, no acotada, y que empieza en* $v_{\mathrm{L}} + 2\sqrt{h_{\mathrm{L}}}$*. Utilizando* (6.27) *y* (6.61) *encontramos, además, que*

$$W_2^-(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}): \quad v = v(h) = \begin{cases} v_{\mathrm{R}} + 2\bigl(\sqrt{h} - \sqrt{h_{\mathrm{R}}}\bigr) & \text{para } h \in [0, h_{\mathrm{R}}], \\ v_{\mathrm{R}} + \dfrac{h - h_{\mathrm{R}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{1}{h} + \dfrac{1}{h_{\mathrm{R}}}} & \text{para } h \geqslant h_{\mathrm{R}}, \end{cases}$$

y es igualmente fácil ver que $W_2^-(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})$ *es estrictamente creciente, no acotada, con su mínimo en* $v_{\mathrm{R}} - 2\sqrt{h_{\mathrm{R}}}$*. Concluimos entonces que el problema de Riemann para las ecuaciones* shallow water *posee una solución única en la región donde*

$$v_{\mathrm{L}} + 2\sqrt{h_{\mathrm{L}}} \geqslant v_{\mathrm{R}} - 2\sqrt{h_{\mathrm{R}}}. \tag{6.62}$$

Para obtener ecuaciones explícitas para el estado intermedio $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$*, hay que distinguir varios casos en dependencia de las curvas de onda que intersectan (ondas de rarefacción u ondas de choque). Esto da origen a cuatro regiones, denotadas por* I, II, III *y* IV*, respectivamente (ver Figura 6.5). Generaremos las ecuaciones para el estado intermedio* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$ *en cada caso.*

1.) *Supongamos que* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in \mathrm{I}$*. Determinaremos un estado intermedio único* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} \in S_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ *tal que* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in R_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}})$*. Estos requerimientos dan origen a las siguientes ecuaciones para* h_{m} *y* v_{m} *tales que* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} = (h_{\mathrm{m}}, q_{\mathrm{m}})^{\mathrm{T}} = (h_{\mathrm{m}}, h_{\mathrm{m}}v_{\mathrm{m}})^{\mathrm{T}}$*:*

$$v_{\mathrm{m}} = v_{\mathrm{L}} - \frac{h_{\mathrm{m}} - h_{\mathrm{L}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{h_{\mathrm{m}}} + \frac{1}{h_{\mathrm{L}}}}, \quad v_{\mathrm{R}} = v_{\mathrm{m}} + 2\bigl(\sqrt{h_{\mathrm{R}}} - \sqrt{h_{\mathrm{m}}}\bigr).$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$\sqrt{2}[\![v]\!] = 2\sqrt{2}\bigl(\sqrt{h_{\mathrm{R}}} - \sqrt{h_{\mathrm{m}}}\bigr) - (h_{\mathrm{m}} - h_{\mathrm{L}})\sqrt{\frac{1}{h_{\mathrm{m}}} + \frac{1}{h_{\mathrm{L}}}}$$

para determinar h_{m}*.*

2.) *Para* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in \mathrm{III}$ *se tiene* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} \in R_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ *y* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in S_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}})$*, luego*

$$\sqrt{2}[\![v]\!] = -2\sqrt{2}\bigl(\sqrt{h_{\mathrm{m}}} - \sqrt{h_{\mathrm{L}}}\bigr) + (h_{\mathrm{R}} - h_{\mathrm{m}})\sqrt{\frac{1}{h_{\mathrm{R}}} + \frac{1}{h_{\mathrm{m}}}}.$$

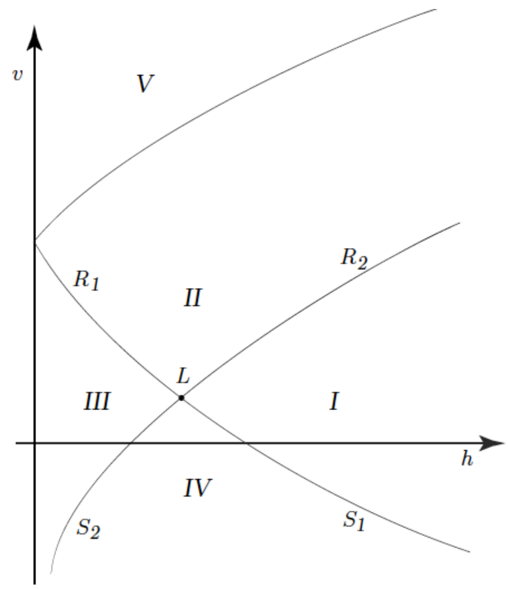


FIGURA 6.5. Ejemplo 6.9 (ecuaciones *shallow water*, continuación: solución del Problema de Riemann): partición del plano (h, v), ver (6.64) y (6.71).

3.) *Para* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in \mathrm{IV}$ *se tiene* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} \in S_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ *y* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in S_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}})$, *luego*

$$\sqrt{2}[\![v]\!] = (h_{\mathrm{R}} - h_{\mathrm{m}})\sqrt{\frac{1}{h_{\mathrm{R}}} + \frac{1}{h_{\mathrm{m}}}} - (h_{\mathrm{m}} - h_{\mathrm{L}})\sqrt{\frac{1}{h_{\mathrm{m}}} + \frac{1}{h_{\mathrm{L}}}}.$$

4.) *Para* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in \mathrm{II}$ *se tiene* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} \in R_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ *y* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in R_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}})$. *El estado intermedio* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$ *es dado por*

$$v_{\mathrm{m}} = v_{\mathrm{L}} - 2\bigl(\sqrt{h_{\mathrm{m}}} - \sqrt{h_{\mathrm{L}}}\bigr), \quad v_{\mathrm{R}} = v_{\mathrm{m}} + 2\bigl(\sqrt{h_{\mathrm{R}}} - \sqrt{h_{\mathrm{m}}}\bigr),$$

con la solución

$$\sqrt{h_{\mathrm{m}}} = \frac{1}{2}\bigl(\sqrt{h_{\mathrm{R}}} + \sqrt{h_{\mathrm{L}}}\bigr) - \frac{1}{4}[\![v]\!]. \tag{6.63}$$

Esta ecuación posee una solución solamente para estados a derecha $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ *para cuales el lado derecho de* (6.63) *es no negativo. Esto es consistente con* (6.62).

Encontramos, entonces, que el problema de Riemann posee una solución única consistente en una onda lenta seguida por una onda rápida siempre que

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in \bigl\{\boldsymbol{u} \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \mid 2\bigl(\sqrt{h_{\mathrm{R}}} + \sqrt{h_{\mathrm{L}}}\bigr) \geqslant [\![v]\!]\bigr\}. \tag{6.64}$$

Resumiremos la solución del problema de Riemann para las ecuaciones shallow water*. En primer lugar, no podemos resolver el problema globalmente, sino que solamente localmente alrededor del estado a izquierda* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$. *En segundo lugar, la solución general consiste en una composición de ondas elementales. Supongamos que* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ *satisface* (6.64), *y sea* $\boldsymbol{w}_j(x/t; h_{\mathrm{m}}, h_{\mathrm{L}})$ *la solución del problema de Riemann para* $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} \in W_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$. *Aquí, como en la mayor parte de nuestros cómputos para las ecuaciones* shallow water, *utilizamos* h *en lugar de* ε *como parámetro. Se utiliza la notación* $\sigma_j^{\pm}$ *para denotar las velocidades de onda más lenta y más*

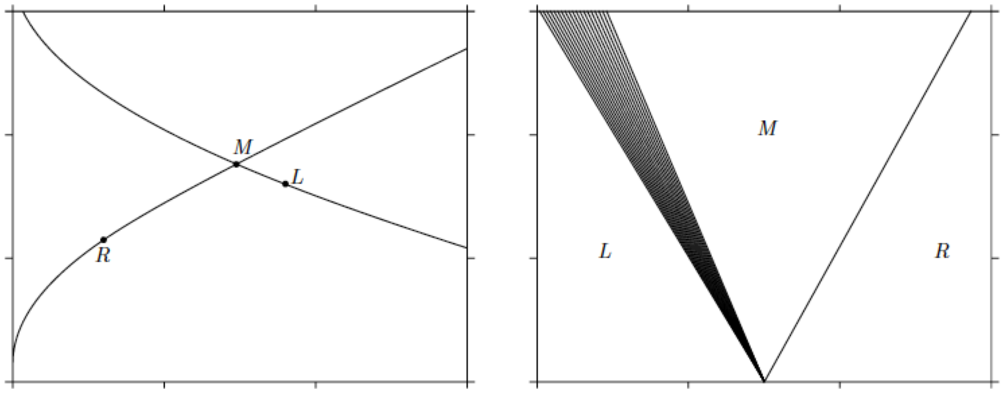


FIGURA 6.6. Ejemplo 6.9 (ecuaciones *shallow water*, continuación: solución del Problema de Riemann): la solución del problema de Riemann en el espacio de fase (izquierda) y en el espacio (x,t) (derecha).

rápida, respectivamente, en cada familia para simplificar la descripción de la solución completa. Entonces tenemos que para $j=1$ *(*$j=2$*, respectivamente) y* $h_{\mathrm{R}}<h_{\mathrm{L}}$ *(*$h_{\mathrm{R}}>h_{\mathrm{L}}$*, respectivamente),* $\boldsymbol{w}_j$ *es una solución del tipo onda de rarefacción con la velocidad menor* $\sigma_j^-=\lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ *y la velocidad mayor* $\sigma_j^+=\lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})$*. Si* $j=1$ *(*$j=2$*, respectivamente) y* $h_{\mathrm{R}}>h_{\mathrm{L}}$ *(*$h_{\mathrm{R}}<h_{\mathrm{L}}$*, respectivamente), entonces* $\boldsymbol{w}_j$ *es una solución del tipo onda de choque con la velocidad* $\sigma_j^-=\sigma_j^+=s_j(h_{\mathrm{R}},h_{\mathrm{L}})$*. La solución del problema de Riemann está dada por*

$$\boldsymbol{u}(x,t)=\begin{cases}\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x<\sigma_1^-(t),\\ \boldsymbol{w}_1(x/t;\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}},\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) & \text{para } \sigma_1^-t\leqslant x\leqslant\sigma_1^+(t),\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} & \text{para } \sigma_1^+t<x\leqslant\sigma_2^-(t),\\ \boldsymbol{w}_2(x/t;\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}},\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}) & \text{para } \sigma_2^-t\leqslant x\leqslant\sigma_2^+(t),\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x\geqslant\sigma_2^+(t),\end{cases}$$

ver Figura 6.6.

Antes de formular el teorema de existencia y unicidad para soluciones del problema de Riemann necesitaremos una cierta propiedad de las curvas de onda, la cual puede ser explícitamente verificada para las ecuaciones *shallow water*. A partir de (6.47) y (6.20) recordamos que

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}),$$

lo que implica que $W_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ es por lo menos diferenciable en $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$. Efectivamente se puede demostrar que $W_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ posee una segunda derivada continua a través de $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$.

Se introduce la siguiente notación para la *derivada direccional* de una cantidad $h(\boldsymbol{u})$ en la dirección $\boldsymbol{r}$ (no necesariamente normalizada) en el punto $\boldsymbol{u}$:

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{r}}h(\boldsymbol{u})=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\bigl(h(\boldsymbol{u}+\varepsilon\boldsymbol{r})-h(\boldsymbol{u})\bigr)=(\nabla h\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{u}).$$

(Si h es un vector, entconces ∇h debe ser reemplazado por $\boldsymbol{\nabla h}=\mathcal{J}_{\boldsymbol{h}}$.)

Teorema 6.6 (Continuidad C^2 de la curva de onda)**.** *La curva de onda $W_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ posee una segunda derivada continua a través de $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$. En particular,*

$$\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} + \varepsilon \boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \mathrm{D}_{\boldsymbol{r}_j}\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Demostración. En la demostración de la admisibilidad de partes de los lugares de Hugoniot (Teorema 6.5) desarrollamos casi todos los ingredientes necesarios para demostrar este teorema. La curva de rarefacción $R_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ es la curva integral del vector propio a derecha $\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u})$ que atraviesa $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$, luego

$$\boldsymbol{u}(0+) = \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \quad \boldsymbol{u}'(0+) = \boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}), \quad \boldsymbol{u}''(0+) = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}),$$

donde por simplicidad suprimimos la dependencia de j para $\boldsymbol{u}$, escribiendo $\boldsymbol{u}(\varepsilon) = \boldsymbol{u}_{j,\varepsilon}$, etc., y $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ denota el producto de la matriz $n \times n$ $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ (ver (6.49)) con el vector (la columna) $\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$. Recordemos que el lugar de Hugoniot es definido por (6.46), es decir

$$\boldsymbol{w}_k\big(\boldsymbol{u}(\varepsilon), \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}\big) \cdot \big(\boldsymbol{u}(\varepsilon) - \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}\big) = \varepsilon \delta_{jk}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{6.65}$$

A partir de (6.47) sabemos que $\boldsymbol{u}'(0-) = \boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$. Para hallar la segunda derivada de $\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ en $\varepsilon = 0$, hay que calcular la segunda derivada de (6.65). Aquí obtenemos

$$2\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})^{\mathrm{T}} \nabla_1 \boldsymbol{w}_k(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \boldsymbol{w}_k(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \cdot \boldsymbol{u}''(0-) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Utilizando (6.50), es decir

$$\nabla_1 \boldsymbol{w}_k(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{l}_k(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}),$$

obtenemos que

$$\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{l}_k(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \boldsymbol{l}_k(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \cdot \boldsymbol{u}''(0-) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \tag{6.66}$$

Utilizando la ortogonalidad entre los vectores propios a izquierda y a derecha,

$$\boldsymbol{l}_k(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \cdot \boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \delta_{jk},$$

obtenemos

$$\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{l}_k(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = -\boldsymbol{l}_k(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Insertando esto en (6.66) obtenemos

$$\boldsymbol{l}_k(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \cdot \boldsymbol{u}''(0-) = \boldsymbol{l}_k(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n.$$

A partir de esto concluimos también que

$$\boldsymbol{u}''(0-) = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}),$$

lo que concluye la demostración del teorema. ∎

Demostraremos ahora el teorema clásico de Lax sobre la existencia de una solución de entropía única del problema de Riemann para datos iniciales pequeños. La hipótesis de estricta hiperbolicidad del sistema implica la existencia de un conjunto completo de vectores propios linealmente independientes. Además, demostramos que las curvas de onda son de clase C^2, luego intersectan transversalmente en el estado a izquierda $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$. Esto demuestra, de manera heurística, que es posible resolver el problema de Riemann localmente. Efectivamente vimos que la solución del problema correspondiente para las ecuaciones *shallow water* puede ser escrita como composición de ondas elementales individuales que no interactúan, en el sentido de que la onda más rápida de una familia es más lenta que la onda más lenta de la familia siguiente. Esto nos permite escribir la solución en la misma forma en el caso general. Para hacerlo introduciremos alguna notación. Sea $\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon_j} = \boldsymbol{u}_{j,\varepsilon_j}(x/t; \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ la solución única del problema de Riemann con el estado a izquierda $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ y el estado a derecha $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ que consiste en una sola onda elemental (es decir, onda de choque, onda de rarefacción, o discontinuidad de contacto) de la familia j con fuerza ε_j. Además, se define notación para velocidades correspondientes a las ondas más rápidas y más lentas de una determinada familia. Sea

$$\begin{aligned}
&\sigma_j^+ = \sigma_j^- = s_{j,\varepsilon_j} \quad \text{si } \varepsilon_j < 0;\\
&\sigma_j^- = \lambda_j(\boldsymbol{u}_{j-1,\varepsilon_{j-1}}) = \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}_{j-1}}), \quad \sigma_j^+ = \lambda_j(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon_j}) = \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}_j}) \quad \text{si } \varepsilon_j > 0
\end{aligned}$$

si la j-ésima familia de onda es genuinamente no lineal y

$$\sigma_j^+ = \sigma_j^- = \lambda_j(\boldsymbol{u}_{j,\varepsilon_j}) = \lambda_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}_j})$$

si la j-ésima familia es linealmente degenerada. Mediante estas definiciones podemos ahora escribir la solución del problema de Riemann como

$$\boldsymbol{u}(x,t) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x < \sigma_1^- t,\\ \boldsymbol{u}_{1,\varepsilon_1}(x/t; \boldsymbol{u}_{\mathrm{m}_1}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) & \text{para } \sigma_1^- t \leqslant x \leqslant \sigma_1^+ t,\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{m}_1} & \text{para } \sigma_1^+ t \leqslant x < \sigma_2^- t,\\ \boldsymbol{u}_{2,\varepsilon_2}(x/t; \boldsymbol{u}_{\mathrm{m}_2}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{m}_1}) & \text{para } \sigma_2^- t \leqslant x \leqslant \sigma_2^+ t,\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{m}_2} & \text{para } \sigma_2^+ t \leqslant x < \sigma_3^- t,\\ \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{u}_{n,\varepsilon_n}(x/t; \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{m}_{n-1}}) & \text{para } \sigma_n^- t \leqslant x \leqslant \sigma_n^+ t,\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x > \sigma_n^+ t. \end{cases} \tag{6.67}$$

Teorema 6.7 (Teorema de Lax)**.** *Sean $f_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)^{\mathrm{T}}$. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y consideremos la ecuación estrictamente hiperbólica $\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \boldsymbol{0}$ con $\boldsymbol{u} \in D$. Supongamos, además, que cada familia de onda es o genuinamente no lineal, o linealmente degenerada. Entonces para cada $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} \in D$ existe una vecindad $\tilde{D} \subset D$ tal que para todo $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} \in \tilde{D}$, el problema de Riemann*

$$\boldsymbol{u}(x,0) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x < 0,\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant 0 \end{cases}$$

posee una solución única en $\tilde{D}$ que consiste en a lo más n curvas de onda, es decir ondas de rarefacción, ondas de choque que satisfacen la condición de entropía de Lax, o discontinuidades de contacto. La solución es dada por (6.67)*.*

Para demostrar el Teorema 6.7 consideraremos la aplicación $W_{j,\varepsilon} : \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{u}_{j,\varepsilon} \in W_j(\boldsymbol{u})$. Esto permite escribir la solución del problema de Riemann utilizando la composición

$$W_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)} = W_{n,\varepsilon_n} \circ W_{n-1,\varepsilon_{n-1}} \circ \cdots \circ W_{1,\varepsilon_1} \tag{6.68}$$

como

$$W_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}, \tag{6.69}$$

y deseamos demostrar la existencia de un vector único $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ (cerca del origen) tal que (6.69) está satisfecho para $|\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}|$ pequeño. La demostración del Teorema 6.7 dependerá de los dos términos dominantes, es decir hasta el término lineal, en es desarrollo en series de Taylor de W. Para su uso posterior desarrollaremos en el siguiente lema esta expresión hasta el término cuadrático.

Lema 6.1. *La cantidad* (6.68) *satisface*

$$W_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \mathrm{D}_{\boldsymbol{r}_i}\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{n} \varepsilon_i\varepsilon_j \mathrm{D}_{\boldsymbol{r}_i}\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \mathcal{O}\big(|\boldsymbol{\varepsilon}|^3\big).$$

Demostración del Lema 6.1. Demostraremos que para $k = 1,\dots,n$,

$$\begin{aligned} W_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k,0,\dots,0)}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) &= \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i^2 \mathrm{D}_{\boldsymbol{r}_i}\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{k} \varepsilon_i\varepsilon_j \mathrm{D}_{\boldsymbol{r}_i}\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \mathcal{O}\big(|\boldsymbol{\varepsilon}|^3\big) \end{aligned} \tag{6.70}$$

por inducción sobre k. Esta identidad es claramente válida para $k = 1$, de acuerdo al Teorema 6.6. Supongamos ahora que (6.70) es válido, entonces

$$\begin{aligned} W_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{k+1},0,\dots,0)}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) &= W_{k+1,\varepsilon_{k+1}}\big(W_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k,0,\dots,0)}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\big) \\ &= \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i^2 \mathrm{D}_{\boldsymbol{r}_i}\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{k} \varepsilon_i\varepsilon_j \mathrm{D}_{\boldsymbol{r}_i}\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \varepsilon_{k+1}\boldsymbol{r}_{k+1}\big(W_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k,0,\dots,0)}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\big) \\ &\quad + \frac{\varepsilon_{k+1}^2}{2}\mathrm{D}_{\boldsymbol{r}_{k+1}}\boldsymbol{r}_{k+1}\big(W_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k,0,\dots,0)}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\big) + \mathcal{O}\big(|\boldsymbol{\varepsilon}|^3\big) \\ &= \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} + \sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon_i \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon_i^2 \mathrm{D}_{\boldsymbol{r}_i}\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{k+1} \varepsilon_i\varepsilon_j \mathrm{D}_{\boldsymbol{r}_i}\boldsymbol{r}_j(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) + \mathcal{O}\big(|\boldsymbol{\varepsilon}|^3\big), \end{aligned}$$

de acuerdo al Teorema 6.6. ■

Demostración del Teorema 6.7. Se $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} \in D$ y definamos la aplicación

$$\mathcal{L}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\boldsymbol{u}) := W_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) - \boldsymbol{u}.$$

Este mapa satisface

$$\mathcal{L}(0,\dots,0,\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathcal{L}(0,\dots,0,\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) & \cdots & \boldsymbol{r}_n(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})\end{bmatrix},$$

es decir la matriz $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathcal{L}$ tiene como columnas los vectores propios $\boldsymbol{r}_j$ de $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}$, evaluados en $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$. Esta matriz es regular debido a la hipótesis de estricta hiperbolicidad. Entonces el Teorema de Funciones Implícitas implica que existe una vecindad N de $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ y una función diferenciable única $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1(\boldsymbol{u}),\dots,\varepsilon_n(\boldsymbol{u}))$ tal que

$$\mathcal{L}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\boldsymbol{u})=\mathbf{0}.$$

Si $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}\in N$, entonces existe un vector único $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ tal que $W_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})=\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$, lo que demuestra el teorema. ■

Comentario 6.2. *Podríamos reformular el Teorema de Lax diciendo que podemos utilizar $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ para medir distancias en el espacio de fase. Efectivamente, para constantes A y B se tiene que*

$$A|\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}|\leqslant\sum_{j=1}^n|\varepsilon_j|\leqslant B|\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}|.$$

Ejemplo 6.10 (Ecuaciones *shallow water*, continuación: solución global del problema de Riemann)**.** *En lo siguiente se construirá la solución global del problema de Riemann para las ecuaciones* shallow water *para todo*

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}},\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}\in D:=\bigl\{(h,v)\mid h\in[0,\infty),\ v\in\mathbb{R}\bigr\}.$$

Por supuesto, la solución es la misma en aquellas regiones donde ya hemos construido una solución, es decir queda por construir una solución en

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}\in V:=\bigl\{\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}\in D\mid 2\bigl(\sqrt{h_{\mathrm{R}}}+\sqrt{h_{\mathrm{L}}}\bigr)\leqslant[\![v]\!]\bigr\}\cup\{h=0\}.$$

Utilizaremos las variables (h,v) en lugar de (h,q). Supongamos primero que $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}=(h_{\mathrm{R}},v_{\mathrm{R}})\in V$ con $h_{\mathrm{R}}>0$. Conectamos primeramente $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ con un estado intermedio $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$ por una onda de rarefacción lenta, con un estado $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$ localizado en la "línea del vacío" $h=0$. Este estado está dado por

$$v_{\mathrm{m}}=v_{\mathrm{L}}+2\sqrt{h_{\mathrm{L}}},\tag{6.71}$$

utilizando (6.28)*. A partir de este estado saltamos al punto único v^* en $h=0$ tal que la onda de rarefacción rápida empezando en $h^*=0$ y v^* "achunta" $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$. Observamos a partir de* (6.29) *que*

$$v^*=v_{\mathrm{R}}-2\sqrt{h_{\mathrm{R}}},$$

lo que entrega la siguiente solución:

$$\boldsymbol{u}(x,t)=\begin{cases}\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}=(h_{\mathrm{L}},v_{\mathrm{L}})^{\mathrm{T}} & \text{para } x<\lambda_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})t,\\ R_1(x/t;\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) & \text{para } \lambda_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})t<x<(2\sqrt{h_{\mathrm{L}}}+v_{\mathrm{L}})t,\\ (0,\tilde{v}(x,t))^{\mathrm{T}} & \text{para } (2\sqrt{h_{\mathrm{L}}}+v_{\mathrm{L}})t<x<v^*t,\\ R_2(x/t;(0,v^*)^{\mathrm{T}}) & \text{para } v^*t<x<\lambda_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})t,\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}=(h_{\mathrm{R}},v_{\mathrm{R}})^{\mathrm{T}} & \text{para } x>\lambda_2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}})t.\end{cases}\tag{6.72}$$

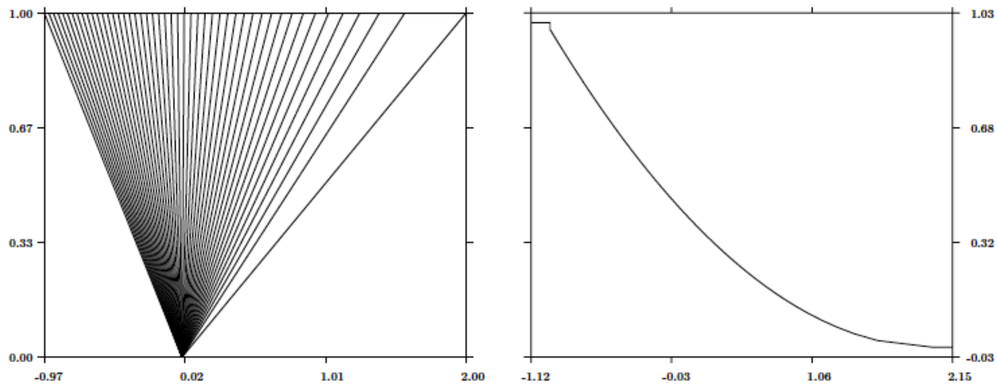


FIGURA 6.7. Ejemplo 6.11 (ecuaciones *shallow water*, continuación: problema *dam break* (rotura de la presa)): la solución del problema del problema en el espacio (x,t) (izquierda) y la componente h (derecha).

Físicamente no tiene sentido asignar un valor a la velocidad v del agua cuando no hay agua, es decir $h=0$, y matemáticamente vemos que cualquier valor de v satisface las ecuaciones cuando $h=0$. Por lo tanto, no tenemos que asignar ningún valor a $\tilde{v}(x,t)$.

Si $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ pertenece a la "línea del vacío" $\{h=0\}$, todavia podemos conectar $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ con un estado $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} \in \{h=0\}$ utilizando una rarefacción lenta, y luego conectamos con $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ a lo largo de $\{h=0\}$. Considerando un estado vecino $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{R}}$ con $\tilde{h}_{\mathrm{R}}>0$, observamos que esta construcción genera continuidad en los datos.

Finalmente, hay que resolver el problema de Riemann con $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} \in \{h=0\}$. Sea ahora $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} = (0, v_{\mathrm{L}})^{\mathrm{T}}$, y $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} = (h_{\mathrm{R}}, v_{\mathrm{R}})$ con $h_{\mathrm{R}}>0$. Ahora conectamos $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ con un estado $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$ a lo largo de $\{h=0\}$, donde

$$v_{\mathrm{m}} = v_{\mathrm{R}} - 2\sqrt{h_{\mathrm{R}}},$$

luego continuamos a $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ mediante una onda de rarefacción rápida.

Ejemplo 6.11 (Ecuaciones *shallow water*, continuación: problema *dam break* (rotura de la presa))**.** *Para este problema se consideran los datos iniciales de Riemann*

$$\boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x) = \begin{pmatrix} h(x,0) \\ v(x,0) \end{pmatrix} = \begin{cases} (h_{\mathrm{L}}, 0)^{\mathrm{T}} & \text{para } x<0, \\ \mathbf{0} & \text{para } x \geqslant 0. \end{cases}$$

A partir de la discusión anterior sabemos que la solución consiste en una onda de rarefacción lenta dada por

$$\boldsymbol{u}(x,0) = \begin{pmatrix} h(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} = \begin{cases} (h_{\mathrm{L}}, 0)^{\mathrm{T}} & \text{para } x < -\sqrt{h_{\mathrm{L}}}t, \\ \left(\dfrac{1}{9}\left(2\sqrt{h_{\mathrm{L}}} - \dfrac{x}{t}\right)^2 \dfrac{2}{3}\left(\sqrt{h_{\mathrm{L}}} + \dfrac{x}{t}\right)\right)^{\mathrm{T}} & \text{para } -\sqrt{h_{\mathrm{L}}}t < x < 2\sqrt{h_{\mathrm{L}}}t, \\ \mathbf{0} & \text{para } x > 2\sqrt{h_{\mathrm{L}}}t, \end{cases}$$

ver Figura 6.7.

6.6. El problema de Riemann para las ecuaciones de Euler

Las ecuaciones de Euler de la mecánica de fluidos dinámica de fluidos fueron definidas en el Ejemplo 6.4; el punto de partida es la versión uni-dimensional dada por (6.7). Podemos despejar p a partir de la ecuación de estado $E = \dots$ en (6.7), lo cual entrega

$$p = (\gamma - 1)E - \frac{\gamma - 1}{2}\varrho v^2 = (\gamma - 1)E - \frac{\gamma - 1}{2}\frac{q^2}{\varrho}, \tag{6.73}$$

donde definimos el momento $q = \varrho v$. Insertando esto en las ecuaciones de Euler obtenemos

$$\begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho v \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \varrho v \\ -\dfrac{\gamma - 3}{2}\varrho v^2 + (\gamma - 1)E \\ v\left(\gamma E - \dfrac{\gamma - 1}{2}\varrho v^2\right) \end{pmatrix}_x = \mathbf{0}.$$

En términos de las variables conservadas ϱ, q y E este sistema de leyes de conservación asume la forma

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \mathbf{0}, \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} \varrho \\ q \\ E \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} q \\ \dfrac{3 - \gamma}{2}\dfrac{q^2}{\varrho} + (\gamma - 1)E \\ \gamma\dfrac{Eq}{\varrho} - \dfrac{\gamma - 1}{2}\dfrac{q^3}{\varrho^2} \end{pmatrix}. \tag{6.74}$$

La matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ está dada por

$$\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\gamma - 3}{2}\dfrac{q^2}{\varrho^2} & (3 - \gamma)\dfrac{q}{\varrho} & \gamma - 1 \\ -\gamma\dfrac{Eq}{\varrho^2} + (\gamma - 1)\dfrac{q^3}{\varrho^3} & \gamma\dfrac{E}{\varrho} - \dfrac{3(\gamma - 1)}{2}\dfrac{q^2}{\varrho^2} & \gamma\dfrac{q}{\varrho} \end{bmatrix}$$

Introduciendo la *entalpía* H definida por

$$H = \frac{E + p}{\varrho} = \gamma\frac{E}{\varrho} - \frac{\gamma - 1}{2}\frac{q^2}{\varrho^2} = \frac{\gamma}{\varrho}\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2}$$

podemos escribir $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$ como

$$\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\gamma - 3}{2}v^2 & (3 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ \dfrac{\gamma - 1}{2}v^3 - vH & H - (\gamma - 1)v^2 & \gamma v \end{bmatrix}. \tag{6.75}$$

Para hallar sus valores propios, notamos que el polinomio característico de $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$ viene dado por

$$\det\bigl(\lambda \boldsymbol{I} - \mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})\bigr) = (\lambda - v)\biggl((\lambda - v)^2 - \frac{\gamma - 1}{2}(2H - v^2)\biggr) \tag{6.76}$$

(cálculo directo; ver Problema 6.5). Esto puede ser simplificado si definimos la velocidad del sonido

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\varrho}}, \tag{6.77}$$

y tomamos en cuenta que

$$\begin{aligned} 2H - v^2 &= 2\gamma\frac{E}{\varrho} - (\gamma - 1)v^2 - v^2 = 2\gamma\frac{E}{\varrho} - \gamma v^2 = \gamma\left(\frac{2E}{\varrho} - v^2\right) \\ &= \frac{\gamma}{\varrho}(2E - \varrho v^2) = \frac{\gamma}{\varrho}\frac{2p}{\gamma - 1}, \end{aligned}$$

lo cual entrega

$$\det\bigl(\lambda \boldsymbol{I} - \mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})\bigr) = (\lambda - v)\bigl((\lambda - v)^2 - c^2\bigr);$$

luego los valores propios de $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$ son

$$\lambda_1(\boldsymbol{u}) = v - c, \quad \lambda_2(\boldsymbol{u}) = v, \quad \lambda_3(\boldsymbol{u}) = v + c. \tag{6.78}$$

Escribiendo los vectores propios correspondientes como

$$\boldsymbol{r}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

en coordenadas (ϱ, q, E), obtenemos

$$y_i = \lambda_i, \quad z_i = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\lambda_i^2 - \frac{\gamma - 3}{2}v^2 + \lambda_i(\gamma - 3)v\right), \quad i = 1, 2, 3, \tag{6.79}$$

donde resulta (ver Problema 6.5)

$$z_1 = H - cv, \quad z_2 = v^2/2, \quad z_3 = H + cv. \tag{6.80}$$

Resumiendo, tenemos los siguientes valores y vectores propios:

$$\begin{aligned} &\lambda_1(\boldsymbol{u}) = v - c, \quad \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ v - c \\ H - cv \end{pmatrix}; \quad \lambda_2(\boldsymbol{u}) = v, \quad \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2/2 \end{pmatrix}; \\ &\lambda_3(\boldsymbol{u}) = v + c, \quad \boldsymbol{r}_3(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ v + c \\ H + cv \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La segunda familia es linealmente degenerada, ya que $\nabla\lambda_2(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{u}) \equiv 0$, luego la solución del problema de Riemann en esta familia consistirá en una discontinuidad de contacto. La primera y la tercera de estas familias son ambas genuinamente no lineales, es decir darán origen a las ondas de rarefacción y de choque, respectivamente (Problema 6.5).

Definición 6.3 (Invariante de Riemann)**.** *Sea la ley de conservación $\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \boldsymbol{0}$ estrictamente hiperbólica y $k \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces una función suave $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ see llama* k-invariante de Riemann *si $\nabla w(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{u}) = 0$, donde $\boldsymbol{r}_k$ es el k-ésimo vector propio de la matriz jacobiana $\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$.*

De acuerdo a esta definición, para las ecuaciones de Euler un i-invariante de Riemann ($i = 1, 2, 3$) es una función $R = R(\varrho, q, E)$ tal que R es constante a lo largo de las curvas integrales de $\boldsymbol{r}_i$. En otras palabras, un i-invariante de Riemann satisface $\nabla R(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{r}_i = 0$.

La utilidad de este concepto consiste en que si podemos encontrar dos invariantes de Riemann $R(\boldsymbol{u})$ y $\tilde{R}(\boldsymbol{u})$ para cada uno de los tres vectores propios, posiblemente se pueden resolver las ecuaciones

$$R(\varrho, q, E) = R(\varrho_{\mathrm{L}}, q_{\mathrm{L}}, E_{\mathrm{L}}), \quad \tilde{R}(\varrho, q, E) = \tilde{R}(\varrho_{\mathrm{L}}, q_{\mathrm{L}}, E_{\mathrm{L}})$$

para obtener una fórmula para las ondas de rarefacción. Esto es equivalente con encontrar una solución implícita para la ecuación diferencial ordinaria $\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ que define las curvas de rarefacción. Resulta que tenemos los siguientes invariantes de Riemann:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
invariantes de Riemann	$S, v + \dfrac{2c}{\gamma - 1}$	v, p	$S, v - \dfrac{2c}{\gamma - 1}$

Aquí se define la *entropía* S mediante

$$S = -\log \frac{p}{\varrho^{\gamma}}.$$

Podemos ahora tratar de encontrar fórmulas de solución para las curvas de rarefacción. Para $i = 1$, está curva está dada por

$$p = p_{\mathrm{L}} \left(\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{L}}} \right)^{\gamma}, \quad v = v_{\mathrm{L}} + \frac{2c_{\mathrm{L}}}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{L}}} \right)^{(\gamma-1)/2} \right) \tag{6.81}$$

(ver Problema 6.6). Esta curva es parametrizada por ϱ. Utilizando (6.77) y (6.81), obtenemos

$$v(\varrho) - c(\varrho) = v_{\mathrm{L}} + \frac{2c_{\mathrm{L}}}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{L}}} \right)^{(\gamma-1)/2} \right) \tag{6.82}$$

(ver Problema 6.6). Como $\gamma > 1$, (6.82) implica que $v(\varrho) - c(\varrho)$ es decreciente en ϱ, y para la 1-onda de rarefacción hay que utilizar $\varrho < \varrho_{\mathrm{L}}$. Como $p(\varrho)$ es creciente en ϱ, esto también significa que estamos utilizando la parte donde $p < p_{\mathrm{L}}$. Esto significa que podemos utilizar p como parámetro en la curva para v y escribir la 1-curva de rarefacción como

$$v_1(p) = v_{\mathrm{L}} + \frac{2c_{\mathrm{L}}}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p}{p_{\mathrm{L}}} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} \right), \quad p \leqslant p_{\mathrm{L}}.$$

De acuerdo a la teoría general sabemos que por lo menos para p cerca de p_{L}, esta curva puede ser continuada suavemente como una 1-curva de choque.

Para determinar la curva de rarefacción de la tercera familia, asumimos el punto de vista que $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ es fijo y que deseamos hallar $\boldsymbol{u}$ en función de $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ (tal como lo hicimos para la solución del problema de Riemann para las ecuaciones *shallow water*). En la misma forma que para v_1 esto nos lleva a la fórmula

$$v_3(p) = v_{\mathrm{R}} + \frac{2c_{\mathrm{R}}}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{p}{p_{\mathrm{R}}}\right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)}\right), \quad p \leqslant p_{\mathrm{R}}.$$

Para determinar como la densidad ϱ varia a lo largo de las curvas de rarefacción, podemos utilizar que la entropía S es constante, es decir

$$\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{L}}} = \left(\frac{p}{p_{\mathrm{L}}}\right)^{1/\gamma}.$$

Nos preocuparemos ahora de la computación de los lugares de Hugoniot. Se considera el estado a izquierda $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ fijo, y tratamos encontrar el estado a derecha $\boldsymbol{u}$, donde recordamos que $[\![\boldsymbol{u}]\!] = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$. Las relaciones de Rankine-Hugoniot para (6.7) son

$$s[\![\varrho]\!] = [\![\varrho v]\!], \quad s[\![\varrho v]\!] = [\![\varrho v^2 + p]\!], \quad s[\![E]\!] = [\![v(E+p)]\!], \tag{6.83}$$

donde s denota la velocidad de propagación del salto. Introduciendo variables nuevas $w := v - s$ y $m := \varrho w$, podemos escribir la primera ecuación en (6.83) como

$$s\varrho - s\varrho_{\mathrm{L}} = \varrho w + s\varrho - \varrho_{\mathrm{L}} w_{\mathrm{L}} - s\varrho_{\mathrm{L}},$$

lo que implica que $[\![m]\!] = 0$. Similarmente, la segunda ecuación de (6.83) puede ser escrita como

$$s\varrho w + s^2\varrho - s\varrho w_{\mathrm{L}} - s^2\varrho_{\mathrm{L}} = \varrho(w+s)^2 - \varrho_{\mathrm{L}}(w_{\mathrm{L}}+s)^2 + [\![p]\!]$$

o equivalentemente, como

$$s[\![m]\!] + s^2[\![\varrho]\!] = \varrho w^2 + 2\varrho w s + s^2\varrho - \varrho_{\mathrm{L}} w_{\mathrm{L}}^2 - 2\varrho_{\mathrm{L}} w_{\mathrm{L}} s - s^2\varrho_{\mathrm{L}} + [\![p]\!],$$

luego

$$s^2[\![\varrho]\!] = [\![\varrho w^2 + p]\!] + s^2[\![\varrho]\!],$$

Esto implica que $[\![\varrho w^2 + p]\!] = 0$. Finalmente, la tercera ecuación de (6.83) es

$$sE - sE_{\mathrm{L}} = Ew + Es + pw + ps - E_{\mathrm{L}} w_{\mathrm{L}} - E_{\mathrm{L}} s - p_{\mathrm{L}} w_{\mathrm{L}} - p_{\mathrm{L}} s,$$

lo que implica

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{E}{\varrho} - \frac{E_{\mathrm{L}}}{\varrho_{\mathrm{L}}}\right)m + pw - p_{\mathrm{L}} w_{\mathrm{L}} + s[\![p]\!] = \left(\frac{E}{\varrho} - \frac{E_{\mathrm{L}}}{\varrho_{\mathrm{L}}} + \frac{p}{\varrho} - \frac{p_{\mathrm{L}}}{\varrho_{\mathrm{L}}}\right)m - sm[\![w]\!] \\ &= m\left[\!\!\left[\frac{E+p}{\varrho} - sw\right]\!\!\right] = m\left[\!\!\left[\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{(w+s)^2}{2} - sw\right]\!\!\right] = m\left[\!\!\left[\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{w^2}{2}\right]\!\!\right], \end{aligned}$$

es decir las condiciones de Rankine-Hugoniot (6.83) son equivalentes a

$$[\![m]\!] = 0, \quad [\![mw + p]\!] = 0, \quad m\left[\!\!\left[\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{w^2}{2}\right]\!\!\right] = 0. \tag{6.84}$$

Una solución se encuentra inmediatamente poniendo $m = 0$, lo que implica $[\![p]\!] = 0$ y $[\![v]\!] = 0$. Esta es la discontinuidad de contacto. Entonces suponemos a partir de ahora que $m \neq 0$ para encontrar los demás lugares de Hugoniot.

