
Ecuaciones Diferenciales II

Carrera Ingeniería Civil Matemática
Curso 525.222
Segundo Semestre de 2022

Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular
CI²MA & Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción
Casilla 160-C
Concepción, Chile

26 de febrero de 2023

Índice general

Capítulo 1. Ecuaciones diferenciales ordinarias: resumen	7
1.1. Ecuaciones de primer orden	7
1.2. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes	8
1.3. Ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes	9
1.4. Ecuaciones de Cauchy-Euler	10
1.5. Funciones y operadores	11
Capítulo 2. Series de Fourier	13
2.1. La serie de Fourier completa	13
2.2. Series de Fourier de senos	17
2.3. Series de Fourier de cosenos	20
2.4. Convergencia y diferenciación	21
Capítulo 3. Problemas de Sturm-Liouville	23
3.1. Problemas de Sturm-Liouville regulares	23
3.2. Otros problemas	32
3.3. Funciones de Bessel	34
3.4. Polinomios de Legendre	37
3.5. Armónicos esféricos	41
Capítulo 4. Algunas ecuaciones fundamentales de la física matemática	45
4.1. La ecuación del calor	45
4.2. La ecuación de Laplace	50
4.3. La ecuación de la onda	54
4.4. Otras ecuaciones	58
Capítulo 5. El método de separación de variables	61
5.1. La ecuación del calor	61
5.2. La ecuación de la onda	70
5.3. La ecuación de Laplace	73
5.3.1. La ecuación de Laplace sobre un rectángulo	74
5.3.2. La ecuación de Laplace sobre un disco circular	76
5.4. Otras ecuaciones	79
5.5. Ecuaciones en más de dos variables	82
5.5.1. Membrana rectangular vibrante	82
5.5.2. Membrana circular vibrante	85
5.5.3. Temperatura de equilibrio en una bola sólida	88

Capítulo 6. Problemas lineales no homogéneos	91
6.1. Soluciones de equilibrio	91
6.1.1. Temperatura prescrita en los extremos	91
6.1.2. Flujo prescrito en los extremos	92
6.1.3. Condiciones de borde mixtas	93
6.1.4. Anillo circular con temperatura prescrita en la frontera	94
6.2. Problemas no homogéneos	95
6.2.1. Condiciones de borde independientes del tiempo	95
6.2.2. Fuentes y condiciones de borde independientes del tiempo	95
6.2.3. El caso general	97
Capítulo 7. El método de expansión en funciones propias	99
7.1. La ecuación del calor	99
7.2. La ecuación de la onda	103
7.3. La ecuación de Laplace	106
7.4. Otras ecuaciones	108
Capítulo 8. Las transformaciones de Fourier	111
8.1. La transformación de Fourier completa	111
8.1.1. Construcción de la transformación	111
8.1.2. El problema de Cauchy para una barra infinita	115
8.1.3. Vibración de una cuerda infinita	116
8.2. Transformaciones seno y coseno de Fourier	117
8.2.1. Conducción del calor en una barra semi-infinita	119
8.2.2. Vibraciones de una cuerda semi-infinita	122
8.2.3. Temperatura de equilibrio en una franja semi-infinita	122
8.3. Otras aplicaciones	124
Capítulo 9. La transformación de Laplace	127
9.1. Definición y propiedades	127
9.2. Aplicaciones	132
9.2.1. El problema de la señal para la ecuación de la onda	132
9.2.2. Conducción del calor en una barra semi-infinita	133
9.2.3. Barra finita con temperatura prescrita en la frontera	135
9.2.4. Problemas de convección-difusión	137
9.2.5. Línea de transmisión con pérdidas	139
Capítulo 10. El método de las funciones de Green	141
10.1. La ecuación del calor	141
10.1.1. El problema de equilibrio	141
10.1.2. El problema transiente	145
10.2. La ecuación de Laplace	147
10.3. La ecuación de la onda	150
Capítulo 11. EDPs lineales de segundo orden en dos variables independientes	155
11.1. La forma canónica	155

11.1.1.	Clasificación	155
11.1.2.	Reducción a la forma canónica	156
11.2.	Ecuaciones hiperbólicas	157
11.3.	Ecuaciones parabólicas	160
11.4.	Ecuaciones elípticas	162
Capítulo 12.	El método de características	163
12.1.	Ecuaciones de primer orden lineales	163
12.2.	Ecuaciones cuasi-lineales de primer orden	169
12.3.	La ecuación de la onda uni-dimensional	170
12.3.1.	La fórmula de d'Alembert	170
12.3.2.	La cuerda vibrante semi-infinita	173
12.3.3.	La cuerda finita	175
12.4.	Otras ecuaciones hiperbólicas	176
12.4.1.	Ondas uni-dimensionales	176
12.4.2.	Ondas esféricas	178
Capítulo 13.	Métodos de perturbación y métodos asintóticos	179
13.1.	Series asintóticas	179
13.2.	Problemas de perturbación regulares	181
13.3.	Problemas de perturbación singulares	187
Capítulo 14.	Métodos de variables complejas	193
14.1.	Ecuaciones elípticas	193
14.2.	Sistemas de ecuaciones	197
Bibliografía		201

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales ordinarias: resumen

El proceso de la solución de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) normalmente se reduce a la solución de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). En este capítulo resumiremos (sin demostraciones) algunas de las técnicas básicas de la solución (integración) de EDOs de los tipos que se presentan más adelante. Nos limitaremos a la discusión de soluciones *reales* de EDOs con coeficientes *reales*. En lo siguiente el conjunto de los números reales será denotado por $\mathbb{R}$.

1.1. Ecuaciones de primer orden

Se dice que una EDO de primer orden *es separable* o *tiene variables separables* si es de la forma

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Bajo precauciones estándar (hay que evitar división por cero) podemos reescribir esta ecuación como

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx,$$

para luego integrar cada lado con respecto a la variable correspondiente.

Ejemplo 1.1. Para la ecuación $y^2 y' - 2x = 0$ este procedimiento entrega

$$\int y^2 dy = 2 \int x dx,$$

con el resultado

$$\frac{1}{3}y^3 = x^2 + c, \quad c = \text{const.},$$

o bien

$$y(x) = (3x^2 + C)^{1/3}, \quad C = \text{const.}$$

La forma general (normal) de una *ecuación lineal* es $y' + p(x)y = q(x)$, donde p y q son funciones dadas. Calculando un *factor integrante* $\mu(x)$ mediante la fórmula

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x) dx\right)$$

obtenemos la solución general

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x) dx$$

o equivalentemente,

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int_a^x \mu(t)q(t) dt + C \right), \quad C = \text{const.},$$

donde a es cualquier punto en el dominio donde la EDO esté definida.

Ejemplo 1.2. La forma normal de la EDO $xy' + 2y - x^2 = 0$, $x \neq 0$ es

$$y' + \frac{2}{x}y = x.$$

Aquí $p(x) = 2/x$ y $q(x) = x$, luego un factor integrante está dado por

$$\mu(x) = \exp\left(2 \int \frac{dx}{x}\right) = \exp(\ln x^2) = x^2.$$

La solución general de la ecuación es

$$y(x) = \frac{1}{x^2} \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^2 + \frac{C}{x^2}, \quad C = \text{const.}$$

1.2. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Consideremos primero las ecuaciones de primer orden, que son de la forma $y' + ay = 0$ con $a = \text{const.}$ Tales ecuaciones pueden ser resueltas mediante un factor integrante o separación de variables, o a través de la *ecuación característica* $s + a = 0$, cuya raíz $s = -a$ entrega la solución general $y(x) = Ce^{-ax}$, $C = \text{const.}$

Ejemplo 1.3. La ecuación característica de la EDO $y' - 3y = 0$ es $s - 3 = 0$, luego la solución general de la ecuación es $y(x) = Ce^{3x}$, $C = \text{const.}$

La forma general de una ecuación de segundo orden es $y'' + ay' + by = 0$, $a, b = \text{const.}$ con la ecuación característica $s^2 + as + b = 0$. Si ésta posee dos raíces $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \neq s_2$, entonces la solución de la EDO dada es

$$y(x) = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Si $s_1 = s_2 = s_0$, entonces

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{s_0 x}, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Finalmente, si s_1 y s_2 son raíces complejas conjugadas, es decir $s_1 = \alpha + \beta i$ y $s_2 = \alpha - \beta i$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, entonces la solución general está dada por

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)), \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Recordemos la definición de las funciones hiperbólicas:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Comentario 1.1. Si $s_1 = -s_2 = s_0$, $s_0 \in \mathbb{R}$, entonces la solución general de la ecuación también puede ser escrita como

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 = \text{const.},$$

donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son cualquier dos de las funciones

$$\cosh(s_0x), \quad \sinh(s_0x), \quad \cosh(s_0(x-c)), \quad \text{y} \quad \sinh(s_0(x-c)),$$

donde $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ es cualquier número. Normalmente se elige c como el punto donde una condición de borde esté especificada.

Ejemplo 1.4. La ecuación característica de la EDO $y'' - 3y' + 2y = 0$ es $s^2 - 3s + 2 = 0$ con las raíces $s_1 = 1$ y $s_2 = 2$, luego la solución general de la EDO es

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Ejemplo 1.5. La solución general de la ecuación $y'' - 4y = 0$ es

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}, \quad C_1, C_2 = \text{const.},$$

ya que las raíces de su ecuación característica son $s_1 = -s_2 = 2$. De acuerdo al Comentario 1.1, existen expresiones alternativas en términos de funciones hiperbólicas. Por ejemplo, si $y(0)$ e $y(1)$ están dados, la solución general debe ser escrita en la forma

$$y(x) = C_1 \sinh(2x) + C_2 \sinh(2(x-1)), \quad C_1, C_2 = \text{const.};$$

si $y(0)$ e $y'(3)$ están dados, la forma preferida es

$$y(x) = C_1 \sinh(2x) + C_2 \cosh(2(x-3)), \quad C_1, C_2 = \text{const.};$$

etcétera.

Ejemplo 1.6. Las raíces de la ecuación característica de la EDO $y'' + 4y' + 4y = 0$ son $s_1 = s_2 = -2$, por lo tanto la solución general de la EDO es

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}, \quad C_1, C_2 = \text{const.};$$

Ejemplo 1.7. La solución general de la ecuación $y'' + 4y = 0$ es

$$y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x), \quad C_1, C_2 = \text{const.},$$

porque su ecuación característica posee las raíces $s_1 = 2i$ y $s_2 = -2i$.

Comentario 1.2. El método de la ecuación característica también puede ser aplicado para hallar la solución general de EDOs lineales homogéneas de orden superior.

1.3. Ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes

Las ecuaciones de primer orden de este tipo son de la forma $y' + ay = f$, $a = \text{const.}$, y las de segundo orden pueden ser escritas como $y'' + ay' + by = f$, $a, b = \text{const.}$, donde en cada caso f es una función dada. La solución general de tales ecuaciones es la suma de la *función complementaria* (la solución general de la ecuación homogénea correspondiente) y una *integral particular* (una solución particular de la ecuación no homogénea). Esta última normalmente es “adivinada” a partir de la estructura de la función f o puede ser determinada por otro método tal como la variación de parámetros.

Ejemplo 1.8. La función complementaria de la EDO $y' - 3y = e^{-x}$ es $y_{FC} = Ce^{3x}$, $C = \text{const.}$ Buscando una integral particular de la forma $y_{IP} = ae^{-x}$, $a = \text{const.}$, obtenemos $a = -1/4$ a partir de la ecuación. Por lo tanto, la solución general de la EDO está dada por

$$y = Ce^{3x} - \frac{1}{4}e^{-x}, \quad C = \text{const.}$$

Ejemplo 1.9. Si la función en el lado derecho del Ejemplo 1.8, e^{-x} , es reemplazada por e^{3x} , no podemos hallar una integral particular de la forma ae^{3x} , $a = \text{const.}$, ya que esta expresión es una solución de la ecuación homogénea correspondiente. En lugar este planteo tratamos $y_{IP} = axe^{3x}$; a partir de la EDO obtenemos $a = 1$; luego la solución general de la EDO está dada por

$$y = Ce^{3x} + xe^{3x} = (c + x)e^{3x}, \quad C = \text{const.}$$

Ejemplo 1.10. Para la EDO $y'' + 4y = 4x^2$ se busca una integral particular de la forma

$$y_{IP} = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c = \text{const.}$$

Sustituyendo este planteo en la ecuación obtenemos $a = 1$, $b = 0$ y $c = -1/2$. Como la función complementaria es

$$y_{FC} = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x),$$

obtenemos la solución general de la EDO dada

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + x^2 - \frac{1}{2}, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

1.4. Ecuaciones de Cauchy-Euler

Cualquier ecuación diferencial lineal de la forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x),$$

donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ son constantes, se conoce como *ecuación de Cauchy-Euler*, *ecuación de Euler* o *ecuación equidimensional*. Consideremos el caso $n = 2$ de una ecuación homogénea de este tipo, es decir

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, \quad \alpha, \beta = \text{const.},$$

donde suponemos que $x > 0$. Se busca una solución $y = x^r$, $r = \text{const.}$ Insertando este planteo obtenemos

$$r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0.$$

Si las raíces r_1 y r_2 de esta ecuación cuadrática son reales y distintas (caso que nos interesa), entonces la solución general de la EDO dada es

$$y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Ejemplo 1.11. De acuerdo al procedimiento anterior, la ecuación diferencial

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0$$

entrega $r_1 = -1$ y $r_2 = -1/2$, por lo tanto su solución general es

$$y = C_1x^{-1} + C_2x^{-1/2}, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

1.5. Funciones y operadores

Definición 1.1. Sea $\mathcal{X}$ un espacio de funciones y sea L un operador definido sobre $\mathcal{X}$. Entonces se dice que L es lineal si para cada par de funciones $f_1, f_2 \in \mathcal{X}$ y cualquier par de números c_1 y c_2 ,

$$L(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1L(f_1) + c_2L(f_2).$$

En caso contrario el operador L se llama no lineal.

Ejemplo 1.12. Los operadores de diferenciación y de integración definida, actuando sobre funciones adecuadas de una variable independiente, son lineales, ya que para cada par de funciones f_1 y f_2 y constantes c_1, c_2 ,

$$\begin{aligned} L(c_1f_1 + c_2f_2) &= (c_1f_1 + c_2f_2)' = c_1f_1' + c_2f_2' = c_1(Lf_1) + c_2(Lf_2), \\ L(c_1f_1 + c_2f_2) &= \int_a^b (c_1f_1(x) + c_2f_2(x)) \, dx = c_1 \int_a^b f_1(x) \, dx + c_2 \int_a^b f_2(x) \, dx \\ &= c_1(Lf_1) + c_2(Lf_2). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.13. Sean α, β y γ funciones dadas. Entonces en virtud del Ejemplo 1.12, se puede verificar fácilmente que también el siguiente operador es lineal:

$$Lf = \alpha f'' + \beta f' + \gamma f.$$

Ejemplo 1.14. Sea L el operador definido por $Lf = ff'$. Como

$$\begin{aligned} L(c_1f_1 + c_2f_2) &= (c_1f_1 + c_2f_2)(c_1f_1 + c_2f_2)' \\ &= c_1^2f_1f_1' + c_1c_2(f_1f_2' + f_1'f_2) + c_2^2f_2f_2' \end{aligned}$$

y

$$c_1(Lf_1) + c_2(Lf_2) = c_1f_1f_1' + c_2f_2f_2'$$

no son iguales para todas las funciones f_1 y f_2 y todos los números c_1 y c_2 , el operador L es no lineal.

Definición 1.2. Una ecuación diferencial de la forma $Lu = g$, donde L es un operador diferencial lineal y g es una función dada, se llama ecuación lineal. Si el operador L es no lineal, entonces la ecuación también se llama no lineal.

El siguiente resultado caso obvio forma la base de lo que se conoce como *principio de superposición*.

Teorema 1.1. Si $Lu = g$ es una ecuación lineal y u_1 y u_2 son soluciones de esta ecuación con $g = g_1$ y $g = g_2$, respectivamente, entonces también $u_1 + u_2$ es una solución de esta ecuación con $g = g_1 + g_2$; en otras palabras, si $Lu_1 = g_1$ y $Lu_2 = g_2$, entonces $L(u_1 + u_2) = g_1 + g_2$.

Capítulo 2

Series de Fourier

Es bien sabido que una función $f = f(x)$ infinitamente diferenciable puede ser expandida en una serie de Taylor alrededor de un punto x_0 del intervalo donde esté definida. Esta serie posee la forma

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad (2.1)$$

con los coeficientes c_n dados por

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad f^{(n)}(x) := \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Se sabe que bajo ciertas hipótesis, la serie (2.1) converge hacia f puntualmente (es decir, en cada punto x) en un intervalo abierto centrado en x_0 , y podemos utilizar el símbolo “=” (en lugar de “ $\sim$ ”) en (2.1). En este capítulo estudiaremos otro tipo de expansiones el cual será particularmente útil para el estudio y la solución de EDPs.

2.1. La serie de Fourier completa

La *serie de Fourier completa* es una expansión de la forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (2.2)$$

donde $L > 0$ y $a_0, \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son coeficientes constantes.

Definición 2.1. Una función f definida sobre $\mathbb{R}$ se llama periódica si existe un número $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. El número menor T con esta propiedad se llama período fundamental (o simplemente período) de f . Obviamente, una función periódica también satisface $f(x + nT) = f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1. Es bien sabido que las funciones $\sin x$ y $\cos x$ son periódicas con período 2π ya que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ y $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Observamos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \cos \frac{n\pi(x + 2L)}{L} &= \cos \left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi \right) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \\ \sin \frac{n\pi(x + 2L)}{L} &= \sin \left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi \right) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \end{aligned}$$

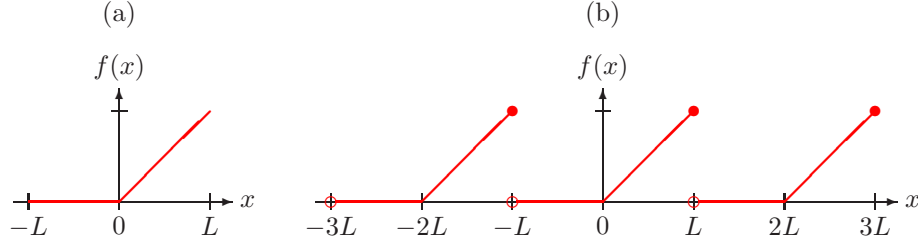


FIGURA 2.1. (a) Función $f(x)$ para $-L \leq x \leq L$, (b) función periódica con $f(x+2L) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

luego el lado derecho de (2.2) es periódico con período $2L$. Esto sugiere el siguiente método de construcción de la serie de Fourier completa para una función dada.

Sea f definida sobre $[-L, L]$ (ver Figura 2.1 (a)). Construiremos la extensión periódica de f desde $(-L, L]$ a todo $\mathbb{R}$. El valor de f en $x = -L$ es omitido para lograr que la extensión sea correctamente definida como función (ver Figura 2.1 (b)). Para la función f así extendida ahora es razonable buscar una expansión del tipo (2.2). Lo único que hay que hacer es calcular los coeficientes a_0 , $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y discutir la convergencia de la serie. Para tal efecto notamos primeramente que

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ L & \text{si } n = m, \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ L & \text{si } n = m, \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Considerando (2.2) formalmente como igualdad, podemos integrar la serie término por término sobre $[-L, L]$ y utilizar (2.3) para obtener

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (2.7)$$

Multiplicando (2.2) por $\cos(m\pi x/L)$, integrando la nueva relación sobre $[-L, L]$, y considerando (2.3), (2.4) y (2.6) obtenemos que todas las integrales en el lado derecho se anulan con la excepción de aquellos para los cuales el índice de sumación n es igual a m , cuando el valor de la integral es igual a La_m . Reemplazando m por n obtenemos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Claramente, (2.8) incluye (2.7) si admitimos $n = 0$, es decir $n \in \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}_0$.

Finalmente, multiplicando (2.2) por $\sin(m\pi x/L)$ y repitiendo el procedimiento, donde esta vez utilizamos (2.3), (2.5) y (2.6), obtenemos

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.9)$$

lo que completa la construcción de la serie de Fourier (completa) de f . Los números a_0 , $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dados por (2.7)–(2.9) se llaman *coeficientes de Fourier* de f .

La serie de Fourier definida por el lado derecho de (2.2) nos interesa solamente sobre el intervalo $[-L, L]$ donde la función f original es definida. La serie puede ser divergente o converger hacia un valor diferente de $f(x)$.

Definición 2.2. Se dice que una función f es continua a trozos sobre un intervalo $[a, b]$ si f es continua en todas partes con la excepción de un conjunto finito de puntos en $[a, b]$ donde posee discontinuidades de salto, es decir, en cualquier punto de discontinuidad x donde la función posee límites por la derecha y por la izquierda, denotados por

$$f(x+) := \lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi > x}} f(\xi), \quad f(x-) := \lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi < x}} f(\xi),$$

respectivamente, diferentes ($f(x+) \neq f(x-)$). Si ambas funciones f y f' son continuas sobre $[a, b]$, entonces se dice que f es suave sobre $[a, b]$. Si por lo menos una de las funciones f y f' es continua a trozos sobre $[a, b]$, entonces se dice que f es suave a trozos sobre $[a, b]$.

Comentario 2.1. Si f es continua a trozos sobre $[-L, L]$, entonces los valores de f en los puntos de discontinuidad no afectan la construcción de su serie de Fourier. Precisamente, la integral

$$\int_{-L}^L f(x) dx$$

existe para una función de este tipo y es independiente de los valores asignados en uno de sus puntos de discontinuidad (cuya cantidad es finita, según hipótesis).

Teorema 2.1. Sea f suave a trozos sobre un intervalo $[-L, L]$. Entonces su serie de Fourier (completa) converge puntualmente a

- (i) la extensión periódica de f a $\mathbb{R}$ en todos los puntos x donde esta extensión es continua,
- (ii) $\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+))$ en aquellos puntos x donde la extensión periódica de f posee una discontinuidad de salto.

Esto significa que para cada $x \in (-L, L)$ donde f es continua, la suma de la serie en (2.2) es igual a $f(x)$. También, si f es continua sobre $[-L, L]$ y tal que $f(-L) = f(L)$, entonces la suma de (2.2) es igual a $f(x)$ en todo punto $x \in [-L, L]$.

Ejemplo 2.2. Consideremos la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{para } -2 \leq x < 0, \\ 0 & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(ver Figura 2.2 (a)) y su extensión periódica con un período de longitud 4 (ver Figura 2.2 (b)).

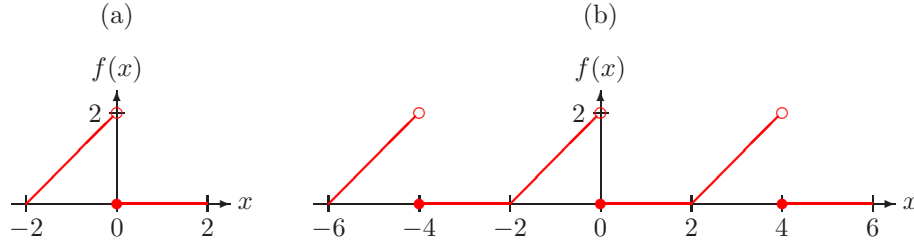


FIGURA 2.2. Ejemplo 2.2: (a) función $f(x)$ para $-2 \leq x \leq 2$, (b) función periódica con $f(x+4) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

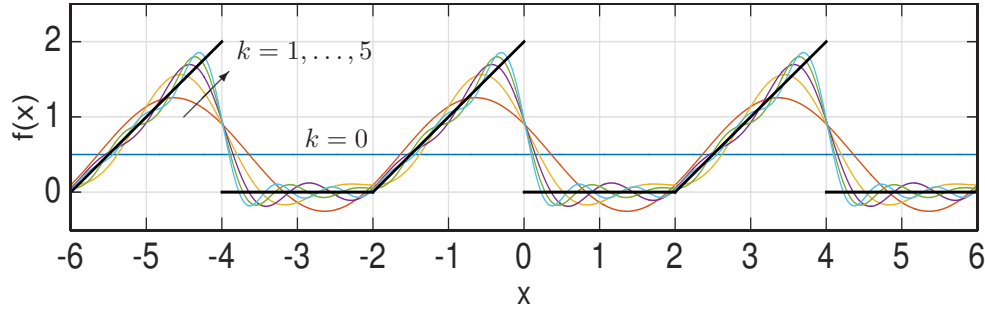


FIGURA 2.3. Ejemplo 2.2: aproximaciones $S_k^f(x)$ para $k = 0, \dots, 5$ y extensión 4-periódica de $f(x)$ (línea negra sólida).

Utilizando (2.7)–(2.9) con $L = 2$ e integración por partes obtenemos

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (x+2) dx = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (x+2) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = (1 - (-1)^n) \frac{2}{n^2 \pi^2},$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (x+2) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{2}{n\pi}; \quad n \in \mathbb{N},$$

luego a partir de (2.2) obtenemos la serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((1 - (-1)^n) \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right).$$

En virtud del Teorema 2.1, para $-2 \leq x \leq 2$,

$$(\text{serie}) = \begin{cases} x+2 & \text{para } -2 \leq x < 0, \\ 1 & \text{para } x = 0, \\ 0 & \text{para } 0 < x \leq 2, \end{cases}$$

es decir la serie converge a $f(x)$ para $-2 \leq x < 0$ y $0 < x \leq 2$, donde la extensión periódica de f es continua (ver Figura 2.2 (b)), en el punto $x = 0$, donde esta extensión posee una

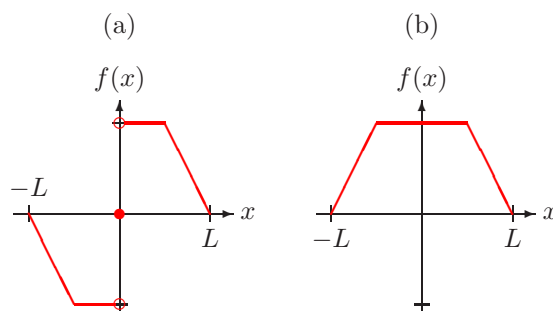


FIGURA 2.4. (a) Una función impar, (b) una función par.

discontinuidad de salto, la serie converge hacia

$$\frac{1}{2}(f(0-) + f(0+)) = \frac{1}{2}(2 + 0) = 1.$$

Podemos también ilustrar la forma en la que la serie aproxima la función f . Para tal efecto definimos la sucesión de sumas parciales

$$S_k^f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \left((1 - (-1)^n) \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right)$$

(notar que $S_0^f \equiv 1/2$). La Figura 2.3 muestra estas aproximaciones para $k = 0, \dots, 5$.

2.2. Series de Fourier de senos

Para ciertas clases de funciones la serie (2.2) posee una forma más simple.

Definición 2.3. Sea una función f definida sobre un intervalo I simétrico con respecto al origen $x = 0$. Entonces esta función se llama impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in I$, y par si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Ejemplo 2.3.

- (i) Las funciones $\sin(n\pi x/L)$, $n \in \mathbb{N}$ son impares. Las funciones $\cos(n\pi x/L)$, $n \in \mathbb{N}$ son pares.
- (ii) La función en la Figura 2.4 (a) es impar (su grafo es simétrico con respecto al origen). La función en la Figura 2.4 (b) es par (su grafo es simétrico con respecto al eje y). Las funciones en las Figuras 2.1 (a) y 2.2 (a) son ni impares, ni pares.

Comentario 2.2.

- (i) Se puede verificar fácilmente que el producto de dos funciones impares es par, que el producto de dos funciones pares es par, y que el producto de una función impar con una función par es impar.
- (ii) Si f es impar sobre $[-L, L]$, entonces

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_L^0 f(-x) d(-x) = - \int_0^L f(x) dx,$$

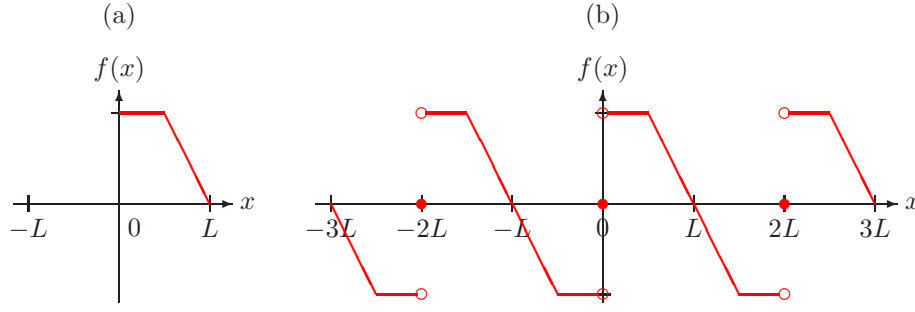


FIGURA 2.5. (a) La función $f(x)$, $0 \leq x \leq L$, (b) extensión $2L$ -periódica de la extensión impar de f .

luego

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx = 0.$$

Si f es par sobre $[-L, L]$, entonces

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_L^0 f(-x) d(-x) = \int_0^L f(x) dx,$$

luego

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx.$$

- (iii) Si f es impar, entonces también $f(x) \cos(n\pi x/L)$ es impar, luego en virtud de (2.7), (2.8) e ítem (ii), $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, es decir la serie de Fourier de una función impar sobre $[-L, L]$ contiene solamente los términos de senos. Análogamente, si f es par, entonces de acuerdo al ítem (i), $f(x) \sin(n\pi x/L)$ es impar, luego (2.9) implica que $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir la serie de Fourier de una función par sobre $[-L, L]$ contiene solamente los términos de cosenos, incluido el término constante.

El ítem (iii) del Comentario 2.2 implica que si f es definida sobre $[0, L]$, entonces puede ser expandida en una *serie de Fourier de senos*. Consideremos la función f cuyo grafo es mostrado en la Figura 2.5 (a). Construimos la extensión impar de f desde $(0, L]$ a $[-L, L]$ definiendo $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-L, L]$, $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. El resultado es la función mostrada en la Figura 2.4 (a). Luego construimos la extensión periódica del período $2L$ de esta función impar desde $(-L, L]$ a todo $\mathbb{R}$, exigiendo que $f(x + 2L) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (ver Figura 2.5 (b)). Finalmente, construimos la serie de Fourier (de senos) de ésta última función, la cual es de la forma

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

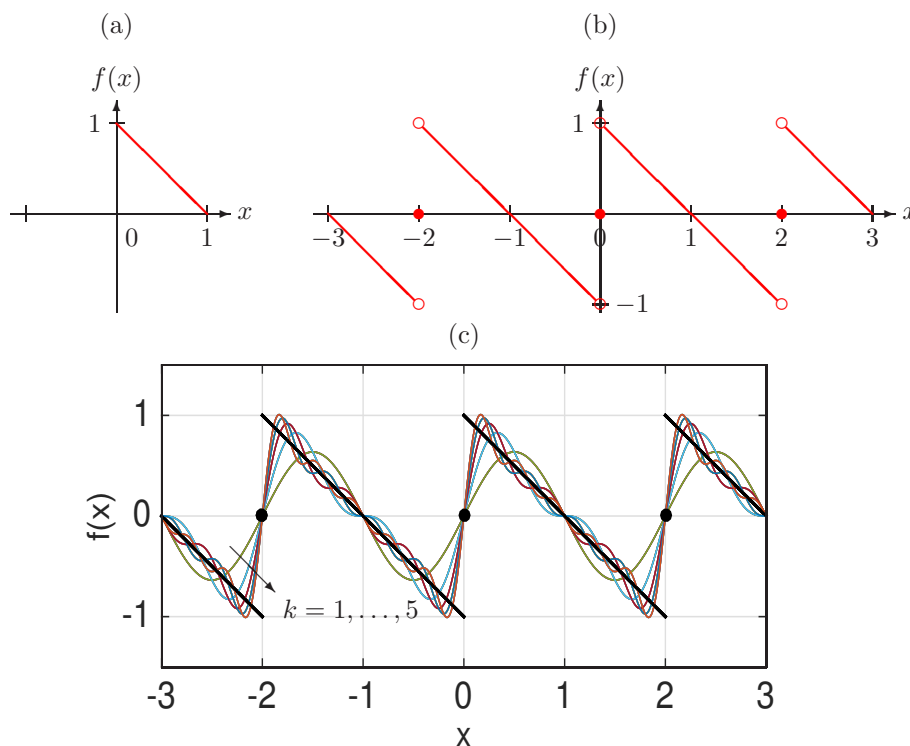


FIGURA 2.6. Ejemplo 2.4: (a) la función $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, (b) extensión 2-periódica de la extensión impar de f , (c) aproximaciones $S_k^f(x)$ para $k = 1, \dots, 5$ de esta extensión impar (línea negra sólida).

donde de acuerdo a los ítemes (ii) y (iii) del Comentario 2.2 y (2.9), los coeficientes están dados por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Ejemplo 2.4. Consideremos la función

$$f(x) = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.11)$$

graficada en la Figura 2.6 (a). Construimos la extensión impar de esta función al intervalo $[-1, 1]$ definida por $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-1, 1]$, $x \leq 0$, y $f(0) = 0$. Luego se define la extensión a $\mathbb{R}$, del período $2L = 2$, definida por $f(x + 2) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (Figura 2.6 (b)). Finalmente, utilizando (2.10) e integrando por partes, obtenemos

$$b_n = 2 \int_0^1 (1 - x) \sin(n\pi x) dx = \frac{2}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N},$$

luego

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi x).$$

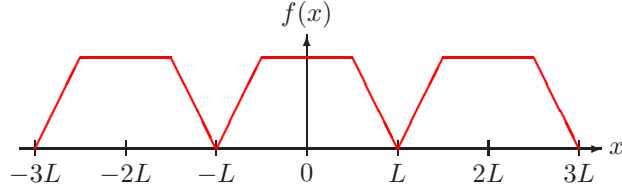


FIGURA 2.7. Extensión periódica de la extensión par de la función definida sobre $[0, L]$ graficada en la Figura 2.5 (a).

En virtud del Teorema 2.1 se obtiene para $0 \leq x \leq 1$

$$(\text{serie}) = \begin{cases} 0 & \text{para } x = 0, \\ 1 - x & \text{para } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

es decir la serie converge a $f(x)$ para $0 < x \leq 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir en aquellos puntos donde la extensión periódica de f a $\mathbb{R}$ es continua, y a

$$\frac{1}{2}(f(0-) + f(0+)) = \frac{1}{2}(-1 + 1) = 0$$

en $x = 0$, donde la extensión periódica posee una discontinuidad de salto.

2.3. Series de Fourier de cosenos

A raíz del ítem (iii) del Comentario 2.2, una función definida sobre $[0, L]$ también puede ser expandida en una serie de Fourier de cosenos. La construcción es similar a la construcción de una serie de Fourier de senos. Para tal efecto consideremos una función f definida sobre un intervalo $[0, L]$, por ejemplo la función graficada en la Figura 2.5 (a). Entonces esta función puede ser extendida a una función par definida sobre el intervalo $[-L, L]$ mediante $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [-L, L]$, lo que en este caso entrega la función graficada en la Figura 2.4 (b). Luego construimos la extensión $2L$ -periódica de esta función desde el intervalo $[-L, L]$ a todo $\mathbb{R}$, ver Figura 2.7. Finalmente, notamos que la serie de Fourier (de cosenos) de esta función es de la forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L},$$

donde de acuerdo a (2.7), (2.8), e ítem (ii) del Comentario 2.2,

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

(La fórmula para a_0 está incluida en la fórmula para a_n para $n = 0$.)

Ejemplo 2.5. Consideremos nuevamente la función f dada por (2.11). La extensión par de f a $[-1, 1]$, definida por $f(-x) = x$ para todo $x \in [-1, 1]$, es

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{para } x \in [-1, 0], \\ 1 - x & \text{para } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

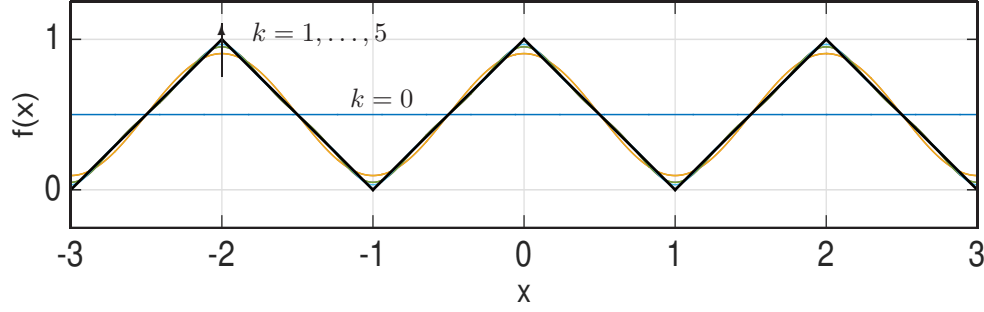


FIGURA 2.8. Ejemplo 2.5: aproximaciones $S_k^f(x)$ para $k = 0, \dots, 5$ de la extensión par y periódica (línea negra sólida).

La extensión periódica de esta función con período $2L = 2$ es definida por $f(x + 2) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Finalmente, podemos utilizar (2.12) con $L = 1$ y aplicar integración por partes para obtener

$$a_0 = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 (1 - x) dx = 1,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 (1 - x) \cos(n\pi x) dx = (1 - (-1)^n) \frac{2}{n^2\pi^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

es decir la serie de Fourier está dada por

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n) \frac{2}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x).$$

A partir del Teorema 2.1 se obtiene

$$(\text{serie}) = 1 - x \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1,$$

ya que la extensión periódica de f a $\mathbb{R}$ es continua en todas partes. La Figura 2.8 muestra las aproximaciones obtenidas por las sumas parciales $f_0, \dots, f_5$ correspondientes.

2.4. Convergencia y diferenciación

Hay algunos puntos importantes que comentar en esta etapa.

Comentario 2.3.

- (i) Es obvio que una función f definida sobre el intervalo $[0, L]$ puede ser expandida en una serie de Fourier completa, o en una serie de senos, o en una serie de cosenos. Mientras que éstas dos últimas son únicas para la función dada, la primera no lo es: como la serie de Fourier completa no requiere simetría, podemos extender f desde $[0, L]$ a $[-L, L]$ en un número infinito de formas. Normalmente se escoge el tipo de serie más apropiado para el problema bajo consideración. Una función definida sobre $[-L, L]$ puede, en general, ser expandida sólo en una serie de Fourier completa.

- (ii) Ya vimos que no podemos automáticamente suponer igualdad entre una función f y su serie de Fourier. De acuerdo al Teorema 2.1, para una serie de Fourier completa dicha igualdad es válida en todos los puntos en $[-L, L]$ donde f es continua; también es válida en $x = -L$ y $x = L$ si f es continua en estos puntos desde la derecha y desde la izquierda, respectivamente, y $f(-L) = f(L)$. Para una serie de senos esta consideración es válida en $x = L$ si en este punto f es continua desde la izquierda y $f(L) = 0$. Para una serie de cosenos esto siempre es posible si f es continua desde la izquierda en $x = L$. Podemos utilizar argumentos similares para las series de senos y de cosenos en $x = 0$. En lo siguiente trabajaremos exclusivamente con funciones suaves a trozos; por lo tanto, para evitar notación complicada y eventual confusión, utilizaremos la igualdad en todas las circunstancias, donde se supone implícitamente que la igualdad es entendida en el sentido del Teorema 2.1, del Comentario 2.1, y de los presentes comentarios.