Definiendo los parámetros auxiliares $\pi := p/p_{\mathrm{L}}$ y $z := \varrho/\varrho_{\mathrm{L}}$, tenemos que

$$\frac{c^2}{c_{\mathrm{L}}^2} = \frac{\pi}{z}, \quad \frac{w}{w_{\mathrm{L}}} = \frac{1}{z}. \tag{6.85}$$

La tercera ecuación de (6.84) puede ser escrita como

$$\frac{c_{\mathrm{L}}^2}{\gamma - 1} + \frac{w_{\mathrm{L}}^2}{2} = \frac{c_{\mathrm{L}}^2}{\gamma - 1}\frac{\pi}{z} + \frac{w_{\mathrm{L}}^2}{2z^2} \Leftrightarrow \frac{2c_{\mathrm{L}}^2}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{\pi}{z}\right) = w_{\mathrm{L}}^2\left(\frac{1}{z^2} - 1\right),$$

lo que implica que

$$\left(\frac{w_{\mathrm{L}}}{c_{\mathrm{L}}}\right)^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\frac{z(z - \pi)}{1 - z^2}. \tag{6.86}$$

Utilizando que $p = \varrho c^2/\gamma$, obtenemos a partir de la segunda ecuación en (6.84)

$$\frac{\varrho c^2}{\gamma} + \varrho w^2 = \frac{\varrho_{\mathrm{L}}^2 c_{\mathrm{L}}^2}{\gamma} + \varrho_{\mathrm{L}} w_{\mathrm{L}}^2 \Leftrightarrow z\left(\frac{c^2}{\gamma} + w^2\right) = \frac{c_{\mathrm{L}}^2}{\gamma} + w_{\mathrm{L}}^2 \Leftrightarrow z\left(\frac{c_{\mathrm{L}}^2 \pi}{\gamma z} + \frac{w_{\mathrm{L}}^2}{z^2}\right) = \frac{c_{\mathrm{L}}^2}{\gamma} + w_{\mathrm{L}}^2.$$

Dividiendo la última ecuación por c_{L}^2 podemos despejar $(w_{\mathrm{L}}/c_{\mathrm{L}})^2$:

$$\left(\frac{w_{\mathrm{L}}}{c_{\mathrm{L}}}\right)^2 = \frac{1}{\gamma}\frac{z(\pi - 1)}{z - 1}. \tag{6.87}$$

Igualando (6.86) y (6.87) y despejando z obtenemos

$$z = \frac{\beta\pi + 1}{\pi + \beta},$$

donde

$$\beta := \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \tag{6.88}$$

Insertando esta expresión en (6.86), obtenemos

$$\left(\frac{w_{\mathrm{L}}}{c_{\mathrm{L}}}\right)^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\frac{\pi\beta + 1}{\beta^2 - 1} \tag{6.89}$$

(ver Problema 6.7). Como $\gamma > 1$ implica $\beta > 1$, esta expresión siempre es bien definida. Como, además, $w_{\mathrm{L}} = v_{\mathrm{L}} - s$, esta relación puede ser utilizada obtener una expresión para la velocidad de propagación del choque; se llega a

$$s = v_{\mathrm{L}} \mp c_{\mathrm{L}}\sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}\frac{\pi\beta + 1}{\beta^2 - 1}}, \tag{6.90}$$

donde el signo "$-$" corresponde a la primera familia y el signo "$+$" a la tercera familia. Luego, utilizando (6.85), obtenemos

$$\frac{v - s}{v_{\mathrm{L}} - s} = \frac{1}{z},$$

lo que puede ser utilizado para expresar v como función de π, con el resultado

$$v = v_{\mathrm{L}} \mp \frac{2c_{\mathrm{L}}}{\sqrt{2\gamma(\gamma - 1)}}\frac{\pi - 1}{\sqrt{\pi\beta + 1}} \tag{6.91}$$

(ver Problema 6.7), donde el signo "$-$" corresponde a la primera familia y el signo "$+$" a la tercera familia. Para ver como la densidad varia a lo largo de los lugares de Hugoniot, utilizamos que $\varrho = \varrho_{\mathrm{L}} z$ o

$$\varrho = \varrho_{\mathrm{L}} \frac{\pi\beta + 1}{\pi + \beta}, \tag{6.92}$$

lo cual es válido tanto para la primera como para la tercera familia.

Ahora queda por verificar la condición de entropía de Lax (ver Definición 6.2). Específicamente, un 1-choque de Lax con los estados a izquierda y a derecha $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ y $\boldsymbol{u}$, respectivamente, debe satisfacer las condiciones $s < \lambda_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ y $\lambda_1(\boldsymbol{u}) < s < \lambda_2(\boldsymbol{u})$. Como la velocidad de propagación del choque $s = s(\boldsymbol{u})$ dada por (6.90) satisface $s(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}) = v_{\mathrm{L}} - c_{\mathrm{L}} = \lambda_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ y es una función decreciente de π, concluimos que $s < \lambda_1(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}})$ si $p > p_{\mathrm{L}}$, es decir $\pi > 1$. Con respecto a desigualdad que involucra el estado a derecha (en este caso, $\boldsymbol{u}$), conviene re-escribir (6.90) en términos del estado a derecha (ver Problema 6.8), con el resultado

$$s = v \mp c\sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \frac{\beta/\pi + 1}{\beta^2 - 1}}. \tag{6.93}$$

Como $\pi > 1$, observamos para la raíz en (6.93) que $\sqrt{\cdots} < 1$, lo que demuestra que $\lambda_1(\boldsymbol{u}) < s < \lambda_2(\boldsymbol{u})$. Esto demuestra que la parte del lugar de Hugoniot con $p \geqslant p_{\mathrm{L}}$ satisface la condición de entropía de Lax correspondiente a un 1-choque. Un argumento similar puede ser aplicado a la tercera familia.

Concluimos que la curva de solución completa para ondas de la primera familia es dada por

$$v_1(p) = v_{\mathrm{L}} + 2c_{\mathrm{L}} \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\dfrac{p}{p_{\mathrm{L}}}\right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)}\right) & \text{para } p \leqslant p_{\mathrm{L}}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}\left(1 - \dfrac{p}{p_{\mathrm{L}}}\right)\left(1 + \dfrac{\beta p}{p_{\mathrm{L}}}\right)^{-1/2} & \text{para } p \geqslant p_{\mathrm{L}}. \end{cases} \tag{6.94}$$

La densidad a lo largo de esta curva de solución es

$$\varrho_1(p) = \varrho_{\mathrm{L}} \begin{cases} (p/p_{\mathrm{L}})^{1/\gamma} & \text{para } p \leqslant p_{\mathrm{L}}, \\ \dfrac{1 + \beta p/p_{\mathrm{L}}}{\beta + p/p_{\mathrm{L}}} & \text{para } p \geqslant p_{\mathrm{L}}. \end{cases} \tag{6.95}$$

En términos del parámetro $\pi = p/p_{\mathrm{L}}$, la curva de onda de la primera familia puede ser descrita como

$$\begin{aligned} v_1(\pi) &= v_{\mathrm{L}} + 2c_{\mathrm{L}} \begin{cases} \dfrac{1 - \pi^{(\gamma-1)/(2\gamma)}}{\gamma - 1} & \text{para } \pi \leqslant 1, \\ \dfrac{1 - \pi}{\sqrt{2\gamma(\gamma - 1)}}(1 + \beta\pi)^{-1/2} & \text{para } \pi \geqslant 1, \end{cases} \\ \varrho_1(\pi) &= \varrho_{\mathrm{L}} \begin{cases} \pi^{1/\gamma} & \text{para } \pi \leqslant 1, \\ \dfrac{1 + \beta\pi}{\beta + \pi} & \text{para } \pi \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{6.96}$$

Fórmulas similares también pueden ser calculadas para las variables q y E.

Como la segunda familia es linealmente degenerada, podemos utilizar la entera curva integral de $\boldsymbol{r}_2$. Utilizando los invariantes de Riemann, ésta es simplemente dada por $v = v_{\mathrm{L}}$ y $p = p_{\mathrm{L}}$, luego solamente la densidad ϱ varia a través de la discontinuidad de contacto.

Para la tercera familia asumiremos un punto de vista similar al estudio de las ecuaciones *shallow water*, es decir fijamos $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ y buscamos estados $\boldsymbol{u}$ tales que el problema de Riemann

$$\boldsymbol{u}(x,0) = \begin{cases} \boldsymbol{u} & \text{para } x < 0, \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant 0 \end{cases}$$

posee como solución una onda de la tercera familia. Mediante cálculos muy similares a los realizados para la primera familia llegamos a

$$v_3(p) = v_{\mathrm{R}} - 2c_{\mathrm{R}} \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\dfrac{p}{p_{\mathrm{R}}}\right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)}\right) & \text{para } p \leqslant p_{\mathrm{R}}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}\left(1 - \dfrac{p}{p_{\mathrm{R}}}\right)\left(1 + \dfrac{\beta p}{p_{\mathrm{R}}}\right)^{-1/2} & \text{para } p \geqslant p_{\mathrm{R}}, \end{cases} \tag{6.97}$$

donde la parte de la rarefacción corresponde a $p \leqslant p_{\mathrm{R}}$ y la parte del choque a $p \geqslant p_{\mathrm{R}}$. La densidad a lo largo de esta curva de solución es

$$\varrho_3(p) = \varrho_{\mathrm{R}} \begin{cases} (p/p_{\mathrm{R}})^{1/\gamma} & \text{para } p \leqslant p_{\mathrm{R}}, \\ \dfrac{1 + \beta p/p_{\mathrm{R}}}{\beta + p/p_{\mathrm{R}}} & \text{para } p \geqslant p_{\mathrm{R}}. \end{cases} \tag{6.98}$$

En términos del parámetro $\pi_{\mathrm{R}} = p/p_{\mathrm{R}}$, la curva de onda de la tercera familia puede ser descrita como

$$\begin{aligned} v_3(\pi_{\mathrm{R}}) &= v_{\mathrm{R}} - 2c_{\mathrm{R}} \begin{cases} \dfrac{1 - \pi_{\mathrm{R}}^{(\gamma-1)/(2\gamma)}}{\gamma - 1} & \text{para } \pi_{\mathrm{R}} \leqslant 1, \\ \dfrac{1 - \pi_{\mathrm{R}}}{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}(1 + \beta\pi_{\mathrm{R}})^{-1/2} & \text{para } \pi_{\mathrm{R}} \geqslant 1, \end{cases} \\ \varrho_3(\pi_{\mathrm{R}}) &= \varrho_{\mathrm{R}} \begin{cases} \pi_{\mathrm{R}}^{1/\gamma} & \text{para } \pi_{\mathrm{R}} \leqslant 1, \\ \dfrac{1 + \beta\pi_{\mathrm{R}}}{\beta + \pi_{\mathrm{R}}} & \text{para } \pi_{\mathrm{R}} \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{6.99}$$

Ahora observamos que para cada ϱ_{L}, la curva $v_1(p)$ es una función estrictamente decreciente de p (o de π) para $p \geqslant 0$ asumiendo valores $v_1 \in (-\infty, v_{\mathrm{L}} + 2c_{\mathrm{L}}/(\gamma-1)]$. Análogamente, para cada ϱ_{R} la curva $v_3(p)$ es una función estrictamente creciente de p (o de π_{R}) asumiendo valores $v_3 \in [v_{\mathrm{R}} - 2c_{\mathrm{R}}/(\gamma - 1), \infty)$. En virtud de lo anterior estas curvas intersectan en un punto $(p_{\mathrm{m}}, v_{\mathrm{m}})$ si

$$v_{\mathrm{R}} - \frac{2c_{\mathrm{R}}}{\gamma - 1} \leqslant v_{\mathrm{L}} + \frac{2c_{\mathrm{L}}}{\gamma - 1} \Leftrightarrow \frac{\gamma - 1}{2}[\![v]\!] \leqslant c_{\mathrm{L}} + c_{\mathrm{R}}. \tag{6.100}$$

En este caso obtenemos una solución única donde la densidad ϱ salta desde su valor al lado izquierdo de la discontinuidad de contacto a su valor a la derecha, mientras que la presión p y

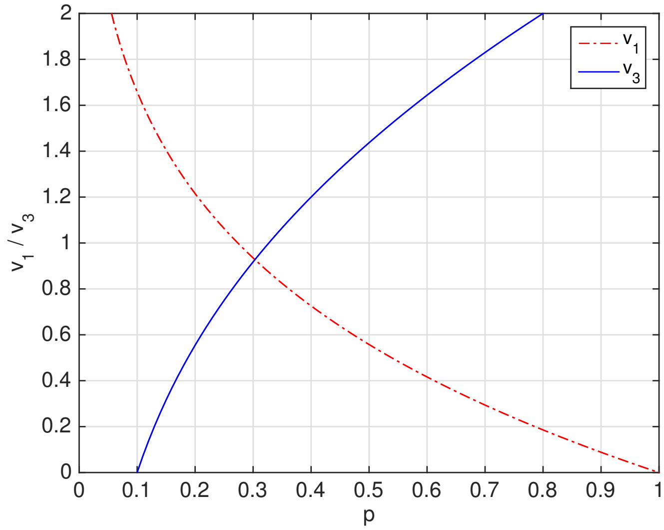


FIGURA 6.8. Ejemplo 6.12 (ecuaciones de Euler, problema de Sod): curvas v_1 y v_3 expresadas como función de p.

la velocidad v permanecen sin cambiar a través de la discontinuidad de contacto e igualan p_{m} y v_{m}, respectivamente. Si esto no sucede, entonces v_1 y v_3 no intersectan y se produce una solución con un vacío.

Ejemplo 6.12 (Problema de Riemann para las ecuaciones de Euler: el problema de Sod)**.** *Este ejemplo y el siguiente presentan dos aplicaciones de la teoría desarollada anteriormente a problemas de Riemann concretos, donde los estados $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ y $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ son elegidos en tal forma que se producen soluciones respectivas “ricas” en la variedad de ondas. Dichos ejemplos, los cuales se deben a Sod* [92] *y Lax* [64], *respectivamente, se estan utilizando frecuentamente como casos test para métodos numéricos.*

El problema de Sod es definido por las ecuaciones de Euler (6.7), *donde se elige $\gamma = 1{,}4$ como parámetro de la ecuación de estado. Se considera el problema de Riemann con los datos*

$$\boldsymbol{u}_0(x) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} & \text{para } x < x_0 := 0{,}5, \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant x_0, \end{cases} \qquad \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} \varrho_{\mathrm{L}} \\ v_{\mathrm{L}} \\ p_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} \varrho_{\mathrm{R}} \\ v_{\mathrm{R}} \\ p_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125 \\ 0 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}, \tag{6.101}$$

ver Figura 6.9 (a).

Para resolver este problema, calculamos primero, utilizando (6.77), *las velocidades del sonido*

$$c_{\mathrm{L}} = \sqrt{\frac{\gamma p_{\mathrm{L}}}{\varrho_{\mathrm{L}}}} \approx 1{,}183216, \quad c_{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{\gamma p_{\mathrm{R}}}{\varrho_{\mathrm{R}}}} \approx 1{,}058301.$$

Estos valores claramente satisfacen

$$v_{\mathrm{R}} - \frac{2c_{\mathrm{R}}}{\gamma - 1} = -5c_{\mathrm{R}} < 5c_{\mathrm{L}} = v_{\mathrm{L}} + \frac{2c_{\mathrm{L}}}{\gamma - 1},$$

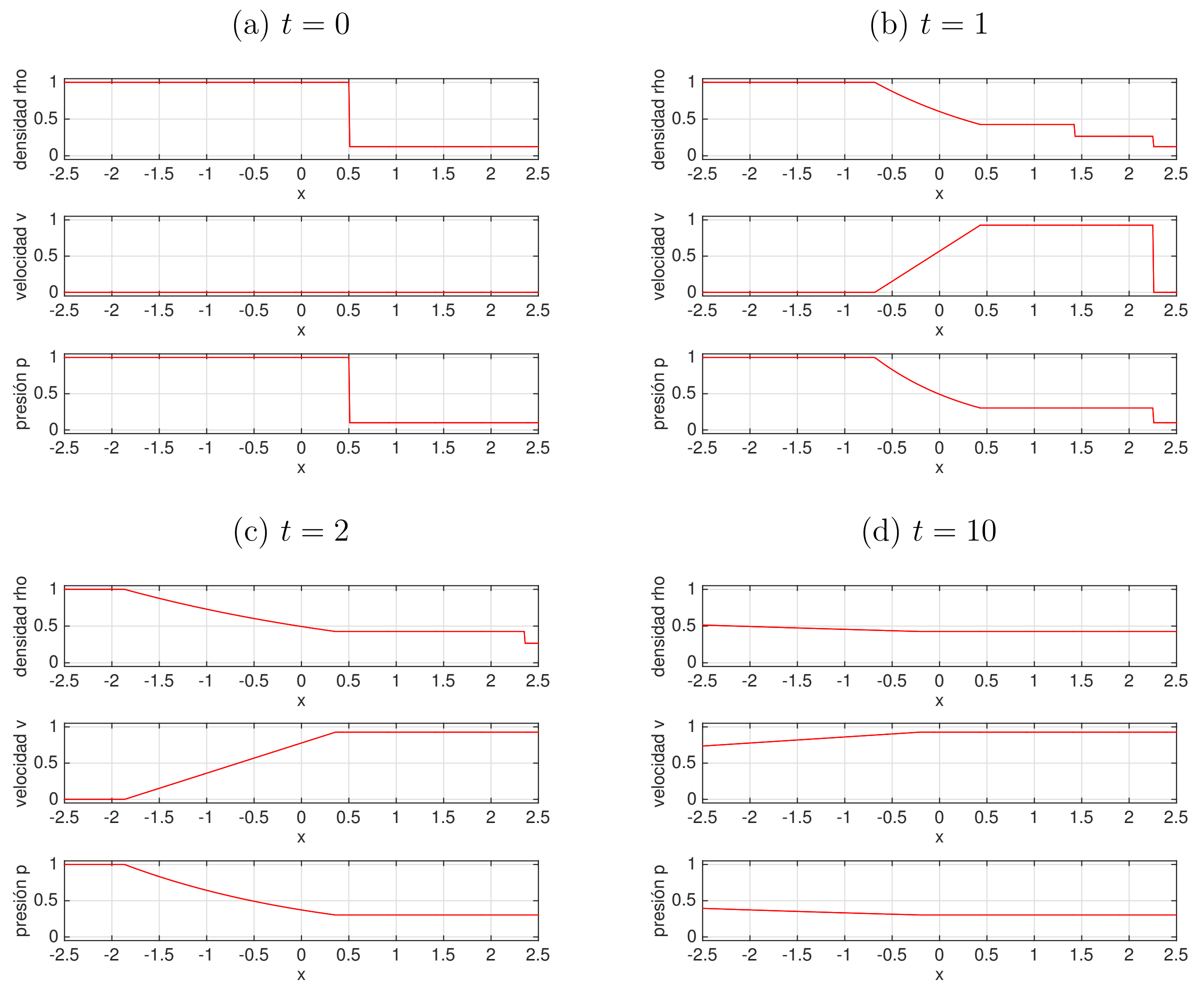


FIGURA 6.9. Ejemplo 6.12 (ecuaciones de Euler, problema de Sod): (a) dato inicial (6.101) , (b–c) solución (6.106) para ϱ, v, y p en los tiempos indicados.

es decir el criterio de intersección (6.100) *está claramente satisfecho, y la solución procede por la construcción de un estado intermedio* $(p_{\mathrm{m}}, v_{\mathrm{m}})$ *en el cual intersecta la curva* v_1*, dada por* (6.94) *o equivalentemente* (6.96)*, con la curva* v_3 *dada por* (6.97) *o equivalentemente,* (6.99)*. La Figura 6.8 muestra esta situación. La intersección ocurre en* $p_{\mathrm{m}} \approx 0{,}3$*. Claramente,* $p_{\mathrm{m}} < p_{\mathrm{L}} = 1$*, lo que signfica que la primera de las expresiones en* (6.94) *o en la ecuación para* v_1 *en* (6.96) *debe ser utilizada y que la onda en la primera familia es una onda de rarefacción. Por otro lado,* $p_{\mathrm{m}} > p_{\mathrm{R}} = 0{,}1$*, lo que corresponde al uso de la segunda de las fórmulas en* (6.97) *y en la ecuación para* v_3 *en* (6.99)*, es decir la onda en la tercera familia es un choque. El valor preciso* $p = p_{\mathrm{m}}$ *de la intersección resulta, en este caso, igualando la primera de las expresiones de* (6.96) *con la segunda de las expresiones de* (6.99)*, es decir*

$$v_{\mathrm{L}} + \frac{2c_{\mathrm{L}}}{\gamma - 1}\bigl(1 - \pi_{\mathrm{L}}^{(\gamma-1)/(2\gamma)}\bigr) = v_{\mathrm{R}} - \frac{2c_{\mathrm{R}}}{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}\sqrt{1+\beta\pi_{\mathrm{R}}}}$$

o equivalentemente,

$$\frac{\gamma-1}{2}\frac{v_{\mathrm{L}}-v_{\mathrm{R}}}{c_{\mathrm{R}}}+\frac{c_{\mathrm{L}}}{c_{\mathrm{R}}}\left[1-\pi_{\mathrm{R}}^{(\gamma-1)/(2\gamma)}\left(\frac{p_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{L}}}\right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)}\right]-\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\frac{\pi_{\mathrm{R}}-1}{\sqrt{1+\beta\pi_{\mathrm{R}}}}=0,$$

cuya solución puede ser calculada numéricamente, entregando en este caso

$$p_{\mathrm{m}}=3{,}031301780506467p_{\mathrm{R}}=0{,}3031301780506467.$$

El valor v_{m} correspondiente sale a partir de una de las ecuaciones para v_1 o v_3 utilizadas. Utilizando la segunda opción, obtenemos aquí

$$v_{\mathrm{m}}=v_{\mathrm{R}}-2c_{\mathrm{R}}\frac{1-p_{\mathrm{m}}/p_{\mathrm{R}}}{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}(1+\beta p_{\mathrm{m}}/p_{\mathrm{R}})^{-1/2}=0{,}927452620048950.$$

Los valores $v=v_{\mathrm{m}}$ y $p=p_{\mathrm{m}}$ son constantes entre la onda de rarefacción (onda de la familia 1) y el choque (onda de la familia 3), mientras que ϱ sufre un salto a través de la discontinuidad de contacto (onda de la familia 2). Sean ϱ_{m}^- y ϱ_{m}^+ los valores de ϱ adyacentes a la discontinuidad de contacto. Para calcular ϱ_{m}^+ podemos utilizar la segunda expresión de (6.98)*, lo que resulta en*

$$\varrho_{\mathrm{m}}^+=\varrho_{\mathrm{R}}\frac{1+\beta p_{\mathrm{m}}/p_{\mathrm{R}}}{\beta+p_{\mathrm{m}}/p_{\mathrm{R}}}=0{,}265573711705307.$$

La velocidad de propagación σ de la discontinuidad que separa los estados $(\varrho_{\mathrm{m}}^+,v_{\mathrm{m}},p_{\mathrm{m}})^{\mathrm{T}}$ y $(\varrho_{\mathrm{R}},v_{\mathrm{R}},p_{\mathrm{R}})^{\mathrm{T}}$ puede ser calculada, por ejemplo, a través de la condición de Rankine-Hugoniot:

$$\sigma=\frac{\varrho_{\mathrm{R}}v_{\mathrm{R}}-\varrho_{\mathrm{m}}v_{\mathrm{m}}}{\varrho_{\mathrm{R}}-\varrho_{\mathrm{m}}}=1{,}752155732030177.$$

Con esto se ha generado toda la información en torno al choque en la tercera familia.

Consideremos ahora la onda de rarefacción de la primera familia, la cual separa los estados $(\varrho_{\mathrm{L}},v_{\mathrm{L}},p_{\mathrm{L}})^{\mathrm{T}}$ y $(\varrho_{\mathrm{m}}^-,v_{\mathrm{m}},p_{\mathrm{m}})^{\mathrm{T}}$, donde en este momento ϱ_{m}^- aún es incógnita. Sean ahora ϱ_1, v_1 y p_1 las componentes de la solución que corresponden a la onda de rarefacción (considerando que se trata de una 1-onda de rarefacción). A partir de la primera ecuación de (6.95) *sabemos que*

$$\varrho_1/\varrho_{\mathrm{L}}=(p_1/p_{\mathrm{L}})^{1/\gamma};$$

además, como $v+2c/(\gamma-1)$ es un invariante de Riemann de la primera familia,

$$v_1+\frac{2c_1}{\gamma-1}=v_{\mathrm{L}}+\frac{2c_{\mathrm{L}}}{\gamma-1}\Leftrightarrow\frac{\gamma-1}{2}v_1-c_1=\frac{\gamma-1}{2}v_{\mathrm{L}}+c_{\mathrm{L}};\tag{6.102}$$

además, el abanico de rarefacción es compuesto por características a lo largo de las cuales

$$\frac{\gamma-1}{2}v_1+c_1=\text{const.}\quad\text{a lo largo de}\quad\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_1-c_1.\tag{6.103}$$

Despejando c_1 a partir de (6.102) *obtenemos*

$$c_1=\frac{\gamma-1}{2}v_{\mathrm{L}}+c_{\mathrm{L}}-\frac{\gamma-1}{2}v_1\Rightarrow v_1-c_1=\frac{\gamma+1}{2}v_1-\frac{\gamma-1}{2}v_{\mathrm{L}}-c_{\mathrm{L}}.\tag{6.104}$$

A partir de (6.102) *y* (6.103) *concluimos que* v_1 *y* c_1 *son constantes separadamente a lo largo de las características, es decir podemos definirlas como*

$$\frac{x - x_0}{t} = v_1 - c_1. \tag{6.105}$$

Como a lo largo de la onda de rarefacción, v_1 *varia entre* $v_\mathrm{L} = 0$ *y* v_m*, el abanico está localizado de acuerdo a*

$$\xi_- := v_\mathrm{L} - c_\mathrm{L} < \frac{x - x_0}{t} < \xi_+ := v_\mathrm{m} - c_\mathrm{m}^- = \frac{\gamma+1}{2} v_\mathrm{m} - \frac{\gamma-1}{2} v_\mathrm{L} - c_\mathrm{L},$$

lo que en nuestro caso entrega los valores

$$\xi_- = -1{,}183215956619923, \quad \xi_+ = -0{,}070272812561184;$$

luego

$$c_\mathrm{m}^- = v_\mathrm{m} - \xi_+ = 0{,}997725432610133,$$

lo que nos permite calcular

$$\varrho_\mathrm{m}^- = \frac{\gamma p_\mathrm{m}}{(c_\mathrm{m}^-)^2} = 0{,}426319428178495.$$

Combinando (6.104) *con* (6.105)*, sabemos ahora que*

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{t} &= \frac{\gamma+1}{2} v_1 - \frac{\gamma-1}{2} v_\mathrm{L} - c_\mathrm{L} \\ \Rightarrow v_1 &= \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{x-x_0}{t} + \frac{\gamma-1}{2} v_\mathrm{L} + c_\mathrm{L}\right), \quad x_0 + \xi_- t < x < x_0 + \xi_+ t, \end{aligned}$$

lo que nos permite despejar las demás variables como sigue:

$$c_1(x,t) = v_1(x,t) - \frac{x-x_0}{t}, \quad p_1(x,t) = \left(\frac{c_1(x,t)}{c_\mathrm{L}}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} p_\mathrm{L}, \quad \varrho_1(x,t) = \left(\frac{p_1(x,t)}{p_\mathrm{L}}\right)^{1/\gamma} \varrho_\mathrm{L},$$

en cada caso para $x_0 + \xi_- t < x < x_0 + \xi_+ t$*. Resumiendo, tenemos la siguiente solución:*

$$(\varrho, v, p)(x,t) = \begin{cases} (\varrho_\mathrm{L}, v_\mathrm{L}, p_\mathrm{L}) & \text{para } x - x_0 \leqslant \xi_- t, \\ (\varrho_1(x,t), v_1(x,t), p_1(x,t)) & \text{para } \xi_- t < x - x_0 \leqslant \xi_+ t, \\ (\varrho_\mathrm{m}^-, v_\mathrm{m}, p_\mathrm{m}) & \text{para } \xi_+ t < x - x_0 \leqslant v_\mathrm{m} t, \\ (\varrho_\mathrm{m}^+, v_\mathrm{m}, p_\mathrm{m}) & \text{para } v_\mathrm{m} t < x - x_0 \leqslant \sigma t, \\ (\varrho_\mathrm{R}, v_\mathrm{R}, p_\mathrm{R}) & \text{para } x - x_0 > \sigma t. \end{cases} \tag{6.106}$$

La Figura 6.9 ilustra esta solución.

Ejemplo 6.13 (Problema de Riemann para las ecuaciones de Euler: el problema de Lax)**.** *El problema de Lax es definido por*

$$\boldsymbol{u}_0(x) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_\mathrm{L} & \text{para } x < x_0 := 0, \\ \boldsymbol{u}_\mathrm{R} & \text{para } x \geqslant x_0, \end{cases} \quad \boldsymbol{u}_\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \varrho_\mathrm{L} \\ v_\mathrm{L} \\ p_\mathrm{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}445 \\ 0{,}698 \\ 3{,}52 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \varrho_\mathrm{R} \\ v_\mathrm{R} \\ p_\mathrm{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}571 \end{pmatrix}, \tag{6.107}$$

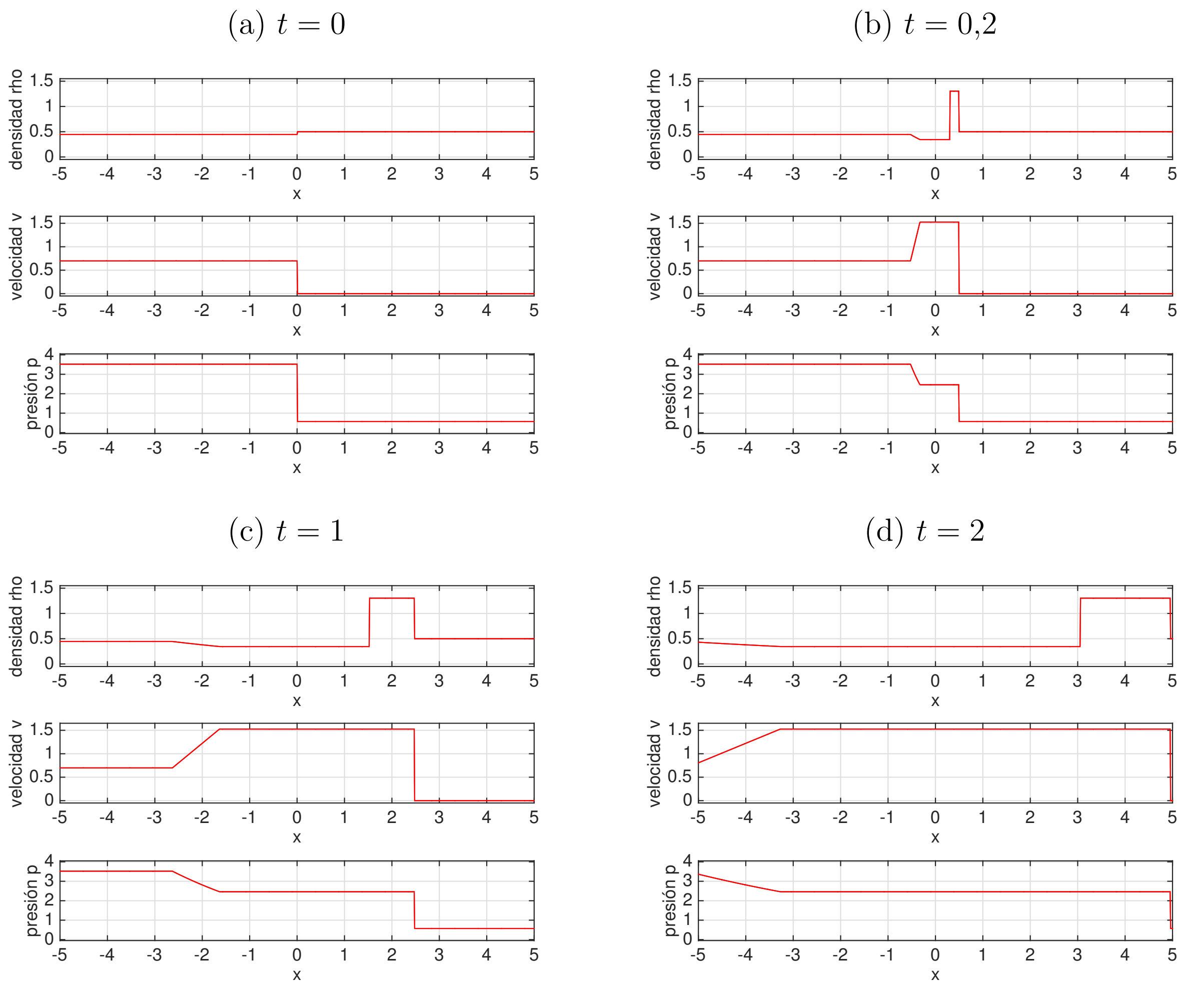


FIGURA 6.10. Ejemplo 6.13 (ecuaciones de Euler, problema de Lax): (a) dato inicial (6.107) , (b–c) solución (6.106) para ϱ, v, y p en los tiempos indicados.

ver Figura 6.10 (a). Su solución también está dada por (6.106) *pero con las constantes*

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{m}} &= 2{,}4618390380729, \\ v_{\mathrm{m}} &= 1{,}5265572159292, \\ \sigma &= 2{,}4772593104830, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varrho_{\mathrm{m}}^{+} &= 1{,}3028578166990, \\ \varrho_{\mathrm{m}}^{-} &= 0{,}3447018194278, \\ \xi_{+} &= -1{,}6355169865314, \\ \xi_{-} &= -2{,}6297856456465 \end{aligned} \tag{6.108}$$

(ver Problema 6.9). La Figura 6.10 ilustra esta solución.

6.7. La entropía para las ecuaciones de Euler

En lo siguiente demostraremos que la entropía física también es una entropía matemática para las ecuaciones de Euler en el sentido de que

$$(\varrho S)_t + (v\varrho S)_x \leqslant 0 \tag{6.109}$$

debilmente para cada solución $\boldsymbol{u} = (\varrho, q, E)^{\mathrm{T}}$ que es el límite de soluciones de la aproximación viscosa. Para tal efecto conviene definir la *energía interna específica*

$$e := \frac{1}{\varrho}\left(E - \frac{1}{2}\varrho v^2\right),$$

la cual permite re-escribir las ecuaciones de Euler como

$$\begin{aligned}
\varrho_t + (\varrho v)_x &= 0, \\
(\varrho v)_t + (\varrho v^2 + p)_x &= 0, \\
\left(\varrho\left(e + \frac{1}{2}v^2\right)\right)_t + \left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho e v + p v\right)_x &= 0.
\end{aligned} \tag{6.110}$$

Para soluciones clásicas esto es equivalente a la forma no conservativa

$$\begin{aligned}
\varrho_t + v\varrho_x + \varrho v_x &= 0, \\
v_t + v v_x + \frac{1}{\varrho}p_x &= 0, \\
e_t + v e_x + \frac{p}{\varrho}v_x &= 0.
\end{aligned}$$

En virtud de

$$S = -\log\frac{p}{\varrho^\gamma} = -\log\frac{(\gamma-1)e}{\varrho^{\gamma-1}} = (\gamma-1)\log\varrho - \log e - \log(\gamma-1)$$

obtenemos

$$S_\varrho = \frac{\gamma-1}{\varrho} > 0, \quad S_e = -\frac{1}{e} < 0.$$

Estas desigualdades son generales, y consideraciones termodinámicas implican que son válidas para cualquier ecuación de estado, no solamente para gases politrópicos. Para soluciones clásicas podemos calcular

$$\begin{aligned}
S_t = S_\varrho \varrho_t + S_e e_t &= -\frac{\gamma-1}{\varrho}(v\varrho_x + \varrho v_x) + \frac{1}{e}\left(v e_x + \frac{p}{\varrho}v_x\right) \\
&= -\left((\gamma-1) - \frac{p}{e\varrho}\right)v_x - \left((\gamma-1)\frac{\varrho_x}{\varrho} - \frac{e_x}{e}\right)v = -vS_x,
\end{aligned}$$

luego $S_t + vS_x = 0$ para soluciones suaves de las ecuaciones de Euler. Esto significa que la entropía de una “partícula” del gas queda constante cuando la partícula es transportada con la velocidad v. Además,

$$(\varrho S)_t = \varrho_t S + \varrho S_t = -(\varrho v)_x S - \varrho v S_x = -(v\varrho S)_x,$$

lo que significa que para soluciones suaves la *entropía específica* $\eta(\boldsymbol{u}) = \varrho S(\boldsymbol{u})$ es conservada:

$$(\varrho S)_t + (\varrho v S)_x = 0. \tag{6.111}$$

La existencia de un par entropía/flujo de entropía es una propiedad excepcional para un sistema hiperbólico de tres leyes de conservación. Por supuesto, combinando esto con (6.110) y considerando la entropía como incógnita independiente obtenemos cuatro ecuaciones para tres incógnitas, así que no podemos automaticamente esperar tener una solución. A veces se consideran modelos en los cuales se conserva la entropía en lugar de la energía. Tales modelos se llaman *flujo isentrópico*. En tales modelos la tercera ecuación en (6.110) es reemplazada por la conservación de la entropía (6.111).