En las aplicaciones prácticas frecuentemente habrá que diferenciar una serie de Fourier término por término, por lo tanto es importante saber cuando esta operación puede ser realizada.

Teorema 2.2.

- (i) Si f es continua sobre $[-L, L]$, $f(-L) = f(L)$, y f' es suave a trozos sobre $[-L, L]$, entonces la serie de Fourier completa de f puede ser diferenciada término por término y la serie que resulta es la serie de Fourier de f' , la cual converge a $f'(x)$ en todos los puntos x donde $f''(x)$ existe.
- (ii) Si f es continua sobre $[0, L]$, $f(0) = f(L) = 0$, y f' es suave a trozos sobre $[0, L]$, entonces la serie de Fourier de senos de f puede ser diferenciada término por término y la serie que resulta es la serie de Fourier de cosenos de f' , la cual converge a $f'(x)$ en todos los puntos x donde $f''(x)$ existe.
- (iii) Si f es continua sobre $[0, L]$ y f' es suave a trozos sobre $[0, L]$, entonces la serie de Fourier de cosenos de f puede ser diferenciada término por término y la serie que resulta es la serie de Fourier de senos de f' , la cual converge a $f'(x)$ en todos los puntos x donde $f''(x)$ existe.

En los problemas de EDPs a ser discutidos en el resto de estos apuntes las condiciones del Teorema 2.2 siempre estarán satisfechas y formalmente diferenciaremos las series de Fourier correspondientes término por término sin explícitamente mencionar estas condiciones.

Capítulo 3

Problemas de Sturm-Liouville

Existe una clase de problemas que involucran EDOs de segundo orden que juegan un rol importante para la solución de EDPs. Aquí discutiremos los resultados más importantes en torno a estos problemas, los cuales generan el fundamento del método de separación de variables y la expansión en funciones propias.

3.1. Problemas de Sturm-Liouville regulares

Para evitar notación complicada denotaremos un intervalo siempre por I , independientemente de si se trata de un intervalo cerrado, abierto o semiabierto, acotado o infinito. Intervalos específicos serán identificados por sus extremos o en términos de desigualdades. Se supone que las funciones definidas sobre tales intervalos son integrables sobre los intervalos respectivos.

Definición 3.1. Sea $\mathcal{X}$ un espacio de funciones definidas sobre un intervalo I . Un operador lineal diferencial L actuando sobre $\mathcal{X}$ se llama *simétrico* si para cualquier $f_1, f_2 \in \mathcal{X}$,

$$\int_I (f_1(x)(Lf_2)(x) - f_2(x)(Lf_1)(x)) \, dx = 0.$$

Ejemplo 3.1. Sea $\mathcal{X}$ el espacio de las funciones dos veces continuamente diferenciables sobre $[0, 1]$ y que se anulen en $x = 0$ y $x = 1$. Sea $L \equiv d^2/dx^2$. Entonces mediante integración por partes obtenemos que para cualquier par de funciones $f_1, f_2 \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f_1(Lf_2) - f_2(Lf_1)) \, dx &= \int_0^1 (f_1 f_2'' - f_2 f_1'') \, dx \\ &= [f_1 f_2']_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f_1' f_2' \, dx - [f_2 f_1']_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 f_1' f_2' \, dx = 0, \end{aligned}$$

luego L es *simétrico* sobre $\mathcal{X}$.

Comentario 3.1. Un operador puede ser *simétrico* sobre un espacio de funciones pero no sobre otro. Si no se impone ninguna restricción con respecto a los valores en $x = 0$ y $x = 1$ de las funciones del Ejemplo 3.1, entonces L no es *simétrico* sobre el espacio $\mathcal{X}$ nuevo.

Definición 3.2. Sea σ una función definida en I con $\sigma(x) > 0$ para todo $x \in I$. Si f_1 y f_2 son dos funciones definidas también en I , entonces éstas se llaman *ortogonales con peso σ* sobre I si

$$\int_I f_1(x) f_2(x) \sigma(x) \, dx = 0.$$

En el caso $\sigma \equiv 1$ las funciones f_1 y f_2 se dicen simplemente ortogonales. Un conjunto de funciones ortogonales por pares se llama conjunto ortogonal.

Ejemplo 3.2. Las funciones $f_1 \equiv 1$ y $f_2(x) = 9x - 5$ son ortogonales con el peso $\sigma(x) = x + 1$ sobre $[0, 1]$ porque

$$\int_0^1 (9x - 5)(x + 1) dx = \int_0^1 (9x^2 + 4x - 5) dx = 0.$$

Alternativamente podemos decir que las funciones $f_1(x) = x + 1$ y $f_2(x) = 9x - 5$ son ortogonales sobre $[0, 1]$.

Ejemplo 3.3. Las funciones $\sin(3x)$ y $\cos(2x)$ son ortogonales sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ porque

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) \cos(2x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(5x) + \sin(x)) dx = 0.$$

Definición 3.3. Sea L un operador lineal actuando sobre un espacio $\mathcal{X}$ de funciones definidas sobre (a, b) . Una ecuación de la forma

$$(Lf)(x) + \lambda \sigma(x) f(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (3.1)$$

donde λ es un parámetro (real) y σ es una función dada tal que $\sigma(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, se llama problema de valores propios. Los números λ para los cuales (3.1) posee soluciones no nulas en $\mathcal{X}$ se llaman valores propios, y las soluciones correspondientes no nulas se llaman funciones propias.

Teorema 3.1. Si el operador L del problema de valores propios (3.1) es simétrico, entonces

- (i) todos los valores propios λ son reales,
- (ii) los valores propios forman una sucesión infinita $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ tal que $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$,
- (iii) las funciones propias asociadas con valores propios distintos son ortogonales con peso σ sobre (a, b) .

Definición 3.4. Sea $[a, b]$ un intervalo finito, sean p, q y σ funciones reales, y sean $\kappa_1, \dots, \kappa_4 \in \mathbb{R}$ tales que

- (i) la función p es continuamente diferenciable sobre $[a, b]$,
- (ii) las funciones q y σ son continuas sobre $[a, b]$ y $\sigma(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$,
- (iii) κ_1 y κ_2 no son ambas cero, y κ_3 y κ_4 no son ambas cero.

Entonces un problema de valores propios de la forma

$$(p(x)f'(x))' + q(x)f(x) + \lambda \sigma(x)f(x) = 0, \quad a < x < b \quad (3.2)$$

con las condiciones de frontera

$$\kappa_1 f(a) + \kappa_2 f'(a) = 0, \quad (3.3)$$

$$\kappa_3 f(b) + \kappa_4 f'(b) = 0 \quad (3.4)$$

se llama problema de valores propios de Sturm-Liouville regular.

Ejemplo 3.4. Para $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, $\sigma \equiv 1$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa_3 = 1$, $\kappa_4 = 0$, $a = 0$ y $b = L$ obtenemos el problema de Sturm-Liouville regular

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < L; \quad f(0) = 0, \quad f(L) = 0.$$

Ejemplo 3.5. Si p , q , σ , a y b son como en el Ejemplo 3.4 pero $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$, $\kappa_3 = 0$ y $\kappa_4 = 1$, entonces obtenemos el problema de Sturm-Liouville regular

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < L; \quad f'(0) = 0, \quad f'(L) = 0.$$

Ejemplo 3.6. Eligiendo p , q , σ , a y b como en el Ejemplo 3.4 pero $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa_3 = h$ y $\kappa_4 = 1$, entonces obtenemos el problema de Sturm-Liouville regular

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < L; \quad f(0) = 0, \quad f'(L) + hf(L) = 0.$$

Ejemplo 3.7. El problema de valores propios

$$f''(x) + 2f'(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < 1; \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 0$$

es, efectivamente, un problema de Sturm-Liouville regular. Utilizando una técnica de “factor integrante” y el coeficiente de f' , podemos elegir las funciones

$$p(x) = \sigma(x) = \exp\left(\int 2 \, dx\right) = e^{2x}, \quad q \equiv 0.$$

Estas funciones satisfacen los requerimientos de la Definición 3.4 y tal como podemos verificar fácilmente, la identidad

$$(e^{2x} f'(x))' + \lambda e^{2x} f(x) = 0, \quad 0 < x < 1$$

es equivalente con la ecuación dada.

Teorema 3.2. El operador

$$Lf = (pf')' + qf \tag{3.5}$$

definido por el lado izquierdo de (3.2) y que actúa sobre un espacio de funciones que satisfagan (3.3) y (3.4) es simétrico sobre $\mathcal{X}$.

Demostración. Supongamos, por simplicidad, que $\kappa_1 \neq 0$ y $\kappa_4 \neq 0$. Entonces, debido a (3.3) y (3.4), cualquier función $f \in \mathcal{X}$ satisface

$$f(a) = -\frac{\kappa_2}{\kappa_1} f'(a), \quad f'(b) = -\frac{\kappa_3}{\kappa_4} f(b).$$

Por lo tanto, utilizando (3.5) y una integración por partes, vemos que para cualquier par de funciones $f_1, f_2 \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} & \int_a^b (f_1(Lf_2) - f_2(Lf_1)) \, dx \\ &= \int_a^b \left(f_1((pf_2')' + qf_2) - f_2((pf_1')' + qf_1) \right) \, dx \\ &= [f_1(pf_2')]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b pf_2'f_1' \, dx - [f_2(pf_1')]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b pf_1'f_2' \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p(b)(f_1(b)f_2'(b) - f_2(b)f_1'(b)) - p(a)(f_1(a)f_2'(a) - f_2(a)f_1'(a)) \\
&= p(b)\left(-\frac{\kappa_3}{\kappa_4}f_1(b)f_2(b) + \frac{\kappa_3}{\kappa_4}f_2(b)f_1(b)\right) - p(a)\left(-\frac{\kappa_2}{\kappa_1}f_1'(a)f_2'(a) + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}f_2'(a)f_1'(a)\right) = 0,
\end{aligned}$$

de acuerdo a lo pedido. Todas las demás combinaciones de constantes $\kappa_1, \dots, \kappa_4$ diferentes de cero se tratan en forma similar. ■

Corolario 3.1. *Los valores propios y funciones propias de un problema de Sturm-Liouville regular poseen todas las propiedades listadas en el Teorema 3.1.*

Antes de calcular los valores propios y funciones propias de problemas de Sturm-Liouville específicos desarrollaremos una fórmula muy útil que relaciona estas cantidades. Multiplicando (3.2) por f e integrando el resultado sobre (a, b) obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b (f(pf')' + qf^2) dx + \lambda \int_a^b \sigma f^2 dx \\
&= \int_a^b ((pf f')' - p(f')^2 + qf^2) dx + \lambda \int_a^b \sigma f^2 dx \\
&= [pf f']_{x=a}^{x=b} - \int_a^b (p(f')^2 - qf^2) dx + \lambda \int_a^b \sigma f^2 dx.
\end{aligned}$$

Como f es una función propia (solución no nula) y $\sigma(x) > 0$ para $a < x < b$, el coeficiente de λ en el último término es diferente de cero. Por lo tanto podemos despejar λ como sigue:

$$\lambda = \left(\int_a^b (p(f')^2 - qf^2) dx - [pf f']_{x=a}^{x=b} \right) / \int_a^b \sigma f^2 dx. \quad (3.6)$$

Esta expresión es conocida como *cociente de Rayleigh*.

Ejemplo 3.8. *Para el problema de Sturm-Liouville regular del Ejemplo 3.4 obtenemos*

$$\begin{aligned}
\int_a^b (p(f')^2 - qf^2) dx &= \int_0^L (f')^2(x) dx \geq 0, \\
[pf f']_{x=a}^{x=b} &= [f(x)f'(x)]_{x=0}^{x=L} = 0, \\
\int_a^b \sigma f^2 dx &= \int_0^L f^2(x) dx > 0,
\end{aligned}$$

es decir a partir de (3.6),

$$\lambda = \int_0^L (f')^2(x) dx / \int_0^L f^2(x) dx \geq 0. \quad (3.7)$$

Obviamente, $\lambda = 0$ si y sólo si $f' \equiv 0$ sobre $[0, L]$, es decir $f \equiv \text{const.}$ Pero esto no es aceptable ya que de acuerdo a las condiciones de borde, la única solución constante es la solución nula. De acuerdo a lo anterior, $\lambda > 0$, y la solución general de la ecuación del Ejemplo 3.4 es

$$f(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad C_1, C_2 = \text{const.} \quad (3.8)$$

Utilizando la condición $f(0) = 0$ obtenemos $C_1 = 0$. A su vez, la condición $f(L) = 0$ entrega

$$C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

El caso $C_2 = 0$ está excluido, ya que $C_2 = 0$ implicaría que $f \equiv 0$ y estamos buscando soluciones no nulas. En virtud de lo anterior, necesariamente se debe satisfacer

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0,$$

es decir $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, o

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Estos son los valores propios del problema, ya que las funciones propias correspondientes (soluciones no nulas) son

$$f_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por conveniencia elegimos $C_2 = 1$; cualquier otro valor $C_2 \neq 0$ simplemente produciría un múltiple de $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$.

Podemos verificar fácilmente que las propiedades del Teorema 3.1 están satisfechas. La ortogonalidad de las funciones propias sobre $[0, L]$ sigue inmediatamente a partir de (3.5) porque el integrando es una función par.

Ejemplo 3.9. Aplicamos la misma técnica para calcular los valores propios y funciones propias del problema de Sturm-Liouville del Ejemplo 3.5. La desigualdad (3.7) sigue válida, pero ahora no podemos rechazar el caso $\lambda = 0$ porque las funciones $f \equiv c = \text{const.}$ (correspondientes a $\lambda = 0$) satisfacen ambas condiciones de borde. Eligiendo, por ejemplo, $c = 1/2$ podemos decir que el problema posee el par valor propio-función propia dado por

$$\lambda_0 = 0, \quad f_0(x) = 1/2.$$

Tal como en el Ejemplo 3.8, para $\lambda > 0$ la solución general de la ecuación es (3.8), luego

$$f'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x).$$

La condición $f'(0) = 0$ inmediatamente entrega que $C_2 = 0$; por lo tanto $f'(L) = 0$ implica

$$C_1\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Como nos interesan sólo las soluciones no nulas, se sigue que

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0,$$

lo que significa que $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, es decir a partir de (3.8) con $C_2 = 0$ y $C_1 = 1$, los pares valor propio-función propia están dados por

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad f_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Comentamos que el conjunto completo de valores propios y funciones propias del problema puede ser escrito como arriba, pero con $n \in \mathbb{N}_0$.

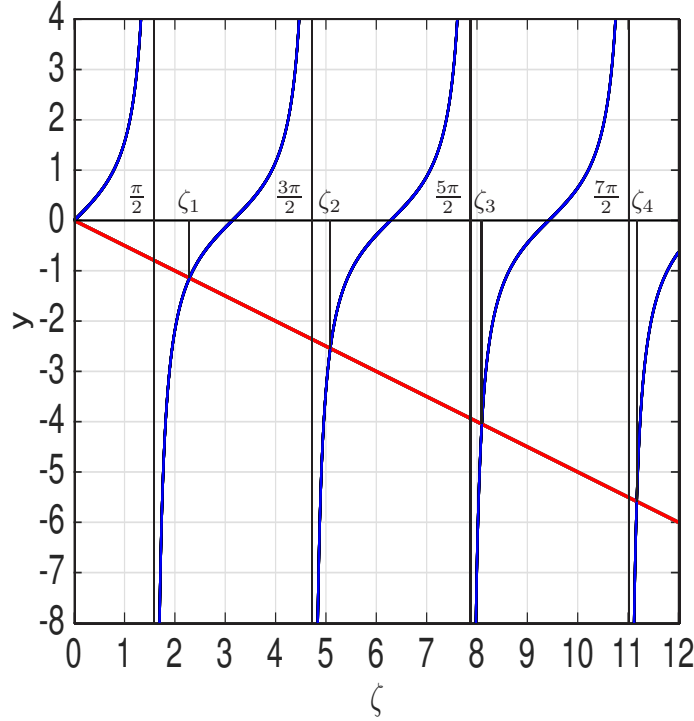


FIGURA 3.1. Ejemplo 3.10: grafos de $y = \tan \zeta$ (azul) e $y = -\zeta/(hL)$ (rojo), para $hL = 2$.

Finalmente, comentamos nuevamente que los valores propios y funciones propias satisfacen las propiedades del Teorema 3.1. La ortogonalidad de éstas últimas sobre $[0, L]$ sigue a partir de la primera fórmula en (2.3) y (2.4).

Ejemplo 3.10. Supongamos que $h > 0$ en el problema de Sturm-Liouville del Ejemplo 3.6. Entonces, escribiendo la segunda condición de borde de este problema como $f'(L) = -hf(L)$, obtenemos

$$[p(x)f(x)f'(x)]_{x=a}^{x=b} = [f(x)f'(x)]_{x=0}^{x=L} = f(L)f'(L) - f(0)f'(0) = -hf^2(L),$$

luego (3.6) implica que

$$\lambda = \left(\int_0^L (f')^2(x) dx + hf^2(L) \right) / \int_0^L f^2(x) dx \geq 0,$$

donde $\lambda = 0$ si y sólo si $f'(x) = 0$ sobre $[0, L]$ y $f(L) = 0$. Pero esto implica que $f \equiv 0$, lo que no es aceptable. Por lo tanto, los valores propios de este problema de Sturm-Liouville son positivos. Para hallarlos, notamos que la solución general de la ecuación nuevamente es dada por (3.8) y que la condición $f(0) = 0$ entrega $C_1 = 0$. Utilizando la segunda condición de borde $f'(L) + hf(L) = 0$ obtenemos

$$C_2(\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}L) + h \sin(\sqrt{\lambda}L)) = 0.$$

Para soluciones no nulas se debe tener $C_2 \neq 0$; en otras palabras,

$$\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}L) + h \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Como $\cos(\sqrt{\lambda}L) \neq 0$ (en caso contrario, $\sin(\sqrt{\lambda}L)$ sería igualmente cero, lo que es imposible), podemos dividir esta igualdad por $\cos(\sqrt{\lambda}L)$ y concluimos que λ debe ser solución de la ecuación trascendente

$$\tan(\sqrt{\lambda}L) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h} = -\frac{1}{hL}(\sqrt{\lambda}L).$$

Sea $\zeta := \sqrt{\lambda}L$, entonces ζ está dado por los puntos de intersección de las funciones $y = \tan \zeta$ e $y = -\zeta/(hL)$.

Tal como ilustra la Figura 3.1, existe una cantidad numerable ζ_n de tales puntos, luego este problema de Sturm-Liouville posee una sucesión infinita de valores propios positivos

$$\lambda_n = \left(\frac{\zeta_n}{L}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \lambda_n \rightarrow \infty \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

con funciones propias correspondientes (dadas por (3.8) con $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$)

$$f_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x) = \sin \frac{\zeta_n x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En virtud del item (iii) del Teorema 3.1 el conjunto $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortogonal sobre $[0, L]$.

Ejemplo 3.11. Para el problema de Sturm-Liouville del Ejemplo 3.7 se utiliza un procedimiento ligeramente modificado. Aquí las raíces de la ecuación característica $s^2 + 2s + \lambda = 0$ son

$$s_1 = -1 + \sqrt{1 - \lambda}, \quad s_2 = -1 - \sqrt{1 - \lambda}.$$

Como la naturaleza de estas raíces cambia de acuerdo a si $\lambda < 1$, $\lambda = 1$, o $\lambda > 1$, consideraremos estos tres casos separadamente.

- (i) Si $\lambda < 1$, entonces $1 - \lambda > 0$, luego $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ y $s_1 \neq s_2$, y la solución general de la ecuación es

$$f(x) = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Utilizando las condiciones $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$ llegamos a

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 e^{s_1} + C_2 e^{s_2} = 0.$$

Como $s_1 \neq s_2$, este sistema sólo posee la solución $C_1 = C_2 = 0$, luego $f = 0$, entonces concluimos que no existen valores propios $\lambda < 1$.

- (ii) Si $\lambda = 1$, entonces

$$f(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

La condición $f(0) = 0$ entrega $C_1 = 0$, mientras que $f(1) = 0$ implica $C_2 e^{-1} = 0$, es decir $C_2 = 0$. Así obtenemos $f \equiv 0$, por lo tanto $\lambda = 1$ no es un valor propio.

(iii) Si $\lambda > 1$, entonces la solución general de la ecuación es

$$f(x) = e^{-x} \left(C_1 \cos(\sqrt{\lambda - 1}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda - 1}x) \right), \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Como $f(0) = 0$, obtenemos $C_1 = 0$, y a partir de la otra condición, $f(1) = 0$, se obtiene

$$C_2 e^{-1} \sin \sqrt{\lambda - 1} = 0.$$

Para soluciones no nulas esto implica que

$$\sin \sqrt{\lambda - 1} = 0,$$

es decir

$$\sqrt{\lambda - 1} = n\pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

por lo tanto los valores propios del problema son

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 + 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

con las funciones propias correspondientes

$$f_n(x) = e^{-x} \sin(\sqrt{\lambda_n - 1}x) = e^{-x} \sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Los problemas de Sturm-Liouville regulares poseen dos propiedades adicionales importantes.

Teorema 3.3.

- (i) Para cada valor propio λ_n , $n \in \mathbb{N}$, existe solamente una función propia linealmente independiente f_n .
- (ii) El conjunto $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de las funciones propias es completo, es decir cualquier función suave a trozos u definida sobre $[a, b]$ posee una expansión en serie de Fourier generalizada (o expansión en funciones propias) única dada por

$$u(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (3.9)$$

la cual converge puntualmente a $\frac{1}{2}(u(x-) + u(x+))$ para $a \leq x \leq b$ (en particular a $u(x)$ si u es continua en x).

Comentario 3.2.

- (i) Los coeficientes c_n se calculan a partir de las propiedades mencionadas en el ítem (i) del Teorema 3.3 y del ítem (iii) del Teorema 3.1. Es decir, si tratamos (3.9) formalmente como una igualdad, la multiplicamos por $f_m(x)\sigma(x)$ e integramos el resultado sobre $[a, b]$, obtenemos

$$\int_a^b u(x) f_m(x) \sigma(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b f_n(x) f_m(x) \sigma(x) dx = c_m \int_a^b (f_m(x))^2 \sigma(x) dx.$$

Reemplazando m por n podemos escribir

$$c_n = \int_a^b u(x) f_n(x) \sigma(x) dx \Big/ \int_a^b (f_n(x))^2 \sigma(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.10)$$

El denominador en (3.10) no puede ser cero para cualquier n ya que las funciones f_n son soluciones no nulas de (3.2)–(3.4) y $\sigma(x) > 0$.

- (ii) En el caso de los problemas de Sturm-Liouville discutidos en los Ejemplos 3.4 y 3.8, y en los Ejemplos 3.5 y 3.9, la expansión (3.9) coincide, respectivamente, con las series de Fourier de senos y de cosenos de u , y (3.10) entrega las fórmulas (2.10) y (2.12). (Para los problemas de los Ejemplos 3.5 y 3.9, $n \in \mathbb{N}_0$.)
- (iii) Utilizando el método del Ejemplo 3.11 podemos demostrar que los valores propios y las funciones propias del problema de Sturm-Liouville regular más general

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) + \lambda cf(x) = 0, \quad 0 < x < L; \quad f(0) = 0, \quad f(L) = 0,$$

donde a , b , y $c > 0$ son constantes, están dados por las respectivas fórmulas

$$\lambda_n = \frac{1}{4c} \left(\frac{4n^2\pi^2}{L^2} + a^2 - 4b \right), \quad f_n(x) = e^{-(a/2)x} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 3.12. Supongamos que deseamos expandir la función $u(x) = x+1$, $0 \leq x \leq 1$, en las funciones propias del problema de Sturm-Liouville regular discutido en los Ejemplos 3.6 y 3.10 con $L = h = 1$. Las primeras cinco raíces positivas de la ecuación $\tan \zeta = -\zeta$ mencionada en el Ejemplo 3.10 son (aproximadamente)

$$\zeta_1 = 2,0288, \quad \zeta_2 = 4,9132, \quad \zeta_3 = 7,9787, \quad \zeta_4 = 11,0855, \quad \zeta_5 = 14,2074.$$

Luego, utilizando (3.10) con $\sigma \equiv 1$ obtenemos los coeficientes aproximados

$$c_1 = 1,9184, \quad c_2 = 0,1572, \quad c_3 = 0,3390, \quad c_4 = 0,1307, \quad c_5 = 0,1696,$$

es decir (3.9) asume la forma

$$u(x) \sim 1,9184 \sin(2,0288x) + 0,1572 \sin(4,9132x) + 0,3390 \sin(7,9787x) \\ + 0,1307 \sin(11,0855x) + 0,1696 \sin(14,2074x) + \dots$$

Ejemplo 3.13. Consideremos la función $u(x) = e^{-x}$ para $0 \leq x \leq 1$. Si f_n son las funciones propias del problema de Sturm-Liouville regular discutido en los Ejemplos 3.7 y 3.11, es decir

$$f_n(x) = e^{-x} \sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N},$$

entonces (3.10) con $\sigma(x) = e^{2x}$ entrega los coeficientes

$$c_n = (1 - (-1)^n) \frac{2}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N},$$

luego la expansión (3.9) está dada por

$$u(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n) \frac{2}{n\pi} e^{-x} \sin(n\pi x).$$

3.2. Otros problemas

Una cantidad importante de problems de Sturm-Liouville no son regulares.

Definición 3.5. Consideremos la notación de la Definición 3.4. Un problema de valores propios que consiste en resolver la ecuación (3.2) con las condiciones

$$f(a) = f(b), \quad f'(a) = f'(b) \quad (3.11)$$

se llama problema de Sturm-Liouville periódico.

Comentario 3.3. Se puede demostrar que el operador diferencial introducido en (3.5) también es simétrico sobre el nuevo espacio de funciones definido por las condiciones de frontera (3.11), es decir el Teorema 3.1 nuevamente es aplicable. Sin embargo, al contrario de los problemas de Sturm-Liouville regulares, aquí se pueden presentar dos funciones propias linealmente independientes para el mismo valor propio. No obstante, siempre podemos elegir un par de funciones propias que sea ortogonal sobre $[a, b]$ con respecto al peso σ . Para una elección de este tipo, el ítem (ii) del Teorema 3.3 sigue siendo válido.

Ejemplo 3.14. Consideremos el problema de Sturm-Liouville periódico donde $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, $\sigma \equiv 1$, $a = -L$ y $b = L$ con $L > 0$, es decir,

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad -L < x < L; \quad f(-L) = f(L), \quad f'(-L) = f'(L).$$

Utilizando el argumento del cociente de Rayleigh y las condiciones de borde indicadas arriba obtenemos nuevamente la desigualdad (3.7). Aceptamos el caso $\lambda = 0$ dado que, tal como en el Ejemplo 3.9, las funciones constantes correspondientes satisfacen ambas condiciones de borde, por lo tanto el problema posee el par valor propio-función propia

$$\lambda_0 = 0, \quad f_0(x) = \frac{1}{2}.$$

Para $\lambda > 0$ la solución general de la ecuación es

$$f(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

con la derivada

$$f'(x) = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

A partir de las condiciones y de las identidades $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ y $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ obtenemos que C_1 y C_2 satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} C_1 \cos(\sqrt{\lambda}L) - C_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) &= C_1 \cos(\sqrt{\lambda}L) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}L), \\ C_1 \sin(\sqrt{\lambda}L) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}L) &= -C_1 \sin(\sqrt{\lambda}L) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}L), \end{aligned}$$

el cual se reduce a

$$C_1 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0, \quad C_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Como estamos buscando soluciones no nulas, no se puede admitir $\sin(\sqrt{\lambda}L) \neq 0$ porque esto implicaría $C_1 = C_2 = 0$, es decir $f \equiv 0$. Por lo tanto, $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, lo que tal como en los ejemplos anteriores implica los valores propios

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como C_1 y C_2 pueden ser elegidos arbitrariamente, a partir de la solución general podemos extraer (escogiendo $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ y luego $C_1 = 0$, $C_2 = 1$) las funciones propias linealmente independientes

$$f_{1n}(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad f_{2n}(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N},$$

la cuales, tal como discutimos en el Capítulo 2, son ortogonales sobre $[-L, L]$. En el presente caso, la expansión (3.9) es de la forma

$$\begin{aligned} u(x) &\sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{1n} f_{1n}(x) + c_{2n} f_{2n}(x)) \\ &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{1n} \cos \frac{n\pi x}{L} + c_{2n} \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \end{aligned}$$

la cual es, precisamente, la serie de Fourier completa de u . Los coeficientes c_{0n} , c_{1n} y c_{2n} , calculados mediante (3.10) con $\sigma \equiv 1$, $a = -L$, $b = L$ y $n \in \mathbb{N}_0$ (para incluir la función propia adicional f_0), coinciden con los coeficientes dados por (2.7)–(2.9).

Definición 3.6. Un problema de valores propios basado en (3.2) se llama problema de Sturm-Liouville singular si posee una o más de las siguientes propiedades:

- (i) $p(a) = 0$ o $p(b) = 0$,
- (ii) cualquiera de las funciones $p(x)$, $q(x)$ o $\sigma(x)$ tiende a infinito cuando $x \rightarrow a+$ o $x \rightarrow b-$,
- (iii) $a = \infty$ o $b = \infty$.

Comentario 3.4. En el caso de un problema de Sturm-Liouville singular hay que redefinir las condiciones de borde para asegurar la simetría del operador L definido por (3.5). Por ejemplo, si $p(a) = 0$ pero $p(b) \neq 0$, hay que exigir que $f(x)$ y $f'(x)$ permanezcan acotadas cuando $x \rightarrow a+$ y que deben satisfacer (3.4). Si el intervalo donde la ecuación es válida es (a, ∞) , entonces posiblemente hay que exigir que $f(x)$ y $f'(x)$ permanezcan acotadas cuando $x \rightarrow \infty$ y que deben satisfacer (3.3). Otras condiciones de borde impuestas por necesidades analíticas o físicas también pueden ser consideradas.

Ejemplo 3.15. El problema de valores propios

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)f''(x) + 2xf'(x) + (\lambda - x)f(x) &= 0, \quad x > 1; \\ f'(1) &= 0, \quad f(x), f'(x) \text{ acotadas cuando } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

es un problema de Sturm-Liouville singular: la EDO puede ser escrita en la forma (3.2) con $p(x) = x^2 + 1$, $q(x) = -x$, $\sigma \equiv 1$, y $(a, b) = (1, \infty)$. Las condiciones de borde son del último tipo mencionado en el Comentario 3.4.

Un número de problemas de Sturm-Liouville singulares que se presentan en el estudio de modelos matemáticos dan origen a clases de funciones importantes. Discutiremos algunas de éstas en forma explícita.

3.3. Funciones de Bessel

Consideremos el problema de Sturm-Liouville singular

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + (\lambda x^2 - m^2) f(x) = 0, \quad 0 < x < a; \quad (3.12)$$

$$f(x), f'(x) \text{ acotadas cuando } x \rightarrow 0+, \quad f(a) = 0, \quad (3.13)$$

donde $a > 0$ es un número dado y $m \in \mathbb{N}_0$. Escribiendo (3.12) en la forma

$$(x f'(x))' - \frac{m^2}{x} f(x) + \lambda x f(x) = 0$$

podemos verificar que se trata de una ecuación del tipo (3.2) con $p(x) = x$, $q(x) = -m^2/x$ y $\sigma(x) = x$. Consideremos primero el caso $m = 0$, cuando $q \equiv 0$ y (3.12) se reduce a

$$x f''(x) + f'(x) + \lambda x f(x) = 0, \quad 0 < x < a.$$

Considerando (3.13) obtenemos

$$\begin{aligned} p(x)(f')^2(x) - q(x)f^2(x) &= x(f')^2(x) \geq 0, \quad 0 < x < a, \\ [p(x)f(x)f'(x)]_{x=0}^{x=a} &= [x f(x) f'(x)]_{x=0}^{x=a} = a f(a) f'(a) - \lim_{x \rightarrow 0+} x f(x) f'(x) = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, de acuerdo al cociente de Rayleigh (3.6),

$$\lambda = \int_0^a x (f')^2(x) dx \bigg/ \int_0^a x f^2(x) dx \geq 0.$$

Efectivamente, tal como ilustra esta fórmula, se tiene $\lambda = 0$ si y sólo si $f'(x) = 0$ para $0 < x \leq a$; es decir, si y sólo si $f \equiv \text{const.}$ Pero esto es imposible, ya que la condición de borde $f(a) = 0$ implicaría $f \equiv 0$, lo que se contradice con la definición de una función propia. Por lo tanto, concluimos que $\lambda > 0$.

Sea ahora $m \geq 1$. Multiplicando (3.12) por $f(x)$ e integrando de 0 a a , obtenemos

$$\int_0^a (x^2 f''(x) f(x) + x f'(x) f(x) + \lambda x^2 f^2(x) - m^2 f^2(x)) dx = 0. \quad (3.14)$$

Integrando por partes e interpretando $f(x)$ y $f'(x)$ en $x = 0$ en el sentido de límites mencionado arriba, y utilizando (3.13) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^a x f'(x) f(x) dx &= \int_0^a \frac{x}{2} (f^2(x))' dx = \frac{1}{2} [x f^2(x)]_{x=0}^{x=a} - \frac{1}{2} \int_0^a f^2(x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^a f^2(x) dx, \\ \int_0^a x^2 f''(x) f(x) dx &= [x^2 f'(x) f(x)]_{x=0}^{x=a} - \int_0^a (x^2 (f'(x))^2 + 2x f'(x) f(x)) dx \\ &= - \int_0^a (x^2 (f'(x))^2 - f^2(x)) dx. \end{aligned}$$

Reemplazando esto en (3.14) obtenemos

$$\lambda = \int_0^a \left(x^2 (f'(x))^2 + \left(m^2 - \frac{1}{2} \right) f^2(x) \right) dx \bigg/ \int_0^a x f^2(x) dx \geq 0.$$

El mismo argumento utilizado para $m = 0$ excluye el valor $\lambda = 0$, por lo tanto $\lambda > 0$.

Sea $\xi := \sqrt{\lambda}x$ y $f(x) = f(\xi/\sqrt{\lambda}) = g(\xi)$. En virtud de la regla de la cadena,

$$f'(x) = \sqrt{\lambda}g'(\xi), \quad f''(x) = \lambda g''(\xi),$$

luego (3.12) se convierte en

$$\xi^2 g''(\xi) + \xi g'(\xi) + (\xi^2 - m^2)g(\xi) = 0. \quad (3.15)$$

Esta ecuación se llama *ecuación de Bessel del orden m* . Dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación se llaman *funciones de Bessel de primera y de segunda especie del orden m* , denotadas por J_m e Y_m .

Comentario 3.5.

(i) Para $m \geq 1$ las funciones J_m satisfacen las relaciones de recursión

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x), \quad J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x),$$

lo que implica que

$$(x^m J_m(x))' = x^m J_{m-1}(x).$$

Las funciones Y_m satisfacen identidades similares.

(ii) Las funciones J_m e Y_m también pueden ser calculadas mediante las llamadas integrales de Bessel:

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(m\tau - x \sin \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{-i(m\tau - x \sin \tau)} d\tau,$$

$$Y_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \tau - m\tau) d\tau - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (e^{m\tau} + (-1)^m e^{-m\tau}) e^{-x \sinh \tau} d\tau.$$

(iii) Cuando $x \rightarrow 0+$,

$$J_0(x) \rightarrow 1, \quad J_m(x) \rightarrow 0, \quad m \in \mathbb{N}; \quad Y_m(x) \rightarrow -\infty, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

(iv) La función J_m posee la expansión en serie de Taylor

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}.$$

(v) Las funciones de Bessel pueden ser definidas para cualquier orden $m \in \mathbb{R}$ (e incluso cualquier $m \in \mathbb{C}$). Por ejemplo, si el orden es un entero negativo $-m$, ponemos

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x).$$

(vi) Si m es un entero, las funciones J_m son generadas por la función

$$\exp\left(\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) t^m.$$

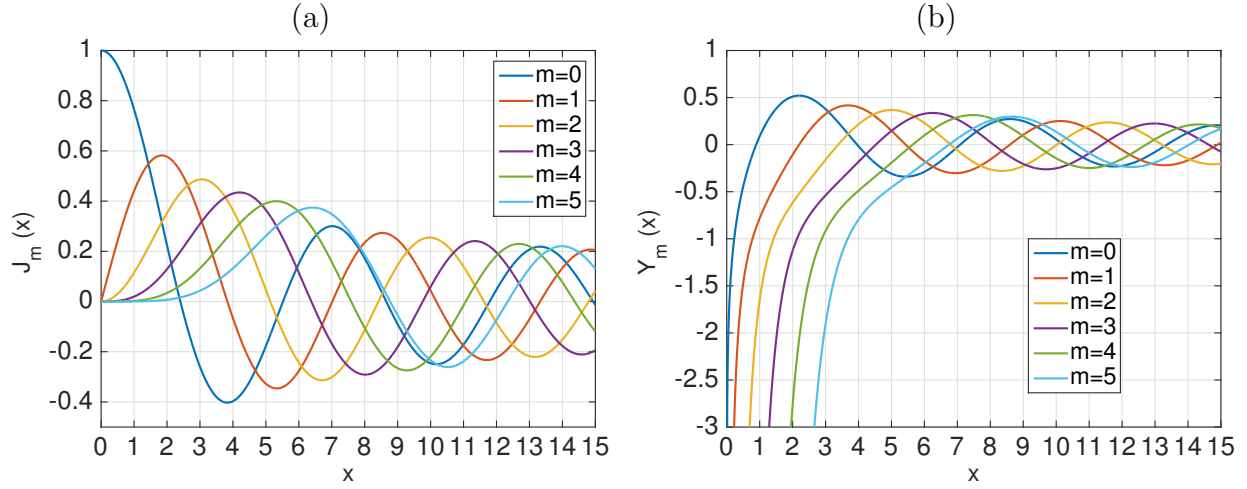


FIGURA 3.2. Las funciones de Bessel (a) de primera especie J_m , $m = 0, \dots, 5$, (b) de segunda especie Y_m , $m = 0, \dots, 5$.

La Figura 3.2 muestra las funciones $J_0, \dots, J_5$ e $Y_0, \dots, Y_5$.

Regresando a (3.15), podemos escribir la solución general de esta ecuación como

$$g(\xi) = C_1 J_m(\xi) + C_2 Y_m(\xi), \quad C_1, C_2 = \text{const.},$$

es decir

$$f(x) = C_1 J_m(\sqrt{\lambda}x) + C_2 Y_m(\sqrt{\lambda}x).$$

A raíz del ítem (iii) del Comentario 3.5, la primera condición (3.13) implica que $C_2 = 0$. La segunda entonces entrega $C_1 J_m(\sqrt{\lambda}a) = 0$. Como nos interesan soluciones no nulas, se debe satisfacer $J_m(\sqrt{\lambda}a) = 0$. La función J_m posee un número infinito de ceros positivos, los que forman una sucesión $\{\xi_{mn}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\xi_{mn} \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$, por lo tanto el problema de Sturm-Liouville singular (3.12), (3.13) posee los pares valor propio-función propia

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{\xi_{mn}}{a} \right)^2, \quad f_{mn}(x) = J_m \left(\frac{\xi_{mn}x}{a} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Resulta que efectivamente $\{f_{mn}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un sistema completo para cada $m \in \mathbb{N}_0$ ya que

$$\int_0^a J_m \left(\frac{\xi_{mn}x}{a} \right) J_m \left(\frac{\xi_{mp}x}{a} \right) x dx = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq p, \\ (a^2/2) J_{m+1}^2(\xi_{mn}) & \text{para } n = p, \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}_0. \quad (3.16)$$

Estas relaciones de ortogonalidad (con peso $\sigma(x) = x$) nos permiten expandir cualquier función u apropiada en una serie de Fourier generalizada de la forma

$$u(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} J_m \left(\frac{\xi_{mn}x}{a} \right) \quad (3.17)$$

para cada $m \in \mathbb{N}_0$. Para determinar los coeficientes c_{mn} seguimos el procedimiento del ítem (i) del Comentario 3.2 con (a, b) reemplazado por $(0, a)$, c_n por c_{mn} , $f_n(x)$ por $J_m(\xi_{mn}x/a)$, y $\sigma(x)$ por x . Utilizando (3.16) obtenemos, finalmente,

$$c_{mn} = \frac{2}{a^2 J_{m+1}^2(\xi_{mn})} \int_0^a u(x) J_m\left(\frac{\xi_{mn}x}{a}\right) x dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.18)$$

Comentario 3.6. La serie (3.17) converge a $u(x)$ en todos los puntos x donde u es continua en el intervalo $(0, a)$. Si $m = 0$, el punto $x = 0$ también está incluido. Si $m > 0$, entonces $x = 0$ está incluido si $u(0) = 0$. El punto $x = a$ está incluido para todo $m \geq 0$ si $u(a) = 0$.

Ejemplo 3.16. Sea $u(x) = 2x - 1$, y sea $a = 1$ y $m = 0$. Limitando la aproximación computacional a cuatro dígitos decimales, obtenemos los primeros cinco ceros de $J_0(\xi)$:

$$\xi_{01} = 2,4048, \quad \xi_{02} = 5,5201, \quad \xi_{03} = 8,6537, \quad \xi_{04} = 11,7915, \quad \xi_{05} = 14,9309.$$

Utilizándolos en (3.18) obtenemos los coeficientes

$$c_{01} = 0,0329, \quad c_{02} = -1,1813, \quad c_{03} = 0,7452, \quad c_{04} = -0,7644, \quad c_{05} = 0,6146.$$

En virtud de lo anterior, a partir de (3.17) obtenemos la expansión aproximada

$$\begin{aligned} u(x) \sim & 0,0329 J_0(2,4048x) - 1,1813 J_0(5,5201x) + 0,7452 J_0(8,6537x) \\ & - 0,7644 J_0(11,7915x) + 0,6146 J_0(14,9309x) + \dots \end{aligned} \quad (3.19)$$

Construiremos una segunda expansión para u utilizando $m = 1$. Utilizando el mismo tipo de aproximación obtenemos los ceros de J_1

$$\xi_{11} = 3,8317, \quad \xi_{12} = 7,0156, \quad \xi_{13} = 10,1735, \quad \xi_{14} = 13,3237, \quad \xi_{15} = 16,4706,$$

es decir mediante (3.18) llegamos a los coeficientes

$$c_{11} = 0,3788, \quad c_{12} = -1,3827, \quad c_{13} = 0,4700, \quad c_{14} = -0,9199, \quad c_{15} = 0,4248$$

y a la expansión aproximada

$$\begin{aligned} u(x) \sim & 0,3788 J_1(3,8317x) - 1,3827 J_1(7,0156x) + 0,4700 J_1(10,1735x) \\ & - 0,9199 J_1(13,3237x) + 0,4248 J_1(16,4706x) + \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

En la Figura 3.3 graficamos las aproximaciones definidas por los primeros cinco términos de (3.19) y (3.20), respectivamente.

3.4. Polinomios de Legendre

Consideremos el problema de Sturm-Liouville singular

$$(1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x) + \lambda f(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \quad (3.21)$$

$$f(x), f'(x) \text{ acotadas cuando } x \rightarrow -1+ \text{ y } x \rightarrow 1-. \quad (3.22)$$

Como la EDO (3.21) puede ser escrita como

$$\left((1 - x^2)f'(x)\right)' + \lambda f(x) = 0,$$

queda claro que $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$, y $\sigma \equiv 1$.

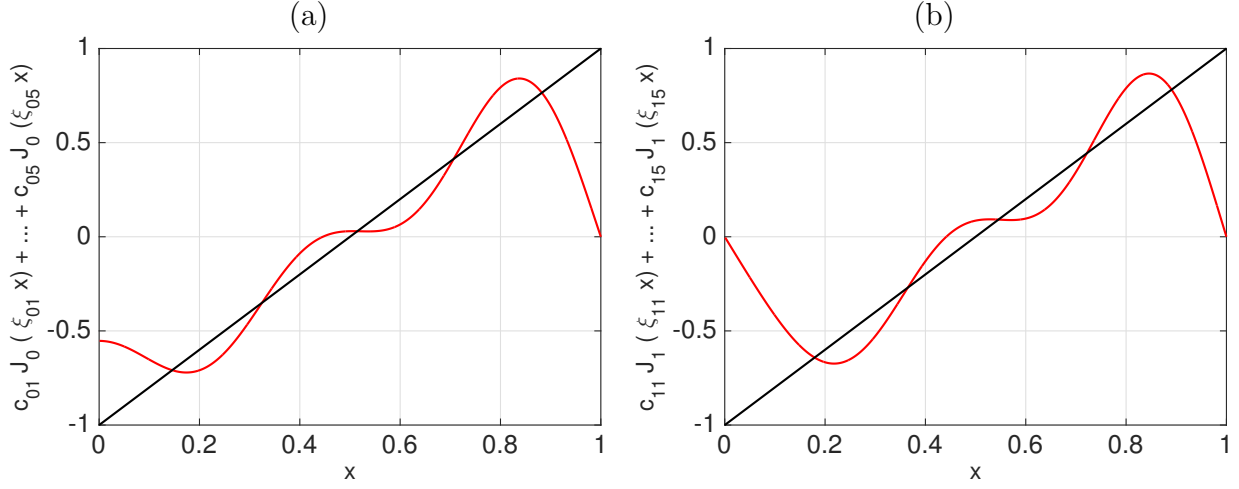


FIGURA 3.3. Ejemplo 3.16: aproximación de $u(x) = 2x - 1$ (línea negra sólida) (a) mediante la función J_0 (3.19), (b) mediante la función J_1 (3.20), considerando en cada caso los primeros cinco términos de la expansión.

Un análisis detallado del problema (3.21), (3.22) (fuera del enfoque del presente texto) muestra que sus valores propios son $\lambda_n = n(n+1)$ para $n \in \mathbb{N}_0$, y que la solución general de (3.21) con $\lambda = \lambda_n$ es de la forma

$$f_n(x) = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x), \quad C_1, C_2 = \text{const.}, \quad (3.23)$$

donde las funciones P_n son polinomios del grado n , los *polinomios de Legendre*, dados por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^s \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!(n-k)!} x^{n-2k}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad s = \lfloor n/2 \rfloor.$$

Las funciones Q_n , las *funciones de Legendre de segunda especie*, poseen la representación

$$Q_n(x) = P_n(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)P_n^2(x)}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Comentario 3.7.

(i) Los polinomios P_n están dados por la fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

luego

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, & P_2(x) &= \frac{1}{2}(-1 + 3x^2), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(-3x + 5x^3), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(3 - 30x^2 + 35x^4), & P_5(x) &= \frac{1}{8}(15x - 70x^3 + 63x^5). \end{aligned}$$

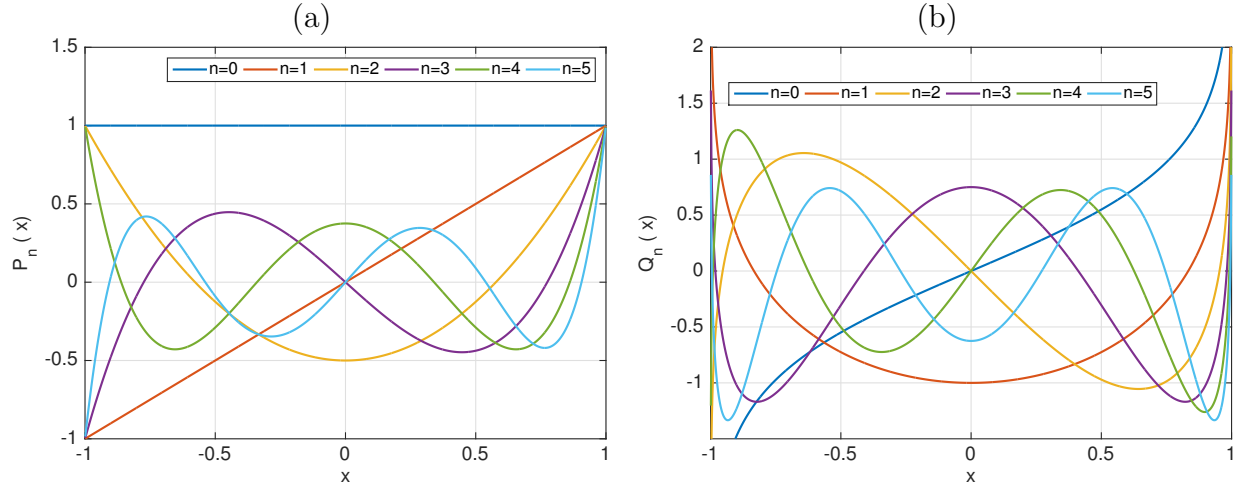


FIGURA 3.4. (a) Polinomios de Legendre $P_n(x)$, $n = 0, \dots, 5$; (b) funciones de Legendre de segunda especie $Q_n(x)$, $n = 0, \dots, 5$.

(ii) Los polinomios P_n también pueden ser calculados mediante la función generadora

$$(1 - tx + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad |x| < 1, \quad |t| < 1.$$

(iii) Los polinomios P_n satisfacen la relación de recursión

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(iv) El sistema $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es ortogonal sobre $[-1, 1]$; específicamente,

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq m, \\ 2/(2n+1) & \text{para } n = m. \end{cases} \quad (3.24)$$

(v) El sistema $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es completo.

(vi) Las funciones $Q_n(x)$ son no acotadas cuando $x \rightarrow -1+$ y $x \rightarrow 1-$.

(vii) Las funciones $Q_n(x)$ están dadas por la fórmula recursiva de Bonnet:

$$Q_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} & \text{para } n = 0, \\ P_1(x)Q_0(x) - 1 & \text{para } n = 1, \\ \frac{2n-1}{n} x Q_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} Q_{n-2}(x) & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

La Figura 3.4 muestra los polinomios de Legendre $P_n(x)$, $n = 0, \dots, 5$ y las funciones de Legendre de segunda especie $Q_n(x)$, $n = 0, \dots, 5$.

A raíz del ítem (vi) del Comentario 3.7 las funciones f_n dadas por (3.23) satisfacen las condiciones de borde (3.22) sólo si $C_2 = 0$; por lo tanto, las funciones propias del problema de Sturm-Liouville (3.21), (3.22) son $f_n(x) = P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

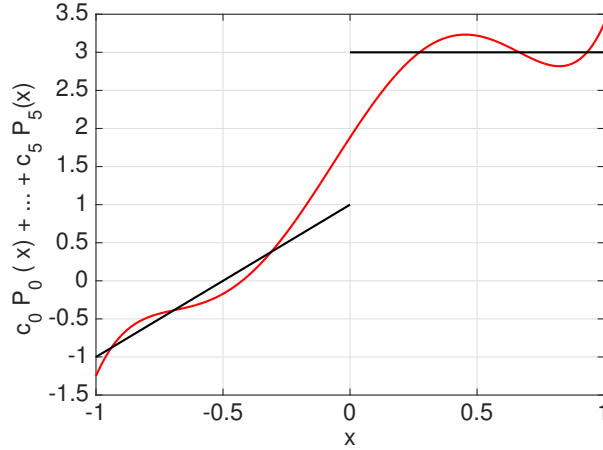


FIGURA 3.5. Ejemplo 3.17: aproximación de la función (3.27) mediante la expansión en polinomios de Legendre (3.28), considerando los primeros seis términos de la expansión.

Tal como antes, el ítem (v) del Comentario 3.7 nos permite expandir cualquier función apropiada u en una serie de la forma

$$u(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \quad (3.25)$$

donde aplicando la técnica del ítem (i) del Comentario 3.2 y considerando (3.24), vemos que los coeficientes c_n son calculados a través de la fórmula

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 u(x) P_n(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.26)$$

Comentario 3.8. Si u es suave a trozos sobre $(-1, 1)$, entonces la serie (3.25) converge a $u(x)$ en todos los puntos x donde u es continua, y a $\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+))$ en los puntos x donde u posee una discontinuidad de salto.

Ejemplo 3.17. Consideremos la función

$$u(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{para } -1 \leq x \leq 0, \\ 3 & \text{para } 0 < x \leq 1. \end{cases} \quad (3.27)$$

En virtud de (3.26) y las expresiones de P_n en el ítem (i) del Comentario 3.7, obtenemos

$$c_0 = \frac{3}{2}, \quad c_1 = \frac{5}{2}, \quad c_2 = -\frac{5}{8}, \quad c_4 = \frac{3}{16}, \quad c_5 = \frac{11}{16},$$

luego a partir de (3.25) obtenemos la expresión

$$u(x) \sim \frac{3}{2}P_0(x) + \frac{5}{2}P_1(x) - \frac{5}{8}P_2(x) - \frac{7}{8}P_3(x) + \frac{3}{16}P_4(x) + \frac{11}{16}P_5(x) + \dots \quad (3.28)$$

La Figura 3.5 muestra el grafo de u y de la función definida por los primeros seis términos en el lado derecho de (3.28) (la aproximación de u).

3.5. Armónicos esféricos

Una forma más general del problema de Sturm-Liouville singular (3.21), (3.22) es obtenida si (3.21) es reemplazada por la *ecuación de Legendre asociada*

$$((1-x^2)f'(x))' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)f(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \quad (3.29)$$

donde $m \in \mathbb{N}_0$. Obviamente, aquí $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = -m^2/(1 - x^2)$ y $\sigma \equiv 1$. Se puede demostrar que los pares valor propio-función propia de del problema (3.22), (3.29) están dados por

$$\begin{aligned} \lambda_n &= n(n+1), \quad n = m, m+1, \dots, \\ f_n(x) &= P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \\ &= \frac{(-1)^m}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} ((x^2-1)^n). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para cada $m = 0, 1, \dots, n$, las funciones P_n^m , llamadas *funciones de Legendre asociadas*, satisfacen la fórmula de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq k, \\ \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} & \text{para } n = k. \end{cases} \quad (3.31)$$

La definición de las funciones P_n^m puede ser extendida a índices negativos enteros m mediante la última expresión del lado derecho de (3.30). Una computación directa entrega

$$P_n^{-m}(x) = \frac{(-1)^{-m}}{2^n n!} (1-x^2)^{-m/2} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} ((x^2-1)^n) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x). \quad (3.32)$$

Los *armónicos esféricos* son funciones complejas que se presentan en el contexto de problemas formulados en términos de coordenadas esféricas, las cuales están conectadas a las coordenadas cartesianas x, y, z a través de

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi.$$

Aquí $r \geq 0$ es el radio, $\theta \in [0, 2\pi)$ es el ángulo azimutal, y $\varphi \in [0, \pi]$ es el ángulo polar. Los armónicos esféricos están definidos por

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \varphi) e^{im\theta}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

donde $m = 0, 1, \dots, n$ y de acuerdo a la fórmula de Euler, $e^{im\theta} = \cos(m\theta) + i \sin(m\theta)$. En virtud de (3.31) se puede verificar que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_n^m(\theta, \varphi) \bar{Y}_k^l(\theta, \varphi) \sin \varphi d\varphi d\theta = \begin{cases} \frac{4\pi(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} & \text{si } m = l \text{ y } n = k, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\bar{a}$ denota el conjugado complejo de a . Esta igualdad nos permite normalizar las funciones Y_n^m escribiendo

$$Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \left(\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!} \right)^{1/2} P_n^m(\cos \varphi) e^{im\theta}. \quad (3.33)$$

Es en esta forma que los armónicos esféricos normalmente están conocidos.

Las funciones $Y_{n,m}$ satisfacen la fórmula de ortonormalidad

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{n,m}(\theta, \varphi) \bar{Y}_{k,l}(\theta, \varphi) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } m = l \text{ y } n = k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.34)$$

Considerando (3.32) también podemos definir

$$Y_{n,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \bar{Y}_{n,m}(\theta, \varphi). \quad (3.35)$$

Ejemplo 3.18. A partir de la segunda fórmula en (3.30), (3.2), y (3.35) podemos deducir

$$\begin{aligned} Y_{0,0}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \\ Y_{1,-1}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-i\theta} \sin \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{x - iy}{r}, \\ Y_{1,0}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{z}{r}, \\ Y_{1,1}(\theta, \varphi) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{i\theta} \sin \varphi = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{x + iy}{r}, \\ Y_{2,-2}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} e^{-2i\theta} \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{(x - iy)^2}{r^2}, \\ Y_{2,-1}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} e^{-i\theta} \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{(x - iy)z}{r^2}, \\ Y_{2,0}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \varphi - 1) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2}, \\ Y_{2,1}(\theta, \varphi) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} e^{i\theta} \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{(x + iy)z}{r^2}, \\ Y_{2,2}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} e^{2i\theta} \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{(x + iy)^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Comentario 3.9. En la literatura se encuentran ilustraciones de los armónicos esféricos similares a la Figura 3.6.

Comentario 3.10. Cualquier función u apropiada definida sobre una esfera puede ser expandida en una serie de armónicos esféricos de la forma

$$u(\theta, \varphi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{n,m} Y_{n,m}(\theta, \varphi), \quad (3.36)$$

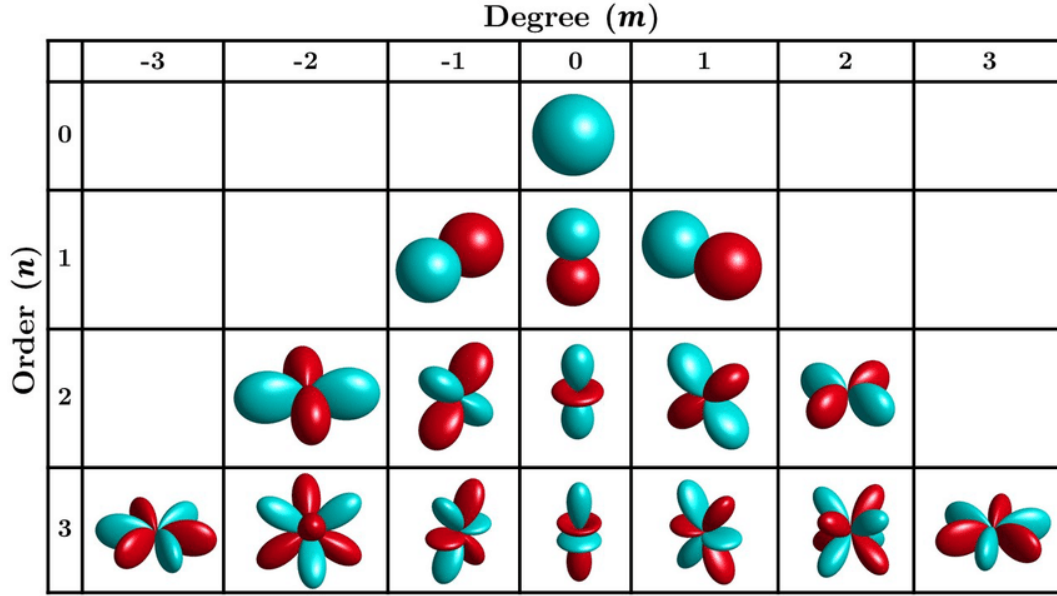


FIGURA 3.6. Partes reales de los armónicos esféricos $Y_{n,m}(\theta, \varphi)$ hasta tercer orden ($n = 0, \dots, 3$) para el grado $-3 \leq m \leq 3$, con lóbulos en color claro (cyan) indicando valores positivos y en color oscuro (rojo) indicando valores negativos. Para cada n dado, cada fila en la tabla contiene $2n + 1$ modos [15].

la cual converge a $u(\theta, \varphi)$ en todos los puntos donde u es continua. Para determinar los coeficientes $c_{k,l}$ multiplicamos cada término en (3.36) por $\bar{Y}_{k,l}(\theta, \varphi) \sin \varphi$, integramos sobre $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$, y consideramos (3.34). Después de reemplazar k, l por n, m obtenemos

$$c_{n,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(\theta, \varphi) \bar{Y}_{n,m}(\theta, \varphi) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta. \quad (3.37)$$

Ejemplo 3.19. Sea la función $v(x, y, z) = x^2 + 2y$ definida sobre la esfera con el centro $(0, 0, 0)$ y radio uno. En términos de coordenadas esféricas se tiene

$$u(\theta, \varphi) = \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + 2 \sin \theta \sin \varphi.$$

Utilizando (3.37) y las expresiones explícitas de $Y_{n,m}$ dadas en el Ejemplo 3.18 obtenemos

$$c_{0,0} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}, \quad c_{1,0} = 0, \quad c_{1,1} = c_{1,-1} = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3}i,$$

$$c_{2,-1} = c_{2,1} = 0, \quad c_{2,0} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}, \quad c_{2,2} = c_{2,-2} = \sqrt{\frac{2\pi}{15}},$$

luego de acuerdo a (3.36),

$$u(\theta, \varphi) = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}Y_{0,0}(\theta, \varphi) + \frac{2\sqrt{2\pi}}{3}iY_{1,-1}(\theta, \varphi) + \frac{2\sqrt{2\pi}}{3}iY_{1,1}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{2\pi}{15}}Y_{2,-2}(\theta, \varphi) \\ - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}Y_{2,0}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{2\pi}{15}}Y_{2,2}(\theta, \varphi).$$

Esta es una serie finita porque f es una combinación lineal de los armónicos esféricos listados en el Ejemplo 3.18.

Ejemplo 3.20. Si la función del Ejemplo 3.19 es reemplazada por

$$v(x, y, z) = \begin{cases} x & \text{para } z \geq 0, \\ yz & \text{para } z < 0, \end{cases}$$

entonces su equivalente en coordenadas esféricas es

$$u(\theta, \varphi) = \begin{cases} \cos \theta \sin \varphi & \text{para } 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi & \text{para } \pi/2 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

En este caso (3.37) entrega los coeficientes

$$\begin{aligned} c_{0,0} = c_{1,0} = 0, \quad c_{1,1} = -\bar{c}_{1,-1} = -\sqrt{\frac{\pi}{6}} \left(2 + \frac{3}{8}i \right), \\ c_{2,-2} = c_{2,2} = 0, \quad c_{2,1} = -\bar{c}_{2,-1} = -\sqrt{\frac{\pi}{30}} \left(\frac{15}{4} - i \right), \end{aligned}$$

luego la expansión (3.36) asume la forma

$$\begin{aligned} u(\theta, \varphi) \sim \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left(2 - \frac{3}{8}i \right) Y_{1,-1}(\theta, \varphi) - \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left(2 + \frac{3}{8}i \right) Y_{1,1}(\theta, \varphi) \\ + \sqrt{\frac{\pi}{30}} \left(\frac{15}{4} + i \right) Y_{2,-1}(\theta, \varphi) - \sqrt{\frac{\pi}{30}} \left(\frac{15}{4} - i \right) Y_{2,1}(\theta, \varphi) + \dots \end{aligned}$$

Comentario 3.11. Una clase muy general de lo que llamamos funciones “apropiadas” en este capítulo son las funciones cuadráticamente integrables, es decir funciones u tales que

$$\int_D |u(x)|^2 dx < \infty,$$

donde D es su dominio de definición, x es un punto genérico en D y dx es el elemento de longitud, área, o volumen. Si escribimos todas las series (3.9), (3.17), (3.25) y (3.36) como

$$u(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x),$$

entonces éstas convergen en el sentido de

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_D \left| u(x) - \sum_{n=1}^N c_n f_n(x) \right|^2 dx = 0.$$

Tal como ya comentamos, si u es suficientemente suave, esta serie también converge a $u(x)$ en el sentido puntual clásico en cada $x \in D$ donde u es continua. Para simplificar la notación, y como las funciones de interés para nosotros satisfacen el requerimiento de suavidad, a partir de ahora usaremos el símbolo de igualdad entre estas funciones y sus respectivas representaciones como serie de Fourier, aunque rigurosamente la igualdad es válida sólo en sus respectivos puntos de continuidad.

Capítulo 4

Algunas ecuaciones fundamentales de la física matemática

La mayoría de los procesos y fenómenos en el mundo real son estudiados mediante modelos matemáticos. Una investigación de este tipo generalmente comprende tres etapas:

- (i) El modelo es formulado en términos de expresiones matemáticas que describen las relaciones cuantitativas entre las cantidades físicas involucradas.
- (ii) Las ecuaciones del modelo son resueltas mediante varios métodos matemáticos.
- (iii) Los resultados matemáticos son interpretados desde un punto de vista físico en relación con el proceso original.

En este capítulo demostraremos como tres modelos matemáticos simples, pero fundamentales, que involucran ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) son derivados. Estos modelos son importantes porque cada uno de ellos es representativo de una clase de EDPs lineales de segundo orden.

Definición 4.1. *Una ecuación diferencial parcial (EDP) es una ecuación que contiene una función incógnita de varias variables y una o más de sus derivadas parciales.*

Para simplificar la notación utilizaremos para $u = u(x, t)$

$$u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{tt} := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{etc.}$$

4.1. La ecuación del calor

Consideremos la conducción del calor en una barra en la forma de un cilindro delgado descrito por los siguientes parámetros físicos: su longitud L , su área de sección transversal A (supuesto constante), la densidad de energía térmica (energía térmica por volumen unitario) $E(x, t)$, el flujo del calor (energía térmica por área unitaria, fluyendo hacia la derecha, por tiempo unitario) $\varphi(x, t)$, y las fuentes o sumideros del calor (energía térmica por volumen unitario, generada o perdida dentro de la barra por volumen unitario) $q(x, t)$.

En lo siguiente supondremos que la superficie lateral (cilíndrica) de la barra está aislada, es decir no ocurre intercambio de calor a través de ella. También utilizaremos el término “fuentes” para referirnos tanto a fuentes como a sumideros. La ley física en la que está basado el modelo matemático es la ley de conservación de energía térmica, es decir

$$\begin{aligned} & \text{tasa de cambio de la energía térmica en el cuerpo} \\ &= \text{flujo del calor por las fronteras por tiempo unitario} \\ &+ \text{calor generado por fuentes por tiempo unitario.} \end{aligned}$$

Para una barra de longitud arbitraria obtenemos a lo largo del eje x , entre $x = a$ y $x = b > a$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b E(x, t) A \, dx &= (\varphi(a, t) - \varphi(b, t)) A + \int_a^b q(x, t) A \, dx \\ &= - \int_a^b \varphi_x(x, t) A \, dx + \int_a^b q(x, t) A \, dx, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Dividiendo por A obtenemos que para $t > 0$ y cualquier subintervalo $(a, b) \subset (0, L)$,

$$\int_a^b (E_t(x, t) + \varphi_x(x, t) - q(x, t)) \, dx = 0.$$

En virtud de la arbitrariedad de a y b , esto significa que

$$E_t(x, t) = -\varphi_x(x, t) + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (4.1)$$

Introduciremos ahora parámetros físicos adicionales para describir la barra, a saber: la temperatura $u(x, t)$, el calor específico (la energía térmica que eleva la temperatura de una masa unitaria en una unidad) $c(x)$ (esta cantidad se supone independiente de la temperatura), la conductividad térmica $K_0(x)$ (también considerada independiente de la temperatura), y la densidad de masa $\rho(x)$. Entonces la energía térmica total en el segmento (a, b) de la barra está dada por

$$\int_a^b E(x, t) A \, dx = \int_a^b c(x) \rho(x) u(x, t) A \, dx, \quad t > 0.$$

Utilizando el razonamiento anterior podemos deducir que

$$E(x, t) = c(x) \rho(x) u(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (4.2)$$

Por otro lado, de acuerdo a la *ley de Fourier de la conducción del calor*,

$$\varphi(x, t) = -K_0(x) u_x(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (4.3)$$

A partir de (4.2) y (4.3) podemos ahora escribir la conservación de energía expresada por (4.1) como

$$c(x) \rho(x) u_t(x, t) = (K_0(x) u_x(x, t))_x + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (4.4)$$

Suponiendo que la barra es uniforme (c , ρ y K_0 son constantes) y que no existen fuentes de calor internas ($q = 0$), vemos que (4.4) se reduce a

$$u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (4.5)$$

donde $k = K_0/(c\rho)$ es la *difusividad térmica* de la barra. La ecuación (4.5) se llama *ecuación (de difusión) del calor*.

Si hay fuentes en la barra, entonces esta ecuación es reemplazada por su versión no homogénea

$$u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

donde q ahora incorpora la constante $1/(c\rho)$.

Como (4.5) es una ecuación de primer orden con respecto al tiempo, se necesita sólo una condición inicial, la cual normalmente se elige como

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

es decir se prescribe la distribución inicial de la temperatura en la barra.

Como la ecuación es de segundo orden con respecto a la variable espacial se requieren dos condiciones de borde. Existen tres tipos principales de condiciones de frontera físicamente relevantes que usualmente se especifican para los extremos $x = 0$ y $x = L$.

- (i) La temperatura puede estar dada en un extremo, por ejemplo

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad t > 0.$$

- (ii) Si la barra está aislada en un extremo, entonces la condición de frontera debe indicar que en este extremo se anula el flujo del calor. En virtud de (4.3) esto significa que la derivada u_x debe ser cero; por ejemplo,

$$u_x(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

Mas generalmente, si el flujo del calor por el extremo $x = L$ está dado, entonces esta condición asume la forma

$$u_x(L, t) = \beta(t), \quad t > 0.$$

- (iii) Si un de los extremos conecta con otro medio utilizamos la *ley del enfriamiento de Newton*, la cual establece que la tasa de pérdida de calor de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y sus alrededores. En este caso, por ejemplo,

$$K_0 u_x(0, t) = H(u(0, t) - U(t)), \quad t > 0,$$

donde $U(t)$ es la temperatura (dada) del medio externo y $H > 0$ es el *coeficiente de transfer de calor*. A raíz del convenio con respecto a la dirección del flujo del calor, en el extremo $x = L$ este tipo de condición de frontera asume la forma

$$-K_0 u_x(L, t) = H(u(0, t) - U(t)), \quad t > 0.$$

Comentario 4.1.

- (i) Se prescribe sólo una condición de frontera en cada extremo.
- (ii) La condición de frontera en $x = 0$ puede ser diferente de la condición en $x = L$.
- (iii) Se puede verificar fácilmente que la ecuación del calor es lineal.
- (iv) La ecuación del calor uni-dimensional es el ejemplo más simple de una ecuación parabólica.

De acuerdo a lo anterior, el modelo matemático de la conducción del calor consiste en varios elementos. Una ecuación diferencial parcial (EDP) y las condiciones iniciales y de frontera asociadas forman un *problema de valores iniciales y de frontera* (PVIF). Si se contemplan solamente condiciones iniciales o de frontera, entonces se habla de un *problema de valores iniciales* (PVI) o de un *problema de valores de frontera* (PVF), respectivamente.

Ejemplo 4.1. *El PVIF que describe la conducción del calor en una barra uni-dimensional uniforme con fuentes, superficie lateral aislada y temperatura dada en ambos extremos está dado por*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= ku_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(L, t) = \beta(t), \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L, \end{aligned}$$

donde q , α , β y f son funciones dadas.

Ejemplo 4.2. *Si el extremo $x = 0$ está aislado y el extremo $x = L$ está conectado con un medio de temperatura constante cero, y si la barra no contiene fuentes, entonces el PVIF correspondiente es*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= ku_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(L, t) + hu(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L, \end{aligned}$$

donde f es una función dada y $h > 0$ es una constante dada.

Definición 4.2. *Una solución clásica de un PVIF es una función $u = u(x, t)$ que satisface la EDP y las condiciones iniciales y de frontera puntualmente en todas partes donde el problema esté formulado. Brevemente, nos referiremos a tales funciones simplemente como “soluciones.” Obviamente, un PVIF posee soluciones en este sentido sólo si las funciones que describen los datos poseen cierto grado de suavidad.*

Ejemplo 4.3. *Sean las funciones q , α , β y f del Ejemplo 4.1 continuas. Entonces una solución de este PVIF tiene las siguientes propiedades:*

- (i) *La solución es continuamente diferenciable con respecto a t y dos veces continuamente diferenciable con respecto a x en todos los puntos del dominio del plano (x, t) definido por*

$$G := \{(x, t) \mid 0 < x < L, t > 0\}.$$

- (ii) *La continuidad es extendida a las fronteras “espaciales” de G , es decir a*

$$\partial G_x := \{(x, t) \mid x = 0, t > 0 \text{ o } x = L, t > 0\},$$

y la solución satisface las condiciones de frontera apropiadas en cada punto sobre ∂G_x .

- (iii) *La continuidad también se extiende a la frontera “temporal” de G ,*

$$\partial G_t := \{(x, t) \mid 0 < x < L, t = 0\},$$

y la solución satisface la condición inicial en todos los puntos de ∂G_t .

Comentario 4.2.

- (i) *El Ejemplo 4.3 no dice nada sobre el comportamiento de u en los puntos “esquina” de G , a saber: $(0, 0)$ y $(L, 0)$. Por ejemplo, si*

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(0, t) = \lim_{x \rightarrow 0} u(x, 0),$$

es decir, si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x),$$

entonces u puede ser definida en $(0,0)$ por el valor común de estos límites. Por otro lado, si estos límites son distintos, entonces u no puede ser definida en $(0,0)$ en el sentido clásico. En las siguientes aplicaciones dejaremos estos puntos de “esquina” fuera de consideración.

- (ii) Supongamos que f posee una discontinuidad de salto en $(x_0, 0) \in \partial G_t$. En este caso es imposible encontrar una solución que satisfaga la condición inicial en este punto en el sentido clásico; sin embargo podríamos hallar un tipo de solución que lo hace en algún sentido “promedio.”
- (iii) La definición de una solución puede ser generalizada en forma obvia a PVIFs con más de dos variables independientes.

Teorema 4.1. Si las funciones α , β y f son suficientemente suaves para garantizar que u , u_t , u_{xx} y u_{xx} son continuas sobre G y hasta la frontera de G , incluyendo los puntos $(0,0)$ y $(L,0)$, entonces el PVIF del Ejemplo 4.1 posee a lo más una solución.

Demostración. Supongamos que existen dos soluciones, u_1 y u_2 , del problema en cuestión. Entonces debido a la linealidad, $u := u_1 - u_2$ es una solución del PVIF completamente homogéneo, es decir para cualquier $T > 0$ fijo, la función u satisface

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= k u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

Multiplicando la EDP por u , integrando el resultado sobre $[0, L]$ y utilizando las condiciones de frontera, las propiedades de suavidad de las soluciones para $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq t \leq T$, e integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L (u u_t - k u u_{xx}) dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{1}{2} (u^2)_t + k (u_x)^2 \right) dx - k [u u_x]_{x=0}^{x=L} = \int_0^L \left(\frac{1}{2} (u^2)_t + k (u_x)^2 \right) dx, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2 = -k \int_0^L (u_x)^2 dx \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

es decir la función

$$W(t) := \int_0^L u^2(x, t) dx, \quad 0 \leq t \leq T$$

es no creciente. Como $W(t) \geq 0$ y $W(0) = 0$ (debido a la condición inicial de u), esto sólo es posible si $W(t) = 0$ para $0 \leq t \leq T$. Debido a la no-negatividad del integrando en la definición de W y la arbitrariedad de $T > 0$ concluimos que $u \equiv 0$, es decir las soluciones u_1 y u_2 coinciden. ■

Comentario 4.3.

- (i) *El Teorema 4.1 afirma que si el PVIF del Ejemplo 4.1 posee una solución, entonces esta solución es única. El problema de la existencia de una solución es tratado en el Capítulo 5, donde efectivamente construiremos la solución.*
- (ii) *Las propiedades requeridas de la solución del Teorema 4.1 son más fuertes que aquellas mencionadas en el Ejemplo 4.3.*
- (iii) *La unicidad también puede ser establecida para soluciones de PVIFs con otros tipos de condiciones de frontera.*
- (iv) *Se puede demostrar fácilmente que el cambio de variables*

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{k}{L^2}t, \quad u(x, t) = u\left(L\xi, \frac{L^2\tau}{k}\right) = v(\xi, \tau)$$

reduce la ecuación del calor a la forma

$$v_\tau(\xi, \tau) = v_{\xi\xi}(\xi, \tau), \quad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0,$$

es decir sin pérdida de la generalidad podemos considerar esta forma más simple, utilizando x , t y u en lugar de ξ , τ y v , respectivamente.

4.2. La ecuación de Laplace

Consideremos ahora la ecuación del calor en un número superior de dimensiones, donde por simplicidad nos limitamos a dos dimensiones espaciales. Supongamos que un cuerpo conductor de calor ocupa una región D en el plano (x, y) , y que este cuerpo está delimitado por una curva suave, simple y cerrada ∂D . Sea R un subconjunto de D con una frontera suave ∂R . Utilizamos la misma notación para los parámetros que en la Sección 4.1.

El flujo del calor depende de la dirección, es decir aquí el flujo del calor es un vector φ que podemos escribir en la forma

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{componente normal} + \text{componente tangencial} \\ &= (\varphi \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\varphi \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}, \quad |\mathbf{n}| = |\boldsymbol{\tau}| = 1, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{n}$ y $\boldsymbol{\tau}$ son los vectores unitarios normales y tangenciales a ∂R , respectivamente, donde $\mathbf{n}$ apunta hacia afuera. Claramente, la componente tangencial no contribuye nada al intercambio del calor entre R y el resto del cuerpo.