Para demostrar que la desigualdad (6.109) es válida para límites viscosos, demostraremos primeramente que la aplicación $\boldsymbol{u} \mapsto \eta(\boldsymbol{u}) = \varrho S(\varrho, e(\boldsymbol{u}))$ es convexa, donde recordamos que η es convexa si su Hessiano $\mathrm{D}^2\eta$ es una matriz definida positiva. Para verificar esta propiedad calculamos

$$\nabla\eta = S\nabla\varrho + \varrho\nabla S = S\nabla\varrho + \varrho(S_\varrho\nabla\varrho + S_e\nabla e) = (S + \varrho S_\varrho)\nabla\varrho + \varrho S_e\nabla e.$$

Trivialmente, $\nabla\varrho = (1, 0, 0)$. Además,

$$e(\boldsymbol{u}) = \frac{E}{\varrho} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{\varrho^2}$$

implica que

$$\nabla e = \left(-\frac{E}{\varrho^2} + \frac{q^2}{\varrho^3}, -\frac{q}{\varrho^2}, \frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{\varrho}\left(-e + \frac{1}{2}v^2, -v, 1\right).$$

Luego calculamos

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2\eta = \mathrm{D}^2\bigl(\varrho S(\varrho, e)\bigr) &= (\nabla\varrho)^{\mathrm{T}}\nabla S + (\nabla S)^{\mathrm{T}}\nabla\varrho + \varrho\mathrm{D}^2 S \\ &= (\nabla\varrho)^{\mathrm{T}}(S_\varrho\nabla\varrho + S_e\nabla e) + (S_\varrho\nabla\varrho + S_e\nabla e)^{\mathrm{T}}\nabla\varrho + \varrho\mathrm{D}^2 S \\ &= 2S_\varrho(\nabla\varrho)^{\mathrm{T}}\nabla\varrho + S_e\bigl((\nabla\varrho)^{\mathrm{T}}\nabla e + (\nabla e)^{\mathrm{T}}\nabla\varrho\bigr) + \varrho\mathrm{D}^2 S. \end{aligned} \tag{6.112}$$

Para calcular $\mathrm{D}^2 S$, notamos primero que $\nabla S(\varrho, e) = S_\varrho\nabla\varrho + S_e\nabla e$, luego

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2 S &= \boldsymbol{\nabla}(S_\varrho\nabla\varrho)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\nabla}(S_e\nabla e)^{\mathrm{T}} \\ &= (\nabla\varrho)^{\mathrm{T}}\nabla S_\varrho + (\nabla e)^{\mathrm{T}}\nabla S_e + S_e\mathrm{D}^2 e \\ &= (\nabla\varrho)^{\mathrm{T}}(S_{\varrho\varrho}\nabla\varrho + S_{\varrho e}\nabla e) + (\nabla e)^{\mathrm{T}}(S_{e\varrho}\nabla\varrho + S_{ee}\nabla e) + S_e\mathrm{D}^2 e \\ &= S_{\varrho\varrho}(\nabla\varrho)^{\mathrm{T}}\nabla\varrho + S_{\varrho e}\bigl((\nabla\varrho)^{\mathrm{T}}\nabla e + (\nabla e)^{\mathrm{T}}\nabla\varrho\bigr) + S_{ee}(\nabla e)^{\mathrm{T}}\nabla e + S_e\mathrm{D}^2 e. \end{aligned}$$

Insertando esto en (6.112) obtenemos

$$\mathrm{D}^2\eta(\boldsymbol{u}) = (\varrho S_{\varrho\varrho} + 2S_\varrho)(\nabla\varrho)^{\mathrm{T}}\nabla\varrho + \varrho S_{\varrho e}\bigl((\nabla\varrho)^{\mathrm{T}}\nabla e + (\nabla e)^{\mathrm{T}}\nabla\varrho\bigr) + \varrho S_{ee}(\nabla e)^{\mathrm{T}}\nabla e - S_e\boldsymbol{C},$$

donde definimos

$$\boldsymbol{C} := -\bigl(\varrho\mathrm{D}^2 e + (\nabla\varrho)^{\mathrm{T}}\nabla e + (\nabla e)^{\mathrm{T}}\nabla\varrho\bigr).$$

Ahora calculamos

$$\mathrm{D}^2 e = \begin{bmatrix} \dfrac{2E}{\varrho^3} - \dfrac{3q^2}{\varrho^4} & \dfrac{2q}{\varrho^3} & -\dfrac{1}{\varrho^2} \\ \dfrac{2q}{\varrho^3} & -\dfrac{1}{\varrho^2} & 0 \\ -\dfrac{1}{\varrho^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\varrho^2} \begin{bmatrix} 2e - 2v^2 & 2v & -1 \\ 2v & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

además,

$$\begin{aligned}(\nabla\varrho)^{\mathrm{T}}\nabla e + (\nabla e)^{\mathrm{T}}\nabla\varrho &= \frac{1}{\varrho}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\left(-e + \frac{v^2}{2}, -v, 1\right) + \frac{1}{\varrho}\begin{pmatrix}-e + \dfrac{v^2}{2}\\ -v \\ 1\end{pmatrix}(1,0,0) \\ &= \frac{1}{\varrho}\begin{bmatrix} -2e + v^2 & -v & 1 \\ -v & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

luego

$$\boldsymbol{C} = -\frac{1}{\varrho}\begin{bmatrix} 2e - 2v^2 & 2v & -1 \\ 2v & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\varrho}\begin{bmatrix} -2e + v^2 & -v & 1 \\ -v & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\varrho}\begin{bmatrix} v^2 & -v & 0 \\ -v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea ahora

$$\boldsymbol{D} := \begin{bmatrix} 1 & v & v^2/2 + e \\ 0 & \varrho & \varrho v \\ 0 & 0 & \varrho \end{bmatrix}.$$

La matriz $\boldsymbol{D}$ es invertible, luego $\mathrm{D}^2\eta$ es definida positiva si y sólo si $\boldsymbol{D}\mathrm{D}^2\eta\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ es definida positiva (Ley de Inercia de Sylvester). Aquí obtenemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}\mathrm{D}^2\eta(\boldsymbol{u})\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} &= (\varrho S_{\varrho\varrho} + 2S_\varrho)(\boldsymbol{D}\nabla\varrho)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\nabla\varrho + \varrho S_{\varrho e}\big((\boldsymbol{D}\nabla\varrho)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\nabla e + (\boldsymbol{D}\nabla e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\nabla\varrho\big) \\ &\quad + \varrho S_{ee}(\boldsymbol{D}\nabla e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\nabla e - S_e\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

Calculando

$$(\boldsymbol{D}\nabla\varrho)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{D}\nabla e)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{D}\mathrm{D}^2\eta(\boldsymbol{u})\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \\ &= (\varrho S_{\varrho\varrho} + 2S_\varrho)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varrho S_{\varrho e}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varrho S_{ee}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - S_e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \varrho S_{\varrho\varrho} + 2S_\varrho & 0 & S_{\varrho e} \\ 0 & -S_e & 0 \\ S_{\varrho e} & 0 & S_{ee} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\gamma-1)/\varrho & 0 & 0 \\ 0 & 1/e & 0 \\ 0 & 0 & 1/e^2 \end{bmatrix},$$

luego $\boldsymbol{D}\mathrm{D}^2\eta(\boldsymbol{u})\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ posee tres valores propios positivos y es definida positiva, por lo tanto también $\mathrm{D}^2\eta$ es definida positiva y η es convexa. A partir de la identidad general

$$\eta(\boldsymbol{u})_{xx} = (\boldsymbol{u}_x)^{\mathrm{T}}\mathrm{D}^2\eta(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_x + \nabla\eta(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_{xx}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x) = (u_1, \dots, u_n)^{\mathrm{T}}$$

la convexidad de η implica que $\eta(\boldsymbol{u})_{xx} \geqslant \nabla\eta(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_{xx}$.

Consideremos ahora una solución suave de las ecuaciones de Euler regularizadas,

$$\boldsymbol{u}_t^\varepsilon + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)_x = \varepsilon\boldsymbol{u}_{xx}^\varepsilon.$$

Multiplicando desde la izquierda por $\nabla\eta$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla\eta(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\boldsymbol{u}_t^\varepsilon + \nabla\eta(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\boldsymbol{u}_x^\varepsilon - \varepsilon\nabla\eta(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\boldsymbol{u}_{xx}^\varepsilon \\ &= \eta(\boldsymbol{u}^\varepsilon)_t + \nabla\big(v^\varepsilon\eta(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\big)\boldsymbol{u}_x^\varepsilon - \varepsilon\nabla\eta(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\boldsymbol{u}_{xx}^\varepsilon \\ &= \eta(\boldsymbol{u}^\varepsilon)_t + \big(v^\varepsilon\eta(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\big)_x - \varepsilon\nabla\eta(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\boldsymbol{u}_{xx}^\varepsilon \\ &\geqslant \eta(\boldsymbol{u}^\varepsilon)_t + \big(v^\varepsilon\eta(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\big)_x - \varepsilon\eta(\boldsymbol{u}^\varepsilon)_{xx}. \end{aligned}$$

Suponiendo que $\boldsymbol{u}^\varepsilon \to \boldsymbol{u}$ cuando $\varepsilon \to 0$, observamos que $\eta_t + (v\eta)_x \leqslant 0$ en el sentido débil. Concluimos que (6.109), es decir

$$(\varrho S)_t + (v\varrho S)_x \leqslant 0, \tag{6.113}$$

es válido débilmente.

Análogamente a las ecuaciones *shallow water* podemos verificar si (6.109) es válido para la solución del problema de Riemann. Recordemos que esto es válido si y sólo si

$$-s[\![\varrho S]\!] + [\![\varrho vS]\!] \leqslant 0.$$

Utilizando la expresión que genera la velocidad de choque, (6.90), calculamos

$$-s[\![\varrho S]\!] + [\![\varrho vS]\!] = S\big(-s[\![\varrho]\!] + [\![\varrho v]\!]\big) + \varrho_{\mathrm{L}}\big(-s[\![S]\!] + v_{\mathrm{L}}[\![S]\!]\big) = \pm\varrho_{\mathrm{L}}c_{\mathrm{L}}\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\frac{\beta\pi+1}{\beta^2-1}}[\![S]\!],$$

donde los signos "+" y "−" corresponden a la primera y la tercera familia, respectivamente; por lo tanto la entropía decrecerá si y sólo si $[\![S]\!] < 0$ para la primera familia y $[\![S]\!] > 0$ para la tercera familia. (Comentamos que para la discontinuidad de contacto, $s = v$, luego

$$-s[\![\varrho S]\!] + [\![\varrho vS]\!] = -v[\![\varrho S]\!] + v[\![\varrho S]\!] = 0,$$

es decir, de acuerdo a lo esperado, la entropía es conservada a través de una discontinuidad de contacto.) Consideremos ahora choques de la primera familia, y $[\![S]\!]$ como función de $\pi = p/p_{\mathrm{L}}$, donde recordamos que $\pi > 1$, luego

$$[\![S]\!] = S - S_{\mathrm{L}} = \log\frac{\varrho^\gamma}{\varrho_{\mathrm{L}}^\gamma} - \log\frac{p}{p_{\mathrm{L}}} = \gamma\log z - \log\pi = \gamma\log\frac{\beta\pi+1}{\pi+\beta} - \log\pi =: h(\pi).$$

Para verificar si $h(\pi) < 0 = h(1)$ diferenciamos, utilizando (6.88):

$$\begin{aligned}
h'(\pi) &= \gamma \frac{\beta^2 - 1}{(\pi + \beta)(\beta\pi + 1)} - \frac{1}{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi(\pi + \beta)(\beta\pi + 1)} \bigl(\gamma(\beta^2 - 1)\pi - (\pi + \beta)(\beta\pi + 1)\bigr) \\
&= \frac{1}{\pi(\pi + \beta)(\beta\pi + 1)} \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1}(\beta^2 - 1)\pi - (\pi + \beta)(\beta\pi + 1) \right) \\
&= \frac{\beta(2\pi - \pi^2 - 1)}{\pi(\pi + \beta)(\beta\pi + 1)} = -\frac{\beta(\pi - 1)^2}{\pi(\pi + \beta)(\beta\pi + 1)} < 0.
\end{aligned}$$

En virtud de lo anterior, S decrece estrictamente a lo largo del lugar de Hugoniot de la primera familia. También observamos que (6.109) es válido solamente si $p \geqslant p_{\mathrm{L}}$ para ondas de la primera familia. Para los choques de la tercera familia un cálculo idéntico demuestra que (6.109) es válido solamente si $p \leqslant p_{\mathrm{L}}$.

6.8. Ejercicios

Problem 6.1. Se considera el p-sistema (ver Ejemplo 6.3)

$$\boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{w})_x = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} -u \\ p(v) \end{pmatrix}.$$

a) ¿Qué propiedad debe tener la función p para que el sistema sea hiperbólico?
b) Resolver el problema de Riemann para el p-sistema para $p(v) = 1/v$. ¿Para cuales estados a izquierda y a derecha $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ y $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ este problema de Riemann posee una solución?
c) Resolver el item (b) en el caso general $p = p(v)$ cuando $p' < 0$ y $p'' > 0$.

Problem 6.2. Resolver el siguiente problema de Riemann para las ecuaciones *shallow water*:

$$\boldsymbol{u}(x,0) = \bigl(h(x,0), v(x,0)\bigr)^{\mathrm{T}} = \begin{cases} \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}} = (h_{\mathrm{L}}, 0)^{\mathrm{T}} & \text{para } x < 0, \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} = (h_{\mathrm{R}}, 0)^{\mathrm{T}} & \text{para } x \geqslant 0, \end{cases} \qquad h_{\mathrm{L}} > h_{\mathrm{R}} > 0.$$

Problem 6.3. Sea $\boldsymbol{w} = (u,v)^{\mathrm{T}}$ y sea $\varphi(\boldsymbol{w})$ una función escalar suave. Se considera el sistema de leyes de conservación

$$\boldsymbol{w}_t + \bigl(\varphi(\boldsymbol{w})\boldsymbol{w}\bigr)_x = \mathbf{0}. \tag{6.114}$$

a) Hallar las velocidades características λ_1 y λ_2 y los vectores propios asociados $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$ del sistema (6.114).
b) Sea $\varphi(\boldsymbol{w}) = |\boldsymbol{w}|^2/2$. Hallar la solución del problema de Riemann para (6.114).
c) Supongamos que $u, v > 0$ y

$$\varphi(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{1 + u + v}.$$

Hallar la solución del problema de Riemann de (6.114) en este caso.

Problem 6.4. Se considera el método de Lax-Friedrichs para un sistema de N leyes de conservación $\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \boldsymbol{0}$ hiperbólico con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_N$:

$$\boldsymbol{u}_j^{n+1} = \frac{1}{2}\bigl(\boldsymbol{u}_{j-1}^n + \boldsymbol{u}_{j+1}^n\bigr) - \frac{\lambda}{2}\bigl(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_{j+1}^n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_{j-1}^n)\bigr).$$

Supongamos que $\lambda := \Delta t/\Delta x$ satisface la condición CFL

$$\lambda \leqslant \Bigl(\max_{1 \leqslant k \leqslant N} |\lambda_k|\Bigr)^{-1}.$$

Sea $\boldsymbol{v}_j^n(x,t)$ la solución del problema de Riemann con dato inicial

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{j-1}^n & \text{para } x < j\Delta x, \\ \boldsymbol{u}_{j+1}^n & \text{para } x \geqslant j\Delta x. \end{cases}$$

Demostrar que

$$\boldsymbol{u}_j^{n+1} = \frac{1}{2\Delta x} \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} \boldsymbol{v}_j^n(x, \Delta t)\, \mathrm{d}x.$$

Problem 6.5. Se considera desarrollo de la solución del problema de Riemann de las ecuaciones de Euler (Sección 6.6).

a) Demostrar que (6.76) efectivamente es el determinante de (6.75).
b) Demostrar que las componentes de los vectores propios $\boldsymbol{r}_i = (1, y_i, z_i)^{\mathrm{T}}$, $i = 1, 2, 3$, están dadas por (6.79) y (6.80).
c) Demostrar que la familia correspondiente a $i = 2$ es linealmente degenerada, mientras que las familias para $i = 1$ e $i = 3$ son genuinamente no lineales.

Problem 6.6.

a) Derivar la fórmula de solución para las curvas de rarefacción de las ecuaciones de Euler (6.81).
b) Demostrar que utilizando (6.77) y (6.81), se obtiene (6.82).

Problem 6.7.

a) Verificar (6.89).
b) Verificar (6.91).

Problem 6.8. Demostrar (6.93).

Problem 6.9. Demostrar que la solución del problema de Lax, definido por los estados $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}$ y $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ dados en (6.107), efectivamente está dado por (6.106) con las constantes (6.108).

Capítulo 7

Leyes de conservación con flujo discontinuo

El propósito de este capítulo es dar una breve introducción a leyes de conservación escalares con una función de flujo que depende de la coordenada espacial, donde esta dependencia puede incluir discontinuidades. Nos restringiremos a una dimensión espacial, tanto por motivos de simplicidad como considerando que la teoría es más completa en una dimensión. En una dimensión, una ley de conservación con un flujo dependiente del espacio puede ser escrita como

$$u_t + f(x,u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{7.1}$$

Como la interpretación de f es el flujo de u en la posición x, existen muchas aplicaciones donde el flujo depende de la posición. A continuación presentaremos algunos ejemplos de esta situación.

Ejemplo 7.1 (Tráfico vehicular). *El tráfico vehicular es un modelo simple en el cual leyes de conservación con flujo discontinuo se presentan naturalmente. Sea ϱ la densidad de vehículos en una carretera unidireccional de gran longitud. Se normalizan las unidades, y se considera $\varrho = 1$ como la densidad máxima de vehículos cuando están parados pegados. Supongamos que la velocidad de los vehículos es una función decreciente $v = v(\varrho)$ de la densidad. La velocidad de los vehículos sobre una carretera vacía ($\varrho = 0$) es determinada por las condiciones de carretera (por ejemplo, pendientes, curvas, presencia de neblina) y restricciones (explícitas) de la velocidad, de manera que $v(0) = \gamma$, donde γ es una función de la posición en la carretera. Además, es razonable suponer que $v(1) = 0$. Por simplicidad podemos definir $v(\varrho) = \gamma(1-\varrho)$. Si las condiciones de carretera, y por lo tanto γ varian con la posición x, entonces obtenemos la ley de conservación*

$$\varrho_t + \big(\gamma(x)\varrho(1-\varrho)\big)_x = 0, \tag{7.2}$$

la cual es un ejemplo de una ley de conservación con una función de flujo x-dependiente. En la escala (macroscópica) de tráfico continuo, donde las longitudes naturales son múltiples grandes de la longitud de un sólo vehículo, las condiciones de carretera frecuentemente varian en forma discontinua.

Ejemplo 7.2 (Flujo bifásico en un medio poroso). *Un procedimiento común para extraer aceite de un yacimiento es la inyección de agua para mantener la presión, y así forzar el movimiento del aceite. Si tenemos dos fases, aceite (*oil*) y agua (*water*), entonces la conservación de masa del aceite y del agua puede ser escrita como*

$$\phi s_t + u_x = 0 \quad y \quad \phi(1-s)_t - v_x = 0,$$

donde la incógnita s denota la saturación, es decir la fracción del espacio de poros ocupada por el aceite, y u y v son las velocidades de Darcy del aceite y del agua, respectivamente.

El factor ϕ *denota la fracción del espacio vacío dentro del material, comunmente llamado* porosidad*. Se supone frecuentemente que la ley de Darcy está en efecto, es decir*

$$u = -k\lambda_{\mathrm{oil}} P'_{\mathrm{oil}} - g\varrho_{\mathrm{oil}} \quad y \quad v = -k\lambda_{\mathrm{water}} P'_{\mathrm{water}} - g\varrho_{\mathrm{water}},$$

donde k *denota la permeabilidad absoluta del medio,* g *es la constante gravitacional,* P_{fase} *es la presión, y* ϱ_{fase} *es la densidad de la fase agua o aceite. Si suponemos que las dos presiones son las mismas, y que la velocidad total* $q = u + v$ *es constante (de acuerdo a la incompresibilidad), podemos sumar las dos ecuaciones de conservación para obtener*

$$\phi s_t + \left(\frac{\lambda_{\mathrm{oil}}(s)}{\lambda_{\mathrm{oil}}(s) + \lambda_{\mathrm{water}}(s)} \bigl(q - k(x) g \lambda_{\mathrm{water}}(s) \Delta\varrho \bigr) \right)_x = 0, \tag{7.3}$$

donde $\Delta\varrho = \varrho_{\mathrm{water}} - \varrho_{\mathrm{oil}}$*. La permeabilidad absoluta de la roca frecuentemente es modelada como una función de* x *constante a trozos, por lo tanto* (7.3) *representa otro ejemplo de una ley de conservación en la que la función de flujo varia de forma discontinua.*

Ejemplo 7.3 (El "sistema polímero")**.** *Como el aceite es mucho más viscoso que el agua, la inyección del agua puede generar la formación de "dedos" de agua finos. Para evitar este fenómeno se inyecta a veces una mezcla de agua y de un polímero en lugar de agua solamente. Este polímero es transportado pasivamente con el agua. En un yacimiento "unidimensional" homogéneo, la conservación del agua y del polímero es expresada por el sistema de leyes de conservación*

$$\begin{aligned} s_t + f(s,c)_x &= 0, \\ (sc)_t + \bigl(cf(s,c) \bigr)_x &= 0, \end{aligned} \tag{7.4}$$

donde c *denota la concentración del polímero en el agua y la función de flujo* $f(s,c)$ *dada es del tipo* (7.3)*, donde ahora* λ_{water} *es una función de* s *y* c*. Se definen coordenadas nuevas* (y,τ) *mediante*

$$\frac{\partial y}{\partial x} = s, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -f(s,c), \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = 1$$

el sistema (7.4) *asume la forma*

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{s} \right)_\tau - \left(\frac{f(s,c)}{s} \right)_y &= 0, \\ c_\tau &= 0. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Este cambio de variables independientes es válido solamente para soluciones diferenciables (clásicas), mientras que sabemos que ni siquiera podemos esperarnos que soluciones de leyes de conservación sean por lo menos continuas. Por lo tanto, hay que interpretar soluciones en el sentido debil*. Sin embargo, en la literatura se ha establecido una correspondencia entre las soluciones débiles de* (7.4) *y* (7.5)*. Por lo tanto, si la concentración inicial del polímero es discontinua, entonces* (7.5) *representa otro ejemplo de una ley de conservación con un flujo que depende en forma discontinua de la posición espacial.*

Siempre podemos considerar un flujo que depende de x como una función de flujo que depende de un parámetro γ que a su vez depende de x. De esta forma podemos escribir (7.1) como un sistema

$$u_t + f(\gamma, u)_x = 0, \quad \gamma_t = 0, \tag{7.6}$$

que es un sistema hiperbólico cuya matriz Jacobiana

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \partial f/\partial u & \partial f/\partial \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

posee los valores propios $\lambda_1 = \partial f/\partial u$ y $\lambda_2 = 0$. Esto significa que si $\partial f/\partial u = 0$ para algunos valores de γ y u, entonces el sistema no es estrictamente hiperbólico. Esto causa numerosas dificultades analíticas y numéricas para el estudio de leyes de conservación con flujo discontinuo. Temple [96] demostró un ejemplo de una sucesión de soluciones aproximadas sin ninguna cota uniforme de la variación. Esto significa que al estudiar leyes de conservación del tipo (7.6), hay que utilizar herramientas más poderosas (y más complicadas). La llamada "transformación z" a ser utilizada en este capítulo es quizás el ejemplo más simple (y menos poderoso) de una herramienta de este tipo. Más recientemente, la compacidad compensada y variantes del lema "div-curl" han reemplazado la "transformación z" para demostrar la convergencia de aproximaciones; ver un ejemplo en [55].

Se enfatiza que el presente capítulo presenta una introducción al tema, pero no presenta los resultados más generales posibles.

7.1. El problema de Riemann

Consideremos ahora el problema de Riemann, es decir el problema de valores iniciales donde los valores iniciales consisten en dos constantes separadas por un salto. Precisamente, el problema es

$$\begin{aligned} &u_t + f(\gamma_{\mathrm{L}}, u)_x = 0, \quad u(x,0) = u_{\mathrm{L}} \quad \text{para } x < 0, \\ &u_t + f(\gamma_{\mathrm{R}}, u)_x = 0, \quad u(x,0) = u_{\mathrm{R}} \quad \text{para } x > 0, \end{aligned} \tag{7.7}$$

donde γ_{L}, γ_{R}, u_{L} y u_{R} son constantes. Los problemas de Riemann para leyes de conservación poseen las soluciones más simples que no son constantes. Estudiando la solución de problemas de Riemann obtenemos información acerca del comportamiento local de soluciones típicas. Ya sabemos que las soluciones de problemas de Riemann pueden ser utilizadas para construir métodos numéricos, en particular el *front tracking*.

Una *solución débil* de (7.7) es una solución débil en el sentido habitual, es decir se dice que $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ es una solución débil si para cada función test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty)$, se tiene la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{0} \big(u\varphi_t + f(\gamma_{\mathrm{L}}, u)\varphi_x \big) \, \mathrm{d}x + \int_0^{\infty} \big(u\varphi_t + f(\gamma_{\mathrm{R}}, u)\varphi_x \big) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ &+ \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0) \, \mathrm{d}x = 0. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Demostraremos primero que bajo hipótesis razonables con respecto a f, existen soluciones débiles, y si exigimos que las soluciones débiles satisfagan una condición de entropía adicional, entonces existe sólo una solución débil.

7.1.1. Existencia de una solución. Para demostrar la existencia de una solución, observamos que para $x < 0$, $u(x,t)$ debe ser la solución de la ley de conservación

$$v_t + f(\gamma_{\mathrm{L}}, v)_x = 0, \tag{7.9}$$

donde el dato inicial $v(x,0)$ es dado por

$$v(x,0) = \begin{cases} u_{\mathrm{L}} & \text{para } x < 0, \\ u'_{\mathrm{L}} & \text{para } x = 0, \end{cases}$$

donde u'_{L} es un valor por determinar. En forma similar, para $x > 0$, u debe ser la solución del problema de valores iniciales escalar

$$w_t + f(\gamma_{\mathrm{R}}, w)_x = 0, \quad w(x,0) = \begin{cases} u'_{\mathrm{R}} & \text{para } x = 0, \\ u_{\mathrm{R}} & \text{para } x > 0, \end{cases} \tag{7.10}$$

con u'_{R} por determinar. Poniendo

$$u(x,t) = \begin{cases} v(x,t) & \text{para } x < 0, \\ w(x,t) & \text{para } x > 0, \end{cases} \tag{7.11}$$

siempre que $v(0^-,t)$ y $w(0^+,t)$ satisfagan ciertas condiciones adicionales, podemos decir que esto resulta en una solución débil, considerando que ambas funciones v y w son soluciones débiles. Entonces, para hallar una solución débil tenemos que hallar soluciones del problema de Riemann v y w tales que esta construcción es posible.

Recordemos (a partir de la Sección 3.2) que la solución del problema de Riemann escalar

$$v_t + g(v)_x = 0, \quad v(x,0) = \begin{cases} v_{\mathrm{L}} & \text{para } x < 0, \\ v_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant 0 \end{cases}$$

puede ser encontrada construyendo la envoltura convexa inferior (si $v_{\mathrm{L}} < v_{\mathrm{R}}$) o concava superior (si $v_{\mathrm{L}} > v_{\mathrm{R}}$) de g entre v_{L} y v_{R}. Para simplificar la notación definimos

$$\tilde{g}(v; v_{\mathrm{L}}, v_{\mathrm{R}}) := \begin{cases} \hat{g}(v; v_{\mathrm{L}}, v_{\mathrm{R}}) & \text{si } v_{\mathrm{R}} < v_{\mathrm{L}}, \\ \breve{g}(v; v_{\mathrm{L}}, v_{\mathrm{R}}) & \text{si } v_{\mathrm{R}} > v_{\mathrm{L}}. \end{cases} \tag{7.12}$$

En esta notación la solución de entropía v es dada por

$$v(x,t) = (\tilde{g}')^{-1}(x/t; v_{\mathrm{L}}, v_{\mathrm{R}}), \quad t > 0, \tag{7.13}$$

donde recordemos que $(\cdot)^{-1}$ denota la función inversa.

Consideremos ahora el problema de Riemann (7.7). Las partes a izquierda y a derecha de u son las funciones v, dada por (7.9), y w, dada por (7.10). Si queremos formar u combinando v y w, entonces v debe igualar u'_{L} para $x > 0$, y w debe igualar u'_{R} para $x < 0$. En otras palabras, v debe contener solamente ondas de velocidad no positiva, y w debe contener solamente ondas de velocidad no negativa. Para utilizar estas observaciones, utilizamos la notación $f_{\mathrm{L}}(u) = f(\gamma_{\mathrm{L}}, u)$ y $f_{\mathrm{R}}(u) = f(\gamma_{\mathrm{R}}, u)$, y definimos $\tilde{f}_{\mathrm{L}}(u; u_{\mathrm{L}}, \tilde{u})$ y $\tilde{f}_{\mathrm{R}}(u; \tilde{u}, u_{\mathrm{R}})$ en forma análoga a (7.12).

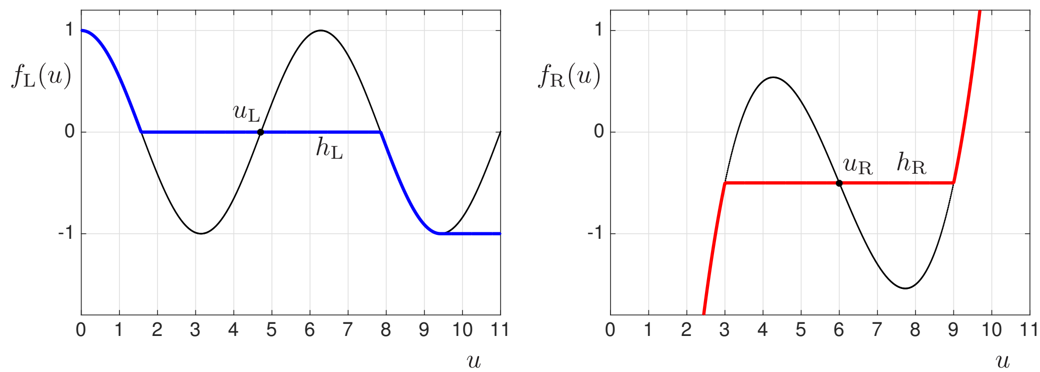


FIGURA 7.1. Izquierda: función $f_{\mathrm{L}}(u) = \cos u$ y función $h_{\mathrm{L}} = h_{\mathrm{L}}(u; u_{\mathrm{L}})$ (en azul) para $u_{\mathrm{L}} = 3\pi/2$. Derecha: función $f_{\mathrm{R}}(u) = (u-3)(u-6)(u-9) - 1/2$ y función $h_{\mathrm{R}} = h_{\mathrm{R}}(u; u_{\mathrm{R}})$ (en rojo) para $u_{\mathrm{R}} = 6$.

Si v contiene sólo ondas de velocidad no positiva, entonces se debe elegir u'_{L} desde el conjunto

$$H_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}}) := \bigl\{\tilde{u} \mid (\tilde{f}'_{\mathrm{L}})^{-1}(u; u_{\mathrm{L}}, \tilde{u}) \leqslant 0 \text{ para todo } u \text{ entre } u_{\mathrm{L}} \text{ y } \tilde{u}\bigr\}. \tag{7.14}$$

Análogamente, como w debe contener solamente ondas de velocidad no negativa, hay que elegir u'_{R} en el conjunto

$$H_{\mathrm{R}}(u_{\mathrm{R}}) := \bigl\{\tilde{u} \mid (\tilde{f}'_{\mathrm{R}})^{-1}(u; \tilde{u}, u_{\mathrm{R}}) \geqslant 0 \text{ para todo } u \text{ entre } u_{\mathrm{R}} \text{ y } \tilde{u}\bigr\}. \tag{7.15}$$

Existe también otra caracterización de los conjuntos admisibles H_{L} y H_{R} que será útil. Sea h_{L} definida por

$$h_{\mathrm{L}}(u; u_{\mathrm{L}}) := \begin{cases} \operatorname{ínf}\bigl\{h(u) \mid h(u) \geqslant f_{\mathrm{L}}(u),\ h'(u) \leqslant 0,\ h(u_{\mathrm{L}}) = f_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}})\bigr\} & \text{si } u \leqslant u_{\mathrm{L}}, \\ \sup\bigl\{h(u) \mid h(u) \leqslant f_{\mathrm{L}}(u),\ h'(u) \leqslant 0,\ h(u_{\mathrm{L}}) = f_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}})\bigr\} & \text{si } u \geqslant u_{\mathrm{L}}, \end{cases} \tag{7.16}$$

y análogamente

$$h_{\mathrm{R}}(u; u_{\mathrm{R}}) := \begin{cases} \sup\bigl\{h(u) \mid h(u) \leqslant f_{\mathrm{R}}(u),\ h'(u) \geqslant 0,\ h(u_{\mathrm{R}}) = f_{\mathrm{R}}(u_{\mathrm{R}})\bigr\} & \text{si } u \leqslant u_{\mathrm{R}}, \\ \operatorname{ínf}\bigl\{h(u) \mid h(u) \geqslant f_{\mathrm{R}}(u),\ h'(u) \geqslant 0,\ h(u_{\mathrm{R}}) = f_{\mathrm{R}}(u_{\mathrm{R}})\bigr\} & \text{si } u \geqslant u_{\mathrm{R}}. \end{cases} \tag{7.17}$$

En estas definiciones se supone que la función h que aparece en los ínfimos y supremos es continua.

La Figura 7.1 muestra un ejemplo de h_{L} y h_{R}. Utilizando las funciones h_{L} y h_{R}, podemos utilizar la siguiente defininción alternativa de los conjuntos admisibles H_{L} y H_{R}:

$$H_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}}) = \bigl\{u \mid h_{\mathrm{L}}(u; u_{\mathrm{L}}) = f_{\mathrm{L}}(u)\bigr\}, \tag{7.18}$$

$$H_{\mathrm{R}}(u_{\mathrm{R}}) = \bigl\{u \mid h_{\mathrm{R}}(u; u_{\mathrm{R}}) = f_{\mathrm{R}}(u)\bigr\}. \tag{7.19}$$

Como el salto en u localizado en $x = 0$ es una discontinuidad con velocidad cero, la condición de Rankine-Hugoniot en este caso indica que para cada solución débil se debe tener

$$f(\gamma_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{L}}) = f(\gamma_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{R}}) =: f^{\times}. \tag{7.20}$$

Utilizando (7.18) y (7.19), podemos deducir que $u'_{\mathrm{L}} \in H_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}})$ y $u'_{\mathrm{R}} \in H_{\mathrm{R}}(u_{\mathrm{R}})$. Esto lo podemos escribir como

$$h_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}; u_{\mathrm{L}}) = h_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}}; u_{\mathrm{R}}). \tag{7.21}$$

Como la aplicación $u \mapsto h_{\mathrm{L}}(u; u_{\mathrm{L}})$ es no creciente y $u \mapsto h_{\mathrm{R}}(u; u_{\mathrm{R}})$ es no decreciente, la igualdad (7.21) será válida para a lo más un valor de h. Por lo tanto, si los grafos de h_{L} y h_{R} intersectan, el valor del flujo en $x = 0$ es determinado por el valor del flujo en este punto de intersección. Se denomina este valor por $f^{\times}$.

A partir de estas observaciones se tiene que si el grafo de h_{L} *no* intersecta el grafo de h_{R}, entonces no podemos encontrar una solución del problema de Riemann (7.7). Por ejemplo, si

$$f_{\mathrm{L}}(u) = \exp(-u^2) \quad \text{y} \quad f_{\mathrm{R}}(u) = 2 + \exp(-u^2),$$

entonces no podemos encontrar ninguna solución d'ebil. Otro ejemplo importante para el cual no podemos encontrar ninguna solución débil del problema de Riemann es

$$f'_{\mathrm{L}}(u) \geqslant 0 \quad \text{y} \quad f'_{\mathrm{R}}(u) \leqslant 0.$$

En este caso $h_{\mathrm{L}}(u; u_{\mathrm{L}}) = f_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}})$ y $h_{\mathrm{R}}(u; u_{\mathrm{R}}) = f_{\mathrm{R}}(u_{\mathrm{R}})$, es decir no podemos encontrar una solución (a menos que éstos esten iguales).

Si bien el valor del flujo en la intersección es determinado en forma única, los valores u'_{L} y u'_{R} no necesariamente lo son. Esto se debe a que para $u \notin H_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}})$, se tiene $h'_{\mathrm{L}}(u; u_{\mathrm{L}}) = 0$, y análogamente, si $u \notin H_{\mathrm{R}}(u_{\mathrm{R}})$, entonves $h'_{\mathrm{R}}(u; u_{\mathrm{R}}) = 0$. En otras palabras, h_{L} y h_{R} pueden ambas ser constantes sobre el intervalo donde sus grafos intersectan. Para resolver este problema de no unicidad, proponemos elegir u'_{L} y u'_{R} en tal forma que la variación de la solución u es mínima, bajo las restricciones indicadas arriba.

Específicamente, elegimos u'_{L} como valor único que satisface

$$|u_{\mathrm{L}} - u'_{\mathrm{L}}| \text{ es minimizado, siempre que } u'_{\mathrm{L}} \in H_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}}) \text{ y } h_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}; u_{\mathrm{L}}) = f^{\times}. \tag{7.22}$$

Análogamente, elegimos u'_{R} como valor único tal que

$$|u_{\mathrm{R}} - u'_{\mathrm{R}}| \text{ es minimizado, siempre que } u'_{\mathrm{R}} \in H_{\mathrm{R}}(u_{\mathrm{R}}) \text{ y } h_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}}; u_{\mathrm{R}}) = f^{\times}. \tag{7.23}$$

Los criterios de elección de u'_{L} y u'_{R} se llaman *condición de entropía del salto mínimo.*

A modo de ejemplo, consideremos esta condición con mas detalle. Si los grafos de h_{L} y h_{R} intersectan en un punto único $u^{\times}$, entonces $u^{\times} \in H_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}})$ o $u^{\times} \in H_{\mathrm{R}}(u_{\mathrm{R}})$. Si $u^{\times} \in H_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}})$, entonces $u'_{\mathrm{L}} = u^{\times}$, y si $u^{\times} \in H_{\mathrm{R}}(u_{\mathrm{R}})$, entonces $u'_{\mathrm{R}} = u^{\times}$. Supongamos que $u_{\mathrm{L}} < u^{\times}$ y $u^{\times} \notin H_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}})$, entonces existe un punto $\tilde{u}$ más pequeño en el intervalo $[u_{\mathrm{L}}, u^{\times}]$ tal que el intervalo $(\tilde{u}, u^{\times}]$ no es contenido en $H_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}})$, y $\tilde{u} \in H_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}})$. A partir de (7.23) queda claro que hay que elegir $u'_{\mathrm{L}} = \tilde{u}$.

La Figura 7.2 muestra como el problema de Riemann de la Figura 7.1 es resuelto en esta forma. En este caso, $u^{\times} \in H_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}})$, luego $u'_{\mathrm{L}} = u^{\times}$. Además, el punto que minimiza $|u'_{\mathrm{R}} - u_{\mathrm{R}}|$ claramente es u_{R}, luego $u'_{\mathrm{R}} = u_{\mathrm{R}}$. Finalmente el problema de Riemann es resuelto por un choque con velocidad negativa desde u_{L} a u'_{L}, luego por una discontinuidad en $x = 0$ desde u'_{L} a u_{R}.

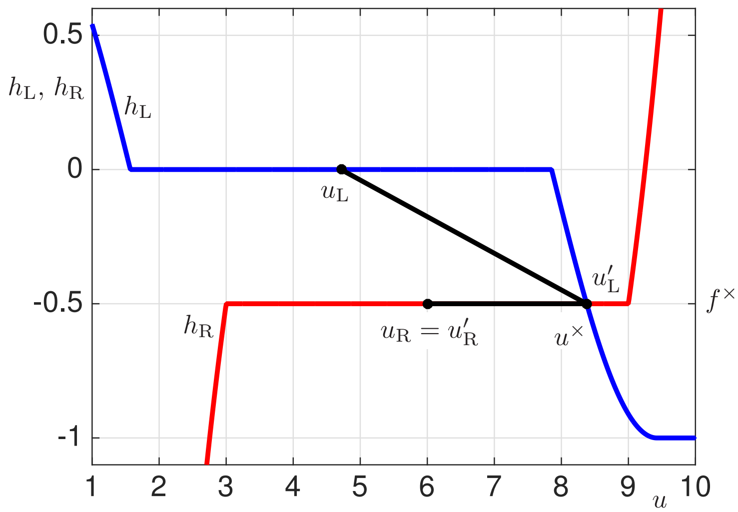


FIGURA 7.2. Solución del problema de Riemann de la Figura 7.1.

Se puede extraer más información importante a partir de la condición de entropía de salto mínimo. Como el problema de Riemann con $u_{\mathrm{L}} = u'_{\mathrm{L}}$ y $u_{\mathrm{R}} = u'_{\mathrm{R}}$ es resuelto por una discontinuidad estacionaria única, se debe tener

$$h_{\mathrm{L}}(u; u'_{\mathrm{L}}) = f^{\times} \text{ o } h_{\mathrm{R}}(u; u'_{\mathrm{R}}) = f^{\times} \text{ en el intervalo abierto por } u'_{\mathrm{L}} \text{ y } u'_{\mathrm{R}}. \tag{7.24}$$

Si $u'_{\mathrm{L}} < u'_{\mathrm{R}}$, entonces $h_{\mathrm{L}}(\cdot; u'_{\mathrm{L}})$ es la mayor función no creciente continua inferior o igual a f_{L} tal que $h_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}; u'_{\mathrm{L}}) = f_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}})$, luego

$$h_{\mathrm{L}}(u; u'_{\mathrm{L}}) = f^{\times} \Rightarrow f_{\mathrm{L}}(u) > f^{\times} \text{ para } u \in (u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}}),$$

y como $h_{\mathrm{R}}(\cdot; u'_{\mathrm{R}})$ es la mayor función no decreciente continua inferior o igual a f_{R},

$$h_{\mathrm{R}}(u; u'_{\mathrm{R}}) = f^{\times} \Rightarrow f_{\mathrm{R}}(u) > f^{\times} \text{ para } u \in (u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}}).$$

Análogamente, si $u'_{\mathrm{R}} < u'_{\mathrm{L}}$, entonces

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{L}}(u; u'_{\mathrm{L}}) = f^{\times} &\Rightarrow f_{\mathrm{L}}(u) < f^{\times} \text{ para } u \in (u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}}), \\ h_{\mathrm{R}}(u; u'_{\mathrm{R}}) = f^{\times} &\Rightarrow f_{\mathrm{R}}(u) < f^{\times} \text{ para } u \in (u'_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{L}}). \end{aligned}$$

Resumiendo, podemos escribir

$$u'_{\mathrm{L}} \leqslant u'_{\mathrm{R}} \Rightarrow \begin{cases} f_{\mathrm{L}}(u) \geqslant f_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}) & \text{para todo } u \in [u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}}] \text{ o} \\ f_{\mathrm{R}}(u) \geqslant f_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}}) & \text{para todo } u \in [u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}}], \end{cases} \tag{7.25}$$

$$u'_{\mathrm{R}} \leqslant u'_{\mathrm{L}} \Rightarrow \begin{cases} f_{\mathrm{L}}(u) \leqslant f_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}) & \text{para todo } u \in [u'_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{L}}] \text{ o} \\ f_{\mathrm{R}}(u) \leqslant f_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}}) & \text{para todo } u \in [u'_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{L}}]. \end{cases} \tag{7.26}$$

Además, las implicaciones (7.25) y (7.26) efectivamente implican que u'_{L} y u'_{R} son elegidos de acuerdo a la condición de entropía del salto mínimo.

Lema 7.1. *Si los valores* u'_{L} *y* u'_{R} *son elegidos de acuerdo a la condición de entropía del salto mínimo* (7.22) *y* (7.23)*, entonces para cada constante c,*

$$F_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}}, c) - F_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}, c) \leqslant \bigl|f_{\mathrm{R}}(c) - f_{\mathrm{L}}(c)\bigr|, \tag{7.27}$$

donde F_{L} *y* F_{R} *son los flujos de entropía de Kružkov, es decir*

$$F_{\mathrm{L}}(u,c) = \operatorname{sgn}(u-c)\bigl(f_{\mathrm{L}}(u) - f_{\mathrm{L}}(c)\bigr), \quad F_{\mathrm{R}}(u,c) = \operatorname{sgn}(u-c)\bigl(f_{\mathrm{R}}(u) - f_{\mathrm{R}}(c)\bigr).$$

Demostración. Si $\operatorname{sgn}(u'_{\mathrm{L}} - c) = \operatorname{sgn}(u'_{\mathrm{R}} - c)$, entonces el lado izquierdo de (7.27) es igual a

$$\operatorname{sgn}(u'_{\mathrm{L}} - c)\bigl(f_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}}) - f_{\mathrm{R}}(c) - f_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}) + f_{\mathrm{L}}(c)\bigr) = \operatorname{sgn}(u'_{\mathrm{L}} - c)\bigl(f_{\mathrm{L}}(c) - f_{\mathrm{R}}(c)\bigr),$$

y la desigualdad evidentemente es válida.

En el caso $u'_{\mathrm{L}} \leqslant c \leqslant u'_{\mathrm{R}}$, (7.27) se convierte en

$$2f^{\times} - f_{\mathrm{L}}(c) - f_{\mathrm{R}}(c) \leqslant \bigl|f_{\mathrm{R}}(c) - f_{\mathrm{L}}(c)\bigr|,$$

lo que podemos escribir como

$$2f^{\times} - \max\bigl\{f_{\mathrm{L}}(c), f_{\mathrm{R}}(c)\bigr\} - \min\bigl\{f_{\mathrm{L}}(c), f_{\mathrm{R}}(c)\bigr\} \leqslant \max\bigl\{f_{\mathrm{L}}(c), f_{\mathrm{R}}(c)\bigr\} - \min\bigl\{f_{\mathrm{L}}(c), f_{\mathrm{R}}(c)\bigr\}.$$

Es decir, obtenemos

$$f^{\times} \leqslant \max\bigl\{f_{\mathrm{L}}(c), f_{\mathrm{R}}(c)\bigr\}.$$

Es evidente que (7.25) implica esta desigualdad. Análogamente, si $u'_{\mathrm{R}} \leqslant c \leqslant u'_{\mathrm{L}}$, la desigualdad (7.27) puede ser escrita como

$$f^{\times} \geqslant \max\bigl\{f_{\mathrm{L}}(c), f_{\mathrm{R}}(c)\bigr\},$$

la cual, a su vez, es implicada por (7.26). ■

La demostraci'on del Lema 7.1 ilustra también que la condición (7.27) *no* implica la condición de entropía del salto mínimo (7.25) y (7.26). Pero podemos definir un par de "constantes" c_{L} y c_{R} (que efectivamente dependen de u_{L} y u_{R}) exigiendo que

$$c_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}}) = \begin{cases} \operatorname*{arg\,min}_{[u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}}]} f_{\mathrm{L}}(u) & \text{si } u'_{\mathrm{L}} \leqslant u'_{\mathrm{R}}, \\ \operatorname*{arg\,max}_{[u'_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{L}}]} f_{\mathrm{L}}(u) & \text{si } u'_{\mathrm{L}} \geqslant u'_{\mathrm{R}}, \end{cases} \tag{7.28}$$

$$c_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}}) = \begin{cases} \operatorname*{arg\,min}_{[u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}}]} f_{\mathrm{R}}(u) & \text{si } u'_{\mathrm{L}} \leqslant u'_{\mathrm{R}}, \\ \operatorname*{arg\,max}_{[u'_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{L}}]} f_{\mathrm{R}}(u) & \text{si } u'_{\mathrm{L}} \geqslant u'_{\mathrm{R}}. \end{cases} \tag{7.29}$$

Utilizando los argumentos de la demostración del Lema 7.1, podemos deducir que la condición de entropía del salto mínimo es equivalente con

$$F_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}}, c_{\mathrm{R}}) - F_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}, c_{\mathrm{L}}) \leqslant \bigl|f_{\mathrm{R}}(c_{\mathrm{R}}) - f_{\mathrm{L}}(c_{\mathrm{L}})\bigr|, \tag{7.30}$$

además, para cada c entre u'_{L} y u'_{R} se tiene la desigualdad

$$F_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}}, c) - F_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}, c) \leqslant F_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}}, c_{\mathrm{R}}) - F_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}, c_{\mathrm{L}}).$$

Comentamos que en un caso especial, (7.27) efectivamente implica que los valores u'_{L} y u'_{R} son elegidos de acuerdo a la condición de entropía del salto mínimo. Supongamos que existe un valor $\hat{u}$ tal que ambas funciones $f_{\mathrm{L}}/u)$ y $f_{\mathrm{R}}(u)$ posean un máximo (mínimo) global en $\hat{u}$, y que f_{L} y f_{R} sean crecientes (decrecientes) para $u < \hat{u}$ y decrecientes (crecientes) para $u > \hat{u}$. En este caso, recordemos que (7.27) es válida trivialmente si c no esta localizado entre u'_{L} y u'_{R}, pero que cuando c está entre estos valores, la desigualdad (7.27) es de la forma

$$\begin{aligned} f^{\times} &\leqslant \max\bigl\{f_{\mathrm{L}}(c), f_{\mathrm{R}}(c)\bigr\} \quad \text{si } u'_{\mathrm{L}} < u'_{\mathrm{R}}, \\ f^{\times} &\geqslant \min\bigl\{f_{\mathrm{L}}(c), f_{\mathrm{R}}(c)\bigr\} \quad \text{si } u'_{\mathrm{L}} > u'_{\mathrm{R}}. \end{aligned} \tag{7.31}$$

Suponiendo que $f_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}) = f_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}})$, que (7.31) es válido, y que las funciones f_{L} y f_{R} poseen un máximo único en común, podemos verificar que (7.31) implica (7.25) y (7.26). Esta implicación también es válida para otras funciones de flujo (ver la “crossing condition” [57]).

Aunque al parecer no tiene nada que ver con la solución del pronblema de Riemann, en este puunto conviene introducir y demostrar el siguiente lema, el cual jugará un rol importante para la demostración del buen pleantamiento en la Sección 7.3.

Lema 7.2. *Supongamos que ambos pares $(u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}})$ y $(v'_{\mathrm{L}}, v'_{\mathrm{R}})$ son elegidos de acuerdo a la condición de entropía del salto mínimo. Entonces*

$$Q = F_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}}, v'_{\mathrm{R}}) - F_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}, v'_{\mathrm{L}}) \leqslant 0. \tag{7.32}$$

Demostración. Como $f_{\mathrm{L}}(v'_{\mathrm{L}}) = f_{\mathrm{R}}(v'_{\mathrm{R}})$ y $f_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}) = f_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}})$, si $\operatorname{sgn}(u'_{\mathrm{L}} - v'_{\mathrm{L}}) = \operatorname{sgn}(u'_{\mathrm{R}} - v'_{\mathrm{R}})$, entonces $Q = 0$. Por lo tanto, supongamos que $\operatorname{sgn}(u'_{\mathrm{L}} - v'_{\mathrm{L}}) = -1$ y $\operatorname{sgn}(u'_{\mathrm{R}} - v'_{\mathrm{R}}) = 1$. En este caso,

$$\begin{aligned} Q &= f_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}}) - f_{\mathrm{R}}(v'_{\mathrm{R}}) + f_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}) - f_{\mathrm{L}}(v'_{\mathrm{L}}) \\ &= 2\bigl(f_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}}) - f_{\mathrm{R}}(v'_{\mathrm{R}})\bigr) \qquad (7.33) \\ &= 2\bigl(f_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}) - f_{\mathrm{L}}(v'_{\mathrm{L}})\bigr), \qquad (7.34) \end{aligned}$$

considerando que $f_{\mathrm{L}}(v'_{\mathrm{L}}) = f_{\mathrm{R}}(v'_{\mathrm{R}})$ y $f_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}) = f_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}})$. Además, $u'_{\mathrm{L}} \leqslant v'_{\mathrm{L}}$ y $v'_{\mathrm{R}} \leqslant u'_{\mathrm{R}}$. Entonces exactamente uno de los siguientes casos es válido:

(a) $u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}} \in [v'_{\mathrm{R}}, v'_{\mathrm{L}}]$,
(b) $v'_{\mathrm{L}}, v'_{\mathrm{R}} \in [u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}}]$,
(c) $v'_{\mathrm{R}} \leqslant u'_{\mathrm{L}} \leqslant v'_{\mathrm{L}} \leqslant u'_{\mathrm{R}}$,
(d) $u'_{\mathrm{L}} \leqslant v'_{\mathrm{R}} \leqslant u'_{\mathrm{R}} \leqslant v'_{\mathrm{L}}$.

En cada uno de los casos podemos verificar (7.32) de acuerdo al siguiente razonamiento.

(a) En este caso, a partir de (7.26) para v'_{L} y v'_{R} se tiene o $f_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}) \leqslant f_{\mathrm{L}}(v'_{\mathrm{L}})$, o $f_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}}) \leqslant f_{\mathrm{R}}(v'_{\mathrm{R}})$. Es fácil ver que esto conjuntamente con (7.33) o (7.34) implica que $Q \leqslant 0$.
(b) A partir de (7.26) para u se tiene o $f_{\mathrm{L}}(v'_{\mathrm{L}}) \geqslant f_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}})$, o $f_{\mathrm{R}}(v'_{\mathrm{R}}) \geqslant f_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}})$, luego nuevamente $Q \leqslant 0$.
(c) Recordemos que este caso corresponde a $v'_{\mathrm{R}} \leqslant u'_{\mathrm{L}} \leqslant v'_{\mathrm{L}}$ y $u'_{\mathrm{L}} \leqslant v'_{\mathrm{L}} \leqslant u'_{\mathrm{R}}$. Utilizando la primera desigualdad y (7.26) para v obtenemos $f_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}) \leqslant f_{\mathrm{L}}(v'_{\mathrm{L}})$ o $f_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}}) \leqslant f_{\mathrm{R}}(v'_{\mathrm{R}})$. Ambas desigualdades implican $Q \leqslant 0$.
(d) Este caso corresponde a $u'_{\mathrm{L}} \leqslant v'_{\mathrm{R}} \leqslant u'_{\mathrm{R}}$ y $v'_{\mathrm{R}} \leqslant u'_{\mathrm{R}} \leqslant v'_{\mathrm{L}}$. Utilizando la primera desigualdad y (7.25) obtenemos $f_{\mathrm{L}}(v'_{\mathrm{L}}) \geqslant f_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}})$ o $f_{\mathrm{R}}(v'_{\mathrm{R}}) \geqslant f_{\mathrm{R}}(u'_{\mathrm{R}})$. Ambas desigualdades implican $Q \leqslant 0$.

Esto completa la demostración del Lema 7.2. ■

Ejemplo 7.4. *Consideremos el problema de Riemann de la ecuación*

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + \gamma\right)_x = 0, \tag{7.35}$$

donde

$$u_0(x) = \begin{cases} u_{\mathrm{L}} & \text{para } x < 0, \\ u_{\mathrm{R}} & \text{para } x > 0, \end{cases} \quad \gamma(x) = \begin{cases} \gamma_{\mathrm{L}} & \text{para } x < 0, \\ \gamma_{\mathrm{R}} & \text{para } x > 0. \end{cases} \tag{7.36}$$

Aquí obtenemos

$$H_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}}) = \begin{cases} (-\infty, 0] & \text{si } u_{\mathrm{L}} \leqslant 0, \\ (-\infty, -u_{\mathrm{L}}] \cup \{u_{\mathrm{L}}\} & \text{si } u_{\mathrm{L}} \geqslant 0, \end{cases}$$

$$H_{\mathrm{R}}(u_{\mathrm{R}}) = \begin{cases} \{-u_{\mathrm{R}}\} \cup [-u_{\mathrm{R}}, \infty) & \text{si } u_{\mathrm{R}} \leqslant 0, \\ [0, \infty) & \text{si } u_{\mathrm{R}} \geqslant 0. \end{cases}$$

Ahora podemos facilmente construir la solución para cada dato inicial y cualquier γ. Supongamos que

$$\gamma_{\mathrm{L}} = -1, \quad \gamma_{\mathrm{R}} = 1, \quad u_{\mathrm{L}} = 1, \quad u_{\mathrm{R}} = 1. \tag{7.37}$$

Entonces

$$h_{\mathrm{L}}(u; -1) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}u^2 - 1 & \text{para } u \leqslant -1, \\ -\dfrac{1}{2} & \text{para } u \geqslant -1, \end{cases} \quad h_{\mathrm{R}}(u; 1) = \begin{cases} 1 & \text{para } u \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{2}u^2 + 1 & \text{para } u \geqslant 0. \end{cases}$$

Los grafos de h_{L} y h_{R} intersectan en un punto único donde el flujo es igual 1 y $u < 0$, ver Figura 7.3 (a). Luego obtenemos u'_{L} como solución de

$$h_{\mathrm{L}}(u'_{\mathrm{L}}; -1) = 1, \quad u'_{\mathrm{L}} < 0,$$

lo que entrega $u'_{\mathrm{L}} = -2$. Siguiendo la construcción general, obtenemos $u'_{\mathrm{R}} = 0$.

La solución completa consiste entonces en la solución de un problema de Riemann escalar para la ecuación

$$v_t + \left(\frac{1}{2}v^2\right)_x = 0, \quad v(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leqslant 0, \\ -2 & \text{para } x > 0, \end{cases}$$

combinada con la solución del problema de Riemann escalar

$$w_t + \left(\frac{1}{2}w^2\right)_x = 0, \quad w(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

A partir del procedimiento general de la solución de problemas de Riemann, es decir formando envolturas, se tiene que

$$v(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leqslant -t/2, \\ -2 & \text{para } x > -t/2, \end{cases} \quad w(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leqslant 0, \\ x/t & \text{para } 0 < x \leqslant t, \\ 1 & \text{para } x > t. \end{cases}$$

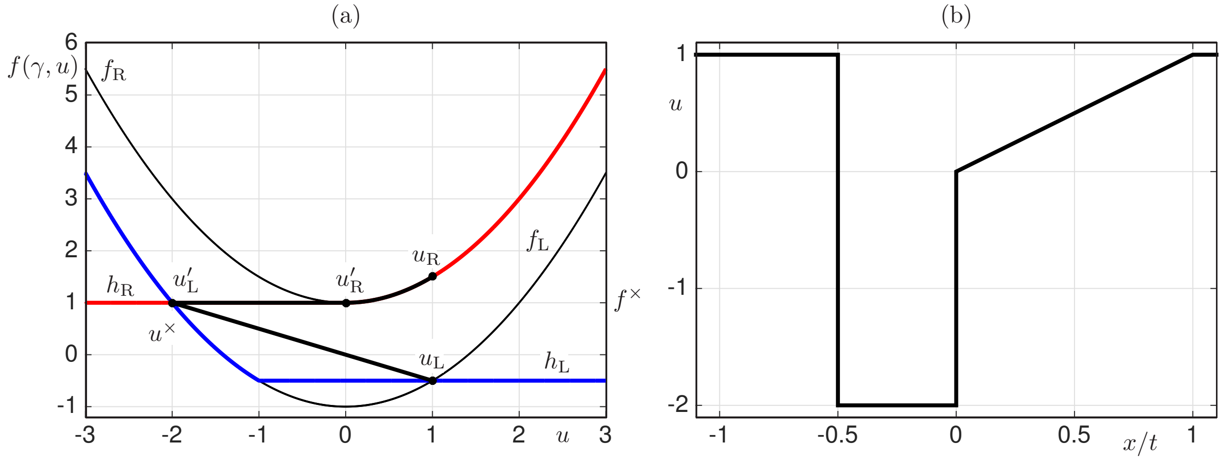


FIGURA 7.3. Ejemplo 7.4: solución del problema de Riemann (7.35), (7.36) con los datos (7.37). (a) Construcción de u'_{L} y u'_{R}, (b) solución $u = u(x,t)$.

Finalmente, definimos

$$u(x,t) = \begin{cases} v(x,t) & \text{para } x < 0, \\ w(x,t) & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

(ver Figura 7.3 (b)).

La Figura 7.3 ilustra esta solución. Específicamente, la Figura 7.3 (a) ilustra la construcción de los estados u'_{L} y u'_{R} y el camino de la solución (en negro), mientras que la Figura 7.3 (b) muestra la solución $u(x,t)$, la cual efectivamente no depende de x y y en forma independiente pero sólo de x/t. Este ejemplo ilustra que la variación total de la solución u no *es acotada por la variación del dato inicial $u_0 = u(\cdot,0)$. Incluso si esto es así, se puede preguntar si posiblemente la variación de u puede ser acotada por la variacoión de u_0 más la variación de γ. A partir de la construcción de la solución del problema de Riemann, la variación total de $f(\gamma,u)$ es acotada por la variación total de $f(\gamma,u_0)$. No obstante, un ejemplo explícito muestra que puede suceder que $\mathrm{TV}(u_0) < \infty$, pero que $\mathrm{TV}(u(\cdot,T)) = \infty$ para un tiempo finito $T > 0$ (ver [1]).*

Ejemplo 7.5. *Como segundo ejemplo estudiaremos el modelo de tráfico vehicular*

$$u_t + \bigl(\gamma(x)4u(1-u)\bigr)_x = 0, \tag{7.38}$$

donde

$$u(x,0) = \begin{cases} u_{\mathrm{L}} & \text{para } x < 0, \\ u_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant 0, \end{cases} \quad \gamma(x) = \begin{cases} \gamma_{\mathrm{L}} & \text{para } x < 0, \\ \gamma_{\mathrm{R}} & \text{para } x \geqslant 0. \end{cases} \tag{7.39}$$

Por simplicidad suponemos que $\gamma_{\mathrm{L}} > 0$ y $\gamma_{\mathrm{R}} > 0$. Ahora

$$H_{\mathrm{L}}(u_{\mathrm{L}}) = \begin{cases} \{u_{\mathrm{L}}\} \cup [1-u_{\mathrm{L}},\infty) & \text{si } u_{\mathrm{L}} \leqslant 1/2, \\ [1/2,\infty) & \text{si } u_{\mathrm{L}} \geqslant 1/2, \end{cases}$$

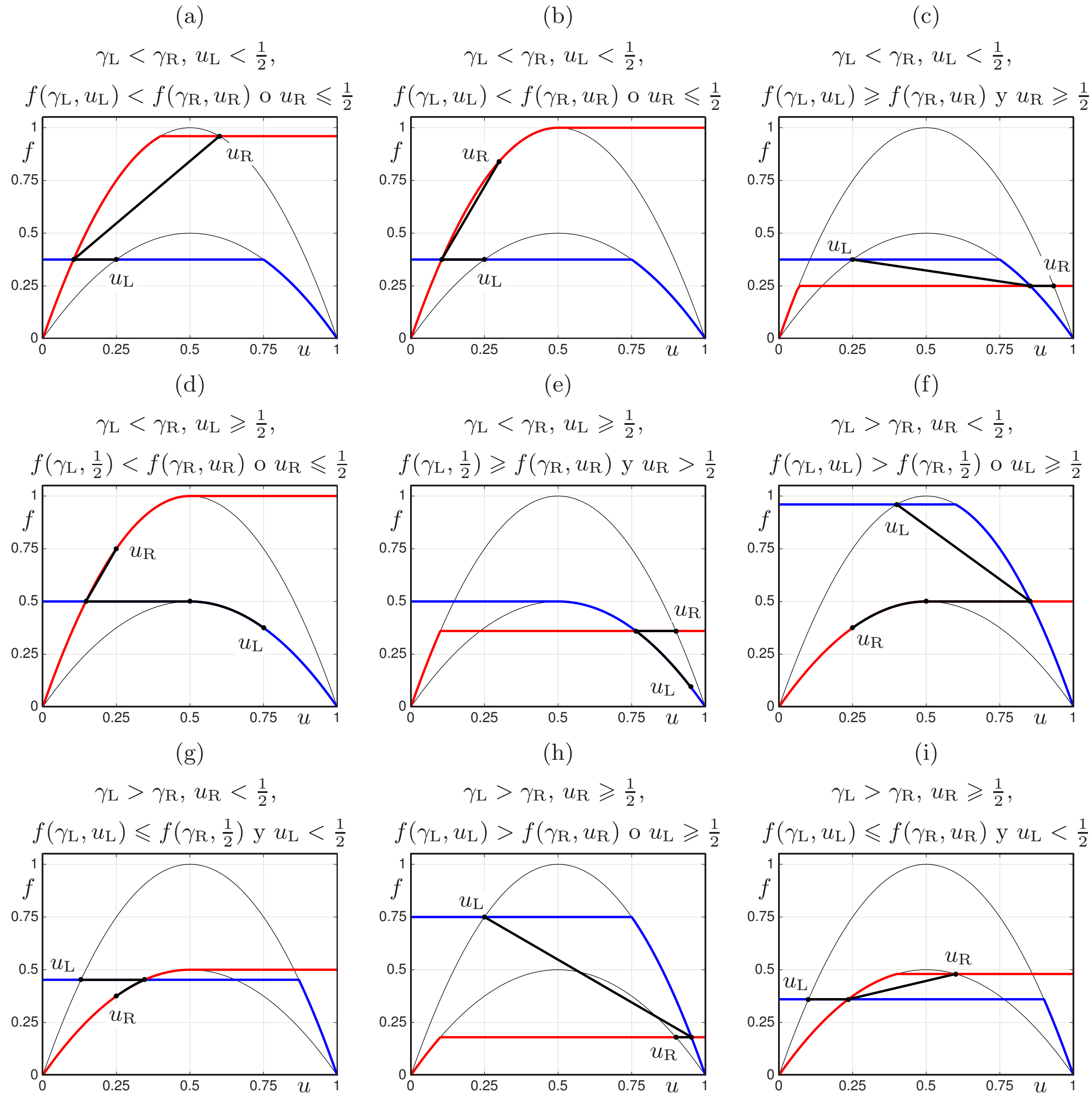


FIGURA 7.4. Ejemplo 7.5: solución del problema de Riemann (7.38), (7.39).

$$H_{\rm R}(u_{\rm R}) = \begin{cases} (-\infty, 1/2] & \text{si } u_{\rm R} \leqslant 1/2, \\ (-\infty, 1-u_{\rm R}] \cup \{u_{\rm R}\} & \text{si } u_{\rm R} \geqslant 1/2. \end{cases}$$

Describiremos la solución analizando varios casos, en dependencia de $\gamma_{\rm L}$, $\gamma_{\rm R}$, $u_{\rm L}$, y $u_{\rm R}$. Notamos primero que $f(\gamma, u)$ posee un máximo en $u = 1/2$ para todo γ, y que $f(\gamma, 1/2) = \gamma$.

1.) *Empezamos suponiendo que*

$$u_{\rm L} \leqslant 1/2. \tag{7.40}$$

En este caso la estructura de la solución dependerá de si $\gamma_{\mathrm{L}} < \gamma_{\mathrm{R}}$. *Examinemos primero el caso* $\gamma_{\mathrm{L}} < \gamma_{\mathrm{R}}$ *y* $f(\gamma_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{L}}) < f(\gamma_{\mathrm{R}}, u_{\mathrm{R}})$ *o* $u_{\mathrm{R}} \leqslant 1/2$. *Esa situación corresponde a la Figura 7.4 (a). Las funciones* h_{L} *y* h_{R} *se muestran en color azul y rojo, respectivamente, y el camino de solución como línea negra gruesa. En este caso,* $u'_{\mathrm{L}} = u_{\mathrm{L}}$, *y* u'_{R} *resulta como solución de*

$$f(\gamma_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{R}}) = f(\gamma_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{L}}), \quad u'_{\mathrm{R}} < 1/2.$$

In nuestro caso esto significa que

$$u'_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma_{\mathrm{L}}}{\gamma_{\mathrm{R}}} 4u_{\mathrm{L}}(1 - u_{\mathrm{L}})}\right).$$

La solución consiste en una discontinuidad estacionaria que separa los estados $(u'_{\mathrm{L}}, \gamma_{\mathrm{L}})$ *y* $(u'_{\mathrm{R}}, \gamma_{\mathrm{R}})$, *la que se llamará* γ-onda, *seguida por un choque en* u *que se mueve hacia la derecha. Éste lo llamaremos* u-onda. *Para aclarar este caso mostramos en la Figura 7.4 (b) la situación cuando* $u_{\mathrm{R}} \leqslant 1/2$.

2.) *Consideremos ahora el caso* $\gamma_{\mathrm{L}} < \gamma_{\mathrm{R}}$ *y* $f(\gamma_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{L}}) \geqslant f(\gamma_{\mathrm{R}}, u_{\mathrm{R}})$, *ver Figura 7.4 (c). Ahora la solución consiste en una* u*-onda con velocidad negativa seguida por una* γ*-onda que separa* u'_{L} *y* u_{R}. *En otras palabras,* $u'_{\mathrm{R}} = u_{\mathrm{R}}$, *y* u'_{L} *es la solución de*

$$f(\gamma_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{L}}) = f(\gamma_{\mathrm{R}}, u_{\mathrm{R}}), \quad u'_{\mathrm{L}} \geqslant 1/2.$$

3.) *En el siguiente caso se supone que* $u_{\mathrm{L}} \geqslant 1/2$. *En este caso, si* $u_{\mathrm{R}} \leqslant 1/2$ *o* $f(\gamma_{\mathrm{R}}, u_{\mathrm{R}}) > f(\gamma_{\mathrm{L}}, 1/2)$, *entonves* $u'_{\mathrm{L}} = 1/2$, *y* u'_{R} *es la solución de*

$$f(\gamma_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{R}}) = f(\gamma_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{L}}) = \gamma_{\mathrm{L}}, \quad u'_{\mathrm{R}} < 1/2.$$

Esto es ilustrado en la Figura 7.4 (d). Ahora la solución consiste en una u*-onda que se mueve hacia la izquierda. Esta* u*-onda es una onda de rarefacción, seguida por una* γ*-onda. La última onda es una* u*-onda que se mueve hacia la derecha; ésta es un choque.*

4.) *La solución que corresponde a* $u_{\mathrm{L}} \geqslant 1/2$, $u_{\mathrm{R}} \geqslant 1/2$, *y* $f(\gamma_{\mathrm{R}}, u_{\mathrm{R}}) \leqslant f(\gamma_{\mathrm{L}}, 1/2)$ *es mostrada en la Figura 7.4 (e). En este caso* u *consiste en una* u*-onda que se mueve hacia la izquierda seguida por una* γ*-onda. Esto termina la discusión del caso* $\gamma_{\mathrm{L}} < \gamma_{\mathrm{R}}$.

5.) *El caso* $\gamma_{\mathrm{L}} > \gamma_{\mathrm{R}}$ *es análogo, y las cuatro posibilidades se muestran en las Figuras 7.4 (f), (g), (h), e (i).*

Para determinar una solución en particular, hay que seguir el camino mostrado en negro grueso desde u_{L} *hasta* u_{R}. *Si el camino sigue el grafo de* f_{L} *o* f_{R}, *entonces la onda es una onda de rarefacción; en caso contrario se trata de una onda de choque. Los segmentos horizontales que conectan* f_{L} *y* f_{R} *son* γ*-ondas. Como ya mencionamos, en estas figuras las curvas en azul y rojo denotan los grafos de* h_{L} *y* h_{R}, *respectivamente.*

Los diagramas de la Figura 7.4 ilustran que si $u_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{R}} \in [0,1]$, *entonces la solución* $u = u(x,t)$ *satisface* $u(x,t) \in [0,1]$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *y* $t \geqslant 0$. *En muchas de las aplicaciones de leyes de conservación similares, la cantidad* u *es interpretada como densidad, luego es muy natural exigir que esta cantidad asume solamente valores entre* 0 *y* 1.

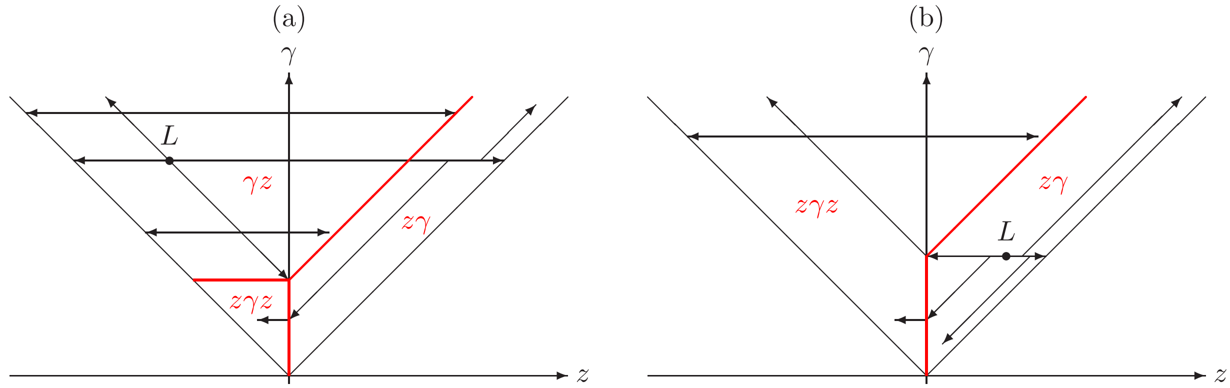


Figura 7.5. Ejemplo 7.5: construcción de la solución del problema de Riemann (7.38), (7.39) en el espacio (z,γ) (a) para $z_{\mathrm{L}} \leqslant 0$, (b) para $z_{\mathrm{L}} \geqslant 0$. En cada caso, las líneas rojas marcan las fronteras de constancia de cada tipo de solución.

Existe otra forma mucho más compacta de ilustrar la solución del problema de Riemann general de esta ley de conservación. Sea la cantidad $z = z(\gamma, u)$ *definida por*

$$\begin{aligned} z(\gamma,u) &:= \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2}-u\right)\left(f(\gamma,u)-f\left(\gamma,\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \gamma\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2}-u\right)(2u-1)^2 = \int_{1/2}^{u}\left|\frac{\partial f}{\partial u}(\gamma,\xi)\right|\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{7.41}$$

Esta aplicación mapea el rectángulo $[\gamma_1,\gamma_2]\times[0,1]$ *en la región*

$$V := \bigl\{(z,\gamma) \mid \gamma_1 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_2,\ -\gamma \leqslant z \leqslant \gamma\bigr\}.$$

Además, $u \mapsto z(\gamma,u)$ *es inyectiva, y estrictamente creciente. En las coordenadas* (z,γ)*, las* γ*-ondas son rectas de la pendiente* -1 *si* $u \leqslant 1/2$ *o* 1 *si* $u \geqslant 1/2$*, y las* u*-ondas son rectas horizontales. La Figura....muestra como se ve la solución en varios de los casos en el plano* (z,γ)*. Para leer el diagrama hay que empezar en el punto* $L = (z(u_{\mathrm{L}},\gamma_{\mathrm{L}}),\gamma_{\mathrm{L}})$ *y seguir las flechas a la posición correcta. Las líneas rojas marcan las fronteras de constancia de cada tipo de solución. Como trabajamos en coordenadas* (z,γ)*, las* u*-ondas se llaman ahora* z-ondas*, y los tipos de solución son* $z\gamma$*,* $z\gamma z$*, y* γz*. Si el tipo de solución es, por ejemplo,* $z\gamma$*, entonces esto significa que la solución consiste en una* z*-onda (*u*-onda) seguida por una* γ*-onda.*

Los Ejemplos 7.4 y 7.5 son más similares de lo que parecen. Efectivamente, la inversa de la aplicación (7.41) es

$$u = \frac{1}{2}\Bigl(1 + \operatorname{sgn}(z)\sqrt{|z|/\gamma}\Bigr),$$

además, $f(\gamma,u) = |z| + \gamma$. Insertando esto en (7.38) obtenemos

$$\left(\frac{1}{2}\Bigl(1 + \operatorname{sgn}(z)\sqrt{|z|/\gamma}\Bigr)\right)_t + \bigl(|z|+\gamma\bigr)_x = 0.$$

Como γ es independiente de t, podemos escribir esto como

$$\Big(\mathrm{sgn}(z)\sqrt{|z|}\Big)_t + 2\sqrt{\gamma}\big(|z|+\gamma\big)_x = 0.$$

Ahora, introduciendo $w := \mathrm{sgn}(z)\sqrt{|z|}$ y una nueva coordenada de tiempo τ tal que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \sqrt{2\gamma}\frac{\partial}{\partial t},$$

obtenemos

$$w_t + \left(\frac{1}{2}w^2 + \gamma\right)_x = 0.$$

Volviendo a la discusión del problema de Riemann para la ley de conservación general (ver (7.7)), notamos que no podemos siempre encontrar una solución débil de este problema, pero si los grafos de las funciones $h_{\mathrm{L}}(\cdot; u_{\mathrm{L}})$ y $h_{\mathrm{R}}(\cdot; u_{\mathrm{R}})$ intersectan, podemos encontrar un par $(u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}})$ único, el cual, a su vez, determina una solución del problema de Riemann única. Esta solución, que satisface la condición de entropía del salto mínimo, la llamaremos *solución de entropía.*

Parece ser complicado generar un criterio general con respecto a f_{L} y f_{R} para garantizar que h_{L} y h_{R} intersecten, pero para dos clases importantes de funciones de flujo podemos garantizar que siempre exista una intersección.

Lema 7.3. *Consideremos el problema de Riemann*

$$\begin{aligned} &u_t + f(\gamma,u)_x = 0, \quad x\in\mathbb{R}, \quad t>0,\\ &u(x,0) = \begin{cases} u_{\mathrm{L}} & \text{para } x<0,\\ u_{\mathrm{R}} & \text{para } x>0,\end{cases} \quad \gamma(x) = \begin{cases} \gamma_{\mathrm{L}} & \text{para } x<0,\\ \gamma_{\mathrm{R}} & \text{para } x>0.\end{cases} \end{aligned} \tag{7.42}$$

(i) *Sea $f = f(\gamma,u)$ continuamente diferenciable sobre el conjunto*

$$\Omega := [\gamma_1,\gamma_2]\times[u_1,u_2] \ni (\gamma,u).$$

Supongamos que

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma}(\gamma,u_1) = \frac{\partial f}{\partial \gamma}(\gamma,u_2) = 0 \quad \text{para todo } \gamma\in[\gamma_1,\gamma_2],$$

es decir $f(\gamma,u_1) = C_1$ y $f(\gamma,u_2) = C_2$ para constantes C_1 y C_2 independientes de γ. Entonces el problema de Riemann (7.42) *posee una solución de entropía única para cada $(\gamma_{\mathrm{L}},u_{\mathrm{L}}),(\gamma_{\mathrm{R}},u_{\mathrm{R}})\in\Omega$. Además, $u(x,t)\in\Omega$ para todo x y t.*

(ii) *Sea $f = f(\gamma,u)$ una función localmente Lipschitz continua para $\gamma\in[\gamma_1,\gamma_2]$ y $u\in\mathbb{R}$. Supongamos que*

$$\lim_{u\to\pm\infty} f(\gamma,u) = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{u\to\pm\infty} f(\gamma,u) = -\infty$$

para todo $\gamma\in[\gamma_1,\gamma_2]$. Entonces el problema de Riemann (7.42) *posee una solución de entropía única para todo $(\gamma_{\mathrm{L}},u_{\mathrm{L}}),(\gamma_{\mathrm{R}},u_{\mathrm{R}})\in[\gamma_1,\gamma_2]\times\mathbb{R}$.*

Comentamos que el Ejemplo 7.4 es del tipo (ii) y el Ejemplo 7.5 es del tipo (i). El Lema 7.3 puede ser probado construyendo las funciones h_{L} y h_{R} en cada caso.

7.1.2. Viscosidad y suavización. Deseamos ahora motivar la condición de entropía del salto mínimo. En nuestra construcción de la solución del problema de Riemann esta condición apareció en forma natural como candidata para asegurar la unicidad de la solución. En lo siguiente se ofrecerán dos motivaciones parciales de esta condición. Ambas son basadas en el estudio de ecuaciones que formalmente poseen (7.7) como límite, pero cuyas soluciones, o las mismas ecuaciones, poseen más regularidad que la ley de conservación con un coeficiente discontinuo. Al estudiar este contexto esperamos que la condición de entropía del salto mínimo resulte como consecuencia de exigir que las soluciones de las ecuaciones perturbadas tiendan a la solución del problema de Riemann cuando el tamaño de las perturbaciones tiende a cero.

Es común motivar condiciones de entropía para leyes de conservación exigiendo que la solución de problemas de Riemann sean límites de soluciones del tipo onda viajera de la ecuación singularmente perturbada

$$v_t + f(v)_x = \varepsilon v_{xx}$$

cuando $\varepsilon \downarrow 0$. Para una ecuación escalar donde la función de flujo no depende de x, el criterio de la "envoltura convexa inferior" efectivamente es una consecuencia basa en este planteo. Decimos también que la solución débil encontrada por la formación de envolturas satisface la condición de entropía de la viscosidad desapareciente (condición *vanishing viscosity*).