Tal como en el caso de una barra, la conservación de la energía térmica constata que

$$\begin{aligned} &\text{tasa de cambio de energía térmica} \\ &= \text{flujo del calor a través de la frontera por tiempo unitario} \\ &\quad + \text{calor generado por fuentes por tiempo unitario.} \end{aligned}$$

Matemáticamente,

$$\frac{d}{dt} \int_R E(x, y, t) dA = - \int_{\partial R} \varphi(x, y, t) \cdot \mathbf{n}(x, y) ds + \int_R q(x, y, t) dA,$$

donde dA y ds son los elementos de área y longitud de arco, respectivamente. Considerando (4.2) y aplicando el teorema de divergencia, es decir

$$\int_R (\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi})(x, y, t) dA = \int_{\partial R} \boldsymbol{\varphi}(x, y, t) \cdot \mathbf{n}(x, y) ds,$$

podemos reescribir esta igualdad como

$$\int_R (c(x, y)\varrho(x, y)u_t(x, y, t) + (\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi})(x, y, t) - q(x, y, t)) dA = 0.$$

Como R es arbitrario, concluimos que para $(x, y) \in D$ y $t > 0$,

$$c(x, y)\varrho(x, y)u_t(x, y, t) = -(\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi})(x, y, t) + q(x, y, t). \quad (4.6)$$

Nuevamente podemos utilizar la ley de Fourier de conducción del calor, la cual en dos dimensiones es

$$\boldsymbol{\varphi}(x, y, t) = -K_0(x, y)(\operatorname{grad} u)(x, y, t);$$

luego (4.6) se convierte en

$$u_t(x, y, t) = k(\operatorname{div} \operatorname{grad} u)(x, y, t), \quad k = \frac{K_0}{c\varrho} = \text{const.},$$

o bien

$$u_t(x, y, t) = k(\Delta u)(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0, \quad (4.7)$$

donde definimos el operador diferencial Δ para funciones suaves $v = v(x, y)$ por

$$(\Delta v)(x, y) = v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y).$$

Este operador se llama *Laplaciano* de v . La ecuación (4.7) es la ecuación (de la difusión) del calor bi-dimensional.

Si el cuerpo contiene fuentes, entonces (4.7) es reemplazada por su versión no homogénea

$$u_t(x, y, t) = k(\Delta u)(x, y, t) + q(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0, \quad (4.8)$$

donde tal como antes, q incorpora el factor $1/(c\varrho)$.

La condición inicial de (4.7) o (4.8) es

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

y representa la distribución inicial de la temperatura en el cuerpo.

Las condiciones de frontera pueden ser elegidas en forma similar a las condiciones para una barra, a saber:

(i) Si la temperatura está prescrita sobre la frontera,

$$u(x, y, t) = \alpha(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial D, \quad t > 0,$$

entonces se habla de una *condición de frontera de Dirichlet*.

(ii) Si el flujo del calor por la frontera está prescrito,

$$(\text{grad } u)(x, y, t) \cdot \mathbf{n}(x, y) = \beta(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial D, \quad t > 0,$$

o equivalentemente

$$u_{\mathbf{n}}(x, y, t) = \beta(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial D, \quad t > 0,$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario exterior de ∂D y $u_{\mathbf{n}} = \partial u / \partial \mathbf{n} = \text{grad } u \cdot \mathbf{n}$, entonces este caso se llama *condición de frontera de Neumann*. En particular, si la frontera está aislada,

$$u_{\mathbf{n}}(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial D, \quad t > 0.$$

(iii) La ley del enfriamiento de Newton asume la forma

$$-K_0 u_{\mathbf{n}}(x, y, t) = H(u(x, y, t) - U(x, y, t)), \quad (x, y) \in \partial D, \quad t > 0.$$

Esto es una *condición de frontera de Robin*.

Puede ocurrir que un tipo de condición de frontera es especificado sobre una parte de la frontera y otro tipo sobre otra.

Una *temperatura de equilibrio* o *temperatura estacionaria* es una solución $u = u(x, y)$ de (4.7) independiente del tiempo; en otras palabras es una función que satisface la *ecuación de Laplace*

$$(\Delta u)(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D,$$

y una condición de frontera independiente del tiempo, por ejemplo

$$u(x, y) = \alpha(x, y), \quad (x, y) \in \partial D.$$

Si el cuerpo incluye fuentes estacionarias $q(x, y)$, entonces la temperatura de equilibrio satisface la *ecuación de Poisson*

$$(\Delta u)(x, y) = -\frac{1}{k}q(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (4.9)$$

En lo siguiente, al discutir la ecuación de Poisson (la versión no homogénea de la ecuación de Laplace) omitiremos el factor $(-1/k)$ en el lado derecho, considerándolo incorporado en el término fuente q .

Una temperatura de equilibrio puede existir o no existir.

Comentario 4.4.

(i) Podemos formular problemas en tres variables espaciales en forma similar, donde $u = u(x, y, z, t)$.

(ii) En coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, se tiene para $u = u(r, \theta)$

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}.$$

(iii) En coordenadas cilíndricas $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ y z el Laplaciano de $u = u(r, \theta, z)$ asume la forma

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz}.$$

(iv) Para problemas axisimétricos la función u es independiente de θ , luego

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + u_{zz} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz}.$$

(v) En coordenadas esféricas $x = r \cos \theta \sin \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$ y $z = r \cos \varphi$ tenemos

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} ((\sin \varphi) u_\varphi)_\varphi.$$

(vi) Las ecuaciones de Laplace y de Poisson son obviamente lineales.

(vii) La ecuación de Laplace es el ejemplo más simple de una EDP elíptica.

Ejemplo 4.4. La temperatura de equilibrio en una placa delgada uniforme y finita con fuente, superficies superior e inferior aisladas y temperatura dada en la frontera puede ser modelada por el PVF

$$\begin{aligned} (\Delta u)(x, y) &= q(x, y), & (x, y) &\in D, \\ u(x, y) &= \alpha(x, y), & (x, y) &\in \partial D, \end{aligned}$$

donde ∂D es una curva simple cerrada conexa. El Laplaciano se escribe o en coordenadas cartesianas, o en coordenadas polares, dependiendo de la geometría de la placa. Si se están utilizando coordenadas polares, la naturaleza de la EDP resultante puede requerir especificar condiciones de “frontera” adicionales, dependiendo de la física del proceso.

Comentario 4.5. Una solución (clásica) del PVF del Ejemplo 4.4 tiene las siguientes propiedades:

- (i) es dos veces continuamente diferenciable en D y satisface la EDP en cada punto en D ,
- (ii) es continua hasta la frontera ∂D de D y satisface la condición de frontera en cada punto de ∂D .

Tal como mencionamos en el ítem (ii) del Comentario 4.2, una función de datos de frontera con discontinuidades puede generar una solución con propiedades de suavidad inferiores.

Teorema 4.2. Si u es una solución del PVF

$$(\Delta u)(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D; \quad u(x, y) = \alpha(x, y), \quad (x, y) \in \partial D, \quad (4.10)$$

entonces u asume sus valores máximo y mínimo sobre la frontera ∂D de D .

Demostración. Estamos anticipando un resultado establecido en la Sección 5.3, de acuerdo al cual (ver Comentario 5.4) la temperatura en el centro de un disco circular es igual al promedio de la temperatura sobre la circunferencia que es la frontera del disco.

Supongamos que el máximo de la solución u es asumido en un punto $P \in D$. Considerando P como centro de un pequeño disco contenido en D , concluimos que $u(P)$ es el promedio de todos los valores de u sobre la circunferencia frontera de este disco, por lo tanto no puede ser mayor que todos estos valores. Llegamos a una contradicción, la cual implica que u debe asumir su máximo sobre la frontera ∂D . Considerando $v = -u$ concluimos también que u debe asumir su mínimo sobre ∂D . Este enunciado es conocido como *principio del máximo* para la ecuación de Laplace. ■

Corolario 4.1. Si una solución u del PVF (4.10) es idénticamente cero sobre ∂D , entonces u también es idénticamente cero en D .

Demostración. De acuerdo al Teorema 4.2, el máximo y el mínimo de u son cero porque ocurren en puntos de ∂D . Luego u es cero en D . ■

Teorema 4.3. *El PVF del Ejemplo 4.4 posee a lo más una solución.*

Demostración. Supongamos que existen dos soluciones u_1 y u_2 . Debido a la linealidad de la EDP y de las condiciones de frontera, la diferencia $u = u_1 - u_2$ es una solución del PVF completamente homogéneo

$$(\Delta u)(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D; \quad u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial D,$$

luego de acuerdo al Corolario 4.1, $u \equiv 0$, es decir u_1 y u_2 son la misma función. ■

Definición 4.3. *Se dice que la solución de un PVF (o PVI, o PVIF) depende en forma continua de los datos (o es estable) si una pequeña variación de los datos (condiciones de frontera o iniciales, o el término no homogéneo de la EDP) causa solamente una pequeña variación de la solución del problema.*

Teorema 4.4. *La solución del PVIF del Ejemplo 4.4 depende en forma continua de los datos de frontera.*

Demostración. Consideremos el PVF

$$(\Delta u)(x, y) = q(x, y), \quad (x, y) \in D; \quad u(x, y) = \alpha(x, y), \quad (x, y) \in \partial D,$$

y el siguiente PVF con una pequeña perturbación $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ de la función de frontera α :

$$(\Delta v)(x, y) = q(x, y), \quad (x, y) \in D; \quad v(x, y) = \alpha(x, y) + \varepsilon(x, y), \quad (x, y) \in \partial D.$$

Considerando la linealidad de la EDP y de las condiciones de frontera obtenemos que $w = u - v$ satisface

$$(\Delta w)(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D; \quad w(x, y) = \varepsilon(x, y), \quad (x, y) \in \partial D.$$

De acuerdo al Teorema 4.2,

$$\min_{(\xi, \eta) \in D} \varepsilon(\xi, \eta) \leq w(x, y) = u(x, y) - v(x, y) \leq \max_{(\xi, \eta) \in D} \varepsilon(\xi, \eta),$$

por lo tanto la perturbación de la solución u igualmente es pequeña. ■

Comentario 4.6. *Se dice que un PVF (o PVI, o PVIF) es bien puesto si posee una solución única que depende en forma continua de los datos del problema. En los siguientes capítulos construiremos una solución del PVF del Ejemplo 4.4. De acuerdo al Teorema 4.3 ésta será la solución única del problema. Además, de acuerdo al Teorema 4.4, esta solución depende en forma continua de los datos del problema. Concluimos que el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson es bien puesto.*

4.3. La ecuación de la onda

Consideremos el movimiento de una cuerda elástica estirada en la que el movimiento horizontal de los puntos es despreciable (ver Figura 4.1). Para esta cuerda definimos los siguientes parámetros: su longitud L , es desplazamiento vertical $u(x, t)$, la densidad de masa (masa por longitud unitaria) $\varrho_0(x)$, la tensión $F(x, t)$, y la componente vertical de la fuerza de cuerpo por masa unitaria $q(x, t)$.

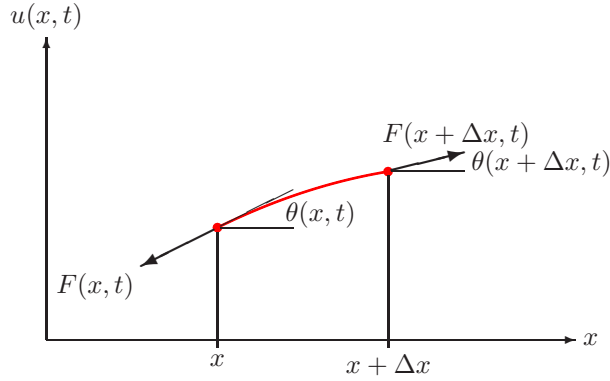


FIGURA 4.1. Segmento pequeño de una cuerda elástica.

Suponiendo que el desplazamiento vertical a partir de la posición de equilibrio (el segmento $[0, L]$ a lo largo del eje x) es pequeño y escribiendo la segunda ley de Newton

$$\text{fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración}$$

en una proyección vertical para el segmento $[x, x + \Delta x]$ de la cuerda, obtenemos la igualdad aproximada

$$\varrho_0(x)\Delta x u_{tt}(x, t) \approx F(x + \Delta x, t) \sin(\theta(x + \Delta x, t)) - F(x, t) \sin(\theta(x, t)) + \varrho_0(x)\Delta x q(x, t).$$

Dividiendo por Δx y considerando $\Delta x \rightarrow 0$ obtenemos la igualdad

$$\varrho_0(x)u_{tt}(x, t) = (F(x, t) \sin(\theta(x, t)))_x + \varrho_0(x)q(x, t). \quad (4.11)$$

Para ángulos θ pequeños, la pendiente de la cuerda satisface

$$u_x = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + \dots} \approx \sin \theta,$$

luego podemos reescribir (4.11) en la forma

$$\varrho_0(x)u_{tt}(x, t) = (F(x, t)u_x(x, t))_x + \varrho_0(x)q(x, t). \quad (4.12)$$

Suponiendo que la cuerda es perfectamente elástica (es decir suponiendo que si θ es pequeño, entonces $F(x, t) = F_0 = \text{const.}$) y homogénea ($\varrho_0 = \text{const.}$), y que la fuerza de cuerpo es despreciable en comparación con la tensión ($q = 0$) notamos que (4.12) se convierte en

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (4.13)$$

donde $c^2 = F_0/\varrho_0$. Esta es la *ecuación de la onda* uni-dimensional, en la que c es una velocidad. Si la fuerza de cuerpo no es despreciable, entonces (4.13) es reemplazada por

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Como (4.13) es una ecuación de segundo orden con respecto al tiempo, se requieren dos condiciones iniciales. Éstas normalmente se eligen como

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L,$$

es decir se especifican la posición y la velocidad inicial de cada punto de la cuerda.

Tal como en el caso de la ecuación del calor, existen tres tipos principales de condiciones de frontera para (4.13) que son físicamente relevantes.

- (i) El desplazamiento puede ser especificado en un extremo; por ejemplo,

$$u(L, t) = \beta(t).$$

- (ii) Un extremo puede estar libre (sin tensión vertical):

$$F_0 \sin \theta \approx F_0 \tan \theta = F_0 u_x = 0,$$

lo que implica una condición de frontera de la forma

$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

- (iii) Un extremo puede tener un anexo elástico descrito por

$$F_0 u_x(0, t) = ku(0, t) \quad \text{o} \quad F_0 u_x(L, t) = -ku(L, t), \quad t > 0.$$

Comentario 4.7.

- (i) *Existe una analogía entre las condiciones de fronteras asociadas con la ecuación de la onda y aquellas consideradas para la ecuación del calor.*
- (ii) *Evidentemente la ecuación de la onda es lineal.*
- (iii) *La ecuación de la onda uni-dimensional es el ejemplo más simple de una ecuación hiperbólica lineal de segundo orden.*

Ejemplo 4.5. *El PVIF de una cuerda vibrante con extremos fijos y considerando el efecto de la fuerza del cuerpo es de la forma*

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L, \end{aligned}$$

donde q , f y g son funciones dadas.

Ejemplo 4.6. *Si la cuerda del Ejemplo 4.6 tiene un anexo elástico en su extremo cercano, un extremo lejano libre, y una fuerza de cuerpo despreciable, entonces el PVIF correspondiente está dado por*

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) - ku(0, t) &= 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L, \end{aligned}$$

donde q , f y g son funciones dadas y $k > 0$ es una constante dada.

Comentario 4.8. *Sean el dominio G y sus curvas de frontera ∂G_x y ∂G_t definidos como en el Ejemplo 4.3. Entonces una solución (clásica) u del PVIF del Ejemplo 4.5 tiene las siguientes propiedades:*

- (i) *es dos veces continuamente diferenciable con respecto a x y t en G y satisface la EDP en cada punto de G ,*
- (ii) *es continua hasta ∂G_x y satisface las condiciones de frontera en cada punto de ∂G_x ,*

- (iii) *es continua conjuntamente con su primera derivada parcial con respecto a t hasta ∂G_t y satisface las condiciones iniciales en cada punto de ∂G_t .*

Tal como en los casos de las ecuaciones del calor y de Laplace la presencia de discontinuidades de salto en los datos del problema causa una solución con suavidad reducida.

Teorema 4.5. *Sean las funciones q , f y g elegidas tal que u y todas sus derivadas parciales de primer y segundo orden son continuas hasta la frontera de G , incluyendo los puntos de “esquina” $(0, 0)$ y $(L, 0)$, entonces el PVIF del Ejemplo 4.5 posee a lo más una solución.*

Demostración. Sean u_1 y u_2 dos soluciones del PVIF dado, entonces su diferencia $u = u_1 - u_2$ satisface el PVIF completamente homogéneo

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

Multiplicando la EDP por u_t , integrando el resultado con respecto a x sobre $[0, L]$ y con respecto a t sobre $[0, T]$, donde $T > 0$ es un número arbitrario fijo, utilizando integración por partes y considerando las condiciones de frontera y la suavidad de u obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_0^L (u_{tt}u_t - c^2 u_{xx}u_t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^L (u_{tt}u_t + c^2 u_x u_{xt}) dx dt - c^2 \int_0^T [u_x u_t]_{x=0}^{x=L} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2)_t dx dt = \frac{1}{2} \int_0^L [u_t^2 + c^2 u_x^2]_{t=0}^{t=T} dx; \end{aligned}$$

luego para cualquier $T > 0$,

$$\int_0^L (u_t^2(x, T) + c^2 u_x^2(x, T)) dx = \int_0^L (u_t^2(x, 0) + c^2 u_x^2(x, 0)) dx,$$

lo que implica que

$$V(t) := \int_0^L (u_t^2(x, t) + c^2 u_x^2(x, t)) dx = \kappa = \text{const.} \geq 0, \quad t \geq 0.$$

A partir de las condiciones iniciales y las propiedades de suavidad de u sabemos que $V(0) = 0$, luego $\kappa = 0$; en otras palabras, $V \equiv 0$. Como el integrando en V es no negativo, esto es posible si y sólo si

$$u_t(x, t) = 0, \quad u_x(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0.$$

Por lo tanto, u es constante en G y sobre sus fronteras. Como u es cero a lo largo de las fronteras, concluimos que $u \equiv 0$, luego u_1 y u_2 coinciden. ■

Comentario 4.9.

- (i) *Tal como para las ecuaciones del calor y de Laplace, en lo siguiente construiremos una solución del PVIF del Ejemplo 4.5. En virtud del Teorema 4.5 ésta será la solución única del problema.*

- (ii) *La unicidad puede ser demostrada también para soluciones de PVIF con otras condiciones de frontera.*
- (iii) *La sustitución*

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{cT}{L}, \quad u(x, t) = u\left(L\xi, \frac{L\tau}{c}\right) = v(\xi, \tau)$$

reduce la ecuación de la onda a la forma más simple

$$v_{\tau\tau}(\xi, \tau) = v_{\xi\xi}(\xi, \tau), \quad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0,$$

la que es la forma preferida a ser utilizada en las aplicaciones.

4.4. Otras ecuaciones

Revisaremos un número de EDPs lineales que aparecen en algunos modelos matemáticos importantes. Su clasificación según tipo (parabólico, hiperbólico o elíptico) será explicada más adelante.

Para describir el fenómeno de *movimiento browniano* se busca determinar la función $u(x, t)$ que especifica la probabilidad con la que una partícula sujeta a movimiento uni-dimensional en un fluido se encuentra en la posición x en el instante t . Dicha función satisface la EDP de segundo orden parabólica

$$u_t(x, t) = au_{xx}(x, t) - bu_x(x, t),$$

donde los coeficientes $a, b > 0$ están relacionados al desplazamiento en promedio de la partícula por tiempo unitario y a la varianza del desplazamiento alrededor del promedio observado.

El caso uni-dimensional de *problemas de convección-difusión* está descrito por la EDP de segundo orden parabólica

$$u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t) - au_x(x, t) + bu(x, t),$$

donde $u(x, t)$ es la temperatura y los coeficientes $k, a > 0$ y b son expresados en términos de las propiedades físicas del medio, de la tasa del flujo del calor, y de la fuerza de la fuente. Para $a = 0$ y $b > 0$ la ecuación de difusión describe un proceso de difusión con reacción.

Consideremos un ejemplo de una ecuación usada en matemática financiera. El precio $V(S, t)$ del valor de una opción de compra de una acción en un mercado financiero (bolsa) es la solución de la EDP parabólica de segundo orden

$$V_t(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}(S, t) + rSV_S(S, t) - rV(S, t) = 0,$$

donde S es el precio de la acción, σ es la volatilidad del precio, r es la tasa de interés anual para una inversión sin riesgo, y el tiempo t se mide en años. Esta ecuación es conocida como *ecuación de Black-Scholes*.

En la mecánica cuántica, la función de onda $\psi(x, t)$ caracteriza el movimiento uni-dimensional de una partícula bajo la influencia de un potencial $V(x)$. Esta función satisface la *ecuación de Schrödinger*

$$i\hbar\psi_t(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx}(x, t) + V(x)\psi(x, t).$$

Ésta es una EDP de segundo orden parabólica donde $\hbar$ es la constante de Planck reducida, m es la masa de la partícula, e $i^2 = -1$.

En la mecánica cuántica relativista la función de onda $\psi(x, y, z, t)$ de una partícula que se mueve libremente es la solución de la *ecuación de Klein-Gordon*

$$\psi_{tt}(x, y, z, t) = c^2 \Delta \psi(x, y, z, t) - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi(x, y, z, t),$$

donde c es la velocidad de la luz. Ésta es una ecuación hiperbólica de segundo orden. Su versión uni-dimensional es de la forma

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) - au(x, t).$$

La *ecuación telegráfica* describe el voltaje y corriente en una línea de transmisión eléctrica, dependiendo de la distancia y el tiempo. Estas cantidades satisfacen la EDP lineal hiperbólica de segundo orden

$$au_{tt}(x, t) + bu_t(x, t) + cu(x, t) = u_{xx}(x, t),$$

donde los coeficientes $a, b > 0$ y $c \geq 0$ son expresados en términos de la resistencia, la inductancia, la capacitancia y la conductancia de la línea de transmisión.

En el caso uni-dimensional, la propagación de *ondas disipativas* es gobernada por una EDP hiperbólica de segundo orden de la forma

$$u_{tt}(x, t) + au_t(x, t) + bu(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) - du_x(x, t),$$

donde los coeficientes $a, b, d \geq 0$ no son todos cero y $c > 0$.

La deflexión $u(x, t)$ de un punto genérico en una barra satisface la EDP de cuarto orden

$$u_{tt}(x, t) + c^2 u_{xxxx}(x, t) = 0,$$

donde c es una constante física relacionada con la rigidez del material de la barra.

La *ecuación de Helmholtz*

$$\Delta u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0,$$

donde k es una constante, juega un rol importante en el estudio de dispersión (*scattering*) de ondas acústicas, electromagnéticas, y elásticas. Es una EDP elíptica de segundo orden. La ecuación

$$\Delta u(x, y, z) - k^2 u(x, y, z) = 0$$

se llama *ecuación de Helmholtz modificada*.

En el caso bi-dimensional la distribución de la temperatura bajo el proceso estacionario de convección del calor satisface una EDP elíptica de segundo orden de la forma

$$\Delta u(x, y) - au_x(x, y) - bu_y(x, y) + cu(x, y) = 0,$$

donde los coeficientes $a, b \geq 0$, no ambos cero, y c están relacionados a las propiedades térmicas del medio, las tasas del flujo del calor en las direcciones x e y , y la potencia de la fuente del calor.

La *ecuación biarmónica* es una ecuación diferencial en derivadas parciales de cuarto orden que se plantea en el área de la mecánica de medios continuos, incluyendo la teoría de la elasticidad lineal y la solución de flujos de Stokes. Se escribe como

$$\Delta\Delta u(x, y) = u_{xxxx}(x, y) + 2u_{xxyy}(x, y) + u_{yyyy}(x, y) = 0.$$

Finalmente, comentamos que el flujo transónico de un gas compresible está descrito por la *ecuación de Euler-Tricomi*

$$u_{xx}(x, y) = xu_{yy}(x, y),$$

donde $u(x, y)$ es una función de la velocidad. Ésta es una EDP de segundo orden de tipo mixto: es hiperbólica para $x > 0$, elíptica para $x < 0$, y parabólica para $x = 0$.

Capítulo 5

El método de separación de variables

La *separación de variables* es una de las técnicas más antiguas y mas eficientes para cierta clase de problemas de EDPs. Aquí la demostraremos aplicándola a problemas de valores iniciales y de frontera (PVIFs) de las ecuaciones del calor y de la onda, y a problemas de valores de frontera (PVFs) de la ecuación de Laplace.

5.1. La ecuación del calor

Consideremos el caso de una barra con temperatura cero en sus extremos, descrita por el siguiente PVIF de la ecuación del calor:

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= ku_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L,\end{aligned}$$

donde $f \not\equiv 0$. Notamos que la EDP y las condiciones de frontera son lineales y homogéneas. Buscamos una solución de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Insertando este planteo en la EDP obtenemos la igualdad

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t). \quad (5.1)$$

Claramente ni X , ni T puede ser la función nula. Si alguna de estas fuera la función nula, entonces u sería la función nula, lo que es imposible dado que $u \equiv 0$ no satisface la condición inicial no homogénea. De acuerdo a lo anterior, podemos dividir la igualdad (5.1) por $kX(x)T(t)$ para obtener

$$\frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Como el lado izquierdo es una función solamente de t y el lado derecho es una función solamente de x , esta igualdad es posible si y sólo si ambos lados son iguales a la misma constante, denotada, por ejemplo, por $-\lambda$. Entonces las identidades

$$\frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

deben ser válidas. Esto implica las siguientes ecuaciones separadas para las funciones X y T :

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad (5.2)$$

$$T'(t) + \lambda k T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (5.3)$$

La primera condición de frontera implica

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad \text{para todo } t > 0.$$

Como $T \neq 0$ se sigue que

$$X(0) = 0. \quad (5.4)$$

Análogamente, la segunda condición de borde implica

$$X(L) = 0. \quad (5.5)$$

Podemos ahora determinar X y T . Nos interesan funciones $X \not\equiv 0$ que satisfagan el problema de Sturm-Liouville regular (5.2), (5.4), y (5.5). En otras palabras, nos interesan las funciones propias X_n correspondientes a los valores propios λ_n , ambos calculados en el Ejemplo 3.8:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.6)$$

Para cada λ_n obtenemos a partir de (5.3) el componente temporal correspondiente

$$T_n(t) = \exp\left(-k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right). \quad (5.7)$$

Aquí se eligió la constante de integración arbitraria igual uno ya que estas funciones se utilizan en el siguiente paso con coeficientes numéricos arbitrarios.

Combinando (5.6) y (5.7) concluimos que todas las funciones de la forma

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \exp\left(-k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

satisfacen la EDP y las condiciones de frontera. A raíz del principio de superposición, también toda combinación lineal finita

$$\sum_{n=1}^N b_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \exp\left(-k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \quad (5.8)$$

satisface la EDP y las condiciones de frontera, donde b_n son números arbitrarios. Tal expresión satisface, además, la condición inicial si

$$f(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Pero esto imposible a menos que f sea una combinación lineal de las funciones propias lo que, en general, no es el caso. Esto implica que (5.8) no es una buena representación de la solución $u(x, t)$ del PVIF. No obstante, recordamos (ver Sección 2.2) que si f es suave a trozos, entonces la función puede ser escrita como una combinación lineal *infinita* de las funciones propias, es decir como serie de Fourier de senos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L, \quad (5.9)$$

donde en virtud de (2.10),

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.10)$$

Por lo tanto la solución está dada por la serie infinita

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \exp\left(-k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \quad (5.11)$$

con los coeficientes b_n calculados a partir de (5.10).

Ejemplo 5.1. *Consideremos el PVIF*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \operatorname{sen}(3\pi x) - 2\operatorname{sen}(5\pi x), \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Aquí $k = 1$, $L = 1$, y la función en el lado derecho de la condición inicial es una combinación lineal de las funciones propias. Utilizando (5.9) y la parte (ii) del Teorema 3.3 concluimos que $b_3 = 1$, $b_5 = -2$, y $b_n = 0$ para $n \neq 3, 5$. De acuerdo a (5.11), la solución está dada por

$$u(x, t) = \operatorname{sen}(3\pi x)e^{-9\pi^2 t} - 2\operatorname{sen}(5\pi x)e^{-25\pi^2 t}.$$

Este resultado también puede ser obtenido a partir de (5.10) y (5.11).

Ejemplo 5.2. *Para determinar la solución del PVIF*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x, \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

utilizamos primero (5.10) con $f(x) = x$ y $L = 1$ e integramos por partes para obtener

$$b_n = 2 \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Luego, a través de (5.11), obtenemos la solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}.$$

Consideremos ahora la conducción del calor en una barra con extremos aislados. Este problema está descrito por el PVIF

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= k u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

Como la EDP y las condiciones de frontera son lineales y homogéneas, buscamos nuevamente una solución de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Tal como en el caso de la barra con temperatura cero en ambos extremos encontramos a partir de la EDP y las condiciones de frontera que X y T satisfacen

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \quad 0 < x < L, \\ X'(0) &= 0, \quad X'(L) = 0; \end{aligned}$$

$$T'(t) = k\lambda T(t) = 0, \quad t > 0,$$

donde λ es la constante de separación.

Las soluciones X no nulas son las funciones propias del problema de Sturm-Liouville calculadas en el Ejemplo 3.9:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.12)$$

Integrando la ecuación para T con $\lambda = \lambda_n$ obtenemos los componentes temporales asociados

$$T_n(t) = \exp\left(-k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right). \quad (5.13)$$

A partir de (5.12), (5.13), y el argumento utilizado en el caso anterior esperamos que la solución del PVIF tenga la representación en serie

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \exp\left(-k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right), \quad (5.14)$$

donde cada término satisface la EDP y las condiciones de frontera. La condición inicial está satisfecha si

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L.$$

Esto muestra que $a_0/2$ y a_n son los coeficientes de la serie de Fourier de cosenos de f dados por (2.12), es decir

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.15)$$

De acuerdo a lo anterior, la solución del PVIF está dada por (5.14) con los coeficientes a_n determinados por (5.15).

Ejemplo 5.3. *La solución del PVIF*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x, \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

es obtenida a partir de (5.14) y (5.15) con $L = 1$ y $f(x) = x$. Específicamente,

$$a_0 = 2 \int_0^1 x dx = 1; \quad a_n = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = ((-1)^n - 1) \frac{2}{n^2\pi^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

luego tal como en el Ejemplo 5.2,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n - 1) \frac{2}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}.$$

El método de separación de variables también puede ser utilizado en el caso donde un extremo es mantenido en temperatura cero mientras que el otro está aislado.

Ejemplo 5.4. *Consideremos el PIVF*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 1, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Como la EDP y las condiciones de borde son lineales y homogéneas, buscamos una solución en la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Procediendo como en los casos anteriores, encontramos que X y T satisfacen, respectivamente,

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \quad 0 < x < 1; \quad X(0) = 0, \quad X'(1) = 0, \\ T'(t) + \lambda T(t) &= 0, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde λ es la constante de separación. Para determinar X , consideremos el cociente de Rayleigh (3.6) para el problema de Sturm-Liouville regular (5.16). Tal como en el Ejemplo 3.8,

$$[p(x)f(x)f'(x)]_{x=a}^{x=b} = [X(x)X'(x)]_{x=0}^{x=1} = 0,$$

y obtenemos la desigualdad (3.7), a partir de la cual, considerando las condiciones de frontera (5.16), podemos deducir que $\lambda > 0$. De acuerdo a lo anterior, la solución general de la ecuación diferencial en (5.16) está dada por

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Como $X(0) = 0$, concluimos que $C_1 = 0$. Utilizando la condición $X'(1) = 0$ obtenemos ahora que

$$\cos \sqrt{\lambda} = 0,$$

por lo tanto

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2n-1}{2}\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

y los pares valor propio-función propia de (5.16) están dados por

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}, \quad X_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

con los componentes temporales dados por

$$T_n(t) = \exp\left(-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}t\right).$$

Concluimos que las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}t\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

satisfacen la EDP y las condiciones de frontera. Considerando la combinación lineal habitual de todas las funciones u_n (su cantidad es numerable), es decir,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}t\right), \quad (5.17)$$

obtenemos que la condición inicial está satisfecha si

$$u(x, 0) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2}. \quad (5.18)$$

En otras palabras, (5.17) es la solución del PVIF dado si los coeficientes c_n son los coeficientes de la serie de Fourier generalizada para la función $f \equiv 1$. Estos coeficientes son calculados a través de (3.10) donde de acuerdo a (5.18),

$$u \equiv 1, \quad \sigma \equiv 1, \quad f_n(x) = \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

Un cálculo directo muestra que

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

luego

$$c_n = 2 \int_0^1 \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx = \frac{4}{(2n-1)\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De acuerdo a lo anterior, la solución del PVIF posee la representación como serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} t\right).$$

Ejemplo 5.5. La solución del PVIF

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

puede ser construida tal como en el Ejemplo 5.4 con la excepción de que aquí las condiciones de frontera y el cociente de Rayleigh entregan los pares valor propio-función propia

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}, \quad X_n(x) = \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como

$$\int_0^1 \cos^2 \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

los coeficientes de la serie de Fourier generalizada, dados por (3.10) con $u(x) = x$, $\sigma \equiv 1$, $k = 1$ y $L = 1$, son

$$c_n = 2 \int_0^1 x \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} - \frac{8}{(2n-1)^2 \pi^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces la solución del PVIF está dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} - \frac{8}{(2n-1)^2 \pi^2} \right) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} t\right).$$

Podemos considerar, además, una barra con un extremo en un medio de temperatura cero.

Consideremos el problema del flujo del calor en una barra uniforme sin fuentes internas cuando el extremo “cercano” está mantenido a temperatura cero y el extremo “lejano” está ubicado en el “aire libre” a temperatura cero. En este caso el PVIF correspondiente (ver Sección 4.1) es

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= k u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u_x(L, t) + h u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L, \end{aligned}$$

donde $h = \text{const.} > 0$. Como la EDP y las condiciones de borde son lineales y homogéneas, podemos nuevamente aplicar el método de separación de variables y buscamos una solución de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. A partir de la EDP y las condiciones de frontera deducimos que X satisface el problema de Sturm-Liouville regular

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L; \quad X(0) = 0, \quad X'(L) + hX(L) = 0, \quad (5.19)$$

mientras que T es la solución de

$$T'(t) + k\lambda T(t) = 0, \quad t > 0.$$

Calculamos los pares valor propio-función propia de (5.19) en el Ejemplo 3.10:

$$\lambda_n = \left(\frac{\zeta_n}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \text{sen} \frac{\zeta_n x}{L}, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde ζ_n son las raíces positivas de la ecuación $\tan \zeta = -\zeta/(hL)$. Luego

$$T_n(t) = \exp \left(-k \left(\frac{\zeta_n}{L} \right)^2 t \right),$$

es decir esperamos que la solución del PVIF tenga una representación como serie de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{\zeta_n x}{L} \exp \left(-k \left(\frac{\zeta_n}{L} \right)^2 t \right). \quad (5.20)$$

Los coeficientes c_n son determinados a partir de la condición inicial, de acuerdo a la cual

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{\zeta_n x}{L}.$$

Como las funciones propias son ortogonales sobre $[0, L]$, los coeficientes c_n son calculados a partir de (3.10):

$$c_n = \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{\zeta_n x}{L} dx \bigg/ \int_0^L f(x) \text{sen}^2 \frac{\zeta_n x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.21)$$

La solución del PVIF está dada por (5.20) con los coeficientes c_n dados por (5.21).

Ejemplo 5.6. *Consideremos el PVIF*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) + u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < x < 1/2, \\ 1 & \text{para } 1/2 < x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

A partir de los Ejemplos 3.10 y 3.12 con $L = h = 1$ sabemos que los pares valor propio-función propia de este problema son

$$\lambda_n = \zeta_n^2, \quad X_n(x) = \text{sen}(\zeta_n x), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde hasta cuatro decimales

$$\zeta_1 = 2,0288, \quad \zeta_2 = 4,9132, \quad \zeta_3 = 7,9787, \quad \zeta_4 = 11,0855, \quad \zeta_5 = 14,2074.$$

Utilizando (5.21) y

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < x < 1/2, \\ 1 & \text{para } 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

calculamos los coeficientes c_n con la misma precisión:

$$c_1 = 0,8001, \quad c_2 = -0,3813, \quad c_3 = -0,1326, \quad c_4 = 0,1160, \quad c_5 = 0,1053.$$

De acuerdo a (5.20), obtenemos la solución aproximada

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 0,8001 \text{sen}(2,0288x) \exp(-4,1160t) - 0,3813 \text{sen}(4,9132x) \exp(-24,1395t) \\ &\quad - 0,1326 \text{sen}(7,9787x) \exp(-63,6597t) + 0,1160 \text{sen}(11,0855x) \exp(-122,8883t) \\ &\quad + 0,1053 \text{sen}(14,2074x) \exp(-201,8502t) + \dots \end{aligned}$$

Consideremos, finalmente, el problema de conducción del calor en un anillo circular uniforme. Este anillo puede ser descrito por una barra de longitud $2L$ donde la misma temperatura y el mismo flujo de calor están presentes en cada uno de los extremos $x = -L$ y $x = L$. Esto motiva el PVIF

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= k u_{xx}(x, t), \quad -L < x < L, \quad t > 0, \\ u(-L, t) &= u(L, t), \quad u_x(-L, t) = u_x(L, t), \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad -L < x < L. \end{aligned}$$

La EDP y las condiciones de frontera son homogéneas, entonces tal como en los casos anteriores buscaremos una solución en la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Aplicando los argumentos estándar obtenemos a partir de la EDP y las condiciones de frontera

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad -L < x < L; \quad X(-L) = X(L), \quad X'(-L) = X'(L), \quad (5.22)$$

$$T'(t) + \lambda k T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (5.23)$$

Para una solución no nula del PVIF, X debe ser una solución no nula del problema de Sturm-Liouville periódico (5.22), el cual discutimos en el Ejemplo 3.14. Los valores propios de este problema de Sturm-Liouville son

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

con las funciones propias correspondientes

$$X_0(x) = \frac{1}{2}; \quad X_{1n}(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad X_{2n}(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De acuerdo a lo anterior, los componentes temporales dados por (5.23) con $\lambda = \lambda_n$ son

$$T_n(t) = C \exp\left(-k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right), \quad C = \text{const.},$$

por lo tanto consideramos una solución en la siguiente forma de serie:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n X_{1n}(x) + b_n X_{2n}(x)) T_n(t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \exp\left(-k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

La condición inicial requiere que

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad -L < x < L.$$

Tal como comentamos en el Ejemplo 3.14, los coeficientes de esta serie de Fourier completa de f se calculan mediante las fórmulas (2.7)–(2.9):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

De acuerdo a lo anterior, la solución del PVIF está dada por (5.24) y (5.25).

Ejemplo 5.7. *Para el PVIF*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad -1 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(-1, t) &= u(1, t), \quad u_x(-1, t) = u_x(1, t), \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x + 1, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

se tiene $L = 1$ y $f(x)$, luego a partir de (5.25),

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^1 (x + 1) dx = 2; \quad a_n = \int_{-1}^1 (x + 1) \cos(n\pi x) dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \int_{-1}^1 (x + 1) \sin(n\pi x) dx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

por lo tanto en virtud de (5.24) la solución del PVIF está dada por

$$u(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}.$$

5.2. La ecuación de la onda

En términos generales el método de separación de variables es aplicado a PVIFs de la ecuación de la onda en forma muy similar a la solución de PVIFs de la ecuación del calor. No obstante, aquí el componente temporal satisface una EDO de segundo orden, lo que introduce una segunda condición inicial.