Sea ahora u^ε una solución de onda viajera del problema de valores iniciales

$$u^\varepsilon_t + f(\gamma, u^\varepsilon)_x = \varepsilon u^\varepsilon_{xx}, \quad \gamma(x) = \begin{cases} \gamma_{\mathrm{L}} & \text{para } x < 0, \\ \gamma_{\mathrm{R}} & \text{para } x > 0, \end{cases} \tag{7.43}$$

donde se supone que $\gamma_{\mathrm{L}} \neq \gamma_{\mathrm{R}}$. Esperamos que existan valores u'_{L} y u'_{R} tales que

$$\lim_{x \to -\infty} u^\varepsilon(x,t) = u'_{\mathrm{L}} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} u^\varepsilon(x,t) = u'_{\mathrm{R}}. \tag{7.44}$$

Como γ depende de x, no podemos esperar una solución tipo onda viajera, es decir una solución que dependa de $(x-st)/\varepsilon$, a menos que sea estacionaria, es decir $s=0$. Por lo tanto consideramos una función que depende solamente del espacio, es decir $u^\varepsilon(x,t) = u(x/\varepsilon)$. Introduciendo $\xi := x/\varepsilon$ y denotando $\dot{g} = \mathrm{d}g/\mathrm{d}\xi$ para cualquier función diferenciable $g = g(\xi)$ obtenemos

$$\dot{f}(\gamma, u) = \ddot{u}. \tag{7.45}$$

La ecuación (7.45) puede ser integrada una vez, y suponiendo que los límites en (7.44) son asumidos en forma apropiada, obtenemos

$$\dot{u} = f(\gamma, u) - f(\gamma_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{L}}) = f(\gamma, u) - f(\gamma_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{R}}),$$

la cual nos permite recuperar la condición de Rankine-Hugoniot

$$f(\gamma_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{L}}) = f(\gamma_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{R}}) =: f^\times. \tag{7.46}$$

Resumiendo, podemos decir que la discontinuidad que separa $(\gamma_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{L}})$ y $(\gamma_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{R}})$ permite un perfil viscoso, o que esta discontinuidad satisface las condiciones de entropía del perfil viscoso, si la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \begin{cases} f(\gamma_{\mathrm{L}}, u) - f^{\times} & \text{si } \xi < 0, \\ f(\gamma_{\mathrm{R}}, u) - f^{\times} & \text{si } \xi > 0 \end{cases} \tag{7.47}$$

posee (por lo menos) una solución $u(\xi)$ tal que o

$$\lim_{\xi \to -\infty} u(\xi) = u'_{\mathrm{L}} \quad \text{y} \quad u(\tilde{\xi}) = u'_{\mathrm{R}}$$

o

$$u(\tilde{\xi}) = u'_{\mathrm{L}} \quad \text{y} \quad \lim_{\xi \to \infty} u(\xi) = u'_{\mathrm{R}},$$

donde en cada caso $\tilde{\xi}$ puede ser finito o infinito. Esto significa que una de las siguientes dos alternativas debe ser válida: o la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{v} = f(\gamma_{\mathrm{L}}, v) - f^{\times}, \quad \xi < 0, \quad v(0) = u'_{\mathrm{R}}$$

posee una solución tal que

$$\lim_{\xi \to -\infty} v(\xi) = u'_{\mathrm{L}},$$

caso en el cual decimos que v es *un perfil viscoso a izquierda*, o la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{w} = f(\gamma_{\mathrm{R}}, w) - f^{\times}, \quad \xi > 0, \quad w(0) = u'_{\mathrm{L}}$$

posee una solución tal que

$$\lim_{\xi \to \infty} w(\xi) = u'_{\mathrm{R}},$$

caso en el cual se dice que w es *un perfil viscoso a derecha*. Luego la discontinuidad satisface la condición de entropía del perfil viscoso si existe un perfil viscoso a izquierda o a derecha.

Si $u'_{\mathrm{L}} < u'_{\mathrm{R}}$, entonces existe un perfil viscoso a izquierda si y sólo si

$$f(\gamma_{\mathrm{L}}, u) > f(\gamma_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{L}}) \quad \text{para todo } u \in (u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}}),$$

y tenemos un perfil viscoso a derecha si y sólo si

$$f(\gamma_{\mathrm{R}}, u) > f(\gamma_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{R}}) \quad \text{para todo } u \in (u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}}).$$

Si $u'_{\mathrm{L}} > u'_{\mathrm{R}}$, entonces existe un perfil viscoso a izquierda si y sólo si

$$f(\gamma_{\mathrm{L}}, u) < f(\gamma_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{L}}) \quad \text{para todo } u \in (u'_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{L}}),$$

y tenemos un perfil viscoso a derecha si y sólo si

$$f(\gamma_{\mathrm{R}}, u) < f(\gamma_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{R}}) \quad \text{para todo } u \in (u'_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{L}}).$$

Resumiendo, podemos concluir que la condición de entropía del perfil viscoso es equivalente con

$$u'_{\mathrm{L}} \leqslant u'_{\mathrm{R}} \Rightarrow \begin{cases} f(\gamma_{\mathrm{L}}, u) > f^{\times} & \text{para todo } u \in (u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}}) \text{ o} \\ f(\gamma_{\mathrm{R}}, u) > f^{\times} & \text{para todo } u \in (u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}}), \end{cases} \tag{7.48}$$

$$u'_{\mathrm{R}} \leqslant u'_{\mathrm{L}} \Rightarrow \begin{cases} f(\gamma_{\mathrm{L}}, u) < f^{\times} & \text{para todo } u \in (u'_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{L}}) \text{ o} \\ f(\gamma_{\mathrm{R}}, u) < f^{\times} & \text{para todo } u \in (u'_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{L}}). \end{cases} \tag{7.49}$$

Esta condición implica la condición de entropía del salto mínimo, y por lo tanto representa una motivación.

Si γ es una función *continua* de x, entonces la teoría clásica de leyes de conservación escalares puede ser aplicada, y el problema de valores iniciales posee un a solución débil única. Sea γ^{ε} una aproximación suave de

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_{\mathrm{L}} & \text{para } x < 0, \\ \gamma_{\mathrm{R}} & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

tal que $\gamma^{\varepsilon} \to \gamma$ cuando $\varepsilon \to 0$, y sea u^{ε} la solución débil de

$$u_t^{\varepsilon} + f(\gamma^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})_x = 0, \quad u^{\varepsilon}(x,0) = \begin{cases} u'_{\mathrm{L}} & \text{para } x < 0, \\ u'_{\mathrm{R}} & \text{para } x > 0. \end{cases} \tag{7.50}$$

Entonces es natural preguntar si u^{ε} tiende a la solución de entropía del salto mínimo cuando $\varepsilon \to 0$. Para discutir este punto consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.6. *Consideremos las funciones*

$$f_{\mathrm{L}}(u) := 4 - (u+1)^2, \quad f_{\mathrm{R}}(u) := 4 - (u-1)^2, \quad f(\gamma, u) := (1-\gamma) f_{\mathrm{L}}(u) + \gamma f_{\mathrm{R}}(u)$$

y el problema de Riemann

$$u_t + f(\gamma, u)_x = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} -2 & \text{para } x < 0, \\ 2 & \text{para } x > 0, \end{cases} \quad \gamma(x) := \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ 1 & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

En este caso obtenemos

$$h_{\mathrm{L}}(u; -2) = \begin{cases} 3 & \text{para } u < 0, \\ 4 - (u+1)^2 & \text{para } u \geqslant 0, \end{cases} \quad h_{\mathrm{R}}(u; 2) = \begin{cases} 4 - (u-1)^2 & \text{para } u \leqslant 0, \\ 3 & \text{para } u > 0 \end{cases}$$

(ver Figura 7.6). Como la discontinuidad que separa los valores de u y γ $(-2,0)$ y $(2,1)$ satisface la condición de entropía del salto mínimo, la función inicial $u(x,0)$ es una solución débil del problema que satisface la condición de entropía del salto mínimo.

Consideremos ahora para $\varepsilon > 0$ la función

$$\gamma^{\varepsilon}(x) := \begin{cases} 0 & \text{para } x \leqslant -\varepsilon, \\ \dfrac{x+\varepsilon}{2\varepsilon} & \text{para } -\varepsilon < x < \varepsilon, \\ 1 & \text{para } x \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

y sea u^{ε} la solución estacionaria de (7.50) con $u'_{\mathrm{L}} = -2$ y $u'_{\mathrm{R}} = 2$. Notamos que u^{ε} satisface $f(\gamma^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})_x = 0$, luego $f(\gamma^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}) = f(0,-2) = 3$. A partir de esta ecuación, es decir

$$f(\gamma^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}) = (1-\gamma^{\varepsilon})\bigl(4 - (u^{\varepsilon}+1)^2\bigr) + \gamma^{\varepsilon}\bigl(4 - (u^{\varepsilon}-1)^2\bigr) = 3,$$

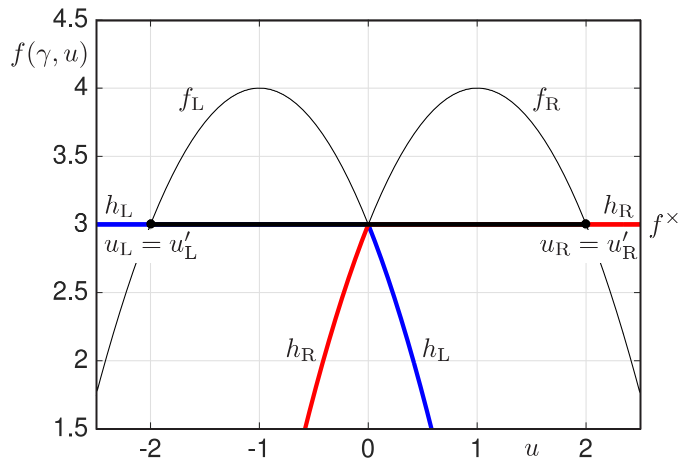


FIGURA 7.6. Ejemplo 7.6: funciones de flujo $f_{\mathrm{L}}(u)$ y $f_{\mathrm{R}}(u)$ y estados $u_{\mathrm{L}} = u'_{\mathrm{L}}$ y $u_{\mathrm{R}} = u'_{\mathrm{R}}$.

podemos despejar

$$u^\varepsilon = 0 \vee u^\varepsilon = 4\gamma^\varepsilon(x) - 2 = \frac{2x}{\varepsilon} \quad \text{para } -\varepsilon < x < \varepsilon.$$

En este caso existen dos soluciones:

$$u_1^\varepsilon(x) = \begin{cases} -2 & \text{para } x \leqslant -\varepsilon, \\ 0 & \text{para } -\varepsilon < x < \varepsilon, \\ 2 & \text{para } x \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

o alternativamente,

$$u_2^\varepsilon(x) = \begin{cases} -2 & \text{para } x \leqslant -\varepsilon, \\ 2x/\varepsilon & \text{para } -\varepsilon < x < \varepsilon, \\ 2 & \text{para } x \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Este ejemplo puede ser generalizado al siguiente caso. Supongamos que la aplicación $u \mapsto f(\gamma, u)$ posee una máximo global único para todo γ, y que

$$\lim_{u \to -\infty} f(\gamma, u) = -\infty, \quad \lim_{u \to \infty} f(\gamma, u) = -\infty.$$

Sean $u^\pm(\gamma, y)$ las dos soluciones de $y = f(\gamma, u^\pm)$ tales que $u^- \leqslant u^+$. Como antes, sea u^ε la solución estacionaria de (7.50), donde

$$y^\varepsilon(x) = \gamma_{\mathrm{L}} + \frac{x + \varepsilon}{2\varepsilon}(\gamma_{\mathrm{R}} - \gamma_{\mathrm{L}}), \quad x \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Entonces es posible hallar una solución débil u^ε si y sólo si

$$u^-\bigl(\gamma_{\mathrm{L}}, f(\gamma_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{L}})\bigr) = u'_{\mathrm{L}} \quad \text{o} \quad u^+\bigl(\gamma_{\mathrm{R}}, f(\gamma_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{R}})\bigr) = u'_{\mathrm{R}}. \tag{7.51}$$

Recordamos que siempre se supone que u'_{L} y u'_{R} satisfacen la condición de Rankine-Hugoniot, es decir

$$f(\gamma_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{L}}) = f(\gamma_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{R}}) =: f^{\times}.$$

Si ambas condiciones en (7.51) están satisfechas, entonces esta solución es dada por

$$u^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} u'_{\mathrm{L}} & \text{para } x < -\varepsilon, \\ u^{-}(\gamma^{\varepsilon}(x), f^{\times}) & \text{para } -\varepsilon \leqslant x \leqslant x_{\mathrm{J}}, \\ u^{+}(\gamma^{\varepsilon}(x), f^{\times}) & \text{para } x_{\mathrm{J}} < x \leqslant \varepsilon, \\ u'_{\mathrm{R}} & \text{para } x > \varepsilon \end{cases} \tag{7.52}$$

para cada $x_{\mathrm{J}} \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Como saltamos desde u^- a u^+, este salto es permitido ya que $u^- \leqslant u^+$ y $f(\gamma, u) > f^{\times}$ en el intervalo (u^-, u^+). Si sólo una de las condiciones en (7.51) está satisfecha, entonces permanecemos en u^+ o u^- en la totalidad del intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Si

$$u'_{\mathrm{L}} = u^{+}\bigl(\gamma_{\mathrm{L}}, f(\gamma_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{L}})\bigr) \quad \text{y} \quad u'_{\mathrm{R}} = u^{-}\bigl(\gamma_{\mathrm{R}}, f(\gamma_{\mathrm{R}}, u'_{\mathrm{R}})\bigr),$$

entonces en algín punto hay que saltar desde u^+ a u^-, y esto entrega una solución débil que viola la condición de entropía. Considerando las formas de los grafos de $f(\gamma_{\mathrm{L}}, u)$ y $f(\gamma_{\mathrm{R}}, u)$, notamos que (7.51) es equivalente con la condición de entropía del salto mínimo en este caso. Luego, si $(u'_{\mathrm{L}}, u'_{\mathrm{R}})$ satisface la condición de entropía del salto mínimo, entonces existen soluciones de entropía de (7.50) tales que u^{ε} tiende a la solución que satisface la condición de entropía del salto mínimo cuando $\varepsilon \to 0$ (si la función de flujo f tiene las propiedades indicadas arriba).

Comentamos que la ondición de entropía del salto mínimo no siempre es razonable. De hecho, las condiciones de entropía están basadas en información separada proveniente, por ejemplo, de la física o del sentido común. Para ilustrar esto, consideremos el problema

$$u_t + \left(\frac{1}{2}(u+\gamma)^2\right)_x = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad \gamma(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x < 0, \\ 1 & \text{para } x > 0. \end{cases} \tag{7.53}$$

En este caso,

$$h_{\mathrm{L}}(u;0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(u-1)^2 & \text{para } u \leqslant 1, \\ 0 & \text{para } u > 1, \end{cases} \quad h_{\mathrm{R}}(u;0) = \begin{cases} 0 & \text{para } u \leqslant -1, \\ \dfrac{1}{2}(u+1)^2 & \text{para } u > -1. \end{cases}$$

En este caso, existe un valor de intersección único $f^{\times} = 1/2$, y la condición de entropía del salto mínomo entrega la solución $u(x,t) = 0$.

También se podría tratar de resolver (7.53) mediante la sustitución $w = u + \gamma$, la cual convierte (7.53) en

$$w_t + \left(\frac{1}{2}w^2\right)_x = 0, \quad w(x,0) = \begin{cases} -1 & \text{para } x < 0, \\ 1 & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

La solución de entropía de este problema puede ser determinada por la construcción de la envoltura convexa inferior. En este caso, obtenemos

$$w(x,t) = \begin{cases} -1 & \text{para } x < -t, \\ x/t & \text{para } -t \leqslant x \leqslant t, \\ 1 & \text{para } x > t. \end{cases}$$

Como $u = w - \gamma$, obtenemos la solución alternativa

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } |x| > t, \\ x/t - \operatorname{sgn}(x) & \text{para } |x| \leqslant t. \end{cases} \tag{7.54}$$

¿Cuál de las soluciones hay que elegir? Ya vimos que la solución que satisface la condición de entropía del salto mínimo, $u = 0$, es el límite de aproximaciones viscosas u^ε que satisfacen

$$u_t^\varepsilon + \left(\frac{1}{2}(u^\varepsilon + \gamma)^2\right)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon. \tag{7.55}$$

Sabemos que a su vez, w es el límite de las aproximaciones viscosas que satisfacen

$$w_t^\varepsilon + \left(\frac{1}{2}(w^\varepsilon)^2\right)_x = \varepsilon w_{xx}^\varepsilon.$$

Esto significa que $\tilde{u}$ es el límite de $\tilde{u}^\varepsilon$ cuando $\varepsilon \to 0$, donde $\tilde{u}^\varepsilon$ y γ^ε satisfacen la aproximación viscosa del sistema (7.6), o sea,

$$\tilde{u}_t^\varepsilon + \left(\frac{1}{2}(\tilde{u}^\varepsilon + \gamma^\varepsilon)^2\right)_x = \varepsilon \tilde{u}_{xx}^\varepsilon, \quad \gamma_t^\varepsilon = \varepsilon \gamma_{xx}^\varepsilon. \tag{7.56}$$

De acuerdo a lo anterior, es razonable escoger $u = 0$ si (7.53) es una aproximación de (7.55), y $\tilde{u}$ si (7.53) es una aproximación de (7.56).

7.2. El problema de Cauchy

En este sub-capítulo demostraremos la existencia de una solución de entropía de la ley de conservación donde la función de flujo depende de un coeficiente discontinuo. Específicamente consideraremos el problema de valores iniciales

$$u_t + f(\gamma, u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.57}$$

donde $\gamma = \gamma(x)$ es una función de variación acotada. Sea $T > 0$ fijo y $\Pi_T := \mathbb{R} \times [0,T)$. Se entiende que una solución de (7.57) es una solución débil, es decir una función $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi_T) \cap C([0,T); L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$ tal que para toda función test $\varphi \in C_0^1(\Pi_T)$,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \big(u\varphi_t + f(\gamma,u)\varphi_x\big) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{7.58}$$

Para demostrar la existencia supondremos que f y γ tienen propiedades adicionales; por ejemplo, hay que asegurar que el problema de Riemann tenga una solución para todo dato inicial relevante.

Para demostrar la existencia de una solución la construiremos como límite de una sucesión de aproximaciones. Esto puede ser llevado a cabo utilizando aproximaciones por diferencias finitas, aproximaciones por *front tracking*, o considerando el límite de regularizaciones parabólicas. En el presente texto se utilizará el método del *front tracking*.

7.2.1. *Front tracking* para la ecuación modelo. Nos limitaremos en esta sub-sección a la ecuación modelo con $f(\gamma, u) = 4\gamma u(1-u)$, es decir

$$u_t + \big(4\gamma u(1-u)\big)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{7.59}$$

Se supone que $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada que es continuamente diferenciable sobre un conjunto finito de intervalos. En particular se supone que existe un número finito de de intervalos $I_m = (\xi_m, \xi_{m+1})$, $m = 0, 1, \dots, M$, donde $\xi_0 = -\infty$ y $\xi_{M+1} = \infty$, tales que

$$\gamma'|_{I_m} \text{ es continua y acotada para } m = 0, 1, \dots, M. \tag{7.60}$$

Por el momento suponemos también que la función inicial u_0 posee variación acotada y es tal que $u_0(x) \in [0,1]$ para todo x. Diseñaremos ahora un método *front tracking* para aproximar soluciones de (7.59).

Para demostrar la convergencia de las aproximaciones *front tracking* en el caso escalar utilizamos que la familia de aproximaciones $\{u^\delta\}_{\delta>0}$ es de variación uniformemente acotada. El Ejemplo 7.7 demostrará que tal cota no existe si $\gamma \not\equiv$ const. Para evitar esta complicación trabajaremos con la variable z definida por (7.41). El siguiente comentario ilustra que esto es una buena idea.

Comentario 7.1. *Sean u^ε y v^ε soluciones suaves de las ecuaciones regularizadas*

$$u_t^\varepsilon + f(\gamma, u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \quad v_t^\varepsilon + f(\gamma, v^\varepsilon)_x = \varepsilon v_{xx}^\varepsilon$$

con datos iniciales suaves u_0^ε y v_0^ε, respectivamente. Sea η una función convexa suave. Restando la segunda ecuación de la primera y multiplicando el resultado por $\eta'(u^\varepsilon - v^\varepsilon)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\eta(u^\varepsilon - v^\varepsilon)_t &= -\eta'(u^\varepsilon - v^\varepsilon)\big(f(\gamma, u^\varepsilon) - f(\gamma, v^\varepsilon)\big)_x + \varepsilon\eta(u^\varepsilon - v^\varepsilon)_{xx} \\
&\quad - \varepsilon\eta''(u^\varepsilon - v^\varepsilon)\big((u^\varepsilon - v^\varepsilon)_x\big)^2 \\
&\leqslant -\big(\eta'(u^\varepsilon - v^\varepsilon)(f(\gamma, u^\varepsilon) - f(\gamma, v^\varepsilon))\big)_x \\
&\quad + \varepsilon\eta(u^\varepsilon - v^\varepsilon)_{xx} + \big(\eta'(u^\varepsilon - v^\varepsilon)\big)_x\big(f(\gamma, u^\varepsilon) - f(\gamma, v^\varepsilon)\big).
\end{aligned}$$

Sea ahora $\eta = \eta_\varepsilon$ una aproximación continuamente diferenciable de $|\cdot|$; explícitamente,

$$\eta_\kappa(u) := \int_0^u \operatorname{máx}\big\{-1, \operatorname{mín}\{v/\kappa, 1\}\big\}\,\mathrm{d}v,$$

Suponiendo que $u^\varepsilon - v^\varepsilon$ posee soporte compacto en x, podemos integrar la desigualdad anterior sobre $x \in \mathbb{R}$ para obtener

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}} \eta_\kappa(u^\varepsilon - v^\varepsilon)\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \eta_\kappa''(u^\varepsilon - v^\varepsilon)\big(f(\gamma, u^\varepsilon) - f(\gamma, v^\varepsilon)\big)(u^\varepsilon - v^\varepsilon)_x\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant L\int_{|u^\varepsilon - v^\varepsilon| < \kappa} \big|(u^\varepsilon - v^\varepsilon)_x\big|\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

donde $L = \sup |f_u|$, *ya que*

$$\eta_\kappa''(u) = \begin{cases} 1/\kappa & \text{para } |u| \leqslant \kappa, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De acuerdo al Lema 7.4 (ver abajo),

$$\lim_{\kappa \to 0} \int_{|u^\varepsilon - v^\varepsilon| < \kappa} \left| (u^\varepsilon - v^\varepsilon)_x \right| \mathrm{d}x = 0,$$

luego podemos considerar el límite cuando $\kappa \to 0$ *para deducir que si* u^ε *y* v^ε *son dos soluciones de la ecuación regularizada, entonces*

$$\left\| u^\varepsilon(\cdot, t) - v^\varepsilon(\cdot, t) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|u_0^\varepsilon - v_0^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{7.61}$$

Poniendo $v^\varepsilon(\cdot, t) = u^\varepsilon(\cdot, t + \tau)$ *en* (7.61), *dividiendo por* τ *y dejando* $\tau \to 0$ *obtenemos*

$$\left\| u_t^\varepsilon(\cdot, t) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \left\| u_t^\varepsilon(\cdot, 0+) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} = \left| f(\gamma, u_0^\varepsilon) \right|_{BV}. \tag{7.62}$$

Sin pérdida de generalidad podemos construir u_0^ε *en tal forma que* $|f(\gamma, u_0^\varepsilon)|_{BV} \leqslant |f(\gamma, u_0)|_{BV}$. *Esto significa que la variación total de* $f(\gamma, u^\varepsilon)$ *es acotada en forma independiente de* ε, *es decir*

$$\left| f(\gamma, u^\varepsilon(\cdot, t)) \right|_{BV} \leqslant \left| f(\gamma, u_0) \right|_{BV}. \tag{7.63}$$

Si $f_u(\gamma, u) \geqslant c > 0$ *para todo* γ *y* u, *entonces* (7.63) *implicaría una cota uniforme de la variación total también de* u^ε. *(Dicha hipótesis excluye fenómenos de resonancia, es decir la coincidencia de los valores propios.) Para la función de flujo en nuestro ejemplo,* $f_u(\gamma, 1/2) = 0$, *luego no podemos deducir que* u^ε *posee variación acotada. Es precisamente en esta situación donde se aplica la aplicación* z. *Escribimos* (7.41) *como*

$$z(\gamma, u) = \operatorname{sgn}\left(u - \frac{1}{2}\right)\left(f(\gamma, u) - f\left(\gamma, \frac{1}{2}\right)\right),$$

luego

$$\left| z(\gamma, u^\varepsilon) \right|_{BV} \leqslant \left| f(\gamma, u^\varepsilon) \right|_{BV} + \|f_\gamma\|_{L^\infty} |\gamma|_{BV} \leqslant \left| f(\gamma, u_0) \right|_{BV} + \|f_\gamma\|_{L^\infty} |\gamma|_{BV}.$$

De acuerdo a lo anterior, $z^\varepsilon := z(\gamma, u^\varepsilon)$ *posee variación acotada, y la aplicación* $u \mapsto z(\gamma, u)$ *es continua e invertible. El paso siguiente de esta estrategia es tratar de demostrar que* $\{z^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ *es compacto en* $L^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, *luego (a lo largo de una subsucesión)* $z^\varepsilon \to \bar{z}$ *cuando* $\varepsilon \to 0$. *Enseguida definiremos*

$$u = z^{-1}(\gamma, \bar{z}) = \lim_{\varepsilon \to 0} z^{-1}(\gamma, z^\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon.$$

El paso final sera verificar que el límite u *es una solución débil. Esta estrategia ha sido aplicada, por ejemplo, en* [59].

Es la intención de este comentario ilustrar como la aplicación z *puede ser utilizada para demostrar existencia via regularizaciones viscosas, y de motivar su uso también para aproximaciones de* front tracking.

Lema 7.4. *Sea* $v : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *tal que* $v \in C^1(\mathbb{R}^m)$ *y* $|\nabla v| \in L^1(\mathbb{R}^m)$. *Entonces*

$$\int_{|v|\leqslant\eta} |\nabla v| \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \to 0 \quad \text{cuando } \eta \to 0.$$

Demostración. A raíz del Teorema de la Función Inversa, el conjunto

$$\bigl\{\boldsymbol{x} \mid v(\boldsymbol{x}) = 0,\ \nabla v(\boldsymbol{x}) \neq 0\bigr\}$$

es una variedad $(m-1)$-dimensional suave de $\mathbb{R}^m$, luego

$$\int_{|v|\leqslant\eta} |\nabla v| \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{0<|v|\leqslant\eta} |\nabla v| \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

El integrando (la norma del gradiente multiplicando la función característica de la región donnde $|v| \neq 0$ y $|v| \leqslant \eta$) tiende a cero puntualmente cuando $\eta \to 0$. El enunciado del lema sigue si utilizamos el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue. ■

Tal como en el caso sin coeficiente, empezamos el desarrollo del método *front tracking* por una discusión de una solución aproximada del problema de Riemann, o más bien de la solución exacta del problema de Riemann de una ecuación aproximada. En el caso escalar simple vimos que la solución exacta del problema de Riemann es constante a trozos en x/t si la función de flujo es lineal a trozos. Ahora se definirá una función de flujo aproximada g^δ tal que $g^\delta(\gamma, u) \approx 4\gamma u(1-u)$ y la solución del problema de Riemann con el flujo g^δ es constante a trozos.

A partir de la Sección 7.1 sabemos que la solución del problema de Riemann consiste en una sucesión de segmentos rectos en el plano (z,γ), donde

$$z(\gamma, u) = \operatorname{sgn}\left(u - \frac{1}{2}\right)\gamma(1-2u)^2. \tag{7.64}$$

Existen las z-ondas, a lo largo de las cuales γ es constante, y las γ-ondas a lo largo de las cuales γ no es constante. Sea ahora $\delta > 0$ un número pequeño, y sea ahora

$$\gamma_i = i\delta, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{7.65}$$

Para $j \in \mathbb{Z}$ tales que $-i \leqslant j \leqslant i$ definimos $z_{ij} = j\delta$ y

$$u_{ij} = z^{-1}(z_{ij}, \gamma_i) = \frac{1}{2}\Bigl(1 + \operatorname{sgn}(z_{ij})\sqrt{|z_{ij}|/\gamma_i}\Bigr). \tag{7.66}$$

Notamos que el conjunto $\{(z_{ij}, \gamma_i)\}$ define una malla en el plano (z,γ). Definimos g^δ como la interpolación lineal de f sobre esta malla, es decir

$$g^\delta(\gamma_i, u) = f_{ij} + (u - u_{ij})\frac{f_{i,j+1} - f_{ij}}{u_{i,j+1} - u_{ij}} \quad \text{para } u \in [u_{ij}, u_{i,j+1}], \tag{7.67}$$

donde $f_{ij} = f(\gamma_i, u_{ij}) = 4\gamma_i u_{ij}(1-u_{ij})$. Para cada i fijo, $g^\delta(\gamma_i, u)$ será una función concava con su máximo en $u = 1/2$, luego la solución del problema de Riemann

$$\begin{aligned} &u_t + g^\delta\bigl(\gamma(x), u\bigr)_x = 0, \\ &u(x,0) = \begin{cases} u_{ij} & \text{para } x < 0, \\ u_{mn} & \text{para } x > 0, \end{cases} \quad \gamma(x) = \begin{cases} \gamma_i & \text{para } x < 0, \\ \gamma_m & \text{para } x > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{7.68}$$

puede ser determinada a partir de los diagramas de la Figura 7.5. Además, como g^δ es lineal a trozos en u, esta solución será constante a trozos en x/t. Además, debido a nuestra elección de los puntos de interpolación al construir g^δ, *todos* los valores intermedios de $u(x,t)$ serán puntos de malla, es decir

$$z\big(\gamma(x), u(x,t)\big) = (z_{i',j'}, \gamma_{i'}), \quad \text{donde } i' = i \text{ o } i' = m.$$

Se denotará por $\mathcal{U}^\delta$ el conjunto de los puntos de malla en el plano (u,γ) o cuando no hay confusión, en el plano (z,γ), luego la solución del problema de Riemann asume valores puntuales en $\mathcal{U}^\delta$ si los estados "iniciales" $(u(x,0),\gamma(x))$ asumen valores en $\mathcal{U}^\delta$.

Una vez que podamos resolver el problema de Riemann (7.68), podemos utilizar esta información para diseñar un método *front tracking*. Para tal efecto sean $\{u_0^\delta\}_{\delta>0}$ y $\{\gamma^\delta\}_{\delta>0}$ dos sucesiones de funciones constantes a trozos tales que

$$\big(u_0^\delta(x), \gamma^\delta(x)\big) \in \mathcal{U}^\delta \quad \text{para todos los valores de } x\text{, exceptuando un conjunto finito.}$$

Exigimos, además, que

$$\lim_{\delta\to 0} \|u_0^\delta - u_0\|_1 = 0, \tag{7.69}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \|\gamma^\delta - \gamma\|_1 = 0. \tag{7.70}$$

Denotaremos los puntos de discontinuidad de γ^δ por $y_1 < y_2 < \ldots < y_N$. Por supuesto estos valores dependen de δ, pero suprimiremos esta dependencia en la notación. En cada punto de discontinuidad o de u_0^δ, o de γ^δ, se plantea un problema de Riemann cuya solución da origen a una sucesión de z-ondas y de γ-ondas. Se define la aproximación por *front tracking* tal como en el caso escalar, es decir rastreamos las discontinuidades, llamadas *frentes*, y resolvemos los problemas de Riemann (utilizando el flujo g^δ) definidos por sus colisiones. La solución resultante constante a trozos será llamada u^δ. Tal como en el caso escalar, para demostrar que podemos definir $u^\delta(\cdot,t)$ para cada $t>0$, hay que estudiar la interacción de frentes.

La solución generada por *front tracking* u^δ posee dos tipos de frentes, z-frentes y γ-frentes, donde los z-frentes son aquellos para los cuales los valores de γ a izquierda y a derecha son iguales. Con respecto a la colisión de dos o más z-frentes ya vimos que tal colisión siempre resulta en un z-frente *único*. Concluimos que el número de frentes en u^δ disminuye tras la colisión de z-frentes.

Observamos, además, que los γ-frentes poseen velocidad cero (donde recordamos que éstas son las discontinuidades de γ^δ), por lo tanto dos γ-frentes nunca colisionan. Entonces queda por analizar colisiones entre z-frentes y γ-frentes. Esto resultará complicado, y ejemplos simples muestran que existen colisiones de este tipo que resultan en *tres* frentes salientes. Además, incluso cuando tales colisiones resultan en sólo dos frentes salientes, en general no es posible acotar la variación total de u^δ en forma independiente de δ, tal como ilustra el siguiente ejemplo.

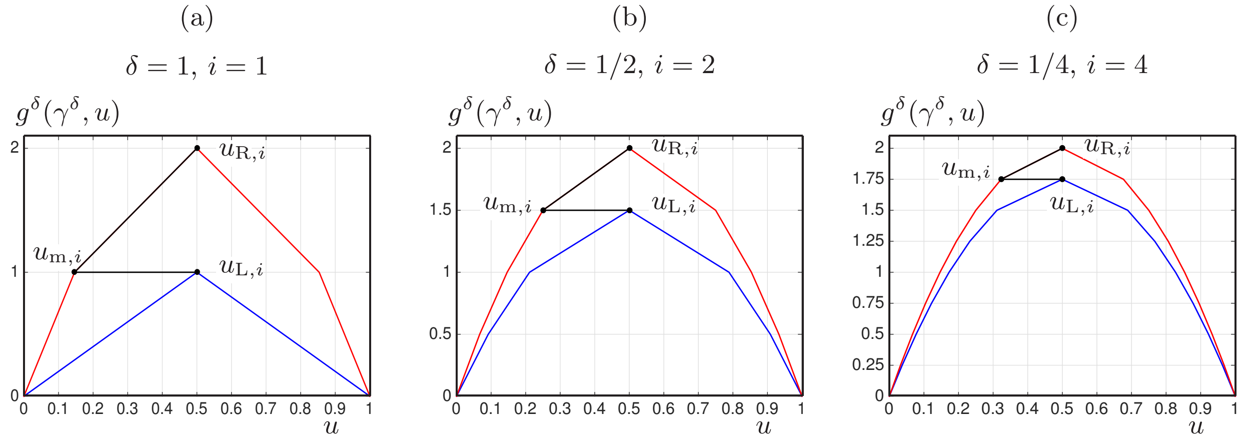


FIGURA 7.7. Ejemplo 7.7: solución del problema de Riemann (RP$_i$) para varios valores de δ. El valor de i corresponde, en cada caso, al problema de Riemann en $x = i\delta = 1$. De acuerdo a (7.73), para este valor de i, $u_{\mathrm{m},i} = 1/2 - \sqrt{\delta/8}$, lo que entrega (a) $u_{\mathrm{m},i} = 1/2 - \sqrt{1/8} \approx 0{,}1464$, (b) $u_{\mathrm{m},i} = 1/2 - \sqrt{1/16} = 0{,}25$, (c) $u_{\mathrm{m},i} = 1/2 - \sqrt{1/32} \approx 0{,}3232$.

Ejemplo 7.7. *Supongamos por el momento que*

$$u_0(x) = \frac{1}{2}, \quad \gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leqslant 0, \\ 1 + x & \text{para } 0 < x \leqslant 2, \\ 3 & \text{para } x > 2. \end{cases} \tag{7.71}$$

En este caso $z(\gamma(x), u_0(x)) = 0$, *y podemos definir*

$$\gamma^\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leqslant 0, \\ 1 + i\delta & \text{para } i\delta < x \leqslant (i+1)\delta, \quad i = 0, 1, \dots, \dfrac{2}{\delta} - 1, \\ 3 & \text{para } x > 2. \end{cases}$$

Notar que esta aproximación plantea en $t = 0$ *los siguientes problemas de Riemann:*

$$\bigl(u(x,0), \gamma^\delta(x)\bigr) = \begin{cases} (u_{\mathrm{L},i} = 1/2, \gamma_{\mathrm{L},i} = 1 + (i-1)\delta) & \text{para } x < i\delta, \\ (u_{\mathrm{R},i} = 1/2, \gamma_{\mathrm{R},i} = 1 + i\delta) & \text{para } x > i\delta, \end{cases} \quad i = 1, \dots, \frac{2}{\delta}. \tag{RP$_i$}$$

La Figura 7.7 ilustra para cada uno de los casos $\delta = 1$, $\delta = 1/2$ *y* $\delta = 1/4$ *el problema de Riemann en* $x = \delta i = 1$ *(lo que identifica el valor de* i *en cada caso). Los problemas de Riemann para los demás valores de* i *son similares. En cada caso la solución es similar a la Figura 7.4 (d) e incluye un estado intermedio* u_{i} *tal que cerca de* $x = i\delta$ *y para* t *suficientemente pequeño,*

$$u(x,t) = \begin{cases} u_{\mathrm{L,i}} & \text{para } x < i\delta, \\ u_{\mathrm{m,i}} & \text{para } i\delta \leqslant x < ts_i + i\delta, \\ u_{\mathrm{R,i}} & \text{para } x \geqslant i\delta + ts_i, \end{cases} \tag{7.72}$$

donde el estado intermedio $u_{\mathrm{m,i}}$ *satisface* $z(\gamma_{\mathrm{R},i}, u_{\mathrm{m},i}) = -\delta$, *luego en virtud de* (7.66),

$$u_{\mathrm{m},i} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\delta}{\gamma_{\mathrm{R},i}}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\delta}{1+i\delta}}\right), \tag{7.73}$$

y s_i *es la velocidad de propagación del frente (precisamente, z-frente) que separa los estados* $u_{\mathrm{m,i}}$ *y* $u_{\mathrm{R,i}}$. *Precisamente,*

$$s_i = \frac{g^\delta(\gamma_{\mathrm{R},i}, u_{\mathrm{R},i}) - g^\delta(\gamma_{\mathrm{R},i}, u_{\mathrm{m},i})}{u_{\mathrm{R},i} - u_{\mathrm{m},i}} = \frac{\delta}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\delta}{1+i\delta}}\right)} = 2\sqrt{\delta(1+i\delta)}.$$

La solución (7.72), (7.73) *de cada uno de los problemas de Riemann definidos por* $(u_0^\delta, \gamma^\delta)$ *en* $x = i\delta$, $i = 1, \dots, 2/\delta$, *es*

$$(z,\gamma) = \begin{cases} (0, 1 + (i-1)\delta) & \text{para } x < i\delta, \\ (-\delta, 1 + i\delta) & \text{para } i\delta \leqslant x < ts_i + i\delta, \\ (0, 1+i\delta) & \text{para } x \geqslant i\delta + ts_i. \end{cases}$$

Esto es una consecuencia del diagrama de la Figura 7.5. Entonces, antes de la interacción de cualquier frente, la variación total de u^δ *es*

$$\begin{aligned} |u^\delta|_{BV} &= \sum_{i=1}^{2/\delta} \big(|u_{\mathrm{L},i} - u_{\mathrm{m},i}| + |u_{\mathrm{m},i} - u_{\mathrm{R},i}|\big) = 2\sum_{i=1}^{2/\delta} \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\delta}{1+i\delta}}\right)\right| \\ &= \sum_{i=1}^{2/\delta} \sqrt{\frac{\delta}{1+i\delta}} \geqslant \sum_{i=1}^{2/\delta} \sqrt{\frac{\delta}{3}} = \frac{2}{\delta}\sqrt{\frac{\delta}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3\delta}} \to \infty \quad \text{cuando } \delta \to 0. \end{aligned}$$

No obstante, como $\gamma(x)$ *es Lipschitz continua, la variación total de la solución exacta de este problema es uniformemente acotada para* $t < T$ *para cada tiempo* T *finito, ver por ejemplo* [56, 62]. *Como indicación del análisis que emprenderemos ahora, observamos que*

$$|z^\delta|_{BV} = \sum_{i=1}^{2/\delta} |\delta| = 2, \quad \text{donde } z^\delta = z(\gamma^\delta, u^\delta).$$

Es decir, la variación total de la variable transformada z *es uniformemente acotada para este ejemplo, por lo menos hasta la primera interacción.*

Por los motivos detallados aquí y en el Comentario 7.1, trabajaremos con la variable z en lugar de u. En el Ejemplo 7.7 era trivial demostrar que la variación de z era acotada en forma independiente de δ, pero esto puede ser más complicado en general, por lo tanto se utiliza el *funcional de Temple*, utilizado (en forma similar) por primera vez en en [96]. Para un frente simple, denotado por $\mathcal{F}$, se define

$$T(\mathcal{F}) = \begin{cases} |\Delta z| & \text{si } \mathcal{F} \text{ es un } z\text{-frente}, \\ 4|\Delta z| & \text{si } \mathcal{F} \text{ es un } \gamma\text{-frente y } z_{\mathrm{L}} < z_{\mathrm{R}}, \\ 2|\Delta z| & \text{si } \mathcal{F} \text{ es un } \gamma\text{-frente y } z_{\mathrm{L}} > z_{\mathrm{R}}, \end{cases} \tag{7.74}$$

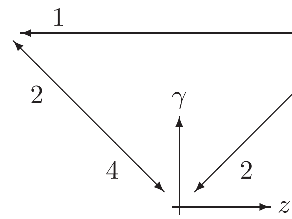


FIGURA 7.8. Los pesos en la definición del funcional de Temple (7.74).

donde z_{L} es el valor de z a la izquierda del frente y z_{R} el valor de z a la derecha, y $\Delta z := z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}}$. La Figura 7.8 ilustra los pesos asignados a $|\Delta z|$ en los diversos casos.

Recordamos también que si $\mathcal{F}$ es un γ-frente, entonces

$$|\Delta z| = |\Delta \gamma|,$$

luego una definición alternativa de T es

$$T(\mathcal{F}) = \begin{cases} |\Delta z| & \text{si } \mathcal{F} \text{ es un } z\text{-frente,} \\ 4|\Delta\gamma| & \text{si } \mathcal{F} \text{ es un } \gamma\text{-frente y } z_{\mathrm{L}} < z_{\mathrm{R}}, \\ 2|\Delta\gamma| & \text{si } \mathcal{F} \text{ es un } \gamma\text{-frente y } z_{\mathrm{L}} > z_{\mathrm{R}}. \end{cases}$$

Para una sucesión de frentes se define T en forma aditiva, y utilizando un leve abuso de notación podemos escribir

$$T(u^\delta) = \sum_{\mathcal{F} \in u^\delta} T(\mathcal{F}).$$

En virtud de esta definición de T tenemos las desigualdades obvias

$$|z^\delta|_{BV} \leqslant T(u^\delta) \leqslant 4\big(|z^\delta|_{BV} + |\gamma^\delta|_{BV}\big). \tag{7.75}$$

También sabemos que

$$T(\mathcal{F}) \geqslant \delta \quad \text{para todo } \mathcal{F} \in u^\delta.$$

Abusando la notación una vez más, escribiremos $T(t) = T(u^\delta(\cdot, t))$.

Lema 7.5. *Si $0 < s < t$, entonces*

$$T(t) \leqslant T(s), \tag{7.76}$$

por lo tanto $|z^\delta(\cdot, t)|_{BV} \leqslant T(0+)$.

Demostración. El valor de T cambia solamente a través de colisiones de frentes. A partir del análisis de colisiones de z-frentes (ver Lema 3.4 en la Sección 3.3 del Capítulo 3) sabemos que T no incrementa a través de colisiones de este tipo. Entonces, para demostrar el Lema 7.5 queda por estudiar colisiones entre z-frentes y γ-frentes. Se dice que un γ-frente es *no positivo* si conecta puntos en el semiplano $z \leqslant 0$, y que es *no negativo* si conecta puntos en el semiplano $z \geqslant 0$.

Estudiaremos la colisión entre z-frentes y un γ-frente, es decir tenemos tres puntos en el plano (z, γ), a saber: $(z_{\mathrm{L}}, \gamma_{\mathrm{L}})$, $(z_{\mathrm{m}}, \gamma_{\mathrm{m}})$, y $(z_{\mathrm{R}}, \gamma_{\mathrm{R}})$, localizados a la izquierda de, entre, y a la derecha de los frentes que colisionan, respectivamente. Si más de un z-frente colisiona

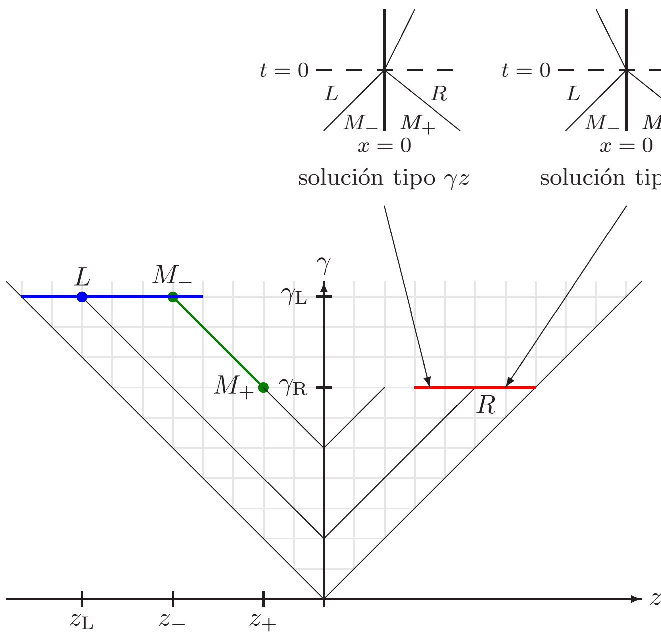


FIGURA 7.9. Demostración del Lema 7.5. Caso 1: γ-frente no positivo y $\gamma_{\mathrm{L}} > \gamma_{\mathrm{R}}$. Aquí y en las Figuras 7.10, 7.11 y 7.12 se muestran las ubicaciones posibles de L y R, ya malla de líneas gris finas es la malla $\{(z_{ij}, \gamma_i)\}$, $\gamma_i = i\delta$ y $z_{ij} = j\delta$, $j = -i, \dots, i$.

con el γ-frente podemos reducir la situación a la de la colisión de dos frentes como sigue. Si varios z-frentes colisionan con el γ-frente desde el mismo lado, entonces podemos resolver la colisión entre los z-frentes primeramente y luego tratar la colisión entre el z-frente (único) resultante y el γ-frente. Por lo tanto, consideremos el caso de dos z-frentes que colisionan con un γ-frente donde un z-frente colisiona desde la izquierda y el otro desde la derecha. Etiquetamos el estado a la izquierda del z-frente a la izquierda por $L = (z_{\mathrm{L}}, \gamma_{\mathrm{L}})$, el estado a la izquierda del γ-frente por $M_- = (z_-, \gamma_{\mathrm{L}})$, el estado a la izquierda del z-frente a la derecha por $M_+ = (z_+, \gamma_{\mathrm{R}})$, y finalmente el estado a la derecha de este último z-frente por $R = (z_{\mathrm{R}}, \gamma_{\mathrm{R}})$. Por supuesto puede suceder que $z_{\mathrm{L}} = z_-$ o $z_+ = z_{\mathrm{R}}$, casos en los cuales solamente dos frentes colisionan. Para estudiar como T cambia a través de esta colisión estudiaremos un número de casos. Estos se distinguen dependiendo de si el γ-frente está localizado en el semi-espacio a la izquierda (entonces se llama *no positivo*) o a la derecha (en tal caso se llama *no negativo*), además si $\gamma_{\mathrm{L}} < \gamma_{\mathrm{R}}$.

1.) Caso 1: el γ-frente es no positivo y $\gamma_{\mathrm{L}} > \gamma_{\mathrm{R}}$. (Ver Figura 7.9.) Consideremos el z-frente, y luego M_- y M_+, fijos. Como el γ-frente es ngeativo, $z_+ \leqslant 0$, y como $\gamma_{\mathrm{L}} > \gamma_{\mathrm{R}}$, $z_- \leqslant -\delta$. El z-frente entre z_{L} y z_- se mueve con velocidad positiva, y es la solución del problema de Riemann definido por estos dos estados con una función de flujo $f^\delta(\gamma_{\mathrm{L}}, \cdot)$. Luego z_{L} no puede ser mayor que "una punta hacia la derecha" de z_-. Si fuera mayor, entonces la solución contendría más de un frente. Además, $u_{\mathrm{L}} = z^{-1}(\gamma_{\mathrm{L}}, z_{\mathrm{L}}) \geqslant 0$, lo

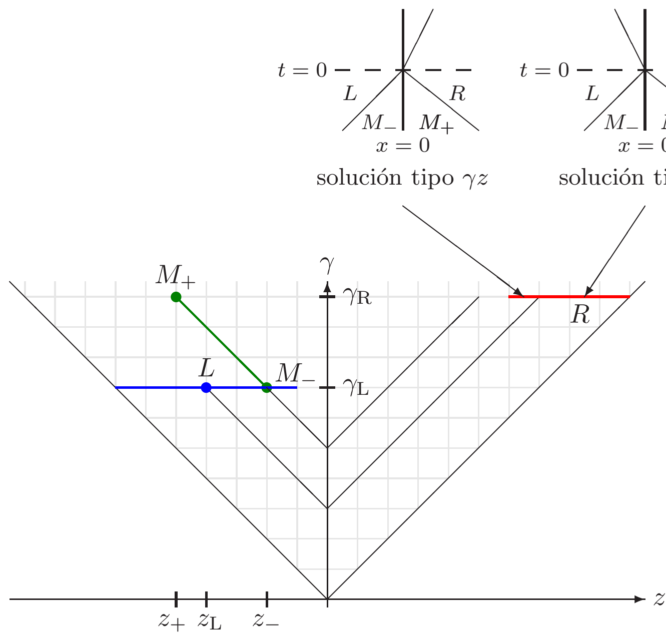


Figura 7.10. Demostración del Lema 7.5. Caso 2: γ-frente no positivo y $\gamma_{\mathrm{L}} < \gamma_{\mathrm{R}}$.

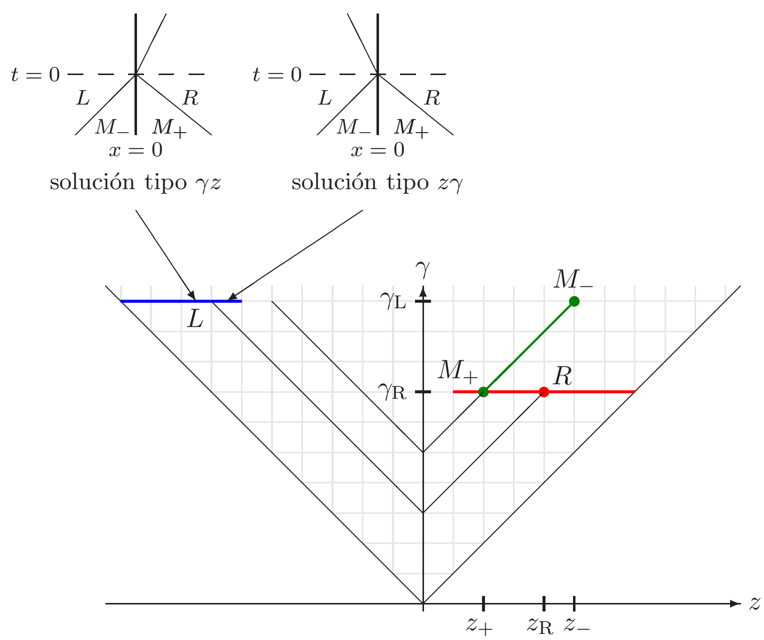


Figura 7.11. Demostración del Lema 7.5. Caso 3: γ-frente no negativo y $\gamma_{\mathrm{L}} > \gamma_{\mathrm{R}}$.

que es lo mismo que $z_{\mathrm{L}} \geqslant -\gamma_{\mathrm{L}}$. Luego

$$z_{\mathrm{L}} \in [-\gamma_{\mathrm{L}}, z_- + \delta].$$

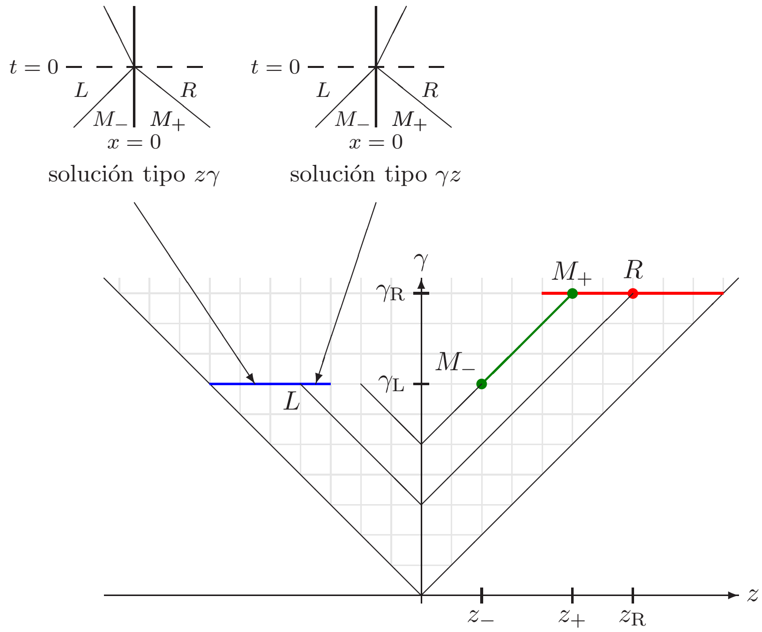


Figura 7.12. Demostración del Lema 7.5. Caso 4: γ-frente no negativo y $\gamma_{\mathrm{L}} < \gamma_{\mathrm{R}}$.

Este intervalo es indicado por la linea horizontal azul en la Figura 7.9. Análogamente, obtenemos que el z-frente a derecha debe tener velocidad negativa, por lo tanto

$$z_{\mathrm{R}} \in \{z_+\} \cup [-z_+ + \delta, \gamma_{\mathrm{R}}].$$

Este intervalo es indicado por la línea horizontal roja en la Figura 7.9. Hay dos alternativas. Si $-z_{\mathrm{L}} + \gamma_{\mathrm{L}} \geqslant z_{\mathrm{R}} + \gamma_{\mathrm{R}}$, entonces la solución del problema de Riemann definido por $(z_{\mathrm{L}}, \gamma_{\mathrm{L}})$ y $(z_{\mathrm{R}}, \gamma_{\mathrm{R}})$ es del tipo γz, y si $-z_{\mathrm{L}} + \gamma_{\mathrm{L}} < z_{\mathrm{R}} + \gamma_{\mathrm{R}}$, la solución de este problema de Riemann es del tipo $z\gamma$. Esto es indicado en la Figura 7.9, donde la línea sólida negra que pasa por L es aquella donde $|z| + \gamma = -z_{\mathrm{L}} + \gamma_{\mathrm{L}}$.

Si $z_{\mathrm{L}} = z_-$, es decir la colisión es entre un γ-frente y un z-frente desde la derecha, entonces la solución siempre es del tipo $z\gamma$. En otras palabras, la onda es transmitida. Con respecto a la Figura 7.8 observamos que si $z_{\mathrm{L}} \leqslant z_-$, entonces T no cambia a través de la colisión. Si $z_{\mathrm{L}} = z_- + \delta$ (lo que es el valor máximo de z_{L}), y el tipo de solución es $z\gamma$, entonces T disminuye en 2δ. En los demás casos T no cambia. En el caso especial $z_{\mathrm{R}} = z_- = 0$ y $z{-}_{\mathrm{L}} = z_- + \delta$ el z-frente es reflejado. Luego veremos que una reflexión resulta en una disminución de T en 2δ (hay que verificar esto; tarea).

2.) Caso 2: el γ-frente es no positivo y $\gamma_{\mathrm{L}} < \gamma_{\mathrm{R}}$ (ver Figura 7.10). Como los frentes colisionan, la velocidad del z-frente a la izquierda es positiva y la velocidad del z-frente a la derecha es negativa. Luego $z_{\mathrm{L}} \in [-\gamma_{\mathrm{L}}, z_- + \delta]$ y $z_{\mathrm{R}} \in \{z_+\} \cup [-z_+ + \delta, \gamma_{\mathrm{R}}]$. Estos intervalos son indicados en la Figura 7.10 por las líneas azul y roja, respectivamente. Si $z_{\mathrm{R}} + \gamma_{\mathrm{R}} < -z_{\mathrm{L}} + \gamma_{\mathrm{L}}$, entonces la solución es del tipo $z\gamma$, y si $z_{\mathrm{R}} + \gamma_{\mathrm{R}} \geqslant -z_{\mathrm{L}} + \gamma_{\mathrm{L}}$, del tipo γz. En ambos casos T no cambia. Si $z_{\mathrm{R}} = z_+$, entonces la solución es del tipo γz, y si $z_{\mathrm{L}} = z_-$, la solución es del tipo $z\gamma$. En este caso no hay frentes reflejados.

3.) Caso 3: el γ-frente es no negativo y $\gamma_{\mathrm{L}} > \gamma_{\mathrm{R}}$ (ver Figura 7.11). Este caso es similar al Caso 2. Considerando las velocidades de los frentes que colisionan, obtenemos

$$z_{\mathrm{L}} \in [-z_- - \delta, -\gamma_{\mathrm{L}}] \cup \{z_-\} \quad \text{y} \quad z_{\mathrm{R}} \in [z_+ - \delta, \gamma_{\mathrm{R}}].$$

Si $|z_{\mathrm{L}}| + \gamma_{\mathrm{L}} < z_{\mathrm{R}} + \gamma_{\mathrm{R}}$, entonces la solución es del tipo γz, y si $|z_{\mathrm{L}}| + \gamma_{\mathrm{L}} \geqslant z_{\mathrm{R}} + \gamma_{\mathrm{R}}$, entonces la solución es del tipo $z\gamma$. Si $z_{\mathrm{R}} = z_+$, la solución es del tipo γz, mientras que si $z_{\mathrm{L}} = z_-$, la solución es del tipo $z\gamma$. Es decir, en este caso un frente no puede ser reflejado. Además, T no cambia.

4.) Caso 4: el γ-frente es no negativo y $\gamma_{\mathrm{L}} < \gamma_{\mathrm{R}}$ (ver Figura 7.12). Este caso es similar al Caso 1. Obtenemos

$$z_{\mathrm{L}} \in [-z_- - \delta, -\gamma_{\mathrm{L}}] \cup \{z_-\} \quad \text{y} \quad z_{\mathrm{R}} \in [z_+ - \delta, \gamma_{\mathrm{R}}].$$

Si $|z_{\mathrm{L}}| + \gamma_{\mathrm{L}} > z_{\mathrm{R}} + \gamma_{\mathrm{R}}$, entonces la solución es del tipo $z\gamma$, y si $|z_{\mathrm{L}}| + \gamma_{\mathrm{L}} \leqslant z_{\mathrm{R}} + \gamma_{\mathrm{R}}$, entonces la solución es del tipo γz. Si $z_{\mathrm{R}} = z_+ - \delta$ y la solución es del tipo γz, entonces T disminuye en 2δ; en caso contrario T no cambia. Si $z_+ = z_{\mathrm{R}}$, entonces la solución es del tipo $z\gamma$, mientras que si $z_L = z_-$ y $z_{\mathrm{R}} = z_+ - \delta$, ocurre una reflexión y T disminuye en 2δ.

Esto concluye la demostración del Lema 7.5. ■

Comentario 7.2. *Se ha utilizado el término "reflexión" para una colisión entre un z-frente y un γ-frente si el z-frente colisiona desde la izquierda y la solución del problema de Riemann es del tipo $z\gamma$, o si el z-frente colisiona desde la derecha y el tipo de solución es γz. A partir de la demostración del Lema 7.5 queda claro que en cualquier caso donde tenemos una reflexión, T disminuye en 2δ. Luego, si $T(0+)$ es finito, podemos tener sólo un número finito de reflexiones en u^δ.*

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Lema 7.5 y de (7.75).

Corolario 7.1. *Si*

$$|\gamma^\delta|_{BV} \leqslant |\gamma|_{BV} \quad \text{y} \quad \big|z(u_0^\delta, \gamma^\delta)\big|_{BV} \leqslant \big|z(u_0, \gamma)\big|_{BV}, \tag{7.77}$$

entonces para $t \geqslant 0$,

$$\big|z^\delta(\cdot, t)\big|_{BV} \leqslant \big|z(u_0, \gamma)\big|_{BV} + 4|\gamma|_{BV},$$

luego $|z^\delta(\cdot, t)|_{BV}$ es acotado independientemente de δ y t.

El Corolario 7.1 por sí sólo no implica que la construcción del *front tracking* u^δ pueda ser definida hasta un tiempo t arbitrario. Para demostrar esto hay que seguir haciendo más análisis. Para un z-frente $\mathcal{F}_z$ sera $\mathcal{A}(\mathcal{F}_z)$ el conjunto de los γ-frentes $\mathcal{F}_\gamma$ que aproximan $\mathcal{F}_z$, es decir

$$\mathcal{F}_\gamma \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_z) \quad \text{si} \quad \begin{cases} x(\mathcal{F}_z) < x(\mathcal{F}_\gamma) \text{ y } s(\mathcal{F}_z) \geqslant 0 & \text{o} \\ x(\mathcal{F}_z) > x(\mathcal{F}_\gamma) \text{ y } s(\mathcal{F}_z) \leqslant 0, \end{cases}$$

donde $x(\mathcal{F})$ denota la posición de $\mathcal{F}$ y $s(\mathcal{F})$ denota su velocidad. Para cada z-frente $\mathcal{F}_z$ definimos

$$J(\mathcal{F}_z) = \sum_{\mathcal{F}_\gamma \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_z)} |\Delta\gamma|, \tag{7.78}$$

donde $\Delta\gamma$ denota la diferencia en γ a través del frente.

Lema 7.6. *Supongamos que* (7.77) *es válido. Entonces para cada* δ *fijo, el funcional*

$$F(t) := \delta \sum_{\mathcal{F}_z} J(\mathcal{F}_z) + T(t)|\gamma|_{BV} \tag{7.79}$$

es no creciente, y decrece por lo menos en δ^2 *cuando un* z*-frente colisiona con un* γ*-frente.*

Demostración. Sea $N_{\mathcal{F}}(t)$ el número de frentes en u^δ en el instante t. Para cada frente se tiene $|\Delta z| \geqslant \delta$, luego

$$N_{\mathcal{F}} \leqslant |z^\delta|_{BV}/\delta.$$

Recordemos que T es acotado y $J(\mathcal{F}_z) \leqslant |\gamma|_{BV}$, luego

$$F(t) \leqslant \delta|\gamma|_{BV} N_{\mathcal{F}} + 2T(0+)|\gamma|_{BV} \leqslant 4|\gamma|_{BV}\bigl(|z(u_0), \gamma)|_{BV} + 4|\gamma|_{BV}\bigr). \tag{7.80}$$

Concluimos que F es acotado independientemente de δ y t. Hay que demostrar que F decrece por lo menos en δ^2 para colisiones entre z-frentes y γ-frentes, y es no creciente cuando colisionan z-frentes.

Consideremos primero una colisión entre un z-frente (o dos z-frentes) y un γ-frente. A partir de la demostración del Lema 7.5 vimos que o (a) un z-frente “pasa por” un γ-frente a través de la colisión, o (b) ocurre una reflexión, y T disminuye en 2δ. Si (a) es válido, entonces la suma en (7.79) “pierde” por lo menos un término (dos términos si un z-frente es perdido a través de la colisión) del tamaño $\Delta\gamma$, y el segundo término en (7.79) no aumenta. Luego F disminuye en por lo menos $\delta|\Delta\gamma| \geqslant \delta^2$. Si (b) es válido, entonces T disminuye en 2δ, y la suma incrementa en a lo más $|\gamma|_{BV}$. Luego F disminuye por lo menos en $\delta|\gamma|_{BV} \geqslant \delta^2$.

Luego consideremos una colisión entre dos (o más) z-frentes. Recordamos que esta colisión resultará en un z-frente. Si colisionan más de dos frentes, podemos considerar tal situación como dos frentes colisionando en el mismo punto. Por lo tanto consideramos una colisión entre dos z-frentes, $\mathcal{F}_{\mathrm{L}}$ y $\mathcal{F}_{\mathrm{R}}$, separando valores z_{L}, z_{m} y z_{R}. Etiquetamos el frente que resulta como $\mathcal{F}$. Si z_{m} está entre z_{L} y z_{R}, entonces T no cambia a través de esta colisión. Sin embargo, la velocidad de $\mathcal{F}$ está entre las velocidades de $\mathcal{F}_{\mathrm{L}}$ y $\mathcal{F}_{\mathrm{R}}$. Si la velocidad de $\mathcal{F}$ es diferente de cero, entonces $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}(\mathcal{F}_{\mathrm{L}})$ o $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}(\mathcal{F}_{\mathrm{R}})$. Luego la suma en (7.79) pierde un término, y F disminuye en por lo menos δ^2. Si la velocidad de $\mathcal{F}$ es cero, entonces la velocidad de $\mathcal{F}_{\mathrm{L}}$ es positiva, y la velocidad de $\mathcal{F}_{\mathrm{R}}$ es negativa, por lo tanto

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}(\mathcal{F}_{\mathrm{L}}) \cup \mathcal{A}(\mathcal{F}_{\mathrm{R}}),$$

luego F es constante.

Si z_{m} no está entre z_{L} y z_{R}, entonces o $z_{\mathrm{R}} = z_{\mathrm{m}} - \delta$ o $z_{\mathrm{L}} = z_{\mathrm{m}} + \delta$. Esto es así porque g^δ es convexa. En este caso T disminuye por lo menos en δ, y el primer término en (7.79) incrementa en a lo más $\delta|\gamma^\delta|_{BV}$. Esto concluye la demostración del lema. ∎

Notamos que como consecuencia inmediata de (7.80) y del Lema 7.6, para δ fijo el número de colisiones de z-frentes y de γ-frentes es acotado por

$$4|\gamma|_{BV} \frac{|z(u_0, \gamma)|_{BV} + 4|\gamma|_{BV}}{\delta^2}.$$

Además, el menor valor absoluto posible de la velocidad de cualquier z-frente diferente de cero posee la cota inferior $(\text{mín}(\gamma^\delta)\delta)^{1/2}$, luego después de un tiempo T_1 *finito*, colisiones entre z-frentes y γ-frentes ya no pueden ocurrir. Esto significa que debe existir un tiempo $T_2 \geqslant T_1$ tal que todos los z-frentes en el intervalo (y_1, y_N) poseen velocidad cero, todos los z-frentes a la izquierda de y_1 poseen velocidad no positiva y todos los z-frentes a la derecha de y_N poseen velocidad no negativa para todo $t > T_2$. Fuera del intervalo $[y_1, y_N]$ la función u^δ es la aproximación de *front tracking* de una ley de conservación con coeficiente constante, y allí sólo puede haber un número finito de colisiones de frentes de u^δ. Luego concluimos que existe un tiempo $T_3 \geqslant T_2$ tal que ya no habrá más colisiones en u^δ cuando $t > T_3$. Por lo tanto, el método *front tracking*, también en el presente contexto, es híper-rápido (*hyperfast*).

Ejemplo 7.8. *Deseamos hallar la aproximación por* front tracking *del problema de valores iniciales*

$$\begin{aligned} &u_t + \bigl(4\gamma(x)u(1-u)\bigr)_x = 0, \quad \gamma(x) = \begin{cases} \exp(|x|) & \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sin(\pi x^2) + 2 & \text{para } 1 < |x| < 2, \\ 1 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \\ &u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\bigl(1 + \exp(-|x|)\bigr) & \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{aligned} \tag{7.81}$$

La Figura 7.13 (a) muestra la aproximación γ^δ, y la Figura 7.13 (b), la solución $u^\delta(\cdot, 3)$ para $\delta = 0{,}05$. La Figura 7.13 (c) muestra los frentes de u^δ en el plano (x,t). Aquí los z-frentes son trazados por líneas sólidas y los γ-frentes por líneas discontinuas. Observamos que el número de frentes decrece rápidamente, y que al parecer ya no hay muchas colisiones después de $t = 3$.

Volviendo ahora al caso más general, podemos demostrar el siguiente lema.

Lema 7.7. *Sea $\{z^\delta\}_{\delta>0}$ la sucesión generada por* front tracking *aplicado al problema modelo $u_t + (4\gamma u(1-u))_x = 0$. Esta sucesión satisface las siguientes cotas uniformes, donde la constante C no depende de t o δ y $t > s$:*

$$\|z^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \|\gamma^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant C, \tag{7.82}$$

$$\bigl\|z^\delta(\cdot,t)\bigr\|_{L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})} \leqslant C, \quad \text{donde } t < T, \tag{7.83}$$

$$\bigl\|z^\delta(\cdot,t) - z^\delta(\cdot,s)\bigr\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant C(t-s). \tag{7.84}$$

Demostración. La primera cota (7.82) sigue a partir de la definición de z, (7.64), y el hecho de que u^δ asume valores en el intervalo $[0,1]$. Con respecto a (7.83) recordemos que u^δ es una solución débil de

$$u_t^\delta + g^\delta(\gamma^\delta, u^\delta)_x = 0, \quad u^\delta(x,0) = u_0^\delta(x), \tag{7.85}$$

luego podemos aplicar el siguiente argumento. Sea $0 < s < t < T$ y α_h una aproximación suave de la función característica del intervalo $[s,t]$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \alpha_h = \chi_{[s,t]}.$$

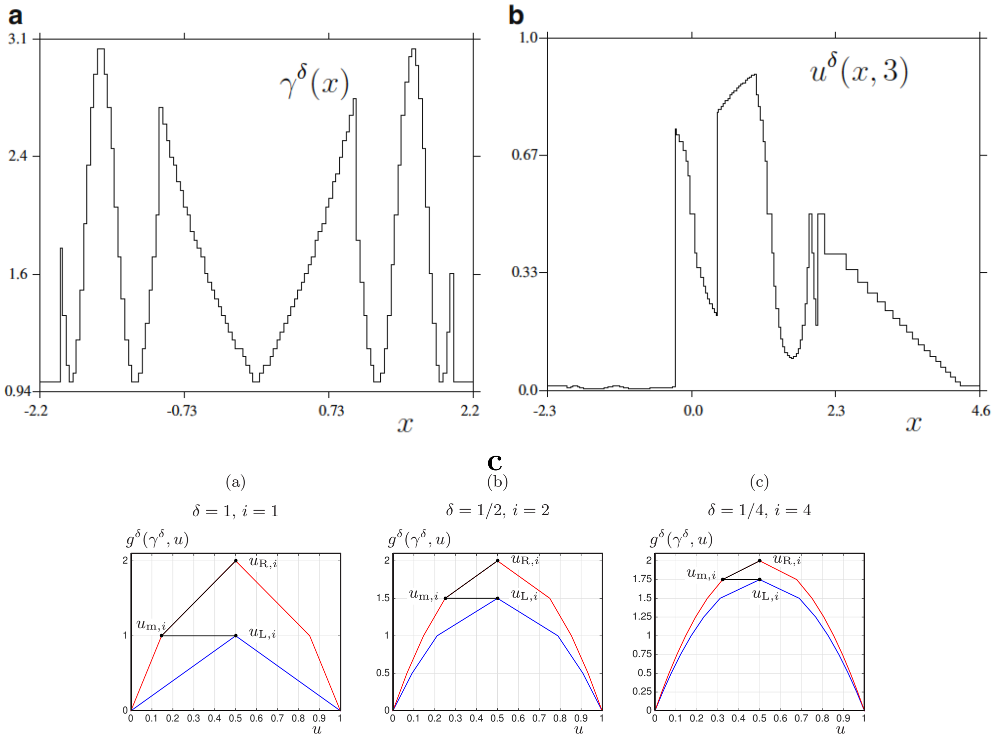


Figura 7.13. Ejemplo 7.8: (a) aproximación $\gamma^\delta(x)$, (b) $u^\delta(x,3)$ para $\delta = 0{,}05$ [53, Fig. 8.17], (c) frentes en el plano (x,t) [53, Fig. 8.18].

Sea ahora $\phi = \phi(y)$ una función suave con soporte compacto, entonces podemos elegir $\varphi_h(y,\tau) = \alpha_h(\tau)\phi(y)$ como función test en la formulación débil, es decir se debe satisfacer

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \bigl(u^\delta \varphi_{h,t} + g^\delta(\gamma^\delta, u^\delta)\varphi_{h,x}\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \varphi_h(x,0)u^\delta(x,0)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Dejando $h \to 0$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(y)\bigl(u^\delta(y,t) - u^\delta(y,s)\bigr)\,\mathrm{d}y + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \phi'(y) g^\delta(\gamma^\delta, u^\delta)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau = 0.$$

A partir de esto obtenemos

$$\begin{aligned}
&\bigl\|u^\delta(\cdot,t) - u^\delta(\cdot,s)\bigr\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&= \sup_{|\phi|\leqslant 1} \int_{\mathbb{R}} \phi(y)\bigl(u^\delta(y,t) - u^\delta(y,s)\bigr)\,\mathrm{d}y = -\sup_{|\phi|\leqslant 1} \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \phi'(y) g^\delta(\gamma^\delta, u^\delta)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant \int_s^t \mathrm{TV} g^\delta\bigl(\gamma^\delta, u^\delta(\cdot,\tau)\bigr)\,\mathrm{d}\tau \leqslant \max_{\tau\in[s,t]} \bigl|g^\delta\bigl(\gamma^\delta, u^\delta(\cdot,\tau)\bigr)\bigr|_{BV}(t-s) \\
&\leqslant \max_{\tau\in[s,t]} \bigl|z^\delta(\cdot,\tau)\bigr|_{BV}(t-s) \leqslant C(t-s),
\end{aligned} \tag{7.86}$$

para alguna constante C que no depende de t, s o δ. Poniendo $s=0$ obtenemos

$$\big\|u^\delta(\cdot,t)\big\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|u_0^\delta\|_{L^1(\mathbb{R})} + Ct, \tag{7.87}$$

luego $u^\delta(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo t finito. Ahora existe una constante $C>0$ y $\xi \in [0,u^\delta]$ tales que

$$\big|z(\gamma^\delta,u^\delta)\big| = \big|z(\gamma^\delta,0) + z_u(\gamma^\delta,\xi)\big| \leqslant |\gamma^\delta| + C|u^\delta|.$$

Como $\gamma^\delta \in L^1_{\mathrm{loc}}$ se obtiene (7.83). Efectivamente, en nuestro caso, como $u^\delta(x,t)\in[0,1]$, se tiene que

$$\big\|u^\delta(\cdot,t)\big\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} u^\delta(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u_0^\delta(x)\,\mathrm{d}x = \|u_0^\delta\|_1,$$

lo que es un resultado más fuerte que (7.88).

Para demostrar (7.84) utilizamos la igualdad

$$z^\delta(x,t) - z^\delta(x,s) = z\big(\gamma^\delta,u^\delta(x,t)\big) - z\big(\gamma^\delta,u^\delta(x,s)\big) = z_u(\xi,\gamma^\delta)\big(u^\delta(x,t)-u^\delta(x,s)\big).$$

Como z_u es acotado, a partir de (7.86) obtenemos la cota (7.84). ∎

Ahora podemos aplicar técnicas estándard (tal como en el caso de coeficientes constantes) para deducir que existen una subsucesión de $\{\delta>0\}$ (igualmente etiquetada como $\{\delta>0\}$) y una función $z\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times[0,\infty))\cap L^\infty((0,\infty);BV(\mathbb{R}))$ tales que

$$\lim_{\delta\to 0} z^\delta = z \quad \text{en } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times[0,T]). \tag{7.88}$$

Como $z^\delta = z(\gamma^\delta,u^\delta)$ también podemos concluir que existe una función $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times[0,T])$ tal que $u^\delta\to u$ cuando $\delta\to 0$ y $u=z^{-1}(z,\gamma)$. Además para esta subsucesión también se tiene $g^\delta(\gamma^\delta,u^\delta)\to f(\gamma,u)$. Concluimos que

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\big(u^\delta\varphi_t + g^\delta(\gamma^\delta,u^\delta)\varphi_x\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\big(u\varphi_t + f(\gamma,u)\varphi_x\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

y por construcción,

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}} u^\delta(x,0)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x.$$

Como u^δ es una solución débil de (7.85), esto implica que u es una solución débil de (7.57).

Es evidente que aunque hemos realizado el análisis para $f(\gamma,u)=4\gamma u(1-u)$, los resultados pueden ser extendidos (ligeramente) a funciones de flujo similares a f. Efectivamente, supongamos que:

- A.1 Existe un intervalo $[a,b]$ tal que $f(\gamma,a)=f(\gamma,b)=C$ para todo γ.
- A.2 Existe un punto $u^*(\gamma)\in(a,b)$ tal que $f_u(\gamma,u)>0$ para $a<u<u^*(\gamma)$ y $f_u(\gamma,u)<0$ para $u^*(\gamma)<u<b$.
- A.3 La aplicación $\gamma\mapsto f(\gamma,u)$ es estrictamente monótona para todo $u\in(a,b)$.
- A.4 La función de flujo f pertenece a $C^2(\mathbb{R}\times[a,b])$.

Si f satisface todas estas hipótesis, entonces podemos definir la aplicación z como

$$z(\gamma, u) = \operatorname{sgn}\bigl(u - u^*(\gamma)\bigr)\bigl(f(\gamma, u^*(\gamma)) - f(\gamma, u)\bigr), \tag{7.89}$$

y utilizar ésta para demostrar que la aproximación por *front tracking* es bien definida. Este análisis significa una modificación sólo muy moderada del análisis realizado para $f(\gamma, u) = 4\gamma u(1-u)$. Entonces, tomando en cuenta los cambios que corresponden, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 7.1. *Sea f una función que satisface A.1–A.4, y sea $u_0 \in L^1_{\text{loc}}$ una función que asume valores en el intervalo $[a, b]$, y que $\gamma \in BV(\mathbb{R}) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Entonces existe una solución débil del problema de valores inciales*

$$u_t + f(\gamma, u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Además esta solución es el límite de aproximaciones de front tracking.

7.2.2. Una desigualdad de entropía. Demostraremos ahora que el límite de cada aproximación por *front tracking* de la ley de conservación general (7.47) satisface una condición de entropía de Kružkov. Para tal efecto sea u^δ una solución débil del problema aproximado

$$u^\delta_t + g^\delta(\gamma^\delta, u^\delta)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad u^\delta(x, 0) = u^\delta_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7.90}$$

Aquí se supone que $g^\delta(\gamma, \cdot)$ es una aproximación lineal a trozos y continua de $f(\gamma, u)$ tal que $g^\delta \to f$ cuando $\delta \to 0$. Se supone que γ^δ es una aproximación de γ constante a trozos tal que $\gamma^\delta \to \gamma$ en L^1 cuando $\delta \to 0$. *Suponemos*, además, que la función u^δ puede ser construida por *front tracking*, y que para cada $T > 0$ fijo,

$$u^\delta \to u \quad \text{en } L^1(\mathbb{R} \times [0, T]) \text{ cuando } \delta \to 0. \tag{7.91}$$

Además definimos

$$z(\gamma, u) := \int_0^u \bigl|f_u(\gamma, v)\bigr| \,\mathrm{d}v \tag{7.92}$$

y $z^\delta := z(\gamma^\delta, u^\delta)$. Se supone, además, que la familia $\{z^\delta(\cdot, t)\}_{\delta > 0}$ es una sucesión de variación uniformemente acotada en x que satisfaga las cotas (7.82), (7.83) y (7.84) (ver Lema 7.7), lo que asegura la convergencia de z^δ a lo largo de una subsucesión.