Para una cuerda con extremos fijos, sabemos a partir de la Sección 4.3 que el PVIF correspondiente está dado por

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

Tal como en los problemas anteriores, la EDP y las condiciones de frontera son lineales y homogéneas, luego estamos buscando una solución en la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$ donde tal como en el caso de la ecuación del calor, ni X , ni T puede ser la función nula. Reemplazando este planteo en la EDP, obtenemos

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t).$$

Dividiendo esto por $c^2 X(x)T(t)$ obtenemos

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad (5.26)$$

donde $\lambda = \text{const.}$ es la constante de separación. Por otro lado, las condiciones de frontera implican $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$; luego X satisface

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L; \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0.$$

Este problema de Sturm-Liouville regular fue resuelto en el Ejemplo 3.8, donde demostramos que sus pares valor propio-función propia son

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.27)$$

A partir de (5.26) concluimos que para cada valor propio λ_n se obtiene una función T_n que satisface la ecuación

$$T_n''(t) + c^2 \lambda_n T_n(t) = 0, \quad t > 0,$$

cuya solución general (como $\lambda_n > 0$) está dada por

$$T_n(t) = b_{1n} \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_{2n} \sin \frac{n\pi ct}{L}, \quad b_{1n}, b_{2n} = \text{const.} \quad (5.28)$$

En virtud de (5.27) y (5.28) suponemos que la solución del PVIF posee la representación de serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \left(b_{1n} \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_{2n} \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{L} \right). \quad (5.29)$$

Cada término de esta serie satisface la EDP y las condiciones de frontera. Para satisfacer las condiciones iniciales insertamos $t = 0$ en (5.29) y en la expresión de $u_t(x, t)$ obtenida diferenciando (5.29) término por término:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Los números b_{1n} y $b_{2n} n\pi c/L$ son los coeficientes de la serie de Fourier de senos de f y g , respectivamente; luego, de acuerdo a (2.10),

$$b_{1n} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_{2n} = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.30)$$

De acuerdo a lo anterior, la solución del PVIF está dada por (5.29) con los coeficientes b_{1n} y b_{2n} calculados a partir de (5.30).

Comentario 5.1. *Los términos en la expansión de u se llaman modos normales de vibración. Las soluciones de este tipo se llaman ondas estacionarias.*

Ejemplo 5.8. *En el PVIF*

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 3 \operatorname{sen}(\pi x) - 2 \operatorname{sen}(3\pi x), \\ u_t(x, 0) &= 4\pi \operatorname{sen}(2\pi x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

las funciones f y g son combinaciones lineales de las funciones propias. Poniendo $c = 1$ y $L = 1$ en sus expansiones en funciones propias arriba, a partir del ítem (ii) del Teorema 3.3 concluimos que

$$b_{11} = 3, \quad b_{13} = -2, \quad b_{1n} = 0 \quad (n \neq 1, 3), \quad b_{22} = 2, \quad b_{2n} = 0 \quad (n \neq 2).$$

De acuerdo a lo anterior, en virtud de (5.29) obtenemos la solución del PVIF

$$u(x, t) = 3 \operatorname{sen}(\pi x) \cos(\pi t) - 2 \operatorname{sen}(3\pi x) \cos(3\pi t) + 2 \operatorname{sen}(2\pi x) \operatorname{sen}(2\pi t).$$

Ejemplo 5.9. *Si reemplazamos las condiciones iniciales del PVIF del Ejemplo 5.8 por*

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{para } 0 < x \leq 1/2, \\ 1 - x & \text{para } 1/2 < x < 1, \end{cases} \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

entonces utilizando (5.30) (con $c = 1$ y $L = 1$) e integrando por partes obtenemos

$$b_{1n} = 2 \left(\int_0^{1/2} f(x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx + \int_{1/2}^1 f(x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx \right)$$

$$= 2 \left(\int_0^{1/2} x \operatorname{sen}(n\pi x) dx + \int_{1/2}^1 (1-x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx \right) = \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2},$$

$$b_{2n} = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 g(x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

luego de acuerdo a (5.29), la solución del PVIF está dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen}(n\pi x) \cos(n\pi t).$$

Una cuerda vibrante con extremos libres (ver Sección 4.3) puede ser descrita por el PVIF

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

Separando las variables obtenemos los pares valor propio-función propia

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Para $\lambda_0 = 0$, la solución general de la ecuación para T es

$$T_0(t) = \frac{a_{10}}{2} + \frac{a_{20}}{2}t, \quad a_{10}, a_{20} = \text{const.},$$

mientras que para λ_n , $n \in \mathbb{N}$, las funciones T_n están dadas por (5.28). Por lo tanto esperamos encontrar una solución del PVIF de la forma

$$u(x, t) = \frac{a_{10}}{2} + \frac{a_{20}}{2}t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{1n} \cos \frac{n\pi ct}{L} + a_{2n} \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{L} \right), \quad (5.31)$$

donde los coeficientes a_{1n} y a_{2n} , $n \in \mathbb{N}$ son constantes. Cada término en (5.31) satisface la EDP y las condiciones de frontera.

Para satisfacer las condiciones iniciales se requiere que

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{a_{10}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad u_t(x, 0) = g(x) = \frac{a_{20}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \frac{n\pi c}{L} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

por lo tanto, de acuerdo a (2.12),

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx; \quad a_{1n} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \\ a_{20} &= \frac{2}{L} \int_0^L g(x) dx; \quad a_{2n} = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Concluimos que la solución del PVIF está dada por (5.31) con los coeficientes a_{1n} y a_{2n} dados por (5.32).

Ejemplo 5.10. Consideremos el PIVF

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \cos(2\pi x), \quad u_t(x, 0) = -2\pi \cos(\pi x), \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Aquí $c = 1$ y $L = 1$, y las funciones f y g que describen los datos iniciales son combinaciones de las funciones propias, luego

$$a_{12} = 1, \quad a_{1n} = 0 \quad (n \neq 2), \quad a_{21} = -1, \quad a_{2n} = 0 \quad (n \neq 1),$$

por lo tanto, de acuerdo a (5.31), la solución de PIVF es

$$u(x, t) = -2 \cos(\pi x) \operatorname{sen}(\pi t) + \cos(2\pi x) \cos(2\pi t).$$

Ejemplo 5.11. Consideremos el PIVF

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = \begin{cases} -1 & \text{si } 1/4 \leq x \leq 3/4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aquí nuevamente $c = 1$ y $L = 1$; luego, de acuerdo a (5.32),

$$\begin{aligned} a_{1n} &= 0, \quad n \in \mathbb{N}_0; \\ a_{20} &= 2 \left(\int_0^{1/4} g(x) \, dx + \int_{1/4}^{3/4} g(x) \, dx + \int_{3/4}^1 g(x) \, dx \right) = 2 \int_{1/4}^{3/4} (-1) \, dx = -1, \\ a_{2n} &= \frac{2}{n\pi} \left(\int_0^{1/4} g(x) \cos(n\pi x) \, dx + \int_{1/4}^{3/4} g(x) \cos(n\pi x) \, dx + \int_{3/4}^1 g(x) \cos(n\pi x) \, dx \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_{1/4}^{3/4} (-1) \cos(n\pi x) \, dx = -\frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De acuerdo a (5.31), la solución del PIVF está dada por

$$u(x, t) = -\frac{t}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(n\pi t).$$

Comentario 5.2. Problemas de valores iniciales y de fronteras con condiciones de frontera mixtas pueden ser tratados en forma similar.

5.3. La ecuación de Laplace

En lo siguiente discutiremos la solución de dos tipos de problemas: un tipo formulado en coordenadas cartesianas, y otro donde el uso de coordenadas polares es más apropiado.

5.3.1. La ecuación de Laplace sobre un rectángulo. Consideremos ahora la temperatura de equilibrio en un rectángulo $D := [0, L] \times [0, K]$, donde L y K son constantes, en la ausencia de fuentes y con la temperatura dada sobre la frontera. De acuerdo a la Sección 4.2, el problema de valores de frontera (PVF) correspondiente es

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0, & 0 < x < L, & \quad 0 < y < K, \\ u(0, y) &= f_1(y), & u(L, y) &= f_2(y), & 0 < y < K, \\ u(x, 0) &= g_1(x), & u(x, K) &= g_2(x), & 0 < x < L. \end{aligned}$$

A pesar de ser un PVF, resulta que podemos resolver este problema mediante separación de variables. No obstante, como aquí las condiciones de frontera son no homogéneas, hay que hacer un análisis preliminar adicional. En virtud del principio de superposición (Teorema 1.1) podemos buscar la solución del PVF en la forma $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$, donde ambas funciones u_1 y u_2 satisfacen la EDP, u_1 satisface las condiciones de frontera con $f_1(y) = 0$ y $f_2(y) = 0$, y u_2 satisface las condiciones de frontera con $g_1(x) = 0$ y $g_2(x) = 0$. Entonces el PVF para u_1 es

$$\begin{aligned} (u_1)_{xx}(x, y) + (u_1)_{yy}(x, y) &= 0, & 0 < x < L, & \quad 0 < y < K, \\ u_1(0, y) &= 0, & u_1(L, y) &= 0, & 0 < y < K, \\ u_1(x, 0) &= g_1(x), & u_1(x, K) &= g_2(x), & 0 < x < L. \end{aligned}$$

Se busca una solución del tipo $u_1(x, y) = X(x)Y(y)$. Tal como en los casos de las ecuaciones del calor y de la onda, ni X ; ni Y puede ser la función nula. Insertando este planteo en la EDP, obtenemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

Dividiendo por $X(x)Y(y)$ obtenemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

donde λ es la constante de separación.

Las dos condiciones de borde homogéneas entregan

$$X(0)Y(y) = 0, \quad X(L)Y(y) = 0, \quad 0 < y < K.$$

Como $Y \not\equiv 0$ concluimos que $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$. Por lo tanto, X es la solución del problema de Sturm-Liouville regular

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L; \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0.$$

A partir del Ejemplo 3.8 sabemos que los pares valor propio-función propia de este problema son

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.33)$$

Ahora para $n \in \mathbb{N}$ buscamos funciones Y_n que satisfagan

$$Y_n''(y) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y_n(y) = 0, \quad 0 < y < K.$$

De acuerdo al Comentario 1.1, la solución general de la ecuación para Y_n puede ser escrita como

$$Y_n(y) = C_{1n} \sinh \frac{n\pi(y-K)}{L} + C_{2n} \sinh \frac{n\pi y}{L}, \quad C_{1n}, C_{2n} = \text{const.} \quad (5.34)$$

A raíz de (5.33) y (5.34) es razonable suponer que u_1 es de la forma

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(C_{1n} \sinh \frac{n\pi(y-K)}{L} + C_{2n} \sinh \frac{n\pi y}{L} \right), \end{aligned} \quad (5.35)$$

donde cada término satisface la EDP y las dos condiciones de frontera. Para que las condiciones de fronteras restantes (no homogéneas) estén satisfechas exigimos que

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) = g_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-C_{1n} \sinh \frac{n\pi K}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n} \sin \frac{n\pi x}{L}, \\ u_1(x, K) = g_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{2n} \sinh \frac{n\pi K}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin \frac{n\pi x}{L}, \end{aligned}$$

en otras palabras, se necesitan las series de Fourier de senos de g_1 y g_2 . De acuerdo a (2.10),

$$\begin{aligned} b_{1n} &= -C_{1n} \sinh \frac{n\pi K}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \\ b_{2n} &= C_{2n} \sinh \frac{n\pi K}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g_2(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$C_{1n} = -\frac{b_{1n}}{\sinh(n\pi K/L)} = \left(-\frac{2}{L} \operatorname{csch} \frac{n\pi K}{L} \right) \int_0^L g_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (5.36)$$

$$C_{2n} = \frac{b_{2n}}{\sinh(n\pi K/L)} = \left(\frac{2}{L} \operatorname{csch} \frac{n\pi K}{L} \right) \int_0^L g_2(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (5.37)$$

Esto significa que la función $u_1(x, y)$ está dada por (5.35) con los coeficientes C_{1n} y C_{2n} dados por (5.36) y (5.37). La procedura para determinar u_2 es similar, con modificaciones obvias.

Ejemplo 5.12. *Para el PVF*

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ u(0, y) &= 0, \quad u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 2, \\ u(x, 0) &= x, \quad u(x, 2) = 3 \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

tenemos $L = 1$, $k = 2$, $f_1(y) = 0$, $f_2(y) = 0$, $g_1(x) = x$ y $g_2(x) = \sin(\pi x)$. Integrando por partes obtenemos

$$\int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi},$$

luego de acuerdo a (5.36),

$$C_{1n} = (-1)^n \frac{2}{n\pi} \operatorname{csch}(2n\pi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, utilizando (5.37), obtenemos

$$C_{21} = 3 \operatorname{csch}(2\pi); \quad C_{2n} = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

En virtud de (5.35), la solución del PVF dado está dada por

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n\pi} \operatorname{csch}(2n\pi) \sin(n\pi x) \sinh(n\pi(y-2)) \\ &\quad + 3 \operatorname{csch}(2\pi) \sin(\pi x) \sinh(\pi y). \end{aligned}$$

Comentario 5.3. La solución general de Y_n debe ser expresada en la forma más conveniente para las condiciones de frontera no homogéneas dadas.

(i) En el caso $(u_1)_y(x, 0) = g_1(x)$, $(u_1)_y(x, K) = g_2(x)$, conviene

$$Y_n(y) = C_{1n} \cosh \frac{n\pi(y-K)}{L} + C_{2n} \cosh \frac{n\pi y}{L}.$$

(ii) En el caso $u_1(x, 0) = g_1(x)$, $(u_1)_y(x, K) = g_2(x)$, conviene

$$Y_n(y) = C_{1n} \cosh \frac{n\pi(y-K)}{L} + C_{2n} \sinh \frac{n\pi y}{L}.$$

(iii) En el caso $(u_1)_y(x, 0) = g_1(x)$, $u_1(x, K) = g_2(x)$, conviene

$$Y_n(y) = C_{1n} \cosh \frac{n\pi y}{L} + C_{2n} \sinh \frac{n\pi(y-K)}{L}.$$

5.3.2. La ecuación de Laplace sobre un disco circular. Consideremos la temperatura de equilibrio sobre un disco circular uniforme

$$D := \{(r, \theta) : 0 \leq r < \alpha, -\pi < \theta \leq \pi\}$$

sin fuentes, bajo la condición de temperatura prescrita sobre la frontera $r = \alpha = \text{const.}$ Debido a la geometría del cuerpo es aconsejable re-escribir la ecuación en términos de las coordenadas polares r y θ con el polo en el centro del disco. Recordando la forma del Laplaciano en coordenadas polares dada en ítem (ii) del Comentario 4.4, obtenemos

$$\begin{aligned} u_{rr}(r, \theta) + \frac{1}{r} u_r(r, \theta) + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}(r, \theta) &= 0, \quad 0 < r < \alpha, \quad -\pi < \theta < \pi, \\ u(\alpha, \theta) &= f(\theta), \quad -\pi < \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Al contrario del PVF discutido arriba en términos de coordenadas cartesianas, donde los valores de frontera de la solución son suficientes para que podamos resolver el problema, la forma de la EDP en coordenadas polares nos exige considerar condiciones de “frontera”

adicionales. Estas condiciones se imponen en los extremos restantes de los intervalos donde las variables r y θ son definidas, es decir en $r = 0$, $\theta = -\pi$, y $\theta = \pi$. Su forma es sugerida por requerimientos analíticos basados en consideraciones físicas: se supone que la temperatura u y el flujo del calor, es decir u_r y u_θ , son funciones continuas (y por lo tanto acotadas) en una región acotada con datos de frontera que “se comportan razonablemente”. En virtud de lo anterior, los requerimientos adicionales pueden ser formulados como:

$$\begin{aligned} u(r, \theta), u_r(r, \theta) & \text{ acotadas cuando } r \rightarrow 0+, \quad -\pi < \theta < \pi, \\ u(r, -\pi) = u(r, \pi), \quad u_\theta(r, -\pi) = u_\theta(r, \pi), \quad 0 < r < \alpha. \end{aligned}$$

La EDP y todas las condiciones de borde con la excepción de $u(\alpha, \theta) = f(\theta)$ son homogéneas, por lo tanto parece razonable buscar una solución de la forma

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta). \quad (5.38)$$

Ahora las últimas dos condiciones de borde (periódicas) se convierten en

$$\Theta(-\pi)R(r) = \Theta(\pi)R(r), \quad \Theta'(-\pi)R(r) = \Theta'(\pi)R(r), \quad 0 < r < \alpha,$$

a partir de lo cual, para evitar la solución idénticamente cero (inaceptable), deducimos que $\Theta(-\pi) = \Theta(\pi)$ y $\Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi)$.

En virtud de (5.38), la EDP puede ser escrita como

$$\left(R''(r) + \frac{R'(r)}{r} \right) \Theta(\theta) + \frac{R(r)}{r^2} \Theta''(\theta) = 0.$$

Dividiendo esta ecuación por $R(r)\Theta(\theta)/r^2$, obtenemos de acuerdo al argumento usual

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -\lambda, \quad (5.39)$$

donde $\lambda = \text{const.}$ es la constante de separación. Luego Θ es una solución del problema de Sturm-Liouville periódico

$$\Theta''(\theta) + \lambda \Theta(\theta) = 0, \quad -\pi < \theta < \pi; \quad \Theta(-\pi) = \Theta(\pi), \quad \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi).$$

Discutimos este problema en el Ejemplo 3.14. Por lo tanto, para $L = \pi$ los valores propios y funciones propias correspondientes son

$$\lambda_0 = 0, \quad \Theta_0 \equiv 1; \quad \lambda_n = n^2, \quad \Theta_{1n}(\theta) = \cos(n\theta), \quad \Theta_{2n}(\theta) = \sin(n\theta), \quad n \in \mathbb{N}.$$

A partir de la segunda igualdad en (5.39) obtenemos que la componente radial R_n satisface

$$r^2 R_n''(r) + r R_n'(r) - n^2 R_n = 0, \quad 0 < r < \alpha, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.40)$$

Esto es una ecuación del tipo Cauchy-Euler para la cual (para $n \neq 0$) buscamos soluciones en la forma (ver Sección 1.4) $R_n(r) = r^p$, $p = \text{const.}$ Reemplazando esto en (5.40) obtenemos que

$$(p(p-1) + p - n^2)r^p = 0$$

o $p^2 - n^2 = 0$, con las raíces $p_1 = n$ y $p_2 = -n$. Por lo tanto, la solución general de (5.40) en este caso es

$$R_n(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n}, \quad C_1, C_2 = \text{const.} \quad (5.41)$$

Si $n = 0$, entonces (5.40) se reduce a $(rR'_0(r))' = 0$, luego $rR'_0(r) = \bar{C}_2 = \text{const.}$; esto, a su vez, implica $R'_0(r) = \bar{C}_2/r$ y la solución general

$$R_0(r) = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \ln r, \quad \bar{C}_1, \bar{C}_2 = \text{const.} \quad (5.42)$$

A partir de (5.38) y la condición de acotación en $r = 0$ deducimos que todos los números $R_n(0)$ deben ser finitos. Tal como (5.41) y (5.42) indican, esto sucede sólo si $C_2 = 0$ y $\bar{C}_2 = 0$; en otras palabras,

$$R_0(r) = \bar{C}_1; \quad R_n(r) = C_1 r^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Elijiendo la constante arbitraria igual a 1, podemos expresar esto por la fórmula única

$$R_n(r) = r^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

De acuerdo al procedimiento de la separación de variables, nos esperamos una solución del PVIF de la forma

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{a_0}{2} R_0(r) \Theta_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) (a_n \Theta_{1n}(\theta) + b_n \Theta_{2n}(\theta)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)), \end{aligned} \quad (5.43)$$

donde cada término satisface la EDP y las tres condiciones de frontera homogéneas. Los coeficientes numéricos incógnitos $a_0/2$, a_n y b_n son determinados a partir de la condición restante (no homogénea)

$$u(\alpha, \theta) = f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)), \quad -\pi < \theta \leq \pi. \quad (5.44)$$

Esto es la serie de Fourier completa para f con $L = \pi$ y los coeficientes $a_0/2$, $\alpha^n a_n$ y $\alpha^n b_n$, luego a partir de (2.7)–(2.9),

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta; \quad a_n = \frac{1}{\pi \alpha^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi \alpha^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Por lo tanto, la solución del PVF está dada por (5.43) con los coeficientes a_0 , a_n y b_n dados por (5.44).

Comentario 5.4. A partir de (5.43) y (5.45) obtenemos

$$u(0, \theta) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta;$$

en otras palabras, la temperatura en el centro del disco es igual al promedio de la temperatura en la circunferencia de frontera. Este resultado, el cual ya utilizamos en la demostración del Teorema 4.2, es llamado propiedad del valor medio de la ecuación de Laplace.

Ejemplo 5.13. Consideremos el problema

$$\begin{aligned}(\Delta u)(r, \theta) &= 0, \quad 0 < r < 2, \quad -\pi < \theta < \pi, \\ u(2, \theta) &= 1 + 8 \sin \theta - 32 \cos(4\theta), \quad -\pi < \theta < \pi.\end{aligned}$$

Aquí tenemos $\alpha = 2$ y $f(\theta) = 1 + 8 \sin \theta - 32 \cos(4\theta)$. Como f es una combinación lineal de las funciones propias asociadas al problema, utilizamos (5.44) e ítem (ii) del Teorema 3.3 para deducir que

$$\frac{1}{2}a_0 = 1, \quad 2^4 a_4 = -32, \quad 2b_1 = 8,$$

mientras que los demás coeficientes son nulos; por lo tanto

$$a_0 = 2, \quad a_4 = -2, \quad a_n = 0 \quad (n \neq 0, 4), \quad b_1 = 4, \quad b_n = 0 \quad (n \neq 1),$$

lo que significa que de acuerdo a (5.43), la solución del PVF viene dada por

$$u(r, \theta) = 1 + 4r \sin \theta - 2r^4 \cos(4\theta).$$

5.4. Otras ecuaciones

El método de la separación de variables también puede ser aplicado a problemas involucrando algunas de las ecuaciones discutidas en la Sección 4.4.

Ejemplo 5.14. Consideremos el problema de valores iniciales y de frontera de convección-difusión

$$u_t(x, t) = 2u_{xx}(x, t) - u_x(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (5.46)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.47)$$

$$u(x, 0) = -2e^{x/4} \sin(3\pi x), \quad 0 < x < 1. \quad (5.48)$$

Aplicando argumentos desarrollados anteriormente en este capítulo buscamos la solución en la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, y a partir de (5.46) y (5.47) deducimos que X y T satisfacen

$$2X''(x) - X'(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1; \quad X(0) = 0, \quad X(1) = 0 \quad \text{para } t > 0 \quad (5.49)$$

y

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \quad \text{para } t > 0. \quad (5.50)$$

El problema de Sturm-Liouville regular (5.49) es resuelto por el método utilizado en el Ejemplo 3.11. Sus valores propios y funciones propias son

$$\lambda_n = \frac{1}{8}(16n^2\pi^2 + 1), \quad X_n(x) = e^{x/4} \sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ahora (5.50) se convierte en

$$T'_n(t) + \frac{1}{8}(16n^2\pi^2 + 1)T_n(t) = 0$$

con la solución general

$$T_n(t) = c_n e^{-(16n^2\pi^2 + 1)t/8}, \quad c_n = \text{const.}$$

Combinando X_n y T_n en la forma habitual obtenemos que la función

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{x}{4} - \frac{16n^2\pi^2 + 1}{8}t\right) \operatorname{sen}(n\pi x) \quad (5.51)$$

satisface la EDP (5.46) y las condiciones de borde (5.47). Los coeficientes c_n son determinados a partir de la condición inicial. Para $t = 0$ se debe tener

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{x/4} \operatorname{sen}(n\pi x) \stackrel{!}{=} -2e^{x/4} \operatorname{sen}(3\pi x),$$

lo que implica que $c_3 = -2$ y $c_n = 0$ para $n \neq 3$. Por lo tanto la solución del problema, dada por (5.51), es

$$u(x, t) = -2 \exp\left(\frac{x}{4} - \frac{144\pi^2 + 1}{8}t\right) \operatorname{sen}(3\pi x).$$

Ejemplo 5.15. Consideremos el problema de propagación de onda disipativo

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) + 2u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) - 3u_x(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= -e^{3x/2} \operatorname{sen}(2\pi x), \quad u_t(x, 0) = 2e^{3x/2} \operatorname{sen}(\pi x), \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Escribiendo $u(x, t) = X(x)T(t)$ y procediendo tal como en el Ejemplo 5.14 obtenemos

$$X''(x) - 3X'(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1; \quad X(0) = 0, \quad X(1) = 0; \quad (5.52)$$

$$T''(t) + 2T' + \lambda T(t) = 0. \quad (5.53)$$

El problema de Sturm-Liouville regular (5.52), resuelto tal como en el Ejemplo 5.14, posee los valores propios y funciones propias

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2 + 9}{4}, \quad X_n(x) = e^{3x/2} \operatorname{sen}(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N},$$

luego a partir de (5.53) con λ reemplazado por λ_n obtenemos

$$T_n(t) = e^{-t/2} (c_{1n} \cos(\alpha_n t) + c_{2n} \operatorname{sen}(\alpha_n t)), \quad c_{1n}, c_{2n} = \text{const.},$$

donde

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \sqrt{n^2\pi^2 + 5}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Combinando X_n y T_n obtenemos que la función

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{3x}{2} - \frac{t}{2}\right) \operatorname{sen}(n\pi x) (c_{1n} \cos(\alpha_n t) + c_{2n} \operatorname{sen}(\alpha_n t)) \quad (5.54)$$

satisface la EDP y las condiciones de borde. Reemplazando $t = 0$ en (5.54) y su derivada con respecto a t obtenemos

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n} e^{3x/2} \operatorname{sen}(n\pi x) \stackrel{!}{=} -e^{3x/2} \operatorname{sen}(2\pi x),$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}c_{1n} + \alpha_n c_{2n} \right) e^{3x/2} \operatorname{sen}(n\pi x) \stackrel{!}{=} 2e^{3x/2} \operatorname{sen}(\pi x),$$

luego

$$c_{12} = -1, \quad c_{1n} = 0 \quad (n \neq 2), \quad -\frac{c_{11}}{2} + \alpha_1 c_{21} = 2, \quad -\frac{c_{1n}}{2} + \alpha_n c_{2n} = 0 \quad (n \neq 1).$$

A partir de estas identidades obtenemos

$$c_{21} = \frac{2}{\alpha_1}, \quad c_{22} = -\frac{1}{2\alpha_2}, \quad c_{2n} = 0 \quad (n \neq 1, 2),$$

por lo tanto la solución del PIVF, obtenida a partir de (5.54) es

$$u(x, t) = e^{(3x-t)/2} \left(\frac{2}{\alpha_1} \operatorname{sen}(\alpha_1 t) \operatorname{sen}(\pi x) - \cos(\alpha_1 t) \operatorname{sen}(2\pi x) - \frac{1}{2\alpha_2} \operatorname{sen}(\alpha_2 t) \operatorname{sen}(2\pi x) \right),$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 + 5}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4\pi^2 + 5}.$$

Ejemplo 5.16. Consideremos el problema de convección-difusión bidimensional estacionario

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) - 2u_x(x, y) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \quad (5.55)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = -3 \operatorname{sen}(\pi y), \quad 0 < y < 2, \quad (5.56)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (5.57)$$

Buscando la solución en la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$, a partir de (5.55) y las condiciones de borde homogéneas (5.57) obtenemos

$$X''(x) - 2X'(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (5.58)$$

y

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad 0 < y < 2; \quad Y(0) = 0, \quad Y(2) = 0.$$

El problema de Sturm-Liouville regular para Y se resolvió en el Ejemplo 3.8 y da origen a los valores propios y funciones propias

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad Y_n(y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

por lo tanto (5.58) se convierte en

$$X_n''(x) - 2X_n'(x) - \frac{n^2\pi^2}{4}X_n(x) = 0$$

con la solución general

$$X_n(x) = c_1 e^{s_{1n}x} + c_2 e^{s_{2n}x},$$

donde

$$s_{1n} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{n^2\pi^2 + 4}, \quad s_{2n} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{n^2\pi^2 + 4}, \quad c_{1n}, c_{2n} = \text{const.}$$

En virtud de lo anterior, la función

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} (c_{1n} e^{s_{1n}x} + c_{2n} e^{s_{2n}x}) \quad (5.59)$$

satisface la EDP (5.55) y las condiciones de borde homogéneas (5.57). Insertando $x = 0$ y después $x = 1$ en (5.59) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (c_{1n} + c_{2n}) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} &= 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (c_{1n} e^{s_{1n}} + c_{2n} e^{s_{2n}}) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} &= -3 \operatorname{sen}(\pi y), \end{aligned}$$

luego

$$c_{1n} + c_{2n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}; \quad c_{12} e^{s_{12}} + c_{22} e^{s_{22}} = -3; \quad c_{1n} e^{s_{1n}} + c_{2n} e^{s_{2n}} = 0 \quad (n \neq 2).$$

Esto implica que

$$c_{12} = -c_{22} = \frac{3}{e^{s_{22}} - e^{s_{12}}}, \quad c_{1n} = c_{2n} = 0 \quad (n \neq 2).$$

Insertando esto en (5.59) obtenemos la solución del PVIF dado:

$$u(x, y) = \frac{3}{e^{s_{22}} - e^{s_{12}}} (e^{s_{12}x} - e^{s_{22}x}) \operatorname{sen}(\pi y),$$

donde

$$s_{12} = 1 + \sqrt{\pi^2 + 1}, \quad s_{22} = 1 - \sqrt{\pi^2 + 1}.$$

5.5. Ecuaciones en más de dos variables

En la Sección 4.2 desarrollamos un modelo de la conducción del calor en una placa uniforme, donde la temperatura incógnita depende del tiempo y de dos variables espaciales. Aquí consideraremos el análogo bi-dimensional de la ecuación de la onda y lo resolveremos mediante el método de separación de variables en coordenadas tanto cartesianas como polares.

5.5.1. Membrana rectangular vibrante. Una membrana rectangular vibrante con fuerza de cuerpo despreciable y bordes fijados es modelado por el PVIF

$$u_{tt}(x, y) = c^2 \Delta u(x, y) = c^2 (u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < K, \quad t > 0, \quad (5.60)$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(L, y, t) = 0, \quad 0 < y < K, \quad t > 0, \quad (5.61)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, K, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.62)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < K. \quad (5.63)$$

Como la EDP y las condiciones de borde son lineales y homogéneas, se busca la solución como el producto de una función de las variables espaciales con una función del tiempo:

$$u(x, y, t) = S(x, y)T(t). \quad (5.64)$$

Razonando como en situaciones similares previas, a partir de (5.60), (5.61) y (5.62) obtenemos que T satisface la EDO

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0, \quad t > 0,$$

y que S es una solución del PVF

$$\begin{aligned} S_{xx}(x, y) + S_{yy}(x, y) + \lambda S(x, y) &= 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < K, \\ S(0, y) &= 0, \quad S(L, y) = 0, \quad 0 < y < K, \\ S(x, 0) &= 0, \quad S(x, K) = 0, \quad 0 < x < L, \end{aligned} \quad (5.65)$$

donde $\lambda = \text{const.}$ es la constante de separación.

Como la EDP y las condiciones de borde para S son, a su vez, lineales y homogéneas, podemos utilizar la separación de variables una vez más y buscamos una solución de (5.65) de la forma

$$S(x, y) = X(x)Y(y). \quad (5.66)$$

La EDP en (5.65) ahora se convierte en

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -\lambda X(x)Y(y),$$

es decir, dividiendo por $X(x)Y(y)$ obtenemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu,$$

donde $\mu = \text{const.}$ es una segunda constante de separación.

A partir de las igualdades anteriores y las condiciones de borde en (5.65) obtenemos por el camino habitual que X e Y son soluciones, respectivamente, de los problemas de Sturm-Liouville regulares

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad 0 < x < L; \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0, \quad (5.67)$$

$$Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0, \quad 0 < y < K; \quad Y(0) = 0, \quad Y(K) = 0. \quad (5.68)$$

Las soluciones no nulas que necesitamos para (5.67) son las funciones propias de este problema de Sturm-Liouville regular, las que calculamos en el Ejemplo 3.8 conjuntamente con los valores propios correspondientes:

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \text{sen } \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para cada n fijo la solución Y satisface el problema de Sturm-Liouville regular (5.68) con $\mu = \mu_n$. Como este problema es similar a (5.67), sus valores propios y funciones propias (soluciones no nulas) son

$$\lambda_{nm} - \mu_n = \left(\frac{m\pi}{K} \right)^2, \quad Y_{nm}(y) = \text{sen } \frac{m\pi y}{K}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Comentamos que (5.65) puede ser considerado como un problema de valores propios bi-dimensional con los valores propios

$$\lambda_{nm} = \mu_n + \left(\frac{m\pi}{K}\right)^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{K}\right)^2, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

y las funciones propias correspondientes

$$S_{nm}(x, y) = X_n(x)Y_{nm}(y) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi y}{K}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Considerando la ecuación para T , obtenemos para $\lambda = \lambda_{nm}$ las funciones

$$T_{nm}(t) = a_{nm} \cos(\sqrt{\lambda_{nm}}ct) + b_{nm} \text{sen}(\sqrt{\lambda_{nm}}ct), \quad a_{nm}, b_{nm} = \text{const.}$$

A partir de esto, (5.64), y (5.66) concluimos ahora que la solución del PVIF original debe poseer una representación de la forma

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} S_{nm}(x, y) T_{nm}(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi y}{K} \left(a_{nm} \cos(\sqrt{\lambda_{nm}}ct) + b_{nm} \text{sen}(\sqrt{\lambda_{nm}}ct) \right). \end{aligned} \quad (5.69)$$

Cada término en (5.69) satisface la EDP y las condiciones de borde. Para satisfacer la primera condición inicial, se debe satisfacer

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \text{sen} \frac{m\pi y}{K}.$$

Multiplicando la segunda igualdad por $\text{sen}(p\pi y/K)$, $p \in \mathbb{N}$, integrando el resultado con respecto a y sobre $[0, K]$ y tomando en cuenta la fórmula (2.5) con K en lugar de L obtenemos

$$\int_0^K f(x, y) \text{sen} \frac{p\pi y}{K} dy = \frac{K}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{np} \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Multiplicando esta nueva igualdad por $\text{sen}(q\pi x/L)$, $q \in \mathbb{N}$ e integrando con respecto a x sobre $[0, L]$ obtenemos

$$\int_0^L \int_0^K f(x, y) \text{sen} \frac{p\pi y}{K} \text{sen} \frac{q\pi x}{L} dy dx = \frac{LK}{4} a_{qp},$$

es decir, reemplazando q por n y p por m , obtenemos

$$a_{nm} = \frac{4}{LK} \int_0^L \int_0^K f(x, y) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi y}{K} dy dx, \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (5.70)$$

La segunda condición inicial está satisfecha si

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{nm}} c b_{nm} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \text{sen} \frac{m\pi y}{K};$$

como arriba, esto entrega

$$b_{nm} = \frac{4}{LK\sqrt{\lambda_{nm}c}} \int_0^L \int_0^K g(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{K} dy dx, \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (5.71)$$

En conclusión la solución del PVIF es dada por la serie (5.69) con los coeficientes a_{nm} y b_{nm} calculados a través de (5.70) y (5.71). Otras condiciones de bordes homogéneas pueden ser tratadas en forma similar.

Ejemplo 5.17. *En el PVIF*

$$u_{tt}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \quad t > 0,$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 0, \quad 0 < y < 2, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, 2, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = \sin(2\pi x) \left(\sin \frac{\pi y}{2} - 2 \sin(\pi y) \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2,$$

$$u_t(x, y, 0) = 2 \sin(2\pi x) \sin \frac{\pi y}{2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

tenemos $c = 1$, $L = 1$, y $K = 2$; luego, comparando las funciones de los datos iniciales con las expansiones en serie de Fourier doble de f y g obtenemos

$$a_{21} = 1, \quad a_{22} = -2, \quad a_{2m} = 0 \quad (m \neq 1, 2); \quad \sqrt{\lambda_{21}}b_{21} = 2, \quad \sqrt{\lambda_{2m}}b_{2m} = 0 \quad (m \neq 1).$$

Como $\lambda_{21} = (2\pi)^2 + (\pi/2)^2 = 17\pi^2/4$, la fórmula (5.69) entrega la solución

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \sin(2\pi x) \sin \frac{\pi y}{2} \cos \frac{\sqrt{17}\pi t}{2} - 2 \sin(2\pi x) \sin(\pi y) \cos(\sqrt{5}\pi t) \\ & + \frac{4\pi}{17} \sin(2\pi x) \sin \frac{\pi y}{2} \sin \frac{\sqrt{17}\pi t}{2}. \end{aligned}$$

5.5.2. Membrana circular vibrante. Un cuerpo bi-dimensional de este tipo es definido en coordenadas polares $0 \leq r \leq \alpha$, $-\pi < \theta < \pi$, $t > 0$. Si la fuerza de cuerpo es despreciable y la frontera $r = 0$ es fijada, entonces las vibraciones verticales de la membrana están descritas por el PVIF

$$u_{tt}(r, \theta, t) = c^2 \Delta u(r, \theta, t), \quad 0 < r < \alpha, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad t > 0, \quad (5.72)$$

$$u(\alpha, \theta, t) = 0, \quad u(r, \theta, t), \quad u_r(r, \theta, t) \text{ acotados cuando } r \rightarrow 0+, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad t > 0, \quad (5.73)$$

$$u(r, -\pi, t) = u(r, \pi, t), \quad u_\theta(r, -\pi, t) = u_\theta(r, \pi, t), \quad 0 < r < \alpha, \quad t > 0, \quad (5.74)$$

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \quad u_t(r, \theta, 0) = g(r, \theta), \quad 0 < r < \alpha, \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (5.75)$$

Tal como en la Sección 5.3, las condiciones de borde en $r = 0$ y $\theta = -\pi, \pi$ expresan la continuidad (y por lo tanto la acotación) del desplazamiento u y de la tensión (u_r , u_θ) de la membrana para funciones f y g “razonables.”

Como la EDP y las condiciones de borde son lineales y homogéneas, tratamos el método de separación de variables y buscamos una solución de la forma

$$u(r, \theta, t) = S(r, \theta)T(t). \quad (5.76)$$

Siguiendo el procedimiento estándar, a partir de la EDP y las condiciones de borde concluimos que S es una solución del problema

$$\begin{aligned} \Delta S(r, \theta) + \lambda S(r, \theta) &= 0, \quad 0 < r < \alpha, \quad -\pi < \theta < \pi, \\ S(\alpha, \theta) &= 0, \quad S(r, \theta), S_r(r, \theta) \text{ acotados cuando } r \rightarrow 0+, \quad -\pi < \theta < \pi, \\ S(r, -\pi) &= S(r, \pi), \quad S_\theta(r, -\pi) = S_\theta(r, \pi), \quad 0 < r < \alpha, \end{aligned} \quad (5.77)$$

donde $\lambda = \text{const.}$ es la constante de separación, mientras que T satisface

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0, \quad t > 0.$$

Como la EDP y las condiciones de borde para S son lineales y homogéneas, busquemos S en la forma

$$S(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta). \quad (5.78)$$

Acordándonos de la expresión del Laplaciano en coordenadas polares (ver ítem (ii) del Comentario 4.4) podemos escribir la EDP en (5.77) como

$$\left(R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) \right) \Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r) \Theta''(\theta) + \lambda R(r) \Theta(\theta) = 0.$$

Dividiendo esto por $(1/r^2)R(r)\Theta(\theta)$ obtenemos

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} - \lambda r^2 = -\mu,$$

donde $\mu = \text{const.}$ es una segunda constante de separación.

Aplicando el argumento habitual a las condiciones de borde, concluimos que R y Θ son soluciones de problemas de Sturm-Liouville. Primeramente, Θ satisface el problema de Sturm-Liouville periódico

$$\Theta''(\theta) + \mu \Theta(\theta) = 0, \quad -\pi < \theta < \pi; \quad \Theta(-\pi) = \Theta(\pi), \quad \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi),$$

cuyos valores propios y funciones propias, calculados en el Ejemplo 3.14, son

$$\mu_0 = 0, \quad \Theta_0(\theta) = \frac{1}{2}; \quad \mu_n = n^2, \quad \Theta_{1n}(\theta) = \cos(n\theta), \quad \Theta_{2n}(\theta) = \sin(n\theta), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para cada n fijo calculamos una solución R_n del problema de Sturm-Liouville singular

$$\begin{aligned} r^2 R_n''(r) + r R_n'(r) + (\lambda r^2 - n^2) R_n(r) &= 0, \quad 0 < r < \alpha, \\ R_n(\alpha) &= 0, \quad R_n(r), R_n'(r) \text{ acotados cuando } r \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Éste es el problema de Sturm-Liouville singular (3.12), (3.13) (con m reemplazado por n) discutido en la Sección 3.3, el cual posee una cantidad numerable de valores propios y un conjunto completo de funciones propias correspondientes

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\xi_{nm}}{\alpha} \right)^2, \quad R_{nm}(r) = J_n \left(\frac{\xi_{nm} r}{\alpha} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{N},$$

donde J_n es la función de Bessel de primera especie del orden n y ξ_{nm} son los ceros de J_n .

Para la EDO satisfecha por T obtenemos para $\lambda = \lambda_{nm} = (\xi_{nm}/\alpha)^2$ las soluciones

$$T_{nm}(t) = A_{nm} \cos \frac{\xi_{nm} ct}{\alpha} + B_{nm} \sin \frac{\xi_{nm} ct}{\alpha}, \quad A_{nm}, B_{nm} = \text{const.}$$

Supongamos, por simplicidad, que $g = 0$, luego es evidente que el término seno en T_{nm} debe anularse. Por lo tanto, si combinamos las diferentes componentes de u de acuerdo a (5.76) y (5.78), entonces la solución del PVIF debe ser de la forma

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{nm} \Theta_{1n}(\theta) + b_{nm} \Theta_{2n}(\theta)) R_{nm}(r) T_{nm}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{nm} \cos(n\theta) + b_{nm} \sin(n\theta)) J_n \left(\frac{\xi_{nm} r}{\alpha} \right) \cos \frac{\xi_{nm} ct}{\alpha}. \end{aligned}$$

Cada término en esta suma satisface la EDP, las condiciones de borde, y la segunda condición inicial. Para satisfacer la primera condición inicial se debe satisfacer

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_{nm} \cos(n\theta) + b_{nm} \sin(n\theta)) \right) J_n \left(\frac{\xi_{nm} r}{\alpha} \right).$$

Los coeficientes a_{nm} y b_{nm} se calculan ahora, tal como en otros problemas de este tipo, a través de las propiedades de ortogonalidad de $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$, y $J_n(\xi_{nm} r/\alpha)$ expresadas por (2.4)–(2.6) y (3.16).

Comentario 5.5. En el caso con simetría circular (es decir, cuando las funciones de datos son independientes de θ) utilizamos el planteo $u(r, t) = R(r)T(t)$. En este caso el problema se reduce a resolver la ecuación de Bessel del orden cero. Terminamos obteniendo

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos(\sqrt{\lambda_m} ct) + b_m \sin(\sqrt{\lambda_m} ct) \right) J_0(\sqrt{\lambda_m} r),$$

donde λ_m es lo mismo que $\lambda_{0m} = (\xi_{0m}/\alpha)^2$ y los coeficientes a_m y b_m son determinados a partir de la propiedad de ortogonalidad (con peso r sobre $[0, \alpha]$) de las funciones $J_0(\sqrt{\lambda_m} r)$.

Ejemplo 5.18. Con $\alpha = 1$, $c = 1$, $f(r, \theta) = 1$ y $g(r, \theta) = 0$, la fórmula en el Comentario 5.5 entrega

$$u(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(\sqrt{\lambda_m} r) = 1, \quad u_t(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sqrt{\lambda_m} J_0(\sqrt{\lambda_m} r) = 0,$$

luego los coeficientes a_m son los coeficientes de la expansión de la función constante 1 en términos de las funciones $J_0(\sqrt{\lambda_m} r)$ sobre $(0, 1)$ y $b_m = 0$. Con una aproximación computacional de cuatro dígitos

$$1 = 1,6020 J_0(2,4048r) - 1,0463 J_0(5,5201r) + 0,8514 J_0(8,6537r) + \dots,$$

se tiene que

$$a_1 = 1,6020, \quad a_2 = -1,0463, \quad a_3 = 0,8514, \dots,$$

luego la solución del problema es

$$u(r, t) = 1,6020 \cos(2,4048t) J_0(2,4048r) - 1,0463 \cos(5,5202t) J_0(5,5201r) \\ + 0,8514 \cos(8,6537t) J_0(8,6537r) + \dots$$

5.5.3. Temperatura de equilibrio en una bola sólida. La distribución estacionaria del calor en el interior de una bola homogénea del radio α cuando la temperatura (estacionaria) es dada sobre la superficie y no existen fuentes es dada por la solución del PVIF

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = 0, \quad 0 < r < \alpha, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad (5.79)$$

$$u(\alpha, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi), \quad u(r, \theta, \varphi), u_r(r, \theta, \varphi) \text{ acotados cuando } r \rightarrow 0+, \\ 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad (5.80)$$

$$u(r, 0, \varphi) = u(r, 2\pi, \varphi), \quad u_\theta(r, 0, \varphi) = u_\theta(r, 2\pi, \varphi), \quad 0 < r < \alpha, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad (5.81)$$

$$u(r, \theta, \varphi), u_\varphi(r, \theta, \varphi) \text{ acotados cuando } \varphi \rightarrow 0+ \text{ y } \varphi \rightarrow \pi-, \\ 0 < r < \alpha, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad (5.82)$$

donde f es una función dada. La condición de borde (5.80) representa la temperatura de superficie dada. Las condiciones (5.81) y (5.82) se agregaron por argumentos similares a los que utilizamos en el caso de un disco circular uniforme.

En términos de las coordenadas esféricas r , θ y φ , y considerando el item (v) del Comentario 4.4, la EDP (5.79) puede ser escrita como

$$\frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} ((\sin \varphi) u_\varphi)_\varphi = 0.$$

Como la EDP y dos de sus condiciones de borde son homogéneas, tratamos encontrar una solución de la forma

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

Tal como en ejemplos anteriores, la condición de borde no homogénea implica que ninguna de las funciones R , Θ y Φ puede ser la función nula. Reemplazando este planteo en la EDP y multiplicando cada término por $(r^2 \sin^2 \varphi)/(R\Theta\Phi)$ obtenemos

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -(\sin^2 \varphi) \frac{(r^2 R')'}{R} - (\sin \varphi) \frac{((\sin \varphi) \Phi')'}{\Phi},$$

donde el lado izquierdo es una función de θ y el lado derecho es una función de r y φ , por lo tanto ambos lados deben ser igual a una y la misma constante, la cual por conveniencia denotamos por $-\mu$. Esto entrega el par de ecuaciones

$$\Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) = 0, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad (5.83)$$

$$\frac{(r^2 R')'}{R} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{((\sin \varphi) \Phi')'}{\Phi} - \frac{\mu}{\sin^2 \varphi} = 0, \quad 0 < r < \alpha, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad (5.84)$$

donde en el caso de (5.84) también dividimos por $\sin^2 \varphi$.

Para evitar la solución idénticamente nula, a partir de las dos condiciones de periodicidad en el problema de valores de frontera deducimos por argumentos estándar que

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta_\theta(0) = \Theta_\theta(2\pi). \quad (5.85)$$

El problema de Sturm-Liouville regular (5.83), (5.85) para Θ es el mismo que en el caso de la membrana circular; posee los valores propios $\mu = m^2$, $m \in \mathbb{N}_0$ y las funciones propias correspondientes

$$\Theta_m(\theta) = C_{1m} \cos(m\theta) + C_{2m} \sin(m\theta),$$

las cuales, utilizando la fórmula de Euler, podemos reescribir como

$$\Theta_m(\theta) = C'_{1m} e^{im\theta} + C'_{2m} e^{-im\theta}. \quad (5.86)$$

Aplicaremos una segunda separación de variables, esta vez en (5.84):

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{((\sin \varphi) \Phi')'}{\Phi} - \frac{m^2}{\sin^2 \varphi} = \frac{(r^2 R')'}{R} = -\lambda = \text{const.},$$

lo que entrega las ecuaciones

$$\frac{1}{\sin \varphi} ((\sin \varphi) \Phi'(\varphi))' + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \varphi} \right) \Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad (5.87)$$

$$(r^2 R')' - \lambda R = 0, \quad 0 < r < \alpha. \quad (5.88)$$

En (5.87) insertamos

$$\begin{aligned} \xi &= \cos \varphi, \quad d\xi = -\sin \varphi d\varphi, \quad \frac{d}{d\xi} = -\frac{1}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi}, \\ \sin^2 \varphi &= 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \xi^2, \quad \Phi(\varphi) = \Psi(\xi), \end{aligned}$$

luego (5.87) asume la forma

$$((1 - \xi^2) \Psi'(\xi))' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) \Psi(\xi) = 0, \quad -1 < \xi < 1. \quad (5.89)$$

Las condiciones de borde para Ψ son obtenidas a partir de aquellas en $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi$ del problema original si nos acordamos de que Φ no puede ser la función nula:

$$\Psi(\xi), \Psi'(\xi) \text{ acotados cuando } \xi \rightarrow -1+ \text{ y } \xi \rightarrow 1-. \quad (5.90)$$

Comentamos que (5.89), (5.90) es el problema de Sturm-Liouville singular asociado a la ecuación de Legendre mencionada en la Sección 3.5 con los valores propios y funciones propias asociadas

$$\lambda_n = n(n+1), \quad \Psi(\xi) = P_n^m(\xi), \quad n = m, m+1, \dots,$$

donde P_n^m son las funciones de Legendre asociadas; por lo tanto,

$$\Phi_n(\varphi) = P_n^m(\cos \varphi). \quad (5.91)$$

Para la ecuación de Cauchy-Euler (5.88) con $\lambda = n(n+1)$ encontramos que de acuerdo a la Sección 1.4, su solución general viene dada por

$$R_n(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Aplicando la condición de que $R(r)$ y $R'(r)$ deben ser acotados cuando $r \rightarrow 0+$ (la cual sigue a partir de la segunda condición de borde del PVF dado), obtenemos que $C_2 = 0$, luego

$$R_n(r) = r^n, \quad (5.92)$$

donde como siempre elegimos $C_1 = 1$.

Finalmente combinamos (5.86), (5.91), (5.92), (3.32) y (3.33) para escribir la solución del problema original en la forma

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{\substack{m=0,1,2,\dots \\ n=m,m+1,\dots}} R_n(r) \Theta_m(\theta) \Phi_{nm}(\varphi) \\
 &= \sum_{\substack{m=0,1,2,\dots \\ n=m,m+1,\dots}} r^n (C'_{1m} e^{im\theta} + C'_{2m} e^{-im\theta}) P_n^m(\cos \varphi) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{nm} e^{im\theta} P_n^m(\cos \varphi) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{n,m} r^n Y_{n,m}(\theta, \varphi),
 \end{aligned} \tag{5.93}$$

donde $Y_{n,m}$ son los armónicos esféricos definidos por (3.33).

De acuerdo a las condiciones de borde no homogéneas del problema original, se debe tener

$$u(\alpha, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{n,m} \alpha^n Y_{n,m}(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi).$$

Los coeficientes $c_{n,m}$ son determinados por el procedimiento estándar a través de las relaciones de ortogonalidad (3.34):

$$c_{n,m} = \frac{1}{\alpha^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \bar{Y}_{n,m}(\theta, \varphi) d\varphi d\theta. \tag{5.94}$$

Ejemplo 5.19. Consideremos la bola unitaria ($\alpha = 1$) centrada en el origen. Supongamos que la temperatura de los hemisferios superior e inferior se mantienen a la temperatura constante 2 y -1 , respectivamente. Entonces

$$f(\theta, \varphi) = \begin{cases} 2 & \text{para } 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi/2, \\ -1 & \text{para } 0 < \theta < 2\pi, \pi/2 < \varphi < \pi, \end{cases}$$

es decir, utilizando (5.94) obtenemos que los primeros dos coeficientes diferentes de cero $c_{n,m}$ son $c_{0,0} = \sqrt{\pi}$ y $c_{1,0} = 3\sqrt{3\pi}/2$. En virtud de (5.93) y las expresiones de los armónicos esféricos dados en el Ejemplo 3.18 obtenemos como solución del problema

$$u(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\pi} Y_{0,0}(\theta, \varphi) + \frac{3}{2} \sqrt{3\pi} r Y_{1,0}(\theta, \varphi) + \dots = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} r \cos \varphi + \dots$$

Capítulo 6

Problemas lineales no homogéneos

El método de separación de variables puede ser aplicado solamente si la EDP y las condiciones de borde son homogéneas. No obstante, un modelo matemático puede presentar términos no homogéneos (es decir, términos que no contienen la función incógnita o sus derivadas), y/o puede contemplar datos no homogéneos (no nulos) especificados en sus puntos de frontera. Demostraremos ahora como en ciertos casos tales problemas pueden ser reducidos a sus versiones homogéneas correspondientes.

6.1. Soluciones de equilibrio

Ya discutimos soluciones de equilibrio (o estacionarias, o independientes del tiempo) para la ecuación del calor en dimensiones mayores (ver Sección 4.2). Consideremos ahora distribuciones de temperatura de equilibrio para una barra uniforme.

6.1.1. Temperatura prescrita en los extremos. El PVIF general de una barra con fuentes internas es de la forma

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= ku_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(L, t) = \beta(t), \quad t > 0, \\u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L,\end{aligned}$$

donde α , β , y f son funciones dadas. Si α y β son constantes y $q = q(x)$, entonces puede existir una solución de equilibrio $u_\infty = u_\infty(x)$ que satisface el PVF

$$u_\infty''(x) + q(x) = 0, \quad 0 < x < L; \quad u_\infty(0) = \alpha, \quad u_\infty(L) = \beta,$$

donde q incorpora el factor $1/k$. Evidentemente, aquí la condición inicial no juega ningún rol para la computación de u_∞ . Para un problema independiente del tiempo, parece razonable físicamente suponer que si una solución de equilibrio existe, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_\infty(x).$$

Esto justifica el uso del índice ∞ para denotar la solución de equilibrio.

Ejemplo 6.1. *La temperatura de equilibrio del PVIF*

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= 4u_{xx}(x, t) + 2x - 1, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\u(0, t) &= 1, \quad u(2, t) = -2, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= \sin \frac{\pi x}{2}, \quad 0 < x < 2,\end{aligned}$$

es obtenida a partir de la solución del PVF

$$4u''_{\infty}(x) + 2x - 1 = 0, \quad 0 < x < 2; \quad u_{\infty}(0) = 1, \quad u_{\infty}(2) = -2.$$

Integrando la EDO dos veces obtenemos la solución general

$$u_{\infty}(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + C_1x + C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Las constantes C_1 y C_2 pueden ser determinadas a partir de las condiciones de borde. La solución de equilibrio es

$$u_{\infty}(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{17}{12}x + 1.$$

6.1.2. Flujo prescrito en los extremos. El PVIF general es de la forma

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= k u_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= \alpha(t), \quad u_x(L, t) = \beta(t), \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

Como arriba, una solución de equilibrio $u_{\infty} = u_{\infty}(x)$ puede existir si α y β son constantes. Tal solución satisface el PVF

$$u''_{\infty}(x) + q(x) = 0, \quad 0 < x < L; \quad u'_{\infty}(0) = \alpha, \quad u'_{\infty}(L) = \beta,$$

donde q incorpora el factor $1/k$ y si existe, nuevamente puede ser considerada el límite, cuando $t \rightarrow \infty$, de la solución $u(x, t)$ del PVIF. En este caso no podemos descartar la condición inicial. Efectivamente, esta condición juega un rol esencial para la computación de la temperatura de equilibrio. Su aporte entra a través de la ley de conservación de la energía del calor en el problema que depende del tiempo completo, la cual es equivalente a la misma EDP. Por lo tanto, bajo la hipótesis formulada arriba con respecto a q , α , y β , integrando la EDP término por término sobre $[0, L]$ y utilizando las condiciones de borde obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L u(x, t) dx &= k \int_0^L u_{xx}(x, t) dx + \int_0^L q(x) dx \\ &= k(u_x(L, t) - u_x(0, t)) + \int_0^L q(x) dx \\ &= k(\beta(t) - \alpha(t)) + \int_0^L q(x) dx. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Como la superficie lateral (cilíndrica) de la barra está aislada, una temperatura de equilibrio no puede existir físicamente a menos que la contribución total de las fuentes en la barra y del flujo del calor a través de sus extremos sea nula, es decir

$$k(\beta(t) - \alpha(t)) + \int_0^L q(x) dx = 0.$$

Si esto ocurre, tal como (6.1) muestra,

$$\int_0^L u(x, t) dx = \text{const.}$$

para todo $t > 0$, luego

$$\int_0^L u(x, 0) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^L u(x, t) dx;$$

en otras palabras,

$$\int_0^L u_\infty(x) dx = \int_0^L f(x) dx. \quad (6.2)$$

Ejemplo 6.2. *La temperatura de equilibrio del PVIF*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= 4u_{xx}(x, t) + \gamma x + 24, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 2, \quad u_x(2, t) = 14, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \pi \sin \frac{\pi x}{2} + 1, \quad 0 < x < 2, \end{aligned}$$

donde $\gamma = \text{const.}$, satisface el PVF

$$4u''_\infty(x) + \gamma x + 24 = 0, \quad 0 < x < 2; \quad u'_\infty(0) = 2, \quad u'_\infty(2) = 14.$$

Esta EDO entrega

$$u'_\infty(x) = -\frac{1}{8}\gamma x^2 - 6x + C_1, \quad C_1 = \text{const.},$$

y a partir de las condiciones de borde, $C_1 = 2$ y $\gamma = -48$. Éste es el único valor de γ para el cual existe una temperatura de equilibrio. Integrando nuevamente obtenemos

$$u_\infty(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + C_2, \quad C_2 = \text{const.}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) dx &= \int_0^2 \left(\pi \sin \frac{\pi x}{2} + 1 \right) dx, \\ \int_0^L u(x) dx &= \int_0^2 (2x^3 - 3x^2 + 2x + C_2) dx = 2C_2 + 4, \end{aligned}$$

obtenemos $C_2 = 1$ a partir de (6.2), luego

$$u_\infty(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1.$$

Se verifica facilmente que como se esperaba, la contribución total del término fuente $\gamma x + 24 = -48x + 24$ a lo largo de la barra y del flujo del calor en los extremos es cero.

6.1.3. Condiciones de borde mixtas. El mismo método puede ser aplicado para calcular la solución de equilibrio en el caso de condiciones de borde mixtas.

Ejemplo 6.3. *Para hallar la temperatura de equilibrio del PVIF*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= 4u_{xx}(x, t) - 16, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= -5, \quad u_x(2, t) = 4, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin \frac{\pi x}{2}, \quad 0 < x < 2, \end{aligned}$$

hay que resolver el PVF

$$u''_{\infty}(x) - 4 = 0, \quad 0 < x < 2; \quad u_{\infty}(0) = -5, \quad u'_{\infty}(2) = 4.$$

La integración directa muestra que $u_{\infty}(x) = 2x^2 - 4x - 5$.

Ejemplo 6.4. La temperatura de equilibrio del PVIF

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= 4u_{xx}(x, t) + 32, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 2\left(u(0, t) - \frac{13}{2}\right), \quad u(2, t) = 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin \frac{\pi x}{2} + 1, \quad 0 < x < 2 \end{aligned}$$

satisface el PVF

$$u''_{\infty}(x) + 32 = 0, \quad 0 < x < 2; \quad u'_{\infty}(0) = 2\left(u_{\infty}(0) - \frac{13}{2}\right), \quad u_{\infty}(2) = 1,$$

luego $u_{\infty}(x) = -4x^2 + 7x + 3$.

6.1.4. Anillo circular con temperatura prescrita en la frontera. En virtud de la geometría de este problema se recomienda utilizar el Laplaciano en coordenadas polares (ver ítem (ii) del Comentario 4.4).

Ejemplo 6.5. El PVIF

$$\begin{aligned} u_t(r, t) &= k(\Delta u)(r, t) = \frac{k}{r}(ru_r(r, t))_r, \quad 1 < r < 2, \quad t > 0, \\ u(1, t) &= 3, \quad u(2, t) = -1, \quad t > 0, \\ u(r, 0) &= f(r), \quad 1 < r < 2 \end{aligned}$$

modela la conducción del calor en un anillo circular sin fuentes si los círculos de borde interior ($r = 1$) y exterior ($r = 2$) son mantenidos en dos temperaturas diferentes y la condición inicial depende solamente de r . (Como el cuerpo y la condición inicial poseen simetría circular, podemos suponer que la solución u es independiente del ángulo polar θ .) Entonces la temperatura de equilibrio $u_{\infty}(r)$ satisface el PVF

$$(ru'_{\infty}(r))' = 0, \quad 1 < r < 2; \quad u_{\infty}(1) = 3, \quad u_{\infty}(2) = -1.$$

Integrando la EDP una vez, obtenemos

$$ru'_{\infty}(r) = C_1 = \text{const.},$$

mientras que una segunda integración entrega la solución general

$$u_{\infty}(r) = C_1 \ln r + C_2, \quad C_2 = \text{const.}$$

Utilizando la condición de borde en $r = 1$ obtenemos $C_2 = 3$, luego la condición en $r = 2$ implica $C_1 = 4/\ln 2$, por lo tanto

$$u_{\infty}(r) = \frac{4}{\ln 2} \ln r + 3.$$

6.2. Problemas no homogéneos

6.2.1. Condiciones de borde independientes del tiempo. Consideremos el PVIF

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= ku_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= \alpha, \quad u(L, t) = \beta, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L, \end{aligned} \tag{6.3}$$

donde k , α , y β son constantes y f es una función dada. Para poder utilizar el método de separación de variables hay que hacer las condiciones de borde homogéneas mientras la EDP es mantenida homogénea igualmente.

Procediendo tal como en la Sección 6.1 podemos ver fácilmente que la solución de equilibrio de este problema es

$$u_\infty(x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{L}x, \quad 0 < x < L, \tag{6.4}$$

luego la función $v = u - u_\infty$ es una solución del PVIF

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= kv_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ v(x, 0) &= f(x) - u_\infty(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

El PVIF para v se resolvió en la Sección 5.1, y en virtud de (5.11), su solución es dada por

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \exp\left(-\frac{kn^2\pi^2}{L}t\right),$$

donde, tomando en cuenta (5.10) con f reemplazada por $f - u_\infty$,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L (f(x) - u_\infty(x)) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

Por lo tanto, la solución de (6.3) es

$$u(x, t) = u_\infty(x) + v(x, t) = u_\infty(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \exp\left(-\frac{kn^2\pi^2}{L}t\right)$$

con u_∞ y los coeficientes b_n dados por (6.4) y (6.5), respectivamente.

6.2.2. Fuentes y condiciones de borde independientes del tiempo. El método descrito arriba también funciona para un PVIF de la forma

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= ku_{xx}(x, t) + q(x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= \alpha, \quad u(L, t) = \beta, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L, \end{aligned}$$

ya que tal como vimos en la Sección 6.1, la computación de la distribución de la temperatura de equilibrio toma en cuenta el término fuente.

Otros tipos de condiciones de borde pueden ser tratados en forma similar siempre que exista una solución estacionaria.

Ejemplo 6.6. *La solución de equilibrio u_∞ del PVIF*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + \pi^2 \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 1, \quad u(1, t) = -3, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x^2, \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

satisface

$$u_\infty''(x) + \pi^2 \sin(\pi x) = 0, \quad 0 < x < 1; \quad u_\infty(0) = 1, \quad u_\infty(1) = -3.$$

La solución de este PVF es $u_\infty(x) = \sin(\pi x) - 4x + 1$, luego la sustitución $v(x) = u(x) - \sin(\pi x) + 4x - 1$ reduce el PVIF dado a

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= v_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ v(x, 0) &= x^2 + 4x - 1 - \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

el cual puede ser resuelto por el método de separación de variables.

Ejemplo 6.7. *Si el PVIF*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + x - \gamma, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= -\frac{1}{2} + x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3, \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

donde $\gamma = \text{const.}$, posee una solución estacionaria u_∞ , entonces esta solución debe satisfacer

$$u_\infty''(x) + x - \gamma = 0, \quad 0 < x < 1; \quad u_\infty'(0) = 0, \quad u_\infty'(1) = 0.$$

Integrando esta ecuación una vez obtenemos

$$u_\infty'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \gamma x + C_1, \quad C_1 = \text{const.}$$

Esta función satisface ambas condiciones de borde sólo si $\gamma = 1/2$ y $C_1 = 0$. Otra integración entrega

$$u_\infty(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + C_2, \quad C_2 = \text{const.}$$

Siguiendo el procedimiento del Ejemplo 6.2 concluimos que $C_2 = 0$. Ahora la sustitución

$$v(x) = u(x) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2$$

reduce el problema original al PVIF

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= v_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v_x(0, t) &= 0, \quad v_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ v(x, 0) &= x - \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

al cual podemos aplicar el método de separación de variables.

6.2.3. El caso general. Consideremos el PVIF

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) &= ku_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\
u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(L, t) = \beta(t), \quad t > 0, \\
u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L,
\end{aligned} \tag{6.6}$$

donde α , β , f , y q son funciones dadas. Además, sea

$$p(x, t) = C_1(t) + C_2(t)x$$

un polinomio lineal en x que satisfaga las condiciones de borde, es decir $p(0, t) = \alpha(t)$ y $p(L, t) = \beta(t)$. Entonces $C_1 = \alpha$ y $C_2 = (\beta - \alpha)/L$, y la sustitución $u = v + p$ reduce el problema dado al PVIF

$$\begin{aligned}
v_t(x, t) &= kv_{xx}(x, t) + q(x, t) - p_t(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\
v(0, t) &= 0, \quad v(L, t) = 0, \quad t > 0, \\
v(x, 0) &= f(x) - p(x, 0), \quad 0 < x < L,
\end{aligned}$$

el cual posee condiciones de borde homogéneas pero una EDP no homogénea. Tales problemas, y problemas similares con otros tipos de condiciones de borde, se resuelven mediante el método de expansión en funciones propias (ver Capítulo 7).

Ejemplo 6.8. *El PVIF*

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + xt, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
u(0, t) &= 1 - t, \quad u(1, t) = t^2, \quad t > 0, \\
u(x, 0) &= x, \quad 0 < x < 1
\end{aligned}$$

es de la forma (6.6) con $L = 1$, $\alpha(t) = 1 - t$, $\beta(t) = t^2$, y $q(x, t) = xt$, por lo tanto $p(x, t) = 1 - t + (t^2 + t - 1)x$. La sustitución

$$u(x, t) = v(x, t) + 1 - t + (t^2 + t - 1)x$$

reduce el PVIF dado al problema

$$\begin{aligned}
v_t(x, t) &= v_{xx}(x, t) + 1 - xt - x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
v(0, t) &= 0, \quad v(1, t) = 0, \quad t > 0, \\
v(x, 0) &= 2x - 1, \quad 0 < x < 1
\end{aligned}$$

con condiciones de borde homogéneas.

Ejemplo 6.9. *El PVIF*

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + xt, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
u_x(0, t) &= t, \quad u_x(1, t) = t^2, \quad t > 0, \\
u(x, 0) &= x + 1, \quad 0 < x < 1
\end{aligned}$$

require un tratamiento ligeramente diferente. Aquí se toma p_x (en lugar de p) como polinomio lineal en x satisfaciendo las condiciones de borde, es decir

$$p_x(x, t) = C_1(t) + C_2(t)x, \quad p_x(0, t) = t, \quad p_x(1, t) = t^2.$$

Es decir, $p_x(x, t) = t + (t^2 - t)x$, a partir de lo cual, mediante una integración, obtenemos

$$p(x, t) = xt + \frac{1}{2}x^2(t^2 - t).$$

(Como se necesita sólo una función p de este tipo, se eligió la constante de integración cero.)
Ahora la sustitución

$$u(x, t) = v(x, t) + xt + \frac{1}{2}x^2(t^2 - t)$$

reduce el problema original al PVIF

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= v_{xx}(x, t) + t^2 - t + xt - \frac{1}{2}x^2(2t - 1) - x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v_x(0, t) &= 0, \quad v_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ v(x, 0) &= x + 1, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Comentario 6.1. Esta técnica también puede ser aplicada para reducir otros tipos de PVIFs a versiones más simples donde la EDP es no homogénea pero las condiciones de borde son homogéneas. En el caso de PVFs, podemos en forma similar hacer dos de las condiciones de borde nulas mediante un polinomio lineal apropiado.

Capítulo 7

El método de expansión en funciones propias

La separación de variables no puede ser aplicada si la EDP y/o las condiciones de borde no son homogéneas. Tal como vimos en el Capítulo 6, en particular existen situaciones en las cuales podemos reducir el problema a un problema equivalente con una EDP homogénea y condiciones de borde homogéneas, pero esto no siempre es posible. En el caso general, a lo mejor podemos hacer las condiciones de borde homogéneas. El método de expansión en funciones propias ha sido diseñado para PVIFs con una EDP no homogénea pero con condiciones de borde homogénea.

7.1. La ecuación del calor

Consideremos el PVIF

$$u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (7.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (7.2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L. \quad (7.3)$$

Los valores propios y funciones propias del problema homogéneo correspondiente ($q \equiv 0$) son, respectivamente,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(ver Sección 5.1). Como $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto completo, podemos considerar para la solución una expansión de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) X_n(x). \quad (7.4)$$

Diferenciando la serie (7.4) término por término y recordando que $X_n'' + \lambda_n X_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ obtenemos a partir de la EDP

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(t) X_n(x) &= k \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) X_n''(x) + q(x, t) = -k \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \lambda_n X_n(x) + q(x, t) \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (c_n'(t) + k \lambda_n c_n(t)) X_n(x) &= q(x, t). \end{aligned}$$

Multiplicando la última igualdad por $X_m(x)$, integrando el resultado sobre $[0, L]$ y utilizando la ortogonalidad de las funciones X_n sobre $[0, L]$ (ver ítem (iii) del Teorema 3.1), obtenemos

$$(c'_m(t) + k\lambda_m c_m(t)) \int_0^L X_m^2(x) dx = \int_0^L q(x, t) X_m(x) dx,$$

a partir de lo cual, con m reemplazada por n , obtenemos las ecuaciones

$$c'_n(t) + k\lambda_n c_n(t) = \int_0^L q(x, t) X_n(x) dx \Big/ \int_0^L X_n^2(x) dx, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.5)$$

Las condiciones de borde ya están satisfechas considerando que cada una de las funciones X_n en (7.4) las satisface.

A partir de (7.4) y la condición inicial obtenemos

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) X_n(x).$$

Procediendo como arriba, llegamos a las condiciones iniciales

$$c_n(0) = \int_0^L f(x) X_n(x) dx \Big/ \int_0^L X_n^2(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.6)$$

Evidentemente, esto es lo mismo que encontrar expansiones formales

$$q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x),$$

donde las funciones $q_n(t)$ y los coeficientes f_n están dados por los lados derechos de (7.5) y (7.6), respectivamente. Entonces la solución del PVIF es de la forma (7.4) con los coeficientes $c_n(t)$ calculados a partir de (7.5) y (7.6). En el caso de nuestro problema, estas identidades se reducen a

$$\begin{aligned} c'_n(t) + k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 c_n(t) &= q_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L q(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \\ c_n(0) &= f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

PVIFs con otros tipos de condiciones de borde pueden ser tratados en forma similar.

Ejemplo 7.1. *Los valores propios y funciones propias del PVIF*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + \pi^2 e^{-24\pi^2 t} \sin(5\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 3 \sin(4\pi x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

son $\lambda_n = n^2\pi^2$ y $X_n(x) = \sin(n\pi x)$, $n \in \mathbb{N}$, respectivamente (considerando que aquí $k = 1$ y $L = 1$). Como $q(x, t) = \pi^2 e^{-24\pi^2 t} \sin(5\pi x)$ y $f(x) = 3 \sin(4\pi x)$ coinciden con sus respectivas expansiones propias, las fórmulas (7.7) entregan los PVI

$$c'_n(t) + n^2\pi^2 c_n(t) = \begin{cases} \pi^2 e^{-24\pi^2 t} & \text{para } n = 5, \\ 0 & \text{para } n \neq 5, \end{cases} \quad t > 0; \quad c_n(0) = \begin{cases} 3 & \text{para } n = 4, \\ 0 & \text{para } n \neq 4. \end{cases}$$

Por lo tanto, para $n = 4$ tenemos

$$c'_4(t) + 16\pi^2 c_4(t) = 0, \quad t > 0; \quad c_4(0) = 3$$

con la solución $c_4(t) = 3e^{-16\pi^2 t}$ (obtenida, por ejemplo, mediante el factor integrante $e^{16\pi^2 t}$), mientras que para $n = 5$,

$$c'_5(t) + 25\pi^2 c_5(t) = \pi^2 e^{-24\pi^2 t}, \quad t > 0; \quad c_5(0) = 0$$

con la solución $c_5(t) = e^{-25\pi^2 t}(e^{\pi^2 t} - 1)$; y para $n \neq 4, 5$,

$$c'_n(t) + n^2\pi^2 c_n(t) = 0, \quad t > 0; \quad c_n(0) = 0$$

con la solución $c_n \equiv 0$. Por lo tanto, la solución del PVIF es

$$u(x, t) = c_4(t)X_4(x) + c_5(t)X_5(x) = 3e^{-16\pi^2 t} \sin(4\pi x) + e^{-25\pi^2 t}(e^{\pi^2 t} - 1) \sin(5\pi x).$$

Ejemplo 7.2. El PVIF

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + xe^{-t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x - 1, \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

posee los mismos valores propios y funciones propias que el problema del Ejemplo 7.1. Aquí $q(x, t) = xe^{-t}$ y $f(x) = x - 1$. De acuerdo a (7.5), (7.6) y (2.5), y utilizando integración por partes, obtenemos los PVIs

$$c'_n(t) + n^2\pi^2 c_n(t) = 2e^{-t} \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} e^{-t}, \quad t > 0, \quad (7.8)$$

$$c_n(0) = 2 \int_0^1 (x - 1) \sin(n\pi x) dx = -\frac{2}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.9)$$

Utilizando el factor integrante $e^{n^2\pi^2 t}$ para (7.8), obtenemos la siguiente solución de (7.8), (7.9):

$$c_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \left(\frac{1}{n^2\pi^2 - 1} e^{-t} + \left((-1)^n - \frac{1}{n^2\pi^2 - 1} \right) e^{-n^2\pi^2 t} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

En virtud de (7.4), la solución del PVIF es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \left(\frac{1}{n^2\pi^2 - 1} e^{-t} + \left((-1)^n - \frac{1}{n^2\pi^2 - 1} \right) e^{-n^2\pi^2 t} \right) \sin(n\pi x).$$

Ejemplo 7.3. Los valores propios y funciones propias del PVIF

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + 2t + \cos(2\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \frac{1}{2\pi^2} \cos(2\pi x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

son $\lambda_n = n^2\pi^2$ y $X_n(x) = \cos(n\pi x)$, $n \in \mathbb{N}_0$ (ver Sección 5.1). (Por conveniencia elegimos aquí $\lambda_0 = 1$ en lugar de $1/2$.) Razonando como en el caso de las funciones propias dadas por senos, concluimos que las identidades (7.4)–(7.6) siguen válidas con la excepción de que

ahora $n \in \mathbb{N}_0$ y las funciones X_n son cosenos. Como $q(x, t) = 2t + \cos(2\pi x)$ y $f(x) = (2\pi^2)^{-1} \cos(2\pi x)$ son combinaciones lineales de las funciones propias, a partir de (7.5) (con $k = 1$) y (7.6) obtenemos los PVI's

$$c'_n(t) + n^2\pi^2 c_n(t) = \begin{cases} 2t & \text{para } n = 0, \\ 1 & \text{para } n = 2, \\ 0 & \text{para } n \neq 0, 2, \end{cases} \quad t > 0; \quad c_n(0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} & \text{para } n = 2, \\ 0 & \text{para } n \neq 2. \end{cases}$$

De acuerdo a lo anterior, para $n = 0$ tenemos

$$c'_0(t) = 2t, \quad t > 0; \quad c_0(0) = 0$$

con la solución $c_0(t) = t^2$; para $n = 2$,

$$c'_2(t) + 4\pi^2 c_2(t) = 1, \quad t > 0; \quad c_2(0) = \frac{1}{2\pi^2}$$

con la solución $c_2(t) = (4\pi^2)^{-1}(1 + e^{-4\pi^2 t})$; y para $n \neq 0, 2$,

$$c'_n(t) + n^2\pi^2 c_n(t) = 0, \quad t > 0; \quad c_n(0) = 0$$

con la solución $c_n(t) = 0$. Concluimos que la solución del PVIF dado es

$$u(x, t) = c_0(t)X_0(x) + c_2(t)X_2(x) = t^2 + \frac{1}{4\pi^2}(1 + e^{-4\pi^2 t})\cos(2\pi x).$$

Ejemplo 7.4. De acuerdo a la Sección 5.1, los valores propios y funciones propias del PVIF

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) - \text{sen} \frac{3\pi x}{2} + t \text{sen} \frac{5\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \text{sen} \frac{\pi x}{2} + 2 \text{sen} \frac{3\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1$$

vienen dados por

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}, \quad X_n(x) = \text{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando un cálculo directo podemos demostrar que el método general también funciona en el caso presente, con $k = 1$, $L = 1$, y los valores propios λ_n y funciones propias X_n indicados. Podríamos determinar las ecuaciones y condiciones iniciales para las funciones c_n a partir de (7.5) y (7.6). No obstante, observamos que las funciones

$$q(x, t) = -\text{sen} \frac{3\pi x}{2} + t \text{sen} \frac{5\pi x}{2} \quad \text{y} \quad f(x) = \text{sen} \frac{\pi x}{2} + 2 \text{sen} \frac{3\pi x}{2}$$

ya son combinaciones lineales de las funciones X_n ; por lo tanto concluimos que

$$c'_n(t) + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}c_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{para } n = 2, \\ t & \text{para } n = 3, \\ 0 & \text{para } n \neq 2, 3, \end{cases} \quad t > 0; \quad c_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 1, \\ 2 & \text{para } n = 2, \\ 0 & \text{para } n \neq 1, 2. \end{cases}$$

Entonces, para $n = 1$ tenemos

$$c_1'(t) + \frac{\pi^2}{4}c_1(t) = 0, \quad t > 0; \quad c_1(0) = 2$$

con la solución $c_1(t) = e^{-\pi^2 t/4}$; para $n = 2$,

$$c_2'(t) + \frac{9\pi^2}{4}c_2(t) = -1, \quad t > 0; \quad c_2(0) = 2$$

con la solución

$$c_2(t) = \left(2 + \frac{4}{9\pi^2}\right)e^{-9\pi^2 t/4} - \frac{4}{9\pi^2};$$

para $n = 3$,

$$c_3'(t) + \frac{25\pi^2}{4}c_3(t) = t, \quad t > 0; \quad c_3(0) = 0$$

con la solución

$$c_3(t) = \frac{16}{625\pi^4}e^{-25\pi^2 t/4} + \frac{4}{25\pi^2}t - \frac{16}{625\pi^4};$$

y para $n \neq 1, 2, 3$,

$$c_n'(t) + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}c_n(t) = 0, \quad t > 0; \quad c_n(0) = 0$$

con la solución $c_n \equiv 0$. De acuerdo a (7.4), la solución del PIVF es

$$\begin{aligned} u(x, t) = e^{-\pi^2 t/4} \sin \frac{\pi x}{2} + \left(\frac{18\pi^2 + 4}{9\pi^2} e^{-9\pi^2 t/4} - \frac{4}{9\pi^2} \right) \sin \frac{3\pi x}{2} \\ + \left(\frac{4}{25\pi^2} t - \frac{16}{625\pi^4} + \frac{16}{625\pi^4} e^{-25\pi^2 t/4} \right) \sin \frac{5\pi x}{2}. \end{aligned}$$

7.2. La ecuación de la onda

Consideremos el PIVF

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

De acuerdo a la Sección 5.2, los valores propios y funciones propias asociados a este problema son

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Empezando por una expansión del tipo (7.4) y siguiendo el mismo procedimiento general que para la ecuación del calor (ver Sección 7.1), esta vez incluyendo también la segunda condición inicial, obtenemos que la identidad (7.5) es reemplazada por

$$c_n''(t) + c^2 \lambda_n c_n(t) = \int_0^L q(x, t) X_n(x) dx \Big/ \int_0^L X_n^2(x) dx, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7.10)$$

que (7.6) sigue válida sin ningún cambio, y que

$$c'_n(0) = \int_0^L g(x) X_n(x) dx \Big/ \int_0^L X_n^2(x) dx, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.11)$$

Entonces la solución del PVIF viene dada por (7.4) con las funciones c_n determinadas por (7.10), (7.6), y (7.11); estas identidades asumen aquí la forma

$$\begin{aligned} c''_n(t) + c^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 c_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L q(x, t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \\ c_n(0) &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad c'_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Otras ecuaciones pueden ser tratadas en forma similar.

Ejemplo 7.5. *Consideremos el PVIF*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}(x, t) + \pi^2 \operatorname{sen}(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \pi, \quad u_t(x, 0) = 2\pi \operatorname{sen}(2\pi x), \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Las fórmulas arriba entregan con $c^2 = 1$, $L = 1$, $q(x, t) = \pi^2 \operatorname{sen}(\pi x)$, $f \equiv \pi$, y $g(x) = 2\pi \operatorname{sen}(2\pi x)$ los PVIs

$$\begin{aligned} c''_n(t) + n^2 \pi^2 c_n(t) &= \begin{cases} \pi^2 & \text{para } n = 1, \\ 0 & \text{para } n \neq 1, \end{cases} \quad t > 0, \\ c_n(0) &= 2 \int_0^1 \pi \operatorname{sen}(n\pi x) dx = (1 - (-1)^n) \frac{2}{n}, \quad c'_n(0) = \begin{cases} 2\pi & \text{para } n = 2, \\ 0 & \text{para } n \neq 2, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Entonces, para $n = 1$,

$$c''_1(t) + \pi^2 c_1(t) = \pi^2, \quad t > 0; \quad c_1(0) = 4, \quad c'_1(0) = 0$$

con la solución $c_1(t) = 3 \cos(\pi t) + 1$; para $n = 2$,

$$c''_2(t) + 4\pi^2 c_2(t) = 0, \quad t > 0; \quad c_2(0) = 0, \quad c'_2(0) = 2\pi$$

con la solución $c_2(t) = \operatorname{sen}(2\pi t)$; y para $n \neq 1, 2$,

$$c''_n(t) + n^2 \pi^2 c_n(t) = 0, \quad t > 0; \quad c_n(0) = (1 - (-1)^n) \frac{2}{n}, \quad c'_n(0) = 0$$

con la solución

$$c_n(t) = (1 - (-1)^n) \frac{2}{n} \cos(n\pi t).$$

De acuerdo a (7.4), obtenemos como solución del PVIF

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (3 \cos(\pi t) + 1) \operatorname{sen}(\pi x) + \operatorname{sen}(2\pi t) \operatorname{sen}(2\pi x) \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} (1 - (-1)^n) \frac{2}{n} \cos(n\pi t) \operatorname{sen}(n\pi x). \end{aligned}$$

Ejemplo 7.6. *Consideremos el PVIF*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}(x, t) + 1 + t \cos(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 2, \quad u_t(x, 0) = -2 \cos(2\pi x), \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

De acuerdo a la Sección 5.3, este problema genera los valores propios y funciones propias

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad X_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Las fórmulas arriba entregan con $c^2 = 1$, $L = 1$, $q(x, t) = 1 + t \cos(\pi x)$, $f \equiv 2$, y $g(x) = -2 \cos(2\pi x)$ los PVI

$$\begin{aligned} c_n''(t) + n^2 \pi^2 c_n(t) &= \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0, \\ t & \text{para } n = 1, \\ 0 & \text{para } n \neq 0, 1, \end{cases} \quad t > 0, \\ c_n(0) &= \begin{cases} 2 & \text{para } n = 0, \\ 0 & \text{para } n \neq 0, \end{cases} \quad c_n'(0) = \begin{cases} -2 & \text{para } n = 2, \\ 0 & \text{para } n \neq 2, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Entonces, para $n = 0$,

$$c_0''(t) = 1, \quad t > 0; \quad c_0(0) = 2, \quad c_0'(0) = 0$$

con la solución

$$c_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + 1;$$

para $n = 1$,

$$c_1''(t) + \pi^2 c_1(t) = t, \quad t > 0; \quad c_1(0) = 0, \quad c_1'(0) = 0$$

con la solución

$$c_1(t) = -\frac{\sin(\pi t)}{\pi^3} + \frac{t}{\pi^2};$$

para $n = 2$,

$$c_2''(t) + 4\pi^2 c_2(t) = 0, \quad t > 0; \quad c_2(0) = 0, \quad c_2'(0) = -2$$

con la solución

$$c_2(t) = -\frac{\sin(2\pi t)}{\pi};$$

y para $n \neq 0, 1, 2$,

$$c_n''(t) + n^2 \pi^2 c_n(t) = 0, \quad t > 0; \quad c_n(0) = 0, \quad c_n'(0) = 0$$

con la solución $c_n \equiv 0$. De acuerdo a (7.4), obtenemos como solución del PVIF

$$u(x, t) = \frac{t^2}{2} + 2 + \left(\frac{t}{\pi^2} - \frac{\sin(\pi t)}{\pi^3} \right) \cos(\pi x) - \frac{\sin(2\pi t)}{\pi} \cos(2\pi x).$$

7.3. La ecuación de Laplace

Consideremos el PVF

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= q(x, y), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < K, \\ u(0, y) &= 0, \quad u(L, y) = 0, \quad 0 < y < K, \\ u(x, 0) &= f_1(x), \quad u(x, K) = f_2(x), \quad 0 < x < L, \end{aligned}$$

donde por conveniencia el término fuente ha sido movido hacia el lado derecho de la EDP. Los valores propios y funciones propias asociados a este problema para la ecuación de Laplace no homogénea (ecuación de Poisson) se determinaron en la Sección 5.3:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Buscando una solución del tipo

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

deducimos tal como en las Secciones 7.1 y 7.2 que los coeficientes c_n , $n \in \mathbb{N}$, satisfacen los PVFs

$$\begin{aligned} c_n''(y) - n^2\pi^2 c_n(y) &= \frac{2}{L} \int_0^L q(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad 0 < y < K, \\ c_n(0) &= \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad c_n(K) = \frac{2}{L} \int_0^L f_2(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Ejemplo 7.7. *En el PVF*

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= \pi^2 \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ u(0, y) &= 0, \quad u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 2, \\ u(x, 0) &= 2 \sin(3\pi x), \quad u(x, 2) = -\sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

tenemos $L = 1$, $K = 2$, $q(x, y) = \pi^2 \sin(\pi x)$, $f_1(x) = 2 \sin(3\pi x)$ y $f_2(x) = -\sin(\pi x)$. Como q , f_1 y f_2 son combinaciones lineales de las funciones propias, podemos evitar (7.12) y deducir directamente que c_n satisface

$$\begin{aligned} c_n''(y) - n^2\pi^2 c_n(y) &= \begin{cases} \pi^2 & \text{para } n = 1, \\ 0 & \text{para } n \neq 1, \end{cases} \quad 0 < y < 2, \\ c_n(0) &= \begin{cases} 2 & \text{para } n = 3, \\ 0 & \text{para } n \neq 3, \end{cases} \quad c_n(2) = \begin{cases} -1 & \text{para } n = 1, \\ 0 & \text{para } n \neq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

luego para $n = 1$,

$$c_1''(y) - \pi^2 c_1(y) = \pi^2, \quad 0 < y < 2; \quad c_1(0) = 0, \quad c_1(2) = -1$$

con la solución $c_1(y) = -\operatorname{csch}(2\pi) \sinh(\pi(y-2)) - 1$; para $n = 3$,

$$c_3''(y) - 9\pi^2 c_3(y) = 0, \quad 0 < y < 2; \quad c_3(0) = 2, \quad c_3(2) = 0$$

con la solución $c_3(y) = -2 \operatorname{csch}(6\pi) \sinh(3\pi(y-2))$; y para $n \neq 1, 3$,

$$c_n''(y) - n^2 \pi^2 c_n(y) = 0, \quad 0 < y < 2; \quad c_n(0) = 0, \quad c_n(2) = 0$$

con la solución $c_n \equiv 0$. Concluimos que la solución del PVF es dada por

$$u(x, y) = -(\operatorname{csch}(2\pi) \sinh(\pi(y-2)) + 1) \sin(\pi x) - 2 \operatorname{csch}(6\pi) \sinh(3\pi(y-2)) \sin(3\pi x).$$

El mismo método puede ser aplicado a la ecuación de Laplace no homogénea en coordenadas polares.

Ejemplo 7.8. En la Sección 5.3 demostramos que los valores propios y funciones propias de un PVF tal como

$$\begin{aligned} u_{rr}(r, \theta) + \frac{1}{r} u_r(r, \theta) + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} &= 4, \quad 0 < r < 1, \quad -\pi < \theta < \pi, \\ u(1, \theta) &= 2 \cos \theta - \sin(2\theta), \quad -\pi < \theta < \pi \end{aligned}$$

son

$$\lambda_0 = 0, \quad \Theta_0 \equiv 1; \quad \lambda_n = n^2, \quad \Theta_{1n}(\theta) = \cos(n\theta), \quad \Theta_{2n}(\theta) = \sin(n\theta), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Buscando una solución de la forma

$$u(r, \theta) = c_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{1n}(r) \Theta_{1n}(\theta) + c_{2n}(r) \Theta_{2n}(\theta))$$

y razonando tal como en el Ejemplo 7.7 obtenemos que los coeficientes c_0 , c_{1n} , y c_{2n} ($n \in \mathbb{N}$) satisfacen

$$\begin{aligned} c_0''(r) + \frac{1}{r} c_0'(r) &= 4, \quad 0 < r < 1; \quad c_0(1) = 0, \\ c_{1n}''(r) + \frac{1}{r} c_{1n}'(r) - \frac{n^2}{r^2} c_{1n}(r) &= 0, \quad 0 < r < 1; \quad c_{1n}(1) = \begin{cases} 2 & \text{para } n = 1, \\ 0 & \text{para } n \neq 1, \end{cases} \\ c_{2n}''(r) + \frac{1}{r} c_{2n}'(r) - \frac{n^2}{r^2} c_{2n}(r) &= 0, \quad 0 < r < 1; \quad c_{2n}(1) = \begin{cases} -1 & \text{para } n = 2, \\ 0 & \text{para } n \neq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

De acuerdo a lo explicado en la Sección 5.3, $u(r, \theta)$, $u_r(r, \theta)$, y $u_\theta(r, \theta)$ deben ser continuas (y por lo tanto acotadas) para $0 \leq r \leq 1$, $-\pi < \theta \leq \pi$. Por lo tanto, buscamos soluciones $c_0(r)$, $c_{1n}(r)$, y $c_{2n}(r)$ que sean acotadas cuando $r \rightarrow 0+$.

La EDO para $n = 0$ es integrada notando primeramente que después de multiplicarla por r , el lado izquierdo puede ser escrito como $(rc_0')'$; obtenemos la solución acotada deseada $c_0(r) = r^2 - 1$.

Multiplicando las EDOs para $n \geq 1$ por r^2 obtenemos PVFs para ecuaciones de Cauchy-Euler. Para $n = 1$,

$$\begin{aligned} r^2 c_{11}''(r) + r c_{11}'(r) - c_{11}(r) &= 0, \quad 0 < r < 1; \quad c_{11}(1) = 2, \\ r^2 c_{21}''(r) + r c_{21}'(r) - c_{21}(r) &= 0, \quad 0 < r < 1; \quad c_{21}(1) = 0 \end{aligned}$$

con las soluciones acotadas $c_{11}(r) = 2r$ y $c_{21}(r) = 0$; para $n = 2$,

$$r^2 c_{12}''(r) + r c_{12}'(r) - 4c_{12}(r) = 0, \quad 0 < r < 1; \quad c_{12}(1) = 0,$$

$$r^2 c_{22}''(r) + r c_{22}'(r) - 4c_{22}(r) = 0, \quad 0 < r < 1; \quad c_{22}(1) = -1$$

con las soluciones acotadas $c_{12} \equiv 0$ y $c_{22}(r) = -r^2$; y para $n = 3, 4, \dots$,

$$r^2 c_{1n}''(r) + r c_{1n}'(r) - n^2 c_{1n}(r) = 0, \quad 0 < r < 1; \quad c_{1n}(1) = 0,$$

$$r^2 c_{2n}''(r) + r c_{2n}'(r) - n^2 c_{2n}(r) = 0, \quad 0 < r < 1; \quad c_{2n}(1) = 0$$

con las soluciones acotadas $c_{1n} \equiv 0$, $c_{2n} \equiv 0$. Concluimos que la solución del PVF es

$$u(r, \theta) = c_0(r) + c_{1n}(r)\Theta_{1n}(\theta) + c_{2n}(r)\Theta_{2n}(\theta) = r^2 - 1 + 2r \cos \theta - r^2 \sin(2\theta).$$

7.4. Otras ecuaciones

El método de expansión en funciones propias también puede ser aplicado a PVIFs o PVFs de EDPs más generales, tales como aquellas mencionadas en la Sección 4.4.

Ejemplo 7.9. Consideremos el PVIF

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) - 2u_x(x, t) + u(x, t) + 2te^x \sin(2\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Separando las variables del PVIF homogéneo asociado en forma conveniente, vemos que las funciones propias satisfacen el problema de Sturm-Liouville regular

$$X''(x) - 2X'(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1; \quad X(0) = 0, \quad X(1) = 0,$$

luego en virtud de las fórmulas del ítem (iii) del Comentario 3.2 con $a = -2$, $b = 0$, $c = 1$, y $L = 1$,

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 + 1, \quad X_n(x) = e^x \sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

En virtud de lo anterior buscamos una solución del PVIF no homogéneo dado en la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) e^x \sin(n\pi x).$$

Siguiendo el procedimiento de los ejemplos anteriores, concluimos que los coeficientes $c_n(t)$ son las soluciones de los PVIs

$$c_n'(t) + (\lambda_n - 1)c_n(t) = \begin{cases} 2t & \text{para } n = 2, \\ 0 & \text{para } n \neq 2, \end{cases} \quad t > 0; \quad c_n(0) = 0.$$

Para $n = 2$,

$$c_2'(t) + 4\pi^2 c_2(t) = 2t, \quad t > 0; \quad c_2(0) = 0$$

con la solución

$$c_2(t) = \frac{1}{8\pi^4} (e^{-4\pi^2 t} + 4\pi^2 t - 1).$$

Para $n \neq 2$ obtenemos $c_n \equiv 0$. Concluimos que la solución del PVIF dado es

$$u(x, t) = \frac{1}{8\pi^4} (e^{-4\pi^2 t} + 4\pi^2 t - 1) e^x \sin(2\pi x).$$

Ejemplo 7.10. *Aplicando el mismo procedimiento al PVIF*

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) + 2u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) - u_x(x, t) \\ &+ \left(2 + \left(9\pi^2 + \frac{1}{4}\right)t\right)e^{x/2}\text{sen}(3\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = e^{x/2}\text{sen}(3\pi x), \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

obtenemos

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + \frac{1}{4}, \quad X_n(x) = e^{x/2}\text{sen}(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N},$$

lo que sugiere buscar soluciones de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)e^{x/2}\text{sen}(n\pi x),$$

donde los coeficientes c_n satisfacen

$$\begin{aligned} c_n''(t) + 2c_n'(t) + \lambda_n c_n(t) &= \begin{cases} 2 + \left(9\pi^2 + \frac{1}{4}\right)t & \text{para } n = 3, \\ 0 & \text{para } n \neq 3, \end{cases} \quad t > 0, \\ c_n(0) = 0, \quad c_n'(0) &= \begin{cases} 1 & \text{para } n = 3, \\ 0 & \text{para } n \neq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Resolviendo los casos $n = 3$ y $n \neq 3$ por separado, obtenemos

$$c_n(t) = \begin{cases} t & \text{para } n = 3, \\ 0 & \text{para } n \neq 3 \end{cases}$$

y la solución del PVIF

$$u(x, t) = te^{x/2}\text{sen}(3\pi x).$$

Ejemplo 7.11. *El método de expansión en funciones propias aplicado al PVF*

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) - 4u_x(x, y) &= (y^2 - y)e^{2x}\text{sen}(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ u(0, y) &= 0, \quad u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 2, \\ u(x, 0) &= 2e^{2x}\text{sen}(2\pi x), \quad u(x, 2) = 0, \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

tiene como valores propios y funciones propias asociadas

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + 4, \quad X_n(x) = e^{2x}\text{sen}(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N},$$

por lo tanto buscamos soluciones de la forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y)e^{2x}\text{sen}(n\pi x)$$

donde los coeficientes $c_n(y)$ son soluciones de los PVFs

$$c_n''(y) - \lambda_n c_n(y) = \begin{cases} y^2 - y & \text{para } n = 1, \\ 0 & \text{para } n \neq 1, \end{cases} \quad 0 < y < 2,$$

$$c_n(0) = \begin{cases} 2 & \text{para } n = 2, \\ 0 & \text{para } n \neq 2, \end{cases} \quad c_n(2) = 0.$$

Para $n = 1$,

$$c_1''(y) - (\pi^2 + 4)c_1(y) = y^2 - y, \quad 0 < y < 2; \quad c_1(0) = 0, \quad c_1(2) = 0$$

con la solución

$$c_1(y) = \frac{1}{(\pi^2 + 4)^2} \left(2 \operatorname{csch}(2\sqrt{\pi^2 + 4}) \left((\pi^2 + 5) \sinh(\sqrt{\pi^2 + 4}y) - \sinh(\sqrt{\pi^2 + 4}(y - 2)) \right) + (\pi^2 + 4)(y - y^2) - 2 \right);$$

para $n = 2$,

$$c_2''(y) - 4(\pi^2 + 1)c_2(y) = 0, \quad 0 < y < 2; \quad c_2(0) = 2, \quad c_2(2) = 0$$

con la solución

$$c_2(y) = -2 \operatorname{csch}(4\sqrt{\pi^2 + 1}) \sinh(2\sqrt{\pi^2 + 1}(y - 2));$$

y para $n \neq 1, 2$,

$$c_n''(y) + (n^2\pi^2 + 4)c_n(y) = 0, \quad 0 < y < 2; \quad c_n(0) = 2, \quad c_n(2) = 0$$

con la solución $c_n \equiv 0$. Concluimos que la solución del PVIF puede ser escrita como

$$u(x, y) = c_1(y)e^{2x} \sin(\pi x) + c_2(y)e^{2x} \sin(2\pi x)$$

con las funciones $c_1(y)$ y $c_2(y)$ determinadas arriba.

Capítulo 8

Las transformaciones de Fourier

Algunos problemas de importancia práctica están fuera del alcance del método de expansión en funciones propias. Esto sucede, por ejemplo, cuando la variable espacial es definida sobre el eje real total y en consecuencia no existen puntos de frontera. Esto puede causar que el problema bajo estudio tiene un continuo de valores propios en lugar de un conjunto numerable. En tales situaciones se requieren otras técnicas de solución. Las transformaciones de Fourier — desarrolladas a partir de la representación de funciones como series de Fourier — son herramientas particularmente útiles para tratar dominios espaciales infinitos o semi-infinitos porque han sido desarrolladas precisamente para este tipo de escenario, además cuenta con la ventaja adicional de que reducen en uno el número de variables “activas” de un problema.

8.1. La transformación de Fourier completa

8.1.1. Construcción de la transformación. Consideremos, por simplicidad, una función f continua y periódica con período $2L$ sobre $\mathbb{R}$. De acuerdo al Capítulo 2, tenemos la representación

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (8.1)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}_0; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.2)$$

Utilizando la fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad i^2 = -1,$$

y su alternativa con θ reemplazado por $-\theta$, obtenemos

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = -\frac{1}{2}i(e^{i\theta} - e^{-i\theta}),$$

por lo tanto, (8.1) con $\theta = n\pi x/L$ asume la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\pi x/L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\pi x/L}.$$

Reemplazando n por $-n$ en la primera sumatoria y notando a partir de (8.2) que $a_{-n} = a_n$ y $b_{-n} = -b_n$ obtenemos a partir de la última identidad

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\pi x/L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\pi x/L},$$

es decir

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L},$$

donde en virtud de (8.2),

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\pi x/L} dx$$

(con $b_0 = 0$), luego

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) e^{in\pi \xi/L} d\xi \right) e^{-in\pi x/L}. \quad (8.3)$$

Si f no es periódica en el sentido estricto de la palabra, la podemos considerar “periódica” con un “período infinito.” Utilizando argumentos del cálculo avanzado obtenemos que cuando $L \rightarrow \infty$, la representación (8.3) de una función de este tipo asume la forma

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\omega \xi} d\xi \right) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (8.4)$$

Definimos la *transformada de Fourier (completa)* de f por

$$\mathcal{F}[f](\omega) := F(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx. \quad (8.5)$$

A partir de (8.4) queda claro que la *transformada inversa de Fourier* de F es

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x) := f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (8.6)$$

Los operadores integrales $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ se llaman *transformación de Fourier* y *transformación inversa de Fourier*. La variable ω se llama *parámetro de transformación*.

Comentario 8.1.

(i) Las fórmulas (8.5) y (8.6) son válidas si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

es decir, f es absolutamente integrable sobre $\mathbb{R}$. No obstante, la transformada de Fourier también puede ser definida para algunas funciones que no posean dicha propiedad. Esto se hace en un sentido generalizado mediante un proceso de límite que involucra transformadas de funciones absolutamente integrables.

- (ii) La construcción de la transformada de Fourier completa puede ser extendida a funciones f continuas a trozos. En este caso, $f(x)$ debe ser reemplazado por $\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+))$ en (8.4) y (8.6).

Ejemplo 8.1. La transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } -a \leq x \leq a, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $a > 0$ es una constante, es

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\omega)}{\omega}.$$

Definición 8.1. Sean f y g absolutamente integrables sobre $\mathbb{R}$. La convolución de f y g es la función $f * g$ definida por

$$(f * g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi) g(\xi) d\xi, \quad -\infty < x < \infty.$$

Comentario 8.2. Efectuando el cambio de variable $x - \xi = \eta$ y luego reemplazando η por ξ nos podemos fácilmente convencer de que

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x - \xi) d\xi = (g * f)(x).$$

Teorema 8.1.

- (i) La transformación $\mathcal{F}$ es lineal, es decir

$$\mathcal{F}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \mathcal{F}[f_1] + c_2 \mathcal{F}[f_2]$$

para cualquier par de funciones f_1 y f_2 (a las cuales $\mathcal{F}$ pueda ser aplicada) y números c_1 y c_2 .

- (ii) Si $u = u(x, t)$ con $u(x, t) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ y $\mathcal{F}[u](\omega, t) = U(\omega, t)$, entonces

$$\mathcal{F}[u_x](\omega, t) = -i\omega U(\omega, t).$$

- (iii) Si adicionalmente $u_x(x, t) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, entonces

$$\mathcal{F}[u_{xx}](\omega, t) = -\omega^2 U(\omega, t).$$

- (iv) La diferenciación con respecto al tiempo y la transformación de Fourier con respecto a x conmutan, es decir

$$\mathcal{F}[u_t](\omega, t) = (\mathcal{F}[u])_t(\omega, t) = U'(\omega, t).$$

- (v) La transformada de Fourier de una convolución es dada por

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g].$$

Comentario 8.3.

- (i) En general, $\mathcal{F}[fg] \neq \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]$.
(ii) Es obvio (a partir de su definición) que también $\mathcal{F}^{-1}$ es lineal.
(iii) El Cuadro 8.1 informa las transformadas de Fourier de algunas funciones elementales.

CUADRO 8.1. Transformadas de Fourier de algunas funciones elementales

$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F](x)$	$F(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)$
(1) $f'(x)$	$-i\omega F(\omega)$
(2) $f''(x)$	$-\omega^2 F(\omega)$
(3) $f(ax + b)$ ($a > 0$)	$\frac{1}{a} e^{-i(b/a)\omega} F(\omega/a)$
(4) $(f * g)(x)$	$F(\omega)G(\omega)$
(5) $\delta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
(6) $e^{iax} f(x)$	$F(\omega + a)$
(7) $e^{-a^2 x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/(4a^2)}$
(8) $xe^{-a^2 x^2}$ ($a > 0$)	$\frac{i}{2\sqrt{2}a^3} \omega e^{-\omega^2/(4a^2)}$
(9) $x^2 e^{-a^2 x^2}$ ($a > 0$)	$\frac{1}{4\sqrt{2}a^5} (2a^2 - \omega^2) e^{-\omega^2/(4a^2)}$
(10) $\frac{1}{x^2 + a^2}$ ($a > 0$)	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a \omega }$
(11) $\frac{x}{x^2 + a^2}$ ($a > 0$)	$-i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2a} \omega e^{-a \omega }$
(12) $H(a - x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leq a, \\ 0 & \text{para } x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega}$
(13) $xH(a - x) = \begin{cases} x & \text{para } x \leq a, \\ 0 & \text{para } x > a \end{cases}$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}(a\omega) - a\omega \cos(a\omega)}{\omega^2}$
(14) $e^{-a x }$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2}$
(15) $e^{-(x+b)^2/(4a)} + e^{-(x-b)^2/(4a)}$	$2\sqrt{2a} e^{-a\omega^2} \cos(b\omega)$
(16) $\text{erf}(ax)$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega} e^{-\omega^2/(4a^2)}$

Las propiedades de la transformación de Fourier listadas en el Teorema 8.1 juegan un rol esencial para la solución de ciertos tipos de problemas para ecuaciones diferenciales parciales. Ilustraremos la estrategia de solución mediante un número de ejemplos.

8.1.2. El problema de Cauchy para una barra infinita. La conducción del calor en una barra uniforme muy larga, donde la actividad de difusión disminuye hacia sus extremos, puede ser descrita por el problema de valores iniciales (PVI) (o *problema de Cauchy*)

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= ku_{xx}(x, t), & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0, \\ u(x, t), u_x(x, t) &\rightarrow 0 & \text{cuando } x \rightarrow \pm\infty, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Adoptando la notación $\mathcal{F}[u](\omega, t) = U(\omega, t)$, $\mathcal{F}[f](\omega) = F(\omega)$, utilizaremos las propiedades de $\mathcal{F}$ expuestas en el Teorema 8.1 para reducir el PVI dado a un problema de valores iniciales para una EDO en el dominio de transformación. Este nuevo PVI, donde ω es un parámetro “pasivo”, es

$$U'(\omega, t) + k\omega^2 U(\omega, t) = 0, \quad t > 0; \quad U(\omega, 0) = F(\omega)$$

con la solución

$$U(\omega, t) = F(\omega)e^{-k\omega^2 t}. \quad (8.7)$$

Para determinar la solución del PVI original hay que calcular la transformada de Fourier inversa de U . Sea $P(\omega, t) := e^{-k\omega^2 t}$. Utilizando la fórmula (7) del Cuadro 8.1 (con $a = (4kt)^{-1/2}$) obtenemos

$$\mathcal{F}^{-1}[P](x, t) = p(x, t) := \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-x^2/(4kt)}.$$

En virtud del ítem (v) del Teorema 8.1 podemos escribir (8.7) como

$$\mathcal{F}[u](\omega, t) = \mathcal{F}[f](\omega)\mathcal{F}[p](\omega, t) = \mathcal{F}[f * p](\omega, t),$$

luego $u = f * p$, o en virtud de la Definición 8.1,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-(x-\xi)^2/(4kt)} d\xi.$$

Una forma alternativa de escribir esto es

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, 0) u(\xi, 0) d\xi, \quad (8.8)$$

donde la función

$$G(x, t; \xi, 0) := \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-(x-\xi)^2/(4kt)}$$

es conocida como la *función kernel de Gauss-Weierstrass* o *función de influencia*. La fórmula (8.8) muestra como la distribución inicial de la temperatura $u(x, 0)$ influye la evolución de la temperatura a lo largo de la barra. Este tipo de fórmulas de representación será discutido con más detalle en el Capítulo 10.

Ejemplo 8.2. Para el PVI

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= 2u_{xx}(x, t), & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0, \\ u(x, t), u_x(x, t) &\rightarrow 0 & \text{cuando } x \rightarrow \pm\infty, & \quad t > 0, \end{aligned}$$

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} -3 & \text{para } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{para } |x| > 1, \end{cases}$$

tenemos $k = 2$, luego

$$G(x, t; \xi, 0) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-\xi)^2/(8t)}.$$

Reemplazando esta función en (8.8) obtenemos

$$u(x, t) = -\frac{3}{2\sqrt{2\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-(x-\xi)^2/(8t)} d\xi.$$

Utilizando en lugar de (8.8) la fórmula (12) del Cuadro 8.1 para calcular

$$F(\omega) = -3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen } \omega}{\omega}$$

y resolviendo el problema transformado

$$U'(\omega, t) + 2\omega^2 U(\omega, t) = 0, \quad t > 0; \quad U(\omega, 0) = -3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen } \omega}{\omega}$$

obtenemos

$$U(\omega, t) = -3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen } \omega}{\omega} e^{-2\omega^2 t},$$

lo que mediante una combinación de las fórmulas (3) y (16) del Cuadro 8.1 entrega

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U](x, t) = \frac{3}{2} \left(\text{erf} \frac{x-1}{2\sqrt{2t}} - \text{erf} \frac{x+1}{2\sqrt{2t}} \right).$$

La función $y = \text{erf } x$ se llama función error y la función $y = \text{erfc } x$ se llama función error complementaria. Estas funciones son definidas por

$$y = \text{erf } x := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \quad y = \text{erfc } x := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi = 1 - \text{erf } x,$$

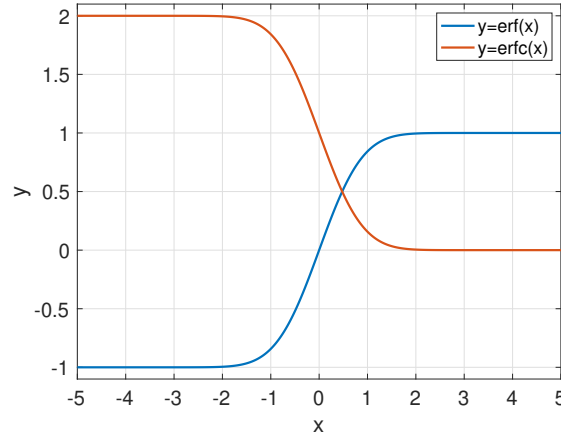
ver Figura 8.1.

8.1.3. Vibración de una cuerda infinita. Las vibraciones de una cuerda muy larga inicialmente en reposo con una fuerza de cuerpo despreciable y donde los efectos de la actividad mecánica en los extremos son insignificantes pueden ser modeladas por el PVI

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, t), u_x(x, t) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \pm\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Tal como arriba, sea $\mathcal{F}[u](\omega, t) = U(\omega, t)$ y $\mathcal{F}[f](\omega) = F(\omega)$. Aplicando $\mathcal{F}$ a la EDP y las condiciones iniciales obtenemos el problema (de una EDO)

$$U''(\omega, t) + c^2 \omega^2 U(\omega, t) = 0, \quad t > 0; \quad U(\omega, 0) = F(\omega), \quad U'(\omega, 0) = 0$$

FIGURA 8.1. Las funciones $y = \operatorname{erf} x$ e $y = \operatorname{erfc} x$.

con la solución general $U(\omega, t) = C_1(\omega) \cos(c\omega t) + C_2(\omega) \sin(c\omega t)$, donde $C_1(\omega)$ y $C_2(\omega)$ son funciones arbitrarias del parámetro de transformación. Utilizando las condiciones iniciales, obtenemos $U(\omega, t) = F(\omega) \cos(c\omega t)$. A partir de la fórmula de Euler,

$$\cos(c\omega t) = \frac{1}{2}(e^{ic\omega t} + e^{-ic\omega t}),$$

luego (8.6) implica que si f es continua, entonces

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}[U](x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos(c\omega t) e^{-i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) (e^{-i\omega(x-ct)} + e^{-i\omega(x+ct)}) d\omega \\ &= \frac{1}{2} (f(x-ct) + f(x+ct)). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Este problema será considerado desde otro punto de vista en el Capítulo 12.

Ejemplo 8.3. *En el PVI*

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \\ u(x, t), u_x(x, t) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \pm\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= e^{-x^2}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

tenemos $c = 1$ y $f(x) = e^{-x^2}$, es decir en virtud de (8.9),

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}).$$

8.2. Transformaciones seno y coseno de Fourier

Las transformaciones seno y coseno de Fourier generalizan las series de Fourier de senos y cosenos, respectivamente, y son definidas para funciones f continuas a trozos sobre $0 <$

$x < \infty$ por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s[f](\omega) &:= F(\omega) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(\omega x) \, dx, \\ \mathcal{F}_c[f](\omega) &:= F(\omega) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \operatorname{cos}(\omega x) \, dx.\end{aligned}$$

Se puede demostrar que estas transformadas existen si f es absolutamente integrable sobre $(0, \infty)$, es decir,

$$\int_0^\infty |f(x)| \, dx < \infty.$$

Las transformadas inversas correspondientes son

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s^{-1}[F](x) &= f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(\omega) \operatorname{sen}(\omega x) \, d\omega, \\ \mathcal{F}_c^{-1}[F](x) &= f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(\omega) \operatorname{cos}(\omega x) \, d\omega.\end{aligned}$$

Los operadores $\mathcal{F}_s$ y $\mathcal{F}_c$ se llaman *transformación seno de Fourier* y *transformación coseno de Fourier*, respectivamente, mientras que $\mathcal{F}_s^{-1}$ y $\mathcal{F}_c^{-1}$ son sus transformaciones inversas. El comentario final del ítem (ii) del Comentario 8.1 también aplica aquí.

Ejemplo 8.4. *Las transformaciones seno y coseno de Fourier de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{para } x > a, \end{cases} \quad a = \text{const.},$$

son

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s[f](\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(\omega x) \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \operatorname{sen}(\omega x) \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \operatorname{cos}(a\omega)}{\omega}, \\ \mathcal{F}_c[f](\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \operatorname{cos}(\omega x) \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \operatorname{cos}(\omega x) \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen}(a\omega)}{\omega}.\end{aligned}$$

Comentario 8.4. *La transformación $\mathcal{F}_s$ ($\mathcal{F}_c$) también puede ser definida para funciones sobre $\mathbb{R}$ si estas son impares (pares).*

Teorema 8.2.

- (i) *Los operadores $\mathcal{F}_s$ y $\mathcal{F}_c$ son lineales.*
- (ii) *Si $u = u(x, t)$ con $u(x, t) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, entonces*

$$\mathcal{F}_s[u_x](\omega, t) = -\omega \mathcal{F}_c[u](\omega, t), \quad \mathcal{F}_c[u_x](\omega, t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} u(0, t) + \omega \mathcal{F}_s[u](\omega, t).$$

- (iii) *Si adicionalmente $u_x(x, t) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, entonces*

$$\mathcal{F}_s[u_{xx}](\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega u(0, t) - \omega^2 \mathcal{F}_s[u](\omega, t),$$

$$\mathcal{F}_c[u_{xx}](\omega, t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}u_x(0, t) - \omega^2\mathcal{F}_c[u](\omega, t).$$

(iv) *La diferenciación con respecto al tiempo conmuta con ambas transformaciones seno y coseno de Fourier:*

$$\mathcal{F}_s[u_t](\omega, t) = (\mathcal{F}_s[u])_t(\omega, t), \quad \mathcal{F}_c[u_t](\omega, t) = (\mathcal{F}_c[u])_t(\omega, t).$$

De acuerdo al ítem (iii) del Teorema 8.2, la elección entre el uso de la transformada seno o coseno de Fourier para resolver un PVIF dado depende del tipo de la condición de borde especificada en $x = 0$.

Los Cuadros 8.2 y 8.3 informan las transformadas seno y coseno de Fourier, respectivamente, algunas funciones elementales.