Utilizando que u^δ es una solución débil de (7.90) no es muy difícil demostrar que u es una solución débil de (7.57) siempre que $u^\delta_0 \to u_0$ cuando $\delta \to 0$. Queremos demostrar que el límite u satisface una generalización de la condición de entropía de Kružkov. Para tal efecto recordamos que si γ es continua, entonces una solución de entropía de (7.57) sobre $\Pi_T = \mathbb{R} \times [0, T]$ satisface

$$\begin{aligned} &\iint_{\Pi_T} \bigl(|u - c|\varphi_t + F(\gamma, u, c)\varphi_x\bigr) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \iint_{\Pi_T} \operatorname{sgn}(u - c)\partial_x f(\gamma, c)\varphi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \bigl|u_0(x) - c\bigr|\varphi(x, 0) \,\mathrm{d}x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{7.93}$$

para toda constante $c \in \mathbb{R}$ y toda función test no negativa φ tal que $\varphi(\cdot, T) = 0$. Aquí F es el flujo de entropía de Kružkov definido por

$$F(\gamma, u, c) = \operatorname{sgn}(u - c)\bigl(f(\gamma, u) - f(\gamma, c)\bigr). \tag{7.94}$$

Queremos demostrar que el límite de *front tracking* u satisface (7.93) si γ es una función continua, y si γ posee discontinuidades, encontrar una generalización adecuada que el límite de *front tracking* satisface. La condición (7.93) no tiene sentido para funciones γ discontinuas ya que la segunda integral que no definida.

Se supone que γ es una función continua sobre un número *finito* de intervalos, es decir que γ posee un número finito de discontinuidades. Denotamos este conjunto de discontinuidades por $\mathcal{D}_\gamma = \{\xi_0, \dots, \xi_N\}$, y se supone que γ es continuamente diferenciable en x para todo $x \notin \mathcal{D}_\gamma$. Luego γ y γ' poseen límites a la izquierda y a la derecha en cada punto de discontinuidad $\xi_i \in \mathcal{D}_\gamma$.

Suponemos, además, que también la aproximación γ^δ posee discontinuidades para todo $x \in \mathcal{D}_\gamma$ para todo valor relevante de δ. Además, para cada δ fijo, se supone que γ^δ posee discontinuidades en puntos $\{y_{i,j}\}$, los que son ordenados en tal forma que

$$\xi_i = y_{i,0} < y_{i,1} < \cdots < y_{i,N_i} < y_{N_i+1} = \xi_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N.$$

Sea $\gamma_{i,j+1/2}$ el valor de γ^δ sobre el intervalo $(y_{i,j}, y_{i,j+1})$, y sea

$$\Delta x_{i,j} := \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2}, \quad j = 1, \dots, N_i.$$

Por supuesto estas cantidades dependen de δ, pero por simplicidad omitiremos esta dependencia en nuestra notación. Se supone, además, que

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{g^\delta(\gamma_{i,j+1/2}, c) - g^\delta(\gamma_{i,j-1/2}, c)}{\Delta x_{i,j}} \chi_{I_{i,j}}(x) = \frac{\partial}{\partial x} f\bigl(\gamma(x), c\bigr), \tag{7.95}$$

donde $\chi_{I_{i,j}}$ denota la función característica del intervalo

$$I_{i,j} := \left(\frac{y_{i,j-1} + y_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j} + y_{i,j+1}}{2} \right).$$

Esto es razonable, considerando que γ es continuamente diferenciable en (ξ_i, ξ_{i+1}). En lo siguiente, sean $u_i^\mp$ y $u_{i,j}^\mp$ los límites de u^δ a izquierda y a derecha de u^δ en los puntos ξ_i e $y_{i,j}$, respectivamente. Estos límites existen ya que $u^\delta(\cdot, t)$ es constante a trozos.

Sobre cada intervalo $(y_{i,j}, y_{i,j+1})$ la función u^δ es una solución de entropía de la ley de conservación

$$u_t^\delta + g^\delta(\gamma_{i,j+1/2}, u^\delta)_x = 0,$$

luego

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T \int_{y_{i,j}}^{y_{i,j+1}} \bigl(|u^\delta - c| \varphi_t + F^\delta(\gamma_{i,j+1/2}, u^\delta, c) \varphi_x \bigr) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&+ \int_0^T \bigl(F^\delta(\gamma_{i,j+1/2}, u_{i,j+1}^-, c) \varphi(y_{i,j+1}, t) - F^\delta(\gamma_{i,j+1/2}, u_{i,j}^+, c) \varphi(y_{i,j}, t) \bigr) \, \mathrm{d}t \\
&- \int_{y_{i,j}}^{y_{i,j+1}} \bigl| u^\delta(x, 0) - x \bigr| \varphi(x, 0) \, \mathrm{d}x \leqslant 0,
\end{aligned} \tag{7.96}$$

donde

$$F^\delta(\gamma, u, c) := \operatorname{sgn}(u - c) \bigl(g^\delta(\gamma, u) - g^\delta(\gamma, c) \bigr).$$

Sumando esto para $j = 0, \dots, N_i$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \bigl(|u^\delta - c|\varphi_t + F^\delta(\gamma^\delta, u^\delta, c)\varphi_x \bigr) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \bigl| u^\delta(x,0) - c \bigr| \varphi(x,0) \,\mathrm{d}x \\
&+ \int_0^T \bigl(F^\delta(\gamma_{i,N_i+1/2}, u_{i+1}^-, c)\varphi(\xi_i, t) - F^\delta(\gamma_{i,1/2}, u_i^+, c)\varphi(\xi_{i+1}, t) \bigr) \,\mathrm{d}t \\
&- \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{N_i} \bigl(F^\delta(\gamma_{i,j+1/2}, u_{i,j}^+, c) - F^\delta(\gamma_{i,j-1/2}, u_{i,j}^-, c) \bigr) \varphi(y_{i,j}, t) \right) \mathrm{d}t \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{7.97}$$

Con respecto al integrando del último término en (7.97), podemos escribir

$$\begin{aligned}
F^\delta(\gamma_{i,j+1/2}, &u_{i,j}^+, c) - F^\delta(\gamma_{i,j-1/2}, u_{i,j}^-, c) \\
&\in \Bigl\{ - \operatorname{sgn}(u_{i,j}^+ - c) \bigl(f(\gamma_{i,j+1/2}, c) - f(\gamma_{i,j-1/2}, c) \bigr) \\
&\qquad + \bigl(\operatorname{sgn}(u_{i,j}^+ - c) - \operatorname{sgn}(u_{i,j}^-, c) \bigr) \bigl(f_{i,j}^\times - f(\gamma_{i,j-1/2}, c) \bigr), \\
&\qquad - \operatorname{sgn}(u_{i,j}^- - c) \bigl(f(\gamma_{i,j+1/2}, c) - f(\gamma_{i,j-1/2}, c) \bigr) \\
&\qquad + \bigl(\operatorname{sgn}(u_{i,j}^+ - c) - \operatorname{sgn}(u_{i,j}^-, c) \bigr) \bigl(f_{i,j}^\times - f(\gamma_{i,j+1/2}, c) \bigr) \Bigr\},
\end{aligned}$$

donde

$$f_{i,j}^\times = f\bigl(\gamma_{i,j+1/2}, u_{i,j}^+\bigr) = f\bigl(\gamma_{i,j-1/2}, u_{i,j}^-\bigr).$$

Si $\operatorname{sgn}(u_{i,j}^+ - c) = \operatorname{sgn}(u_{i,j}^- - c)$, entonces los últimos términos en las expresiones arriba se anulan, mientras que si $u_{i,j}^- \leqslant c \leqslant u_{i,j}^+$, entonces como estos valores se han seleccionado de acuerdo a la condición de entropía del salto mínimo (7.25), se tiene que

$$\operatorname{sgn}(u_{i,j}^+ - c) = \operatorname{sgn}(u_{i,j}^- - c) = 2 \quad \text{y} \quad \bigl(f(\gamma_{i,j-1/2}, c) \geqslant f_{i,j}^\times \text{ o } f(\gamma_{i,j+1/2}, c) \geqslant f_{i,j}^\times \bigr),$$

luego en este caso uno de los últimos términos debe ser no positivo. Si $u_{i,j}^+ < c < u_{i,j}^-$, utilizamos (7.26) para deducir que

$$\operatorname{sgn}(u_{i,j}^+ - c) = \operatorname{sgn}(u_{i,j}^- - c) = -2 \quad \text{y} \quad \bigl(f(\gamma_{i,j-1/2}, c) \leqslant f_{i,j}^\times \text{ o } f(\gamma_{i,j+1/2}, c) \leqslant f_{i,j}^\times \bigr),$$

y nuevamente encontramos que uno de los últimos términos es no positivo. Si el primer de estos últimos términos es no positivo para c entre $u_{i,j}^-$ y $u_{i,j}^+$, definimos $u_{i,j} = u^\delta(y_{i,j}, t) = u_{i,j}^+$. En caso contrario, definimos $u_{i,j} = u^\delta(y_{i,j}, t) = u_{i,j}^-$. Utilizando estas observaciones, obtenemos a partir de (7.97)

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \bigl(|u^\delta - c|\varphi_t + F^\delta(\gamma^\delta, u^\delta, c)\varphi_x \bigr) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \bigl| u^\delta(x,0) - c \bigr| \varphi(x,0) \,\mathrm{d}x \\
&+ \int_0^T \bigl(F^\delta(\gamma_{i,N_i+1/2}, u_{i+1}^-, c)\varphi(\xi_i, t) - F^\delta(\gamma_{i,1/2}, u_i^+, c)\varphi(\xi_{i+1}, t) \bigr) \,\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{N_i} \operatorname{sgn}(u_{i,j} - c) \bigl(f(\gamma_{i,j+1/2}, c) - f(\gamma_{i,j-1/2}, c) \bigr) \varphi(y_{i,j}, t) \right) \mathrm{d}t \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{7.98}$$

Ahora $u_{i,j} = u^\delta(y_{i,j}^-, \cdot)$ o $u_{i,j} = u^\delta(y_{i,j}^+, \cdot)$; luego, si definimos

$$\bar{u}^\delta(x,t) := u_{i,j}(t)\chi_{I_{i,j}}(x), \quad \bar{z}^\delta := z_{i,j}^\delta(y)\chi_{I_{i,j}},$$

se tiene que

$$\bar{z}^\delta(y_{i,j}, t) = z^\delta(y_{i,j}, t).$$

Queremos demostrar ahora que la sucesión $\{\bar{z}^\delta\}_{\delta>0}$ es compacta en $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times[0,T])$. Trivialmente sabemos que

$$\|\bar{z}^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \|z^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant C, \tag{7.99}$$

$$\big|\bar{z}^\delta(\cdot,t)\big|_{BV} \leqslant \big|z^\delta(\cdot,t)\big|_{BV} \leqslant C. \tag{7.100}$$

Además,

$$\begin{aligned}
&\big\|\bar{z}^\delta(\cdot,t) - z^\delta(\cdot,t)\big\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \big|\bar{z}^\delta(x,t) - z^\delta(x,t)\big|\,\mathrm{d}x = \sum_{i,j}\int_{y_{i,j-1/2}}^{y_{i,j+1/2}} \big|z^\delta(y_{i,j},t) - z^\delta(y,t)\big|\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \sum_{i,j}\int_{y_{i,j-1/2}}^{y_{i,j+1/2}}\int_y^{y_{i,j}} \big|z_x^\delta(x,t)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \max_{i,j}|\Delta x_{i,j}|\big|z^\delta(\cdot,t)\big|_{BV}.
\end{aligned}$$

Sea $\Delta x := \max_{i,j}\Delta x_{i,j}$, entonces

$$\begin{aligned}
\big\|\bar{z}^\delta(\cdot,t) - \bar{z}^\delta(\cdot,s)\big\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leqslant \big\|z^\delta(\cdot,t) - z^\delta(\cdot,s)\big\|_{L^1(\mathbb{R})} + 2\Delta x\big|z^\delta(\cdot,t)\big|_{BV} \\
&\leqslant C\big((t-s) + \Delta x\big).
\end{aligned} \tag{7.101}$$

En virtud de las cotas (7.99), (7.100) y (7.101) la sucesión $\{\bar{z}^\delta\}_{\delta>0}$ converge a lo largo de una subsucesión (también etiquetada por δ),

$$\lim_{\delta\to 0}\bar{z}^\delta = \lim_{\delta\to 0} z^\delta = z,$$

por lo tanto también

$$\lim_{\delta\to 0}\bar{u}^\delta = u.$$

Sea ahora

$$\Delta_x g^\delta(x,c) = \frac{f(\gamma_{i,j+1/2},c) - f(\gamma_{i,j-1/2},c)}{\Delta x_{i,j}} \quad \text{para } x\in I_{i,j}.$$

Si utilizamos esta notación, podemos escribir la desigualdad (7.98) como

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\big(|u^\delta - c|\varphi_t + F^\delta(\gamma^\delta, u^\delta, c)\varphi_x\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\big|u^\delta(x,0) - c\big|\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x \\
&-\int_0^T\big(F^\delta(\gamma_i^+, u_i^+, c)\varphi(\xi_i,t) - F^\delta(\gamma_{i+1}^-, u_{i+1}^-, c)\varphi(\xi_{i+1},t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&+\int_0^T\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\operatorname{sgn}(\bar{u}^\delta - c)\Delta_x g^\delta(y,c)\left(\sum_{j=1}^{N_i}\varphi(y_{i,j},t)\chi_{I_{i,j}}(y)\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{7.102}$$

Sumando sobre $i=0,\dots,M$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&-\iint_{\Pi_T}\big(|u^\delta-c|\varphi_t+F^\delta(\gamma^\delta,u^\delta,c)\varphi_x\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_{\mathbb{R}}\big|u^\delta(x,0)-c\big|\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x\\
&-\int_0^T\left(\sum_{i=1}^{M}\big(F^\delta(\gamma_i^+,u_i^+,c)-F^\delta(\gamma_i^-,u_i^-,c)\big)\varphi(\xi_i,t)\right)\mathrm{d}t\\
&+\int_0^T\left(\sum_{i=0}^{M}\left(\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\operatorname{sgn}(\bar{u}^\delta-c)\Delta_x g^\delta(y,c)\left(\sum_{j=1}^{N_i}\varphi(y_{i,j},t)\chi_{I_{i,j}}(y)\right)\mathrm{d}y\right)\right)\mathrm{d}t\leqslant 0.
\end{aligned}\tag{7.103}$$

Aquí conviene introducir el siguiente lema.

Lema 7.8. *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}$ un conjunto acotado y abierto, $g\in L^1(\Omega)$, y supongamos que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones tal que $g_n(x)\to g(x)$ cuando $n\to\infty$ en casi todas partes. Entonces existe un conjunto $\Theta\subseteq\mathbb{R}$, que es a lo más numerable tal que para cada $c\in\mathbb{R}\backslash\Theta$,*

$$\operatorname{sgn}\big(g_n(x)-c\big)\to\operatorname{sgn}\big(g(x)-c\big)\quad\text{c.t.p. en }\Omega.$$

Además, sea $c\in\Theta$ y

$$\mathcal{E}_c:=\big\{x\in\Omega\mid g(x)=c\big\}.$$

Entonces es posible definir sucesiones $\{\underline{c}_m\}_{m\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}\backslash\Theta$ y $\{\bar{c}_m\}_{m\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}\backslash\Theta$ tales que

$$\underline{c}_m\uparrow c\quad\text{y}\quad\operatorname{sgn}\big(g(x)-\underline{c}_m\big)\to\operatorname{sgn}\big(g(x)-c\big)\quad\text{c.t.p. en }\Omega\backslash\mathcal{E}_c\text{ cuando }m\to\infty,\tag{7.104}$$

$$\bar{c}_m\downarrow c\quad\text{y}\quad\operatorname{sgn}\big(g(x)-\bar{c}_m\big)\to\operatorname{sgn}\big(g(x)-c\big)\quad\text{c.t.p. en }\Omega\backslash\mathcal{E}_c\text{ cuando }m\to\infty.\tag{7.105}$$

Demostración. Sea $c\in\mathbb{R}$ y $x\in\Omega$ tal que $g_n(x)\to g(x)$ y $g(x)\neq c$. Para n suficientemente grande,

$$\operatorname{sgn}\big(g_n(x)-c\big)=\operatorname{sgn}\big(g(x)-c\big),$$

es decir $\operatorname{sgn}(g_n(x)-c)$ es constante con respecto a n y por lo tanto converge al límite correcto. Luego para todo $c\in\mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}\big(g_n(x)-c\big)\to\operatorname{sgn}\big(g(x)-c\big)\quad\text{en casi todas partes en }\Omega\backslash\mathcal{E}_c.$$

Queda por demostrar que todos los conjuntos $\mathcal{E}_c$ con una excepción numerable tienen medida nula. Para tal efecto definimos

$$C_k:=\big\{c\in\mathbb{R}\mid\operatorname{meas}(\mathcal{E}_c)\geqslant 1/k\big\},\quad k\in\mathbb{N}.$$

(donde $\operatorname{meas}(X)$ denota la medida de un conjunto X). Como Ω es acotado, C_k contiene sólo un número finito de puntos. Por lo tanto, el conjunto

$$C:=\big\{c\in\mathbb{R}\mid\operatorname{meas}(\mathcal{E}_c)>0\big\}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}C_k$$

es a lo más numerable.

Para demostrar (7.104), sea $c\in\Theta$. Como Θ es a lo más numerable, existe una sucesión $\underline{c}_n\uparrow c$ tal que $c_n\notin\Theta$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Para $x\in\Omega\backslash\mathcal{E}_c$, se tiene que $g(x)\neq c$, luego $\operatorname{sgn}(g(x)-\underline{c}_n)=\operatorname{sgn}(g(x)-c)$ para n suficientemente grande. Luego (7.104) es válido. La existencia de $\{\bar{c}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y (7.105) son demostradas análogamente. ∎

Ahora, volviendo a (7.102), claramente

$$\Delta_x g^\delta(y,c)\sum_{j=1}^{N_i}\varphi(y_{i,j},t)\chi_{I_{i,j}}(y)\to\partial_x f\bigl(\gamma(y),c\bigr)\varphi(y,t)\quad\text{cuando }\delta\to 0$$

en cada intervalo (ξ_i,ξ_{i+1}). Además, en virtud del Lemma 7.8,

$$\operatorname{sgn}(\bar u^\delta-c)\to\operatorname{sgn}(u-c)$$

para casi todo (x,t) y todo $c\in\mathbb{R}$ excepto un conjunto a lo más numerable.

Con respecto al término de la segunda línea de (7.103), notamos que en virtud del Lema 7.1 cada sumando es acotado por

$$\bigl|F^\delta(\gamma_i^+,u_i^+,c)\varphi(\xi_i,t)-F^\delta(\gamma_{i+1}^-,u_{i+1}^-,c)\varphi(\xi_{i+1},t)\bigr|\leqslant\bigl|g^\delta(\gamma_i^+,c)-g^\delta(\gamma_i^-,c)\bigr|,$$

considerando que el par (u_i^-,u_i^+) satisface la condición de entropía del salto mínimo. De acuerdo a lo anterior, tomando el límite en (7.103) cuando $\delta\to 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}&-\iint_{\Pi_T}\bigl(|u-c|\varphi_t+F(\gamma,u,c)\varphi_x\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+I(c)\\&-\int_0^T\left(\sum_{x\in\mathcal{D}_\gamma}\bigl|f(\gamma(x^+),c)-f(\gamma(x^-),c)\bigr|\varphi(\xi_i,t)\right)\mathrm{d}t-\int_{\mathbb{R}}|u_0-c|\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x\leqslant 0,\\&I(c):=\iint_{\Pi_T\setminus\mathcal{D}_\gamma}\operatorname{sgn}(u-c)\partial_x f(\gamma,c)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{7.106}$$

para todo $c\in\mathbb{R}$ excepto un conjunto a lo más numerable y toda función test no negativa φ. Podemos escribir esto como $I(c)\leqslant G(c)$, donde G es una función *continua* de c. Sea Θ el conjunto donde la convergencia $\operatorname{sgn}(\bar u^\delta-c)\to\operatorname{sgn}(u-c)$ *no* es válida. Sea $c\in\Theta$, y sean las sucesiones $\{\underline{c}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\bar c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas como en el Lema 7.8. Sea

$$\mathcal{E}_c=\bigl\{(x,t)\mid u(x,t)=c\bigr\}.$$

Como (7.106) es válido para $\underline{c}_n$ y $\bar c_n$, podemos escribir

$$\begin{aligned}I(c)=&\iint_{\hat\Pi_T\setminus\mathcal{E}_c}\operatorname{sgn}(u-\underline{c}_n)\partial_x f(\gamma,u)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&+\iint_{\mathcal{E}_c\setminus\mathcal{D}_\gamma}\operatorname{sgn}(u-\underline{c}_n)\partial_x f(\gamma,u)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant G(c),\end{aligned}\tag{7.107}$$

donde $\hat\Pi_T:=\Pi_T\backslash\mathcal{D}_\gamma$. Como $\underline{c}_n<c$, la última integral puede ser escrita como

$$\iint_{\mathcal{E}_c\setminus\mathcal{D}_\gamma}\operatorname{sgn}(u-\underline{c}_n)\partial_x f(\gamma,u)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\iint_{\mathcal{E}_c\setminus\mathcal{D}_\gamma}\partial_x f(\gamma,u)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Como f es continua, obtenemos ahora a partir de (7.107) cuando $n\to\infty$

$$\iint_{\hat\Pi_T\setminus\mathcal{E}_c}\operatorname{sgn}(u-c)\partial_x f(\gamma,u)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\iint_{\mathcal{E}_c\setminus\mathcal{D}_\gamma}\partial_x f(\gamma,u)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant G(c).\tag{7.108}$$

En forma similar obtenemos, utilizando la sucesión $\{\bar{c}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\iint_{\hat{\Pi}_T\setminus\mathcal{E}_c} \operatorname{sgn}(u-c)\partial_x f(\gamma,u)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \iint_{\mathcal{E}_c\setminus\mathcal{D}_\gamma} \partial_x f(\gamma,u)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant G(c). \tag{7.109}$$

Sumando (7.108) y (7.109) y dividiendo el resultado por 2 obtenemos

$$\iint_{\hat{\Pi}_T\setminus\mathcal{E}_c} \operatorname{sgn}(u-c)\partial_x f(\gamma,u)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant G(c).$$

Como $\operatorname{sgn}(0)=0$, se tiene que $\operatorname{sgn}(u-c)=0$ sobre $\mathcal{E}_c$, por lo tanto podemos concluir que

$$\iint_{\Pi_T\setminus\mathcal{D}_\gamma} \operatorname{sgn}(u-c)\partial_x f(\gamma,u)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant G(c). \tag{7.110}$$

Acabamos de demostrar el siguiente teorema.

Teorema 7.2. *Supongamos que la función de flujo satisface A.1–A.4 y sea u^δ una solución débil de* (7.88) *construida por* front tracking *tal que $u^\delta \to u$ en $L^1(\Pi_T)$ cuando $\delta \to 0$. Entonces la condición de entropía* (7.106) *es válida para todas las constantes $c\in\mathbb{R}$.*

7.3. Unicidad de soluciones de entropía

Utilizaremos la formulación de entropía de Kružkov, (7.106), para demostrar que existe a lo más una solución de entropía. Para tal efecto reiteramos que u es una solución de entropía si para toda función test $\varphi\in C_0^1(\mathbb{R}\times[0,T))$ no negativa, toda constante $c\in\mathbb{R}$ y $\gamma_i^\pm=\gamma(\xi_i\pm)$,

$$\begin{aligned}&\iint_{\Pi_T}\big(|u-c|\varphi_t + F(\gamma,u,c)\varphi_x\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \iint_{\Pi_T\setminus\mathcal{D}_\gamma} \operatorname{sgn}(u-c)\partial_x f(\gamma,c)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &+\int_0^T\left(\sum_i \big|f(\gamma_i^+),c)-f(\gamma_i^-,c)\big|\varphi(\xi_i,t)\right)\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}}|u_0-c|\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.\end{aligned}\tag{7.111}$$

Adicionalmente a esta desigualdad de entropía exigiremos que una solución de entropía sea una solución débil, es decir que satisfaga (7.58) y que sea ligeramente más regular, en el sentido descrito abajo. (Comentamos que al contrario del caso de una ley de conservación con flujo independiente del espacio, *no* se puede deducir facilmente que una función que satisface la condición de entropía también es una solución débil.)

Sea $w\in L^\infty(\Pi_T)$. Entonces se denotan por trazas a izquierda y a derecha de $w(\cdot,t)$ en un punto x_0 funciones $t\mapsto w(x_0\pm,t)\in L^\infty(0,T)$ que satisfagan para casi todo $t\in[0,T)$ las respectivas propiedades

$$\operatorname*{ess\,lim}_{x\downarrow x_0}\big|w(x,t)-w(x_0+,t)\big| = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname*{ess\,lim}_{x\uparrow x_0}\big|w(x,t)-w(x_0-,t)\big| = 0. \tag{7.112}$$

Si comparamos dos soluciones de entropía necesitamos que estas posean trazas en los puntos ξ_i, es decir si u es una solución de entropía, entonces se supone que existe la traza

$$u_i^\pm = u(x_i\pm,t) \quad \text{en el sentido de (7.112) para caso todo } t \text{ e } i=1,\dots,N. \tag{7.113}$$

Una *solución de entropía* de (7.57) es una función $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi_T)\cap C([0,T);L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$ que satisface (7.58), (7.111), y la condición de regularidad (7.113).

Ya demostramos que una solución de entropía existe para nuestro problema modelo ya que la existencia de las trazas sigue a partir de $z(\cdot,t)\in BV(\mathbb{R})$, lo que implica que z posee trazas. Lo mismo se tiene para u ya que $u=z^{-1}(\gamma,u)$.

Sea ahora $w=w(x)$ alguna función sobre $\mathbb{R}$ e y un punto fijo. Se utiliza la siguiente notación:

$$\operatorname*{L-lim}_{x\downarrow y} w(x) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_y^{y+\varepsilon} w(x)\,\mathrm{d}x, \quad \operatorname*{L-lim}_{x\uparrow y} w(x) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{y-\varepsilon}^{y} w(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lema 7.9. *Sea $w\in L^\infty(\Pi_T)$ y $x_0\in\mathbb{R}$. Si las trazas a izquierda y a derecha $t\mapsto w(x_0\pm,t)$ existen en el sentido de* (7.112)*, entonces para casi todo $t\in[0,t)$,*

$$\operatorname*{L-lim}_{x\downarrow x_0} w(x,t) = w(x_0+,t), \quad \operatorname*{L-lim}_{x\uparrow x_0} w(x,t) = w(x_0-,t).$$

Demostración. Demostraremos el primer límite como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\bigl|w(x,t)-w(x_0+,t)\bigr|\,\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\operatorname*{ess\,sup}_{y\in(x_0,x_0+\varepsilon)}\bigl|w(y,t)-w(x_0+,t)\bigr|\,\mathrm{d}x\\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{y\in(x_0,x_0+\varepsilon)}\bigl|w(y,t)-w(x_0+,t)\bigr| \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} 0.\end{aligned}$$

∎

Como consecuencia del Lema 7.9 los siguientes límites existen para cada solución de entropía u:

$$\begin{aligned}\operatorname*{L-lim}_{x\downarrow \xi_i} f\bigl(\gamma(x),u(x,t)\bigr) &= f\bigl(\gamma(\xi_i+),u(\xi_i+,t)\bigr),\\ \operatorname*{L-lim}_{x\uparrow \xi_i} f\bigl(\gamma(x),u(x,t)\bigr) &= f\bigl(\gamma(\xi_i-),u(\xi_i-,t)\bigr)\end{aligned} \tag{7.114}$$

por lo tanto, si v es otra solución de entropía,

$$\begin{aligned}\operatorname*{L-lim}_{x\downarrow \xi_i} F\bigl(\gamma(x),u(x,t),v(x,t)\bigr) &= F\bigl(\gamma(\xi_i+),u(\xi_i+,t),v(\xi_i+,t)\bigr),\\ \operatorname*{L-lim}_{x\uparrow \xi_i} F\bigl(\gamma(x),u(x,t),v(x,t)\bigr) &= F\bigl(\gamma(\xi_i-),u(\xi_i-,t),v(\xi_i-,t)\bigr),\end{aligned} \tag{7.115}$$

donde F es el flujo de entropía de Kružkov dado por (7.94). Antes de continuar definimos la siguiente función con soporte compacto y Lipschitz continua:

$$\theta_\varepsilon(x) := \begin{cases} 1+x/\varepsilon & \text{para } x\in(-\varepsilon,0],\\ 1-x/\varepsilon & \text{para } x\in[0,\varepsilon),\\ 0 & \text{para } x\leqslant-\varepsilon \text{ o } x\geqslant\varepsilon.\end{cases} \tag{7.116}$$

Lema 7.10. *Sea u una solución de entropía. Entonces para casi todo $t\in[0,T)$ y toda constante c,*

$$\begin{gathered} f\bigl(\gamma_i^+,u_i^+(t)\bigr) = f\bigl(\gamma_i^-,u_i^-(t)\bigr),\\ F\bigl(\gamma_i^+,u_i^+(t),c\bigr) - F\bigl(\gamma_i^-,u_i^-(t),c\bigr) \leqslant \bigl|f(\gamma_i^+,c)-f(\gamma_i^-,c)\bigr|.\end{gathered}$$

Demostración. Sea u una solución de entropía, entonces un argumento de densidad muestra que $\varphi(x,t) = \theta_\varepsilon(x - \xi_i)\psi(t)$ con $\psi \in C_0^1((0,T))$ es una función test admisible que puede ser utilizada en la formulación débil (7.58). Si $\varepsilon < \min_i\{\xi_{i+1}, \xi_i\}$ obtenemos

$$\iint_{\Pi_T} u\theta_\varepsilon(x-\xi_i)\psi'(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T \left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_i}^{\xi_i+\varepsilon} f\big(\gamma(x),u\big)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\xi_i-\varepsilon}^{\xi_i} f\big(\gamma(x),u\big)\,\mathrm{d}x\right)\psi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tomando el límite cuando $\varepsilon \downarrow 0$ y utilizando el Lema 7.9 obtenemos

$$\int_0^T \big(f(\gamma_i^+, u_i^+(t)) - f(\gamma_i^-, u_i^-(t))\big)\psi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Como esta identidad debe ser válida para toda función test ψ, el integrando debe anularse. Esto prueba la igualdad del enunciado del lema.

Para demostrar la desigualdad, elegimos la misma función test pero ahora la función ψ debe ser no negativa. En virtud de la condición de entropía (7.111) obtenemos ahora

$$\begin{aligned}&\iint_{\Pi_T} |u-c|\theta_\varepsilon(x-\xi_i)\psi'(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &- \int_0^T \left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_i}^{\xi_i+\varepsilon} F\big(\gamma(x),u,c\big)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\xi_i-\varepsilon}^{\xi_i} F\big(\gamma(x),u,c\big)\,\mathrm{d}x\right)\psi(t)\,\mathrm{d}t\\ &- \iint_{\Pi_T} \operatorname{sgn}(u-c)\partial_x f\big(\gamma(x),c\big)\theta_\varepsilon(x-\xi_i)\psi(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T \big|f(\gamma_i^+,c) - f(\gamma_i^-,c)\big|\psi(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \downarrow 0$ obtenemos

$$\int_0^T \big|f(\gamma_i^+,c) - f(\gamma_i^-,c)\big|\psi(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^T \big(F(\gamma_i^+, u_i^+, c) - F(\gamma_i^-, u_i^-, c)\big)\psi(t)\,\mathrm{d}t,$$

lo que implica la desigualdad. ■

El Lema 7.10 inmediatamente implica el siguiente colorario.

Corolario 7.2. *Si la función de flujo f satisface A.1–A.4, entonces si u es una solución de entropía, los pares (u_i^-, u_i^+) satisfacen la condición de entropía del salto mínimo* (7.25), (7.26).

Para cualquier función test que posea soporte fuera de $\mathcal{D}_\gamma$ podemos aplicar el argumento del “doblamiento de variables” (ver Sección 3.4) en el sentido de Kružkov.

Lema 7.11. *Sean u y v soluciones de entropía y $\varphi \in C_0^1(\Pi_T \backslash \mathcal{D}_\gamma)$ una función test no negativa. Entonces existe una constante C tal que*

$$-\iint_{\Pi_T} \big(|u-v|\varphi_t + F(\gamma,u,v)\varphi_x\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C\iint_{\Pi_T} |u-v|\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v_0|\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x, \tag{7.117}$$

donde $C = 0$ si γ es constante a trozos.

Demostración. La demostración es una aplicación del argumento clásico del "doblamiento de variables" de la Sección 3.4, adaptado a la situación presente. Sea $\phi \in C_0^1(\Pi_T \times \Pi_T)$ una función test no negativa. Utilizamos, además, la notación $u = u(y,s)$, $v = v(x,t)$. Entonces utilizando $c = u(y,s)$ como constante en la desigualdad de entropía de v e integrando sobre (y,s) obtenemos

$$\begin{aligned}
&- \iiiint\limits_{\Pi_T \times \Pi_T} \big(|u-v|\phi_t + F(\gamma(x),u,v)\phi_x\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y \\
&+ \iiiint\limits_{(\Pi_T \setminus \mathcal{D}_\gamma)\times(\Pi_T \setminus \mathcal{D}_\gamma)} \operatorname{sgn}(v-u) f\big(\gamma(x),u\big)_x \phi\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \iint_{\Pi_T} \int_{\mathbb{R}} |v_0 - u|\phi(x,0,y,s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{7.118}$$

Análogamente, empezando con la desigualdad de entropía para u e integrando sobre (x,t) obtenemos

$$\begin{aligned}
&- \iiiint\limits_{\Pi_T \times \Pi_T} \big(|u-v|\phi_s + F(\gamma(y),u,v)\phi_y\big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&+ \iiiint\limits_{(\Pi_T \setminus \mathcal{D}_\gamma)\times(\Pi_T \setminus \mathcal{D}_\gamma)} \operatorname{sgn}(u-v) f\big(\gamma(y),v\big)_y \phi\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \iint_{\Pi_T} \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v|\phi(x,t,y,0)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{7.119}$$

Como γ es diferenciable fuera de $\mathcal{D}_\gamma$, entonces para $(x,t) \in \Pi_T \setminus \mathcal{D}_\gamma$,

$$\begin{aligned}
&F\big(\gamma(x),v,u\big)\phi_x - \operatorname{sgn}(v-u) f\big(\gamma(x),u\big)_x \phi \\
&= \operatorname{sgn}(v-u)\big(f(\gamma(x),v) - f(\gamma(y),u)\big)\phi_x - \operatorname{sgn}(v-u)\Big(\big(f(\gamma(x),v) - f(\gamma(y),u)\big)\phi\Big)_x.
\end{aligned}$$

Utilizando esto obtenemos

$$\begin{aligned}
&- \iiiint\limits_{(\Pi_T \setminus \mathcal{D}_\gamma)\times(\Pi_T \setminus \mathcal{D}_\gamma)} \Big(F\big(\gamma(x),v,u\big)\phi_x - \operatorname{sgn}(v-u) f\big(\gamma(x),u\big)_x \phi\Big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y \\
&= - \iiiint\limits_{(\Pi_T \setminus \mathcal{D}_\gamma)\times(\Pi_T \setminus \mathcal{D}_\gamma)} \operatorname{sgn}(v-u)\big(f(\gamma(x),v) - f(\gamma(y),u)\big)\phi_x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \iiiint\limits_{(\Pi_T \setminus \mathcal{D}_\gamma)\times(\Pi_T \setminus \mathcal{D}_\gamma)} \operatorname{sgn}(v-u)\Big(\big(f(\gamma(x),v) - f(\gamma(y),u)\big)\phi\Big)_x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Análogamente obtenemos para u

$$- \iiiint\limits_{(\Pi_T \setminus \mathcal{D}_\gamma)\times(\Pi_T \setminus \mathcal{D}_\gamma)} \Big(F\big(\gamma(y),v,u\big)\phi_x - \operatorname{sgn}(u-v) f\big(\gamma(y),v\big)_y \phi\Big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

$$= - \iiiint\limits_{(\Pi_T\setminus\mathcal{D}_\gamma)\times(\Pi_T\setminus\mathcal{D}_\gamma)} \operatorname{sgn}(u-v)\big(f(\gamma(y),u) - f(\gamma(x),v)\big)\phi_y \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$
$$+ \iiiint\limits_{(\Pi_T\setminus\mathcal{D}_\gamma)\times(\Pi_T\setminus\mathcal{D}_\gamma)} \operatorname{sgn}(u-v)\Big(\big(f(\gamma(y),v) - f(\gamma(y),v)\big)\phi\Big)_y \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$

Introduciendo la notación $\partial_{t+s} := \partial_t + \partial_s$ y $\partial_{x+y} := \partial_x + \partial_y$, utilizando estas dos identidades y sumando (7.118) y (7.119) obtenemos

$$\begin{aligned}
&- \iiiint\limits_{\Pi_T\times\Pi_T} \big(|v-u|\partial_{t+s}\phi + \operatorname{sgn}(v-u)(f(\gamma(x),v) - f(\gamma(y),u))\partial_{x+y}\phi\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y \\
&+ \iiiint\limits_{\Pi_T\times\Pi_T} \operatorname{sgn}(v-u)\Bigg(\Big(\big(f(\gamma(x),u) - f(\gamma(y),u)\big)\phi\Big)_x \\
&\qquad\qquad + \Big(\big(f(\gamma(y),v) - f(\gamma(x),v)\big)\phi\Big)_y\Bigg)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \iint_{\Pi_T}\int_{\mathbb{R}} |v_0-u|\phi(x,0,y,s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y + \iint_{\Pi_T}\int_{\mathbb{R}} |u_0-v|\phi(x,t,y,0)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{7.120}$$

Ahora elegimos una función test apropiada. Para tal efecto sea $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ una función tal que $\omega(-a) = \omega(a)$, $\omega'(a) \leqslant 0$ para $a > 0$, $|\omega'(a)| \leqslant 2$, $\omega(a) = 0$ para $|a| \geqslant 1$, y

$$\int_{\mathbb{R}} \omega(a)\,\mathrm{d}a = 1.$$

Para $\varepsilon > 0$ definimos

$$\omega_\varepsilon(a) = \frac{1}{\varepsilon}\omega\left(\frac{a}{\varepsilon}\right).$$

Sea ahora $\varphi(x,t)$ una función test tal que $\varphi(x,t) = 0$ para $|x-\xi_i| \leqslant \varepsilon_0$ para $i = 1,\dots,N$ para algún $\varepsilon_0 > 0$. Sea

$$\phi(x,t,y,s) := \varphi\left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+s}{2}\right)\omega_\varepsilon\left(\frac{x-y}{2}\right)\omega_\varepsilon\left(\frac{t-s}{2}\right) \tag{7.121}$$

para $\varepsilon < \varepsilon_0$. Podemos verificar fácilmente que $\phi \in C_0^1((\Pi_T\setminus\mathcal{D}_\gamma)\times(\Pi_T\setminus\mathcal{D}_\gamma))$, además tenemos las identidades útiles

$$\partial_{t+s}\phi(x,t,y,s) = \partial_{t+s}\varphi\left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+s}{2}\right)\omega_\varepsilon\left(\frac{x-y}{2}\right)\omega_\varepsilon\left(\frac{t-s}{2}\right),$$
$$\partial_{x+y}\phi(x,t,y,s) = \partial_{x+y}\varphi\left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+s}{2}\right)\omega_\varepsilon\left(\frac{x-y}{2}\right)\omega_\varepsilon\left(\frac{t-s}{2}\right).$$