8.2.1. Conducción del calor en una barra semi-infinita. La conducción del calor en una barra larga para la cual la temperatura en el extremo cercano está prescrita mientras que los efectos de las condiciones en el extremo lejano son despreciables es modelada por el PVIF

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= ku_{xx}(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= g(t), \quad t > 0, \\ u(x, t), u_x(x, t) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x > 0. \end{aligned}$$

A raíz de la condición de borde dada, usamos la transformación seno de Fourier, es decir, consideremos

$$\mathcal{F}_s[u](\omega, t) = U(\omega, t), \quad \mathcal{F}_s[f](\omega) = F(\omega).$$

Aplicando $\mathcal{F}_s$ a la EDP y la condición inicial y utilizando las propiedades del Teorema 8.2, llegamos al problema de EDO

$$U'(\omega, t) + k\omega^2 U(\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}k\omega g(t), \quad t > 0; \quad U(\omega, 0) = F(\omega).$$

Después de encontrar U en el dominio de transformación, obtenemos la solución del PVIF original como $u(x, t) = \mathcal{F}_s^{-1}[U](x, t)$.

Ejemplo 8.5. *El PVIF*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 1, \quad t > 0, \\ u(x, t), u_x(x, t) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad x > 0 \end{aligned}$$

requiere utilizar la transformación seno de Fourier ya que es la temperatura que está prescrita mediante la condición de borde. En virtud del Teorema 8.2, la transformada $U(\omega, t) = \mathcal{F}_s[u](\omega, t)$ satisface

$$U'(\omega, t) + \omega^2 U(\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega, \quad t > 0; \quad U(\omega, 0) = 0.$$

CUADRO 8.2. Transformadas seno de Fourier de algunas funciones elementales

$f(x) = \mathcal{F}_s^{-1}[F](x)$	$F(\omega) = \mathcal{F}_s[f](\omega)$
(1) $f'(x)$	$-\omega F_c[f](\omega)$
(2) $f''(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega f(0) - \omega^2 F(\omega)$
(3) $f(ax) \ (a > 0)$	$\frac{1}{a} F(\omega/a)$
(4) $f(ax) \cos(bx) \ (a, b > 0)$	$\frac{1}{2a} \left(F\left(\frac{\omega+b}{a}\right) + F\left(\frac{\omega-b}{a}\right) \right)$
(5) 1	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega}$
(6) $e^{-ax} \ (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$
(7) $xe^{-ax} \ (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2a\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}$
(8) $x^2 e^{-ax} \ (a > 0)$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{3a^2\omega - \omega^3}{(a^2 + \omega^2)^3}$
(9) $\frac{x}{x^2 + a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a\omega}$
(10) $H(a-x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{para } x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos(a\omega)}{\omega}$
(11) $xH(a- x) = \begin{cases} x & \text{para } x \leq a, \\ 0 & \text{para } x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\omega) - a\omega \cos(a\omega)}{\omega^2}$
(12) $\operatorname{erfc}(ax) \ (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega} (1 - e^{-\omega^2/(4a^2)})$
(13) $xe^{-a^2x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{a^3} \omega e^{-\omega^2/(4a^2)}$
(14) $\arctan(x/a) \ (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\omega} e^{-a\omega}$

La solución del problema transformado es

$$U(\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega} (1 - e^{-\omega^2 t});$$

CUADRO 8.3. Transformadas coseno de Fourier de algunas funciones elementales

$f(x) = \mathcal{F}_c^{-1}[F](x)$	$F(\omega) = \mathcal{F}_c[f](\omega)$
(1) $f'(x)$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + \omega F_s[f](\omega)$
(2) $f''(x)$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0) - \omega^2 F(\omega)$
(3) $f(ax) \ (a > 0)$	$\frac{1}{a}F(\omega/a)$
(4) $f(ax) \cos(bx) \ (a, b > 0)$	$\frac{1}{2a} \left(F\left(\frac{\omega+b}{a}\right) + F\left(\frac{\omega-b}{a}\right) \right)$
(5) $e^{-ax} \ (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2}$
(6) $xe^{-ax} \ (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^2 - \omega^2}{(a^2 + \omega^2)^2}$
(7) $x^2 e^{-ax} \ (a > 0)$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^3 - 3a\omega^2}{(a^2 + \omega^2)^3}$
(8) $e^{-a^2 x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{ a } a^3 e^{-\omega^2/(4a^2)}$
(9) $\frac{1}{x^2 + a^2} \ (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a\omega}$
(10) $\frac{1}{(a^2 + x^2)^3} \ (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \omega^2 + 3a\omega + 3}{8a^5} e^{-a\omega}$
(11) $\frac{x^2}{(a^2 + x^2)^3} \ (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{-a^2 \omega^2 + a\omega + 1}{8a^3} e^{-a\omega}$
(12) $\frac{x^4}{(a^2 + x^2)^3} \ (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \omega^2 - 5a\omega + 3}{8a} e^{-a\omega}$
(13) $H(a-x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{para } x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega}$
(14) $\begin{cases} (1/b)e^{-bx} \cosh(ab) & \text{para } x \geq a, \\ (1/b)e^{-ab} \cosh(bx) & \text{para } x < a \end{cases} \ (a, b > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(a\omega)}{b^2 + \omega^2}$

de acuerdo a la fórmula (12) (con $a = 1/(2\sqrt{t})$) del Cuadro 8.2,

$$u(x, t) = \mathcal{F}_s^{-1}[U](x, t) = \text{erfc} \frac{x}{2\sqrt{t}}.$$

8.2.2. Vibraciones de una cuerda semi-infinita. El método aplicado en este caso es similar al método utilizado arriba.

Ejemplo 8.6. *La solución del PIVF*

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= 4u_{xx}(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad t > 0, \\ u(x, t), u_x(x, t) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= e^{-x}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x > 0 \end{aligned}$$

es obtenida mediante la transformación coseno de Fourier ya que la condición de borde prescribe la x -derivada de u en $x = 0$. De acuerdo a la fórmula (5) (con $a = 1$) del Cuadro 8.3, la transformada coseno de Fourier de la función e^{-x} es $\sqrt{2/\pi}(1 + \omega^2)^{-1}$; luego, de acuerdo al Teorema 8.2, $U(\omega, t) = \mathcal{F}_c[u](\omega, t)$ satisface

$$U''(\omega, t) + 4\omega^2 U(\omega, t) = 0, \quad t > 0; \quad U(\omega, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \omega^2}$$

con la solución

$$U(\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(2\omega t)}{1 + \omega^2}.$$

Ahora, de acuerdo a la fórmula (14) del Cuadro 8.3 encontramos la solución del PIVF:

$$u(x, t) = \mathcal{F}_c^{-1}[U](x, t) = \begin{cases} e^{-x} \cosh(2t) & \text{para } t \leq x/2, \\ e^{-2t} \cosh x & \text{para } t > x/2. \end{cases}$$

8.2.3. Temperatura de equilibrio en una franja semi-infinita. La distribución estacionaria de la temperatura en una franja semi-infinita $0 \leq x \leq L$, $y \geq 0$ es modelada por el PVF

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0, \quad 0 < x < L, \quad y > 0, \\ u(0, y) &= g_1(y), \quad u(L, y) = g_2(y), \quad y > 0, \quad g_1(y), g_2(y) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } y \rightarrow \infty, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L, \\ u(x, y), u_y(x, y) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } y \rightarrow \infty, \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

Utilizando el principio de la superposición, escribimos la solución en la forma $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$, donde u_1 satisface el PVF dado con $g_1 \equiv 0$ y $g_2 \equiv 0$, y u_2 lo satisface con $f \equiv 0$. Por lo tanto, el primer PVF es

$$\begin{aligned} (u_1)_{xx}(x, y) + (u_1)_{yy}(x, y) &= 0, \quad 0 < x < L, \quad y > 0, \\ u_1(0, y) &= 0, \quad u_1(L, y) = 0, \quad y > 0, \\ u_1(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L, \\ u_1(x, y), (u_1)_y(x, y) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } y \rightarrow \infty, \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

Este problema es resuelto por separación de variables. Procediendo tal como en la Sección 5.3, a partir de la EDP y las condiciones de borde en $x = 0$ y $x = L$ obtenemos

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \left(A_n \cosh \frac{n\pi y}{L} + B_n \sinh \frac{n\pi y}{L} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} (a_n e^{n\pi y/L} + b_n e^{-n\pi y/L}).$$

Como $u_1(x, y) \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow \infty$, se debe satisfacer $a_n = 0$ para $n \in \mathbb{N}$, luego

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-n\pi y/L}. \quad (8.10)$$

Ahora de acuerdo a la condición de borde en $y = 0$,

$$u_1(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

donde en virtud de (2.10),

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.11)$$

Concluimos que la solución del primer PVF viene dada por (8.10) con los coeficientes b_n dados por (8.11).

El segundo PVF es

$$\begin{aligned} (u_2)_{xx}(x, y) + (u_2)_{yy}(x, y) &= 0, \quad 0 < x < L, \quad y > 0, \\ u_2(0, y) &= g_1(y), \quad u_2(L, y) = g_2(y), \quad y > 0, \quad g_1(y), g_2(y) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } y \rightarrow \infty, \\ u_2(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < L, \\ u_2(x, y), (u_2)_y(x, y) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } y \rightarrow \infty, \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

A raíz de la condición de borde en $y = 0$, utilizamos $\mathcal{F}_s$ con respecto a y , utilizando la notación

$$\mathcal{F}_s[u_2](x, \omega) = U(x, \omega), \quad \mathcal{F}_s[g_1](\omega) = G_1(\omega), \quad \mathcal{F}_s[g_2](\omega) = G_2(\omega).$$

Entonces el PVF arriba se reduce a

$$U''(x, \omega) - \omega^2 U(x, \omega) = 0, \quad 0 < x < L; \quad U(0, \omega) = G_1(\omega), \quad U(L, \omega) = G_2(\omega).$$

La solución general de esta ecuación puede ser escrita como

$$U(x, \omega) = C_1(\omega) \sinh(\omega x) + C_2(\omega) \sinh(\omega(L - x)),$$

donde C_1 y C_2 son funciones arbitrarias de ω . Utilizando las condiciones de borde en $x = 0$ y $x = L$ obtenemos

$$U(x, \omega) = \operatorname{csch}(\omega L) \left(G_2(\omega) \sinh(\omega x) + G_1(\omega) \sinh(\omega(L - x)) \right). \quad (8.12)$$

La solución u_2 es obtenida aplicando $\mathcal{F}_s^{-1}$ a esta igualdad.

Ejemplo 8.7. *Para el PVF*

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad y > 0, \\ u(0, y) &= 0, \quad u(1, y) = g(y), \quad y > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(x, y), u_y(x, y) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } y \rightarrow \infty, \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

donde

$$g(y) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < y \leq 2, \\ 0 & \text{para } y > 2 \end{cases}$$

tenemos $L = 1$, $g_1(y) = 0$ y $g_2(y) = g(y)$, luego $G_1(\omega) = 0$ y a partir de la fórmula (10) (con $a = 2$) del Cuadro 8.2,

$$G_2(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos(2\omega)}{\omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2 \sin^2 \omega}{\omega},$$

por lo tanto, en virtud de (8.12),

$$U(x, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2 \sin^2 \omega}{\omega} \operatorname{csch} \omega \sinh(\omega x),$$

luego

$$u(x, y) = \mathcal{F}_s^{-1}[U](x, y) = \frac{4}{\omega} \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \sin^2 \omega \operatorname{csch} \omega \sinh(\omega x) \sin(\omega y) d\omega.$$

8.3. Otras aplicaciones

La transformación de Fourier mencionada también puede ser aplicada a otros problemas apropiados, por ejemplo aquellos mencionados en la Sección 4.4 incluyendo algunos con EDPs no homogéneas.

Ejemplo 8.8. *El PVI (problema de Cauchy)*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + 2u(x, t) + (1 - 4x^2t)e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, t), u_x(x, t) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \pm\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

describe un proceso de difusión con una reacción en cadena y una fuente en un medio unidimensional. Considerando las fórmulas (8) y (10) (con $a = 1$) del Cuadro 8.1, tenemos

$$\mathcal{F}[(1 - 4x^2t)e^{-x^2}] = \frac{(\omega^2 - 2)t + 1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4},$$

luego poniendo $\mathcal{F}[u](\omega, t) = U(\omega, t)$ y utilizando la fórmula (2) del Cuadro 8.1, obtenemos que U es solución del problema transformado

$$U'(\omega, t) + (\omega^2 - 1)U(\omega, t) = \frac{(\omega^2 - 2)t + 1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}, \quad t > 0; \quad U(\omega, 0) = 0.$$

Un cálculo directo muestra que

$$U(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} t e^{-\omega^2/4},$$

por lo tanto de acuerdo a la fórmula (8) del Cuadro 8.1,

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U](x, t) = t e^{-x^2}.$$

Ejemplo 8.9. *El PVI*

$$u_{tt}(x, t) + 2u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + (2 + 4t - 4t^2)e^{-2x}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = t^2, \quad t > 0,$$

$$u(x, t), u_x(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x > 0$$

describe la propagación de una onda disipativa a lo largo de una cuerda semi-infinita inicialmente en reposo bajo la acción de un desplazamiento prescrito del extremo cercano y una fuerza externa. Considerando la condición de borde utilizamos la transformación seno de Fourier para hallar la solución. Primeramente, utilizando la fórmula (6) (con $a = 2$) del Cuadro 8.2 notamos que

$$\mathcal{F}_s[(2 + 4t - 4t^2)e^{-2x}] = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{4 + \omega^2} (1 + 2t - 2t^2);$$

luego, a partir del Teorema 8.2 y las condiciones iniciales, la transformada $U(\omega, t) = \mathcal{F}_s[u](\omega, t)$ de u satisface

$$U''(\omega, t) + 2U'(\omega, t) + \omega^2 U(\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega t^2 + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{4 + \omega^2} (1 + 2t - 2t^2), \quad t > 0,$$

$$U(\omega, 0) = 0, \quad U'(\omega, 0) = 0.$$

Resolviendo este problema de EDO en forma estándar, obtenemos

$$U(\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{4 + \omega^2} t^2,$$

y utilizando la fórmula (6) del Cuadro 8.2 llegamos a la solución

$$u(x, t) = \mathcal{F}_s^{-1}[U](x, t) = t^2 e^{-2x}.$$

Ejemplo 8.10. *El PVF*

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) + u(x, y) = \frac{x(y^4 + 8y^2 - 1)}{(1 + y^2)^3}, \quad 0 < x < 1, \quad y > 0,$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = \frac{1}{1 + y^2}, \quad y > 0,$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(x, y), u_y(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } y \rightarrow \infty, \quad 0 < x < 1$$

modela la distribución en estado estacionario del calor en una franja semi-infinita con una fuente dependiendo del tiempo y una base aislada. Como la condición de borde en $y = 0$

prescribe la derivada u_y , utilizamos la transformación coseno de Fourier con respecto a y para hallar la solución. A partir de las fórmulas (9) a (12) (con $a = 1$) del Cuadro 8.3 es fácil verificar que

$$\mathcal{F}_c \left[\frac{x(y^4 + 8y^2 - 1)}{(1 + y^2)^3} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 - \omega^2)e^{-\omega}x, \quad \mathcal{F}_c \left[\frac{1}{1 + y^2} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\omega};$$

por lo tanto, de acuerdo al Teorema 8.2, la transformada $U(x, \omega) = \mathcal{F}_c[u](x, \omega)$ de u satisface

$$U''(x, \omega) - (\omega^2 - 1)U(x, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 - \omega^2)e^{-\omega}x, \quad 0 < x < 1,$$

$$U(0, \omega) = 0, \quad U(1, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\omega}$$

con la solución

$$U(x, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}xe^{-\omega},$$

luego de acuerdo a la fórmula (9),

$$u(x, y) = \mathcal{F}_c^{-1}[U](x, y) = \frac{x}{1 + y^2}.$$

Capítulo 9

La transformación de Laplace

Las transformaciones de Fourier se utilizan principalmente con respecto a la variable espacial. Sin embargo, en ciertas circunstancias, es deseable eliminar el tiempo como variable activa. Esto se lleva a cabo mediante la transformación de Laplace. Los problemas donde la parte espacial del dominio es no acotada pero no se espera que la solución decaiga suficientemente rápido lejos del origen son particularmente apropiados para este método.

9.1. Definición y propiedades

Primeramente introduciremos algunos conceptos matemáticos útiles.

Definición 9.1. La función H definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0, \\ 1 & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

se llama función de Heaviside. Obviamente, para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$H(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < t_0, \\ 1 & \text{para } t \geq t_0. \end{cases}$$

Comentario 9.1. La función H es continua a trozos. Tal como discutimos en el ítem (ii) del Comentario 2.1, nuestro análisis no es afectado por los valores de una función continua a trozos en sus puntos de discontinuidad. Por lo tanto, para nuestros propósitos el valor $H(0) = 1$ es escogido solamente por conveniencia para tener la función H definida correctamente a lo largo del eje real, pero este valor no tiene ninguna otra importancia.

En el modelamiento matemático frecuentemente es necesario acomodar un tipo particular de datos físicos tales como impulsos unitarios y fuentes puntuales. Supongamos, por ejemplo, que un impulso unitario es producido por una fuerza constante de la magnitud $1/\varepsilon$ durante un intervalo de tiempo muy corto $(t_0 - \varepsilon/2, t_0 + \varepsilon/2)$. Podemos expresar esto matemáticamente considerando la fuerza dada por

$$g_{t_0, \varepsilon}(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{para } t \in (t_0 - \varepsilon/2, t_0 + \varepsilon/2), \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y calculando el impulso total por

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{t_0, \varepsilon}(t) dt = \int_{t_0 - \varepsilon/2}^{t_0 + \varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} dt = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1.$$

Notamos que el valor de esta integral es 1 independientemente del valor de ε . Si ahora queremos considerar el impulso como siendo producido en el instante singular t_0 , tenemos que considerar un proceso limitante y definir una especie de límite de $g_{t_0, \varepsilon}$ cuando $t \rightarrow 0$, el cual denotamos por $\delta(t - t_0)$.

Definición 9.2. *El objeto matemático δ definido por*

- (i) $\delta(t - t_0) = 0$ para todo $t \neq t_0$,
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$

se llama delta de Dirac.

Comentario 9.2.

- (i) *A partir de la Definición 9.2 es obvio que a δ no se le puede asignar un valor finito en $t = t_0$ porque en tal caso su integral sobre $\mathbb{R}$ sería 0 y no 1. Por lo tanto, δ no es una función. En el sentido estricto, δ es lo que llamamos una distribución (función generalizada) y su tratamiento apropiado requiere de un formalismo especial fuera del alcance de estos apuntes.*
- (ii) *Para $t < t_0$ tenemos*

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^t 0 d\tau = 0;$$

para $t > t_0$ podemos encontrar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que $t_0 + \varepsilon/2 < t$, luego utilizando la función $g_{t_0, \varepsilon}$ definida arriba, obtenemos

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^t g_{t_0, \varepsilon}(\tau) d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \varepsilon/2}^{t_0 + \varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} d\tau = 1.$$

Combinando estos resultados podemos escribir

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau = H(t - t_0),$$

es decir en un cierto sentido generalizado, $H'(t - t_0) = \delta(t - t_0)$.

- (iii) *Si f es continua, entonces en virtud del Teorema del Valor Intermedio, existe $t' \in (t - \varepsilon/2, t + \varepsilon/2)$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g_{t_0, \varepsilon}(\tau) d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \varepsilon/2}^{t_0 + \varepsilon/2} f(\tau) \frac{1}{\varepsilon} d\tau \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\left(t + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \left(t - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) f(t') = f(t). \end{aligned} \tag{9.1}$$

Efectivamente, en el marco de la teoría de distribuciones δ es definido rigurosamente por una fórmula de este tipo en lugar de la Definición 9.2. Tal como la diferenciación la integración en el lado izquierdo arriba es entendida en un sentido generalizado distribucional.

- (iv) *El delta de Dirac también puede ser utilizado para problemas definidos sobre intervalos semi-infinitos o finitos. En tales casos δ representa la “restricción” de esta distribución al intervalo correspondiente.*

Definición 9.3. La transformada de Laplace de una función $f = f(t)$, $0 < t < \infty$, es definida por

$$\mathcal{L}[f](s) := F(s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Aquí s es el parámetro de la transformación. La transformada inversa de Laplace, calculada mediante técnicas de variable compleja, es

$$\mathcal{L}[F](t) := f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds$$

(la fórmula inversa de Mellin) donde la integración se realiza a lo largo de la línea vertical $\operatorname{Re} s = c$ en el plano complejo tal que c es mayor que la parte real de todas las singularidades de $F(s)$. Los operadores $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^{-1}$ se llaman transformación de Laplace y transformación inversa de Laplace, respectivamente.

Comentario 9.3. La transformación de Laplace $\mathcal{L}$ puede ser aplicada a una clase de funciones más amplia que la transformación de Fourier $\mathcal{F}$.

El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes para la existencia de la transformada de Laplace de una función f dada.

Teorema 9.1. Si

- (i) f es continua a trozos sobre $[0, \infty)$ y
- (ii) existen constantes C y α tales que $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$, $0 < t < \infty$,

entonces $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$ existe para todo $s > \alpha$.

Ejemplo 9.1.

- (i) La función $f(t) = 1$, $t > 0$ satisface las condiciones del Teorema 9.1 con $C = 1$ y $\alpha = 0$, y en este caso,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} [e^{-st}]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

- (ii) Para $f(t) = e^{2t}$, $t > 0$, el Teorema 9.1 es válido para $C = 1$ y $\alpha = 2$, y en este caso

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{2t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(2-s)t} dt = \frac{1}{s-2}, \quad s > 2.$$

- (iii) La tasa de crecimiento de la función $f(t) = e^{t^2}$, $t > 0$, cuando $t \rightarrow \infty$ excede el crecimiento exponencial estipulado en el Teorema 9.1. Resulta que esta función efectivamente no posee transformada de Laplace.

Teorema 9.2.

- (i) La transformación $\mathcal{L}$ es lineal, es decir para cualquier par de funciones f_1 y f_2 a las cuales la transformación $\mathcal{L}$ puede ser aplicada y constantes c_1 y c_2 ,

$$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \mathcal{L}[f_1] + c_2 \mathcal{L}[f_2].$$

(ii) Si $u = u(x, t)$ y $\mathcal{L}[u](x, s) = U(x, s)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u_t](x, s) &= sU(x, s) - u(x, 0), \\ \mathcal{L}[u_{tt}](x, s) &= s^2U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0).\end{aligned}$$

(iii) Para el mismo tipo de función u , la diferenciación con respecto a x y la transformación de Laplace conmutan, es decir

$$\mathcal{L}[u_x](x, s) = (\mathcal{L}[u])_x(x, s) = U'(x, s).$$

(iv) Utilizando una definición de la convolución $f * g$ de dos funciones f y g que es ligeramente diferente de la Definición 8.1, a saber:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = (g * f)(t), \quad (9.2)$$

entonces

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g].$$

Comentario 9.4.

- (i) Tal como en el caso de las transformaciones de Fourier, en general $\mathcal{L}[fg] \neq \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$.
- (ii) Claramente, $\mathcal{L}^{-1}$ también es lineal.

El Cuadro 9.1 lista las transformadas de Laplace de algunas funciones frecuentemente usadas.

Ejemplo 9.2. Para hallar la transformada inversa de Laplace de la función $1/(s(s^2 + 1))$, obtenemos a partir del Cuadro 9.1 que $1/s$ es la transformada de función constante 1 y que $1/(s^2 + 1)$ es la transformada de la función $\sin t$. De acuerdo al ítem (iv) del Teorema 9.2 podemos escribir simbólicamente

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} \frac{1}{s^2 + 1} = \mathcal{L}[1]\mathcal{L}[\sin t] = \mathcal{L}[1 * (\sin t)],$$

luego

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 + 1)}\right] = 1 * (\sin t) = \int_0^t \sin \tau d\tau = 1 - \cos t.$$

Alternativamente, podemos particionar la función dada en fracciones parciales como

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}$$

y luego utilizar la linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$ para llegar al mismo resultado.

Ejemplo 9.3. Efectivamente, la forma más simple de encontrar la transformada inversa de Laplace de $(3s^2 + 2s + 12)/(s(s^2 + 4))$ por computación directa consiste en utilizar la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{3s^2 + 2s + 12}{s(s^2 + 4)} = \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2 + 2^2}$$

CUADRO 9.1. Transformadas de Laplace de algunas funciones elementales

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f](s)$
(1) $f^{(n)}(t)$ (n -ésima derivada)	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots$ $\dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
(2) $H(t-a)f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
(3) $e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
(4) $(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$
(5) 1	$\frac{1}{s} \quad (s > 0)$
(6) $t^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0)$
(7) e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad (s > a)$
(8) $\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2} \quad (s > 0)$
(9) $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2} \quad (s > 0)$
(10) $\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \quad (s > a)$
(11) $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \quad (s > a)$
(12) $\delta(t-a) \quad (a \geq 0)$	e^{-as}
(13) $e^{a^2 t} \text{erfc}(a\sqrt{t}) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{s + a\sqrt{s}}$
(14) $\frac{a}{2\sqrt{\pi}} t^{-3/2} e^{-a^2/(4t)} \quad (a > 0)$	$e^{-a\sqrt{s}}$
(15) $\text{erfc} \frac{a}{2\sqrt{t}} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$
(16) $-a\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-a^2/(4t)} + \left(\frac{a^2}{2} + t\right) \text{erfc} \frac{a}{2\sqrt{t}} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{s^2} e^{-a\sqrt{s}}$

y luego aplicar las fórmulas (5) y (8) del Cuadro 9.1 para obtener

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s^2 + 2s + 12}{s(s^2 + 4)} \right] = 3 + \text{sen}(2t).$$

El siguiente teorema proporciona dos propiedades útiles adicionales de la transformación de Laplace.

Teorema 9.3. Si $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$, entonces

- (i) $\mathcal{L}[e^{at}f](s) = F(s-a)$, $s > a = \text{const.}$;
- (ii) $\mathcal{L}[H(t-b)f(t-b)](s) = e^{-bs}F(s)$, $b = \text{const.} > 0$.

Ejemplo 9.4. Como

$$\mathcal{L}[\sin(2t)] = \frac{2}{s^2 + 4}, \quad \mathcal{L}[\cos(3t)] = \frac{s}{s^2 + 9}, \quad \mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3},$$

a partir del Teorema 9.3 concluimos que

$$\mathcal{L}[e^{-t}\sin(2t) + e^{5t}\cos(3t) - 2(t-2)^2H(t-2)] = \frac{2}{(s+1)^2 + 4} + \frac{s-5}{(s-5)^2 + 9} - \frac{4}{s^3}e^{-2s}.$$

Ejemplo 9.5. Análogamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2-2s+10} - \frac{1}{s^2+4}e^{-s}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+3^2} - \frac{1}{s^2+2^2}e^{-s}\right] \\ &= e^t \cos(3t) + \frac{1}{2}H(t-1)\sin(2(t-1)). \end{aligned}$$

9.2. Aplicaciones

9.2.1. El problema de la señal para la ecuación de la onda. Consideremos una cuerda elástica muy larga con peso despreciable inicialmente en reposo donde el desplazamiento vertical (la señal) es prescrito en el extremo cercano y la actividad mecánica disminuye considerablemente hacia el extremo lejano. Tal problema es modelado matemáticamente a través de un PVIF de la forma

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= f(t), \quad t > 0, \\ u(x, t) &\text{ acotada cuando } x \rightarrow \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Introduciendo la notación

$$\mathcal{L}[u](x, s) = U(x, s), \quad \mathcal{L}[f](s) = F(s),$$

aplicando $\mathcal{L}$ a la EDP y las condiciones de borde y utilizando las propiedades de $\mathcal{L}$ del Teorema 9.2 obtenemos el problema transformado

$$s^2 U(x, s) = c^2 U''(x, s), \quad x > 0; \quad U(0, s) = F(s), \quad U(x, s) \text{ acotada cuando } x \rightarrow \infty.$$

Re-escribiendo la EDO en la forma

$$U(x, s) - (s/c)^2 U''(x, s) = 0$$

obtenemos la solución general

$$U(x, s) = C_1(s)e^{(s/c)x} + C_2(s)e^{-(s/c)x},$$

donde $C_1(s)$ y $C_2(s)$ son funciones arbitrarias del parámetro de transformación. Como $U(x, s)$ debe ser acotada cuando $x \rightarrow \infty$, se debe tener $C_1(s) = 0$. La condición de borde entrega $C_2(s) = F(s)$, luego

$$U(x, s) = F(s)e^{-(s/c)x} = F(s)e^{-(x/c)s}.$$

De acuerdo al ítem (ii) del Teorema 9.3, la solución del PVIF original es

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)e^{-(x/c)s}] = H(t - x/c)f(t - x/c) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < t < x/c, \\ f(t - x/c) & \text{para } t \geq x/c. \end{cases}$$

Esta solución también puede ser expresada como

$$u(x, t) = \begin{cases} f(t - x/c) & \text{para } x \leq ct, \\ 0 & \text{para } x > ct. \end{cases} \quad (9.3)$$

Observamos que $u(x, t)$ es constante cuando $x - ct = \text{const}$. Físicamente esto significa que la solución es una onda de forma fija (determinada por la función f de la condición de borde) que viaja a la velocidad $dx/dt = c$. La fórmula (9.3) indica que al instante t la señal que emana desde $x = 0$ no ha llegado a los puntos $x > ct$, los cuales aún se encuentran en reposo.

Comentario 9.5. *El mismo resultado de inversión también puede ser obtenido mediante convolución. Como de acuerdo a la fórmula (12) del Cuadro 9.1,*

$$e^{-(x/c)s} = \mathcal{L}[f * \delta(t - x/c)],$$

podemos escribir

$$U(x, s) = F(s)e^{-(x/c)s} = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[\delta(t - x/c)] = \mathcal{L}[f * \delta(t - x/c)],$$

lo que implica que

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[U](x, t) = f * \delta(t - x/c) = \int_0^t f(\tau)\delta(t - x/c - \tau) d\tau.$$

Si $t < x/c$, entonces $t - x/c - \tau < 0$ para $0 \leq \tau \leq t$, por lo tanto $\delta(t - x/c - \tau) = 0$; luego $u(x, t) = 0$ para $t < x/c$ o equivalentemente, para $x > ct$. Si $t > x/c$, entonces $t - x/c - \tau = 0$ en $0 < \tau = t - x/c < t$, luego en virtud de (9.1), para $x < ct$,

$$u(x, t) = \int_0^t f(\tau)\delta(t - x/c - \tau) d\tau = \int_0^\infty f(\tau)\delta(t - x/c - \tau) d\tau = f(t - x/c).$$

Este resultado es el mismo que (9.3).

9.2.2. Conducción del calor en una barra semi-infinita. Consideremos una barra muy larga sin fuentes con el extremo cercano mantenido al aire libre con temperatura cero, con actividad térmica despreciable en el extremo lejano, y una distribución inicial de la temperatura constante. La conducción del calor en esta barra es modelada por el PVIF

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), & x > 0, & \quad t > 0, \\ u_x(0, t) - u(0, t) &= 0, & t > 0, \\ u(x, t) &\text{acotada cuando } x \rightarrow \infty, & t > 0, \end{aligned}$$

$$u(x, 0) = u_0 = \text{const.}, \quad x > 0.$$

Sea $\mathcal{L}[u](x, s) = U(x, s)$. Aplicando $\mathcal{L}$ a la EDP y las condiciones de borde llegamos al problema transformado

$$\begin{aligned} U''(x, s) - sU(x, s) + u_0 &= 0, \quad x > 0, \\ U'(0, s) - U(0, s) &= 0, \quad U(x, s) \text{ acotada cuando } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación es

$$U(x, s) = C_1(s)e^{\sqrt{s}x} + C_2(s)e^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{s}u_0,$$

donde $C_1(s)$ y $C_2(s)$ son funciones arbitrarias del parámetro de transformación. Como U debe ser acotada cuando $x \rightarrow \infty$, concluimos que $C_1 \equiv 0$. Luego, diferenciando U y utilizando la condición de borde en $x = 0$ vemos que

$$-C_2(s)\sqrt{s} - C_2(s) - \frac{1}{s}u_0 = 0,$$

lo que implica que

$$C_2(s) = -\frac{u_0}{s(\sqrt{s} + 1)};$$

por lo tanto

$$U(x, s) = u_0 \left(-\frac{1}{s(\sqrt{s} + 1)} e^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{s} \right).$$

Después de algunas manipulaciones (y utilizando una tabla de transformadas de Laplace más completa que el Cuadro 9.1) se puede demostrar que la solución del PVIF original viene dada por

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[U](x, t) = u_0 \left(1 - \text{erfc} \frac{x}{2\sqrt{t}} - \text{erfc} \left(\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) e^{x+t} \right).$$

Otros PVIF para una barra semi-infinita pueden ser resueltos por el mismo método.

Ejemplo 9.6. *Consideremos el PVIF*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + \text{sen } x, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 2t - 1, \quad t > 0, \\ u(x, t) &\text{ acotada cuando } x \rightarrow \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 1, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{L}[u](x, s) = U(x, s)$. Aplicando $\mathcal{L}$ a la EDP y las condiciones de borde llegamos al problema transformado

$$\begin{aligned} U''(x, s) - sU(x, s) &= -1 - \frac{1}{s} \text{sen } x, \quad x > 0, \\ U(0, s) &= \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s}, \quad U(x, s) \text{ acotada cuando } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación, escrita como suma de la función complementaria y una integral particular, es

$$U(x, s) = C_1(s)e^{\sqrt{s}x} + C_2(s)e^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s(s+1)} \operatorname{sen} x.$$

Como U debe ser acotada cuando $x \rightarrow \infty$, concluimos que $C_1 \equiv 0$. Luego, utilizando la condición de borde vemos que

$$C_2(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s},$$

lo que en virtud de

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

implica que

$$U(x, s) = \left(\frac{2}{s^2} - \frac{2}{s} \right) e^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{s} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) \operatorname{sen} x.$$

A raíz de las fórmulas (5)–(7), (15), y (16) del Cuadro 9.1) obtenemos que la solución del PVIF original viene dada por

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[U](x, t) = -2x\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-x^2/(4t)} + (x^2 + 2t - 2) \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{t}} + 1 + (1 - e^{-t}) \operatorname{sen} x.$$

9.2.3. Barra finita con temperatura prescrita en la frontera. El PVIF

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &= w_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ w(0, t) &= 0, \quad w(1, t) = 1, \quad t > 0, \\ w(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

es de un tipo que ya hemos conocido. La solución de equilibrio en este caso, calculada tal como en la Sección 6.1, es $w_\infty(x) = x$. Utilizando esta solución podemos reducir este problema a un problema similar donde ambas condiciones de borde son homogéneas y que por lo tanto puede ser resuelto mediante el método de separación de variables. Combinando todos los resultados obtenemos

$$w(x, t) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}. \quad (9.4)$$

Este mismo PVIF también puede ser resuelto mediante la transformación de Laplace con respecto a t . Si escribimos $\mathcal{L}[w](x, s) = W(x, s)$, entonces a partir de la EDP y las condiciones de borde obtenemos que W es la solución del PVF

$$W''(x, s) - sW(x, s) = 0, \quad 0 < x < 1; \quad W(0, s) = 0, \quad W(1, s) = \frac{1}{s}.$$

La solución general del problema transformado puede ser escrita en la forma

$$W(x, s) = C_1(s) \cosh(\sqrt{s}x) + C_2(s) \operatorname{senh}(\sqrt{s}x)$$

(ver Comentario 1.1), donde las funciones $C_1(s)$ y $C_2(s)$ deben ser determinadas desde las condiciones de borde. Aplicando estas condiciones obtenemos

$$C_1 \equiv 0, \quad C_2(s) \sinh \sqrt{s} = \frac{1}{s},$$

lo que implica que

$$C_2(s) = \frac{1}{s \sinh \sqrt{s}},$$

luego

$$W(x, s) = \frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{s \sinh \sqrt{s}}.$$

Utilizando la transformación inversa y comparando con (9.4) obtenemos

$$w(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{\sinh \sqrt{s}} \right] = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}.$$

Consideremos ahora el PVIF más general

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = f(t), \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

y sea $\mathcal{L}[u](x, s) = U(x, s)$ y $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$. Aplicando $\mathcal{L}$ a la EDP y las condiciones de borde obtenemos

$$U''(x, s) - sU(x, s) = 0, \quad 0 < x < 1; \quad U(0, s) = 0, \quad U(1, s) = F(s).$$

Procediendo como arriba obtenemos

$$U(x, s) = F(s) \frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{\sinh \sqrt{s}} = F(s) \left(s \left(\frac{1}{s} \frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{\sinh \sqrt{s}} \right) \right) = F(s) (sW(x, s)). \quad (9.5)$$

Como $w(x, 0) = 0$ en el PVIF para w obtenemos

$$\mathcal{L}[w_t](x, s) = sW(x, s) - w(x, 0) = sW(x, s),$$

por lo tanto, en virtud de (9.5) e ítem (iv) del Teorema 9.2,

$$\mathcal{L}[u] = U = F(sW) = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[w_t] = \mathcal{L}[f * w_t].$$

Utilizando (9.2) e integrando por partes obtenemos ahora

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (f * w_t)(x, t) = \int_0^t f(t - \tau) w_\tau \, d\tau = [f(t - \tau) w(x, \tau)]_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t w(x, \tau) f'(t - \tau) \, d\tau \\ &= f(0) w(x, t) - f(t) w(x, 0) + \int_0^t w(x, t - \tau) f'(\tau) \, d\tau \\ &= \int_0^t w(x, t - \tau) f'(\tau) \, d\tau + f(0) w(x, t), \end{aligned}$$

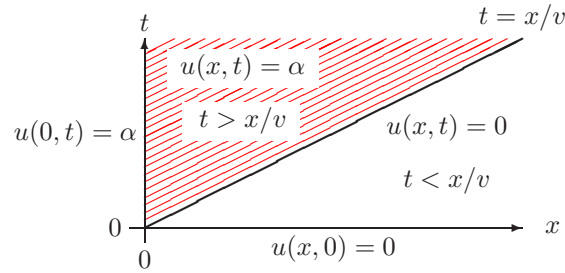


FIGURA 9.1. Ilustración de la solución del PIVF para convección.

donde utilizamos la condición $w(x, 0) = 0$ y la conmutatividad de la operación de convolución. Este resultado muestra como la solución de un problema con condiciones de borde más generales a veces puede ser obtenida a partir de la solución de un problema con condiciones más simples.

Comentario 9.6. Si reemplazamos la condición de borde $w(1, t) = 1$ por $w(1, t) = \delta(t)$, entonces la fórmula arriba asume la forma

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

9.2.4. Problemas de convección-difusión. Supongamos que se esta echando una sustancia química a una tasa constante a un río largo, angosto y limpio a una tasa constante, y supongamos que el río fluye a velocidad constante. Entonces la concentración $u = u(x, t)$ de la sustancia a una distancia x “aguas abajo” en el instante t es la solución del PIVF

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \sigma u_{xx}(x, t) - v u_x(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= \alpha = \text{const.}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad x > 0, \end{aligned}$$

donde σ es el coeficiente de difusión, $v = \text{const.} > 0$ es la velocidad del río, la constante $\alpha = \text{const.} > 0$ es relacionada a la tasa de descarga de la sustancia, y el segundo término del lado derecho de la EDP modela el efecto de convección del flujo del agua