Utilizando estas identidades en (7.120) obtenemos

$$\begin{aligned}
&-\iiiint\limits_{\Pi_T\times\Pi_T}\big(I_1(x,t,y,s)+I_2(x,t,y,s)\big)\omega_\varepsilon\left(\frac{x-y}{2}\right)\omega_\varepsilon\left(\frac{t-s}{2}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y\\
&\leqslant\iiiint\limits_{\Pi_T\times\Pi_T}\big(I_3^1(x,t,y,s)+I_3^2(x,t,y,s)+I_3^3(x,t,y,s)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y+J, \qquad (7.122)\\
&J:=\iint_{\Pi_T}\int_{\mathbb{R}}|v_0-u|\phi(x,0,y,s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y+\iint_{\Pi_T}\int_{\mathbb{R}}|u_0-v|\phi(x,t,y,0)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

donde las cantidades $I_1=I_2(x,t,y,s)$ etc. están dadas por

$$\begin{aligned}
I_1&=|v-u|\partial_{t+s}\varphi\left(\frac{x+y}{2},\frac{t+s}{2}\right),\\
I_2&=\operatorname{sgn}(v-u)\big(f(\gamma(x),v)-f(\gamma(y),u)\big)\partial_{x+y}\varphi\left(\frac{x+y}{2},\frac{t+s}{2}\right),\\
I_3^1&=-\operatorname{sgn}(v-u)\omega_\varepsilon\left(\frac{x-y}{2}\right)\omega_\varepsilon\left(\frac{t-s}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+y}{2},\frac{t+s}{2}\right)\\
&\quad\times\big(\gamma'(x)f_\gamma(\gamma(x),u)-\gamma'(y)f_\gamma(\gamma(y),v)\big),\\
I_3^2&=-\operatorname{sgn}(v-u)\omega_\varepsilon\left(\frac{x-y}{2}\right)\omega_\varepsilon\left(\frac{t-s}{2}\right)\left(\partial_x\varphi\left(\frac{x+y}{2},\frac{t+s}{2}\right)\big(f(\gamma(x),u)-f(\gamma(y),u)\big)\right.\\
&\quad\left.+\partial_y\varphi\left(\frac{x+y}{2},\frac{t+s}{2}\right)\big(f(\gamma(x),v)-f(\gamma(y),v)\big)\right),\\
I_3^3&=\big(F(\gamma(x),v,u)-F(\gamma(y),v,u)\big)\varphi\left(\frac{x+y}{2},\frac{t+s}{2}\right)\omega_\varepsilon\left(\frac{t-s}{2}\right)\partial_x\omega_\varepsilon\left(\frac{x-y}{2}\right).
\end{aligned}$$

Introduciendo variables nuevas

$$\tilde{x}=\frac{x+y}{2},\quad z=\frac{x-y}{2},\quad \tilde{t}=\frac{t+s}{2},\quad \tau=\frac{t-s}{2}$$

que mapean $\Pi_T\times\Pi_T$ en

$$\Omega_T:=\big\{(\tilde{x},\tilde{t},z,\tau)\in\mathbb{R}^4\mid 0\leqslant\tilde{t}\pm\tau\leqslant T\big\}$$

y $(\Pi_T\backslash\mathcal{D}_\gamma)\times(\Pi_T\backslash\mathcal{D}_\gamma)$ en

$$\Omega_{T,\gamma}:=\big\{(\tilde{x},\tilde{t},z,\tau)\in\Omega_T\mid\tilde{x}\pm z\neq\xi_i,\ i=1,\dots,N\big\}.$$

Empezamos estimando los términos en J:

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Pi_T}\int_{\mathbb{R}}\big|v_0(x)-u(y,s)\big|\varphi\left(\frac{x+y}{2},\frac{s}{2}\right)\omega_\varepsilon\left(\frac{x-y}{2}\right)\omega_\varepsilon\left(-\frac{s}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y\\
&=\int_0^\varepsilon\int_{\mathbb{R}}\int_{-\varepsilon}^\varepsilon\big|v_0(\tilde{x}+z)-u(\tilde{x}-z,\tilde{t}-\tau)\big|\varphi(\tilde{x},\tau)\omega_\varepsilon(z)\omega_\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tau\\
&\to\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\big|v_0(x)-u(x,0)\big|\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x\quad\text{cuando }\varepsilon\to 0.
\end{aligned}$$

Como $t \mapsto u(x,t)$ es una aplicación continua en L^1, podemos reemplazar $u(x,0)$ por $u_0(x)$. Análogamente obtenemos

$$\iint_{\Pi_T} \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v| \phi(x,t,y,0) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \to \frac{1}{2} \iint_{\Pi_T} \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v_0| \varphi(x,0) \, \mathrm{d}x \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

Concluimos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J = \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v_0| \varphi(x,0) \, \mathrm{d}x. \tag{7.123}$$

En las variables transformadas, $I_1 = I_1(\tilde{x}, \tilde{t}, z, \tau)$, etc., donde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \big| v(\tilde{x}+z, \tilde{t}+\tau) - u(\tilde{x}-z, \tilde{t}-\tau) \big| \partial_{\tilde{t}} \varphi(\tilde{x}, \tilde{t}), \\
I_2 &= \operatorname{sgn}\big(v(\tilde{x}+z, \tilde{t}+\tau) - u(\tilde{x}-z, \tilde{t}-\tau) \big) \big(f(\gamma(x), v) - f(\gamma(y), u) \big) \partial_{\tilde{x}} \varphi(\tilde{x}, \tilde{t}) \\
&\quad \times \Big(f\big(\gamma(\tilde{x}+z), v(\tilde{x}+z, \tilde{t}+\tau)\big) - f\big(\gamma(\tilde{x}-z), u(\tilde{x}-z, \tilde{t}-\tau)\big) \Big), \\
I_3^1 &= \operatorname{sgn}\big(v(\tilde{x}+z, \tilde{t}+\tau) - u(\tilde{x}-z, \tilde{t}-\tau) \big) \omega_\varepsilon(z) \omega_\varepsilon(\tau) \\
&\quad \times \Big(\gamma'(\tilde{x}+z) f_\gamma\big(\gamma(\tilde{x}+z), u(\tilde{x}-z, \tilde{t}-\tau)\big) \\
&\qquad - \gamma'(\tilde{x}-z) f_\gamma\big(\gamma(\tilde{x}-z), v(\tilde{x}+z, \tilde{t}+\tau)\big) \Big) \varphi(\tilde{x}, \tilde{t}), \\
I_3^2 &= \operatorname{sgn}\big(v(\tilde{x}+z, \tilde{t}+\tau) - u(\tilde{x}-z, \tilde{t}-\tau) \big) \omega_\varepsilon(z) \omega_\varepsilon(\tau) \partial_{\tilde{x}} \varphi(\tilde{x}, \tilde{t}) \\
&\quad \times \Big(f\big(\gamma(\tilde{x}+z), u(\tilde{x}-z, \tilde{t}-\tau)\big) - f\big(\gamma(\tilde{x}-z), u(\tilde{x}-z, \tilde{t}-\tau)\big) \\
&\qquad + f\big(\gamma(\tilde{x}+z), v(\tilde{x}+z, \tilde{t}+\tau)\big) - f\big(\gamma(\tilde{x}-z), v(\tilde{x}+z, \tilde{t}+\tau)\big) \Big), \\
I_3^3 &= \Big(F\big(\gamma(\tilde{x}+z), v(\tilde{x}+z, \tilde{t}+\tau), u(\tilde{x}-z, \tilde{t}-\tau)\big) \\
&\qquad - F\big(\gamma(\tilde{x}-z), v(\tilde{x}+z, \tilde{t}+\tau), u(\tilde{x}-z, \tilde{t}-\tau)\big) \Big) \varphi(\tilde{x}, \tilde{t}) \omega_\varepsilon(\tau) \partial_z \omega_\varepsilon(z).
\end{aligned}$$

Se pueden deducir facilmente los límites

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iiiint_{\Omega} I_1(\tilde{x}, \tilde{t}, z, \tau) \omega_\varepsilon(z) \omega_\varepsilon(t) \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\tilde{t} \, \mathrm{d}\tilde{x} = \iint_{\Pi_T} |u - v| \varphi_t \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x, \tag{7.124}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iiiint_{\Omega} I_2(\tilde{x}, \tilde{t}, z, \tau) \omega_\varepsilon(z) \omega_\varepsilon(t) \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\tilde{t} \, \mathrm{d}\tilde{x} = \iint_{\Pi_T} F\big(\gamma(x), u, v\big) \varphi_x \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x. \tag{7.125}$$

Como γ es de clase C^1 fuera de $\mathcal{D}_\gamma$, podemos deducir que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \iiiint_{\Omega} I_3^1(\tilde{x}, \tilde{t}, z, \tau) \, \mathrm{d}\tilde{t} \, \mathrm{d}\tilde{x} \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}z &= \iint_{\Pi_T \setminus \mathcal{D}_\gamma} \gamma'(x) F_\gamma\big(\gamma(x), u, v\big) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \\
&\leqslant C \iint_{\Pi_T} |u - v| \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{7.126}$$

donde $C = \|\gamma'\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_\gamma)} \|f_{u\gamma}\|_{L^\infty}$. En particular, se puede elegir $C = 0$ si γ es una función constante a trozos.

Para tratar I_3^2, consideramos que como $\varphi = 0$ cerca de $\mathcal{D}_\gamma$, también I_3^2 desaparece cerca de $\mathcal{D}_\gamma$, luego γ es de clase C^1 uniformemente donde $I_3^2 \neq 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\bigl|I_3^2(\tilde{x},\tilde{t},z,\tau)\bigr| \\
&\leqslant \omega_\varepsilon(z)\omega_\varepsilon(\tau)\bigl|\partial_{\tilde{x}}\varphi(\tilde{x},\tilde{t})\bigr|\Bigl(\bigl|f\bigl(\gamma(\tilde{x}+z),u(\tilde{x}-z,\tilde{t}-\tau)\bigr)-f\bigl(\gamma(\tilde{x}-z),u(\tilde{x}-z,\tilde{t}-\tau)\bigr)\bigr| \\
&\qquad\quad + \bigl|f\bigl(\gamma(\tilde{x}+z),v(\tilde{x}+z,\tilde{t}+\tau)\bigr)-f\bigl(\gamma(\tilde{x}-z),v(\tilde{x}+z,\tilde{t}+\tau)\bigr)\bigr|\Bigr) \\
&\leqslant 2\omega_\varepsilon(z)\omega_\varepsilon(\tau)\bigl|\partial_{\tilde{x}}\varphi(\tilde{x},\tilde{t})\bigr|\|f_\gamma\|_{L^\infty}\bigl|\gamma(\tilde{x}+z)-\gamma(\tilde{x}-z)\bigr| \\
&\leqslant 4\|f_\gamma\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\gamma'\|_{L^\infty(\mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_\gamma)}\omega_\varepsilon(z)\omega_\varepsilon(\tau)\bigl|\partial_{\tilde{x}}\varphi(\tilde{x},\tilde{t})\bigr||z|.
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\iiiint\limits_{\Omega} I_3^2(\tilde{x},\tilde{t},z,\tau)\,\mathrm{d}\tilde{t}\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} C\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|z|\omega_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{7.127}$$

Finalmente tratamos I_3^3. Notando que

$$\begin{aligned}
&\bigl|I_3^3(\tilde{x},\tilde{t},z,\tau)\bigr| \\
&\leqslant \varphi(\tilde{x},\tilde{t})\omega_\varepsilon(\tau)\bigl|\partial_z\omega_\varepsilon(z)\bigr|\Bigl|F\bigl(\gamma(\tilde{x}+z),v(\tilde{x}+z,\tilde{t}+\tau),u(\tilde{x}-z,\tilde{t}-\tau)\bigr) \\
&\qquad\quad - F\bigl(\gamma(\tilde{x}-z),v(\tilde{x}+z,\tilde{t}+\tau),u(\tilde{x}-z,\tilde{t}-\tau)\bigr)\Bigr| \\
&\leqslant 2\varphi(\tilde{x},\tilde{t})\omega_\varepsilon(\tau)\bigl|\partial_z\omega_\varepsilon(z)\bigr|\|\gamma'\|_{L^\infty(\mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_\gamma)}|z|\|f_{\gamma u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\bigl|v(\tilde{x}+z,\tilde{t}+\tau)-u(\tilde{x}-z,\tilde{t}-\tau)\bigr| \\
&\leqslant \|f_{\gamma u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\gamma'\|_{L^\infty(\mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_\gamma)}\varphi(\tilde{x},\tilde{t})\omega_\varepsilon(\tau)\frac{8}{2\varepsilon}\chi_{\{z||z|\leqslant\varepsilon\}}\bigl|v(\tilde{x}+z,\tilde{t}+\tau)-u(\tilde{x}-z,\tilde{t}-\tau)\bigr|
\end{aligned}$$

Sea ahora

$$h_\varepsilon(\tilde{x},\tilde{t}) := \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\bigl|v(\tilde{x}+z,\tilde{t}+\tau)-u(\tilde{x}-z,\tilde{t}-\tau)\bigr|\varphi(\tilde{x},\tilde{t})\omega_\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}z.$$

De acuerdo al Teorema de Derivación de Lebesgue,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(x,t) = \bigl|v(x,t)-u(x,t)\bigr| \quad \text{para casi todo } (x,t),$$

luego

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\iiiint\limits_{\Omega} I_3^3(\tilde{x},\tilde{t},z,\tau)\,\mathrm{d}\tilde{t}\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} C\iint_{\Pi_T}|u-v|\varphi\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x, \tag{7.128}$$

donde $C = 0$ si γ es constante a trozos. Combinando (7.124), (7.125), (7.126), (7.127) y (7.128) obtenemos (7.117). Esto concluye la demostración del Lema 7.11. ■

Con la ayuda del Lema 7.11 podemos continuar demostrando la unicidad de soluciones de entropía. Sea

$$\psi_\varepsilon(x) := \begin{cases} 2 + x/\varepsilon & \text{para } x \in [-\varepsilon, -\varepsilon/2], \\ 1 & \text{para } -\varepsilon/2 < x < \varepsilon/2, \\ 2 - x/\varepsilon & \text{para } x \in [\varepsilon/2, \varepsilon], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

además definimos

$$\Psi_\varepsilon(x) := 1 - \sum_{i=1}^{N} \psi_\varepsilon(x - \xi_i).$$

Observamos que $\Psi_\varepsilon \to 1$ en $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ cuando $\varepsilon \to 0$, y consideraremos sólo valores $\varepsilon < \mathrm{mín}_i\{\xi_{i+1} - \xi_i\}$. Sea $\varphi \in C^1_0(\Pi_T)$ una función test no negativa. Entonces $\phi = \varphi \Psi_\varepsilon$ es una función test admisible (lo que demuestra un argumento de densidad). Además, ϕ posee soporte compacto fuera de $\mathcal{D}_\gamma$. Utilizando esta función test obtenemos a partir de (7.117)

$$\begin{aligned} &- \iint_{\Pi_T} \bigl(|u - v| \Psi_\varepsilon \varphi_t + F(\gamma, u, v) \Psi_\varepsilon \varphi_x \bigr) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \iint_{\Pi_T} F(\gamma, u, v) \Psi'_\varepsilon \varphi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant C \iint_{\Pi_T} |u - v| \Psi_\varepsilon \varphi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v_0| \Psi_\varepsilon \varphi(x, 0) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Sea

$$I_\varepsilon := \iint_{\Pi_T} F(\gamma, u, v) \Psi'_\varepsilon \varphi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$$

y consideremos el límite cuando $\varepsilon \downarrow 0$. Esto entrega

$$\begin{aligned} &- \iint_{\Pi_T} \bigl(|u - v| \varphi_t + F(\gamma, u, v) \varphi_x \bigr) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant C \iint_{\Pi_T} |u - v| \varphi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v_0| \varphi(x, 0) \,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_\varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora utilizamos que ambos pares (u_i^-, u_i^+) y (v_i^-, v_i^+) satisfacen la condición de entropía del salto mínimo, luego podemos aplicar el Lema 7.2 a cada discontinuidad en γ. Así obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_\varepsilon &= \sum_{i=1}^{N} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^T \left(\frac{2}{\varepsilon} \int_{\xi_i + \varepsilon/2}^{\xi_i + \varepsilon} F\bigl(\gamma(x), u, v\bigr) \varphi \,\mathrm{d}x - \frac{2}{\varepsilon} \int_{\xi_i - \varepsilon}^{\xi_i - \varepsilon/2} F\bigl(\gamma(x), u, v\bigr) \varphi \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \bigl(F(\gamma_i^+, u_i^+, v_i^+) - F(\gamma_i^-, u_i^-, v_i^-) \bigr) \varphi(\xi_i, t) \,\mathrm{d}t \leqslant 0. \end{aligned}$$

Concluimos que para cada función test no negativa,

$$- \iint_{\Pi_T} \bigl(|u - v| \varphi_t + F(\gamma, u, v) \varphi_x \bigr) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leqslant C \iint_{\Pi_T} |u - v| \varphi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v_0| \varphi(x, 0) \,\mathrm{d}x. \tag{7.129}$$

Esta desigualdad se parece mucho a (3.31), siendo la diferencia que ahora F reemplaza q y que F depende explícitamente de x. En lo siguiente utilizaremos argumentos parecidos a los que siguen (3.31).

Sea $\alpha_r(x)$ una función suave con valores en $[0,1]$ tal que

$$\alpha_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant r, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant r+1, \end{cases} \quad \text{máx}\left|\alpha_r'(x)\right| \leqslant 2.$$

Fijamos s_0 y s tales que $0 < s_0 < s < T$. Para todo $\kappa > 0$ y $\tau > 0$ tales que $s_0+\tau < s+\kappa < T$ sea $\beta_{\kappa,\tau}(t)$ una función Lipschitz continua lineal sobre $[s_0, s_0+\kappa]$ y $[s, s+\tau]$ tal que

$$\beta_{\kappa,\tau}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < s_0 \text{ o } t > s+\kappa, \\ 1 & \text{si } s \in [s_0+\tau, s]. \end{cases}$$

Por argumentos de densidad $\varphi = \alpha_r \beta_{\kappa,\tau}$ es una función test admisible. Utilizándola en (7.129) obtenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\kappa}\int_s^{s+\kappa}\int_{\mathbb{R}} |u-v|\alpha_r \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\tau}\int_{s_0}^{s_0+\tau}\int_{\mathbb{R}} |u-v|\alpha_r \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant C\int_{s_0}^{s+\kappa}\int_{\mathbb{R}} |u-v|\alpha_r \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + 2\int_{s_0}^{s+\kappa}\int_{r<|x|<r+1} \left|F(\gamma,u,v)\right|\beta_{\kappa,\tau}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Dejando $s_0 \downarrow 0$ y utilizando la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\kappa}\int_s^{s+\kappa}\int_{\mathbb{R}} |u-v|\alpha_r \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |u_0-v_0|\alpha_r\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{\mathbb{R}} \left|v(x,t)-v_0(x)\right|\alpha_r \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{\mathbb{R}} \left|u(x,t)-u_0(x)\right|\alpha_r \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\quad + C\int_{s_0}^{s+\kappa}\int_{\mathbb{R}} |u-v|\alpha_r \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + 2\int_{s_0}^{s+\kappa}\int_{r<|x|<r+1} \left|F(\gamma,u,v)\right|\beta_{\kappa,\tau}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Consideraremos ahora el límite $\tau \downarrow 0$ y demostraremos más adelante que para cada solución de entropía u,

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{\mathbb{R}} \left|u(x,t)-u_0(x)\right|\alpha_r(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0. \tag{7.130}$$

Además, debido a la velocidad de propagación finita, si $u_0(x) = v_0(x)$ para $|x|$ grande, entonces también $u(x,t) = v(x,t)$ para $|x|$ grande, luego $F(\gamma(x), u(x,t), v(x,t)) = 0$ para $|x|$ grande, entonces

$$\lim_{r\to\infty}\int_{s_0}^{s+\kappa}\int_{r<|x|<r+1} \left|F(\gamma,u,v)\right|\beta_{\kappa,\tau}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0.$$

Sea

$$\mathcal{E}(t) := \int_{\mathbb{R}} \left|u(x,t)-v(x,t)\right|\mathrm{d}x.$$

Considerando primero $\tau \downarrow 0$ y luego $r \to \infty$, obtenemos

$$\frac{1}{\kappa}\int_s^{s+\kappa} \mathcal{E}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathcal{E}(0) + C\int_0^{s+\kappa} \mathcal{E}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7.131}$$

Sea s un punto de Lebesgue de la función $\mathcal{E} \in L^1$. Entonces, para $\kappa \downarrow 0$ obtenemos

$$\mathcal{E}(s) \leqslant \mathcal{E}(0) + C\int_0^{s} \mathcal{E}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como el conjunto de los puntos de Lebesgue tiene la medida completa, podemos aplicar la desigualdad de Gronwall para deducir que $\mathcal{E}(t) \leqslant \exp(Ct)\mathcal{E}(0)$ para casi todo $t > 0$.

Queda por verificar (7.130). Para tal efecto definimos

$$\beta_\tau(t) := \begin{cases} 1 - t/\tau & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Luego utilizamos en (7.111) la función test $\omega_\varepsilon(x-y)\beta_\tau(t)\alpha_r(x)$ y la constante $c = u_0(y)$. Esto resulta en

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Pi_T} \bigl|u(x,t) - u_0(y)\bigr|\omega_\varepsilon(x-y)\beta_\tau'(t)\alpha_r(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&+ \iint_{\Pi_T} F\bigl(\gamma(x), u, u_0(y)\bigr)\bigl(\omega_\varepsilon(x-y)\alpha_r(x)\bigr)_x\bigr)\beta_\tau(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&- \iint_{\Pi_T\setminus\mathcal{D}_\gamma} \operatorname{sgn}\bigl(u - u_0(y)\bigr)\partial_x f\bigl(\gamma(x), u_0(y)\bigr)\omega_\varepsilon(x-y)\beta_\tau(t)\alpha_r(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_0^\tau \left(\sum_{i=1}^N \bigl|f\bigl(\gamma_i^+, u_0(y)\bigr) - f\bigl(\gamma_i^-, u_0(y)\bigr)\bigr|\omega_\varepsilon(\xi_i - y)\alpha_r(\xi_i)\right)\beta_\tau(t)\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \bigl|u_0(x) - u_0(y)\bigr|\omega_\varepsilon(x-y)\alpha_r(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Como $u \in L^1_{\mathrm{loc}}$, al pasar al límite $\tau \downarrow 0$ todos los términos de esta expresión que contienen β se anularán. Como $\beta_\tau'(t) = -1/\tau$ para $t \in (0,\tau)$, después de una aplicación de la desigualdad triangular y una integración sobre $y \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\lim_{\tau\downarrow 0} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} \bigl|u(x,t) - u_0(x)\bigr|\alpha_r(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \bigl|u_0(x) - u_0(y)\bigr|\omega_\varepsilon(x-y)\alpha_r(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Como $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, podemos tomar el límite $\varepsilon \downarrow 0$ para demostrar (7.130).

Con todo esto hemos demostrado ahora que el problema de valores iniciales (7.57) es bien puesto en L^1. Concluimos por el siguiente teorema.

Teorema 7.3. *Supogamos que la función de flujo f satisface las hipótesis A.1–A.4, y que $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ y $f(\gamma, u_0) \in BV(\mathbb{R})$. Entonces existe una solución débil de entropía, en el sentido de* (7.58) *y* (7.111)*, del problema de valores iniciales* (7.57).

Si v es otra solución de entropía con el dato inicial v_0, entonces

$$\bigl\|v(\cdot,t) - u(\cdot,t)\bigr\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \exp(Ct)\|v_0 - u_0\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

donde la constante C depende de $\gamma'(x)$ para $x \notin \mathcal{D}_\gamma$, y $C = 0$ si γ es constante a trozos.

Bibliografía

[1] Adimurthi, R. Dutta, S.S. Ghoshal & G.D. Veerappa Gowda, 'Existence and nonexistence of TV bounds for scalar conservation laws with discontinuous flux', *Comm. Pure Appl. Math.* **64** (2011), 84–115.

[2] A. Aw & M. Rascle, 'Resurrection of "second order" models of traffic flow', *SIAM J. Appl. Math.* **60** (2000), 916–938.

[3] A. Baeza, R. Bürger, P. Mulet & D. Zorío, 'WENO reconstructions of unconditionally optimal high order', *SIAM J. Numer. Anal.* **57** (2019), 2760–2784.

[4] A. Baeza, R. Bürger, P. Mulet & D. Zorío, 'An efficient third-order WENO scheme with unconditionally optimal accuracy', *SIAM J. Sci. Comput.* **42** (2020), A1028–A1051.

[5] M. Ben-Artzi & J. Falcovitz, *Generalized Riemann Problems in Computational Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2003.

[6] F. Betancourt, R. Bürger, C. Chalons, S. Diehl & S. Farås, 'A random sampling method for a family of Temple-class systems of conservation laws', *Numer. Math.* **138** (2018), 37–73.

[7] F. Betancourt, R. Bürger, K.H. Karlsen & E.M. Tory, 'On nonlocal conservation laws modeling sedimentation', *Nonlinearity* **24** (2011), 855–885.

[8] A. Bressan, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The One-Dimensional Cauchy Problem*, Oxford University Press, 2000.

[9] A. Bressan, 'BV solutions to Hyperbolic Systems by Vanishing Viscosity', in P. Marcati (Ed.), *Hyperbolic Systems of Balance Laws*, Springer-Verlag, Berlin (2007), 1–77.

[10] A. Bressan, 'Open questions in the theory of one dimensional hyperbolic conservation laws', in A. Bressan, G.-Q. Chen, M. Lewicka & D. Wang (Eds.), *Nonlinear Conservation Laws and Applications*, Springer, New York (2011), 1–22.

[11] R. Bürger, J. Careaga & S. Diehl, 'Entropy solutions of a scalar conservation law modeling sedimentation in vessels with varying cross-sectional area', *SIAM J. Appl. Math.* **77** (2017), 789–811.

[12] R. Bürger, J. Careaga & S. Diehl, 'Flux identification of scalar conservation laws from sedimentation in a cone', *IMA J. Appl. Math.* **83** (2018), 526–552.

[13] R. Bürger, C. Chalons & L.M. Villada, 'Anti-diffusive and random-sampling Lagrangian-remap schemes for the multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic model', *SIAM J. Sci. Comput.* **35** (2013), B1341–B1368.

[14] R. Bürger, A. Coronel & M. Sepúlveda, 'A semi-implicit monotone difference scheme for an initial-boundary value problem of a strongly degenerate parabolic equation modelling sedimentation-consolidation processes', *Math. Comp.* **75** (2006), 91–112.

[15] R. Bürger & S. Diehl, 'Convexity-preserving flux identification for scalar conservation laws modelling sedimentation', *Inverse Problems* **29** (2013), article 045008 (30pp).

[16] R. Bürger, S. Diehl & M.C. Martí, 'A conservation law with multiply discontinuous flux modelling a flotation column', *Netw. Heterog. Media* **13** (2018), 339–371.

[17] R. Bürger, S. Diehl & M.C. Martí, 'A system of conservation laws with discontinuous flux modelling flotation with sedimentation', *IMA J. Appl. Math.* **84** (2019), 930–973.

[18] R. Bürger, S. Diehl, M.C. Martí & Y. Vásquez, 'Flotation with sedimentation: steady states and numerical simulation of transient operation', *Minerals Eng.* **157** (2020), article 106419 (18pp).

[19] R. Bürger, R. Donat, P. Mulet & C.A. Vega, 'Hyperbolicity analysis of polydisperse sedimentation models via a secular equation for the flux Jacobian', *SIAM J. Appl. Math.* **70** (2010), 2186–2213.

[20] R. Bürger, E.D. Fernández-Nieto & V. Osores, 'A dynamic multilayer shallow water model for polydisperse sedimentation', *ESAIM: Math. Model. Numer. Anal.* **53** (2019), 1391–1432.

[21] R. Bürger, A. García, K.H. Karlsen & J.D. Towers, 'A family of schemes for kinematic flows with discontinuous flux', *J. Eng. Math.* **60** (2008), 387–425.

[22] R. Bürger, P. Goatin, D. Inzunza & L.M. Villada, 'A non-local pedestrian flow model accounting for anisotropic interactions and domain boundaries', *Math. Biosci. Eng.* **17** (2020), 5883–5906.

[23] R. Bürger & K.H. Karlsen, 'On a diffusively corrected kinematic-wave traffic model with changing road surface conditions', *Math. Models Methods Appl. Sci.* **13** (2003), 1767–1799.

[24] R. Bürger & K.H. Karlsen, 'Conservation laws with discontinuous flux: a short introduction', *J. Eng. Math.* **60** (2008), 241–247.

[25] R. Bürger, K.H. Karlsen, C. Klingenberg & N.H. Risebro, 'A front tracking approach to a model of continuous sedimentation in ideal clarifier-thickener units', *Nonlin. Anal. Real World Appl.* **4** (2003), 457–481.

[26] R. Bürger, K.H. Karlsen, E.M. Tory & W.L. Wendland, 'Model equations and instability regions for the sedimentation of polydisperse suspensions of spheres', *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* **82** (2002), 699–722.

[27] R. Bürger, K.H. Karlsen, N.H. Risebro & J.D. Towers, 'Well-posedness in BV_t and convergence of a difference scheme for continuous sedimentation in ideal clarifier-thickener units', *Numer. Math.* **97** (2004), 25–65.

[28] R. Bürger, K.H. Karlsen & J.D. Towers, 'Closed-form and finite difference solutions to a population balance model of grinding mills', *J. Eng. Math.* **51** (2005), 165–195.

[29] R. Bürger, K.H. Karlsen & J.D. Towers, 'A model of continuous sedimentation of flocculated suspensions in clarifier-thickener units', *SIAM J. Appl. Math.* **65** (2005), 882–940.

[30] R. Bürger, K.H. Karlsen & J.D. Towers, 'An Engquist-Osher-type scheme for conservation laws with discontinuous flux adapted to flux connections', *SIAM J. Numer. Anal.* **47** (2009), 1684–1712.

[31] R. Bürger, P.E. Méndez & C. Parés, 'On entropy stable schemes for degenerate parabolic multispecies kinematic flow models', *Numer. Meth. Partial Diff. Eqns.* **35** (2019), 1847–1872.

[32] R. Bürger, H. Torres & C.A. Vega, 'An entropy stable scheme for the multiclass Lighthill-Whitham-Richards traffic model', *Adv. Appl. Math. Mech.* **11** (2019), 1022–1047.

[33] J.M. Burgers, 'A mathematical model illustrating the effect of turbulence', *Adv. Appl. Mech.* **1** (1948), 171–199.

[34] M.C. Bustos, F. Concha, R. Bürger & E.M. Tory, *Sedimentation and Thickening: Phenomenological Foundation and Mathematical Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holanda, 1999.

[35] R. Courant, K. Friedrichs & H. Lewy, 'Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik', *Math. Ann.* **100** (1928), 32–73.

[36] M.G. Crandall & A. Majda, 'Monotone difference approximations for scalar conservation laws', *Math. Comp.* **34** (1980), 1–21.

[37] M.G. Crandall & L. Tartar, 'Some relations between nonexpansive and order preserving mappings', *Proc. Amer. Math. Soc.* **78** (1980), 385–390.

[38] C.M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Third Ed., Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[39] C.M. Dafermos, 'Introduction to the Theory of Hyperbolic Conservation Laws', Chapter 1 in R. Abgrall & C.-W. Shu (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, vol. 17: *Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems. Basic and Fundamental Issues*, North-Holland, Amsterdam (2017), 1–18.

[40] C.F. Daganzo, 'Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow', *Transp. Res. B* **29B** (1995), 277–286.

[41] L.C. Evans & R.F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 1992.

[42] M. Garavello, K. Han & B. Piccoli, *Models for Vehicular Traffic on Networks*, American Institute of Mathematical Sciences, Springfield, MO, USA, 2016.

[43] E. Godlewski & P.-A. Raviart, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer-Verlag, New York, 1996.
[44] S.K. Godunov, 'Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics', *Math. Sbornik* **47** (1959), 271–306 (en ruso).
[45] B.D. Greenshields, 'A study of traffic capacity', *Proc. Highway Res. Board* **14** (1935), 448–477 (citado en [58]).
[46] A. Harten, 'High resolution schemes for hyperbolic conservation laws', *J. Comput. Phys.* **49** (1983), 357–381.
[47] A. Harten, J.M. Hyman & P.D. Lax, 'On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks', *Comm. Pure Appl. Math.* **29** (1976), 297–322.
[48] D. Helbing, 'Improved fluid dynamic model for vehicular traffic', *Phys. Rev. E* **51** (1995), 3164–3169.
[49] D. Helbing, *Verkehrsdynamik*, Springer-Verlag, Berlin 1997.
[50] M. Herrmann & B.S. Kerner, 'Local cluster effect in different traffic flow models', *Physica A* **255** (1998), 163–198.
[51] J.S. Hesthaven, *Numerical Methods for Conservation Laws. From Analysis to Algorithms*, SIAM, Philadelphia, USA, 2018.
[52] M. Hilliges & W. Weidlich, 'A phenomenological model for dynamic traffic flow in networks', *Transp. Res. B* **29** (1995), 407–431.
[53] H. Holden & N.H. Risebro, *Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws*, Second Edition, Springer, Berlin, 2015.
[54] H. Holden, K.H. Karlsen, K.-A. Lie & N.H. Risebro, *Splitting Methods for Partial Differential Equations with Rough Solutions*, European Mathematical Society, Zurich, Switzerland, 2010.
[55] K.H. Karlsen, M. Rascle & E. Tadmor, 'On the existence and compactness of a two-dimensional resonant system of conservation laws', *Commun. Math. Sci.* **5** (2007), 253–265.
[56] K.H. Karlsen & N.H. Risebro, 'Convergence of finite difference schemes for viscous and inviscid conservation laws with rough coefficients', *Math. Model. Numer. Anal.* **35** (2001), 239–270.
[57] K.H. Karlsen, N.H. Risebro & J.D. Towers, 'L^1 stability for entropy solutions of nonlinear degenerate parabolic convection-diffusion equations with discontinuous coefficients', *Skr. Norske Vitensk. Selsk.* **3** (2003), 1–49.
[58] A. Klar, R.D. Kühne & R. Wegener, 'Mathematical models for vehicular traffic', *Surv. Math. Ind.* **6** (1996), 215–239.
[59] C. Klingenberg & N.H. Risebro, 'Stability of a resonant system of conservation laws modeling polymer flow with gravitation', *J. Differential Equations* **170** (2001), 344–380.
[60] D. Knees, B. Reidinger & S. Hüeber, *Sedimentationsmodelle in Umwelt- und Aufbereitungstechnik*, Preprint 2000-9, Mathematisches Institut A, Universit.ªt Stuttgart 2000.
[61] D. Kröner, *Numerical Schemes for Conservation Laws*, Wiley-Teubner, Chichester & Stuttgart, 1997.
[62] S.N. Kružkov, 'First order quasi-linear equations in several independent variables', *Math. USSR Sb.* **10** (1970), 217–243.
[63] G.J. Kynch, 'A theory of sedimentation', *Trans. Fraday Soc.* **48** (1952), 166–176.
[64] P.D. Lax, 'Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation', *Comm. Pure Appl. Math.* **7** (1954), 159–193.
[65] P.D. Lax, 'Hyperbolic systems of conservation laws. II', *Comm. Pure Appl. Math.* **10** (1957), 537–566.
[66] P.D. Lax, *Hyperbolic Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
[67] P.D. Lax & B. Wendroff, 'Systems of conservation laws', *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (1960), 217–237.
[68] P.D. Lax, 'Shock waves and entropy'. En: A. Zarantonello (Ed.), *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, Academic Press, New York 1971, 603–634.
[69] R.J. Le Veque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, 2a ed., Birkh.ªuser Verlag, Basel 1992.
[70] R.J. Le Veque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002.

[71] M. Lighthill & G.B. Whitham, 'On kinematic waves I: Flow movement in long rivers; II: A theory of traffic flow on long crowded roads', *Proc. Royal Soc. Edinburgh A* **229** (1955), 281–345.
[72] T.-P. Liu, 'Hyperbolic conservation laws with relaxation', *Comm. Math. Phys.* **108** (1987), 153–175.
[73] A. Meister& J. Struckmeier, *Hyperbolic Partial Differential Equations. Theory, Numerics and Applications*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, Germany, 2002.
[74] S. Müller, *Adaptive Multiscale Schemes for Conservation Laws*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
[75] P. Nelson, 'A kinetic theory of vehicular traffic and its associated bimodal equilibrium solutions', *Transp. Theory Stat. Phys.* **24** (1995), 383–408 (citado en [58]).
[76] O.A. Oleinik, 'Discontinuous solutions of non-linear differential equations', *Amer. Math. Soc. Transl. Ser.* **26** (1963), 95–172.
[77] S. Osher, 'Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations', *SIAM J. Numer. Anal.* **21**(1984), 217–235.
[78] S.L. Paveri-Fontana, 'On Boltzmann-like treatments for traffic flow', *Transp. Res.* **9** (1975), 223–235 (zitiert in [58]).
[79] H.J. Payne, 'Freeflo: a macroscopic simulation model of freeway traffic', *Transp. Res. Rec.* **722** (1979), 68–75 (citado en [58]).
[80] B. Perthame, *Kinetic Formulation of Conservation Laws*, Oxford University Press, 2002.
[81] I. Prigogine, 'A Boltzmann-like approach to the statistical theory of traffic flow'. En: R. Herman (Ed.), *Theory of Traffic Flow*, Elsevier, Amsterdam (1961), 158–164 (citado en [58]).
[82] I. Prigogine & R. Herman, *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*, American Elsevier, New York 1971.
[83] H.-K. Rhee, R. Aris & N.R. Amundson, *First-Order Partial Differential Equations. Volume I: Theory and Application of Single Equations*, Dover, New York, 2001.
[84] H.-K. Rhee, R. Aris & N.R. Amundson, *First-Order Partial Differential Equations. Volume II: Theory and Application of Hyperbolic Systems of Quasilinear Equations*, Dover, New York, 2001.
[85] D. Serre, *Systems of Conservation Laws 1. Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves*, Cambridge University Press, 1999.
[86] D. Serre, *Systems of Conservation Laws 2. Geometric Structures, Oscillations, and Initial-Boundary Value Problems*, Cambridge University Press, 2000.
[87] C.-W. Shu, 'Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws', in A. Quarteroni (Ed.), *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics vol. 1697, Springer-Verlag, Berlin (1998), 325–432.
[88] C.-W. Shu, 'High order weighted essentially nonoscillatory schemes for convection dominated problems', *SIAM Rev.* **51** (2009), 82–126.
[89] C.-W. Shu & S. Osher, 'Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes', *J. Comput. Phys.* **77** (1988), 439–471.
[90] C.-W. Shu & S. Osher, 'Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II', *J. Comput. Phys.* **83** (1989), 32–78.
[91] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer Verlag, Berlin 1983.
[92] G.A. Sod, 'A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws', *J. Comput. Phys.* **27** (1978), 1–31.
[93] E. Tadmor, 'Approximate solutions of nonlinear conservation laws', in A. Quarteroni (Ed.), *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics vol. 1697, Springer-Verlag, Berlin (1998), 1–149.
[94] E. Tadmor, 'Selected topics in approximate solutions of nonlinear conservation laws. High-resolution central schemes', in A. Bressan, G.-Q. Chen, M. Lewicka & D. Wang (Eds.), *Nonlinear Conservation Laws and Applications*, Springer, New York (2011), 101–122.
[95] E. Tadmor, 'Entropy stable schemes', Chapter 18 in R. Abgrall & C.-W. Shu (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, vol. 17: *Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems. Basic and Fundamental Issues*, North-Holland, Amsterdam (2017), 467–493.
[96] B. Temple, 'Global solution of the Cauchy problem for a class of 2×2 non-strictly hyperbolic conservation laws', *Adv. Appl. Math.* **3** (1982), 335–375.

[97] J.W. Thomas, *Numerical Partial Differential Equations. Conservation Laws and Elliptic Equations*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[98] E.F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction*, Third Ed., Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[99] E.F. Toro, 'The Riemann Problem: Solvers and Numerical Fluxes', Chapter 2 in R. Abgrall & C.-W. Shu (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, vol. 17: *Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems. Basic and Fundamental Issues*, North-Holland, Amsterdam (2017), 19–54.

[100] J.A. Trangenstein, *Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2009.

[101] M. Treiber & A. Kesting, *Traffic Flow Dynamics. Data, Models and Simulation*, Springer-Verlag, Berlin, 2013.

[102] G. Warnecke, *Analytische Methoden in der Theorie der Erhaltungsgleichungen*, Teubner Verlag, Stuttgart 1999.

[103] R. Wegener & A. Klar, 'A kinetic model for vehicular traffic derived from a stochastic microscopic model', *Transp. Theory Stat. Phys.* (citado en [58]).

[104] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sonse, New York 1974.

[105] Y.T. Zhang & C.-W. Shu, 'ENO and WENO schemes', Chapter 5 in R. Abgrall & C.-W. Shu (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, vol. 17: *Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems. Basic and Fundamental Issues*, North-Holland, Amsterdam (2017), 103–122.

[106] Y. Zheng, *Systems of Conservation Laws. Two-Dimensional Riemann Problems*, Birkhäuser, Boston, 2001.

[107] W.P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions*, Springer, New York, 1989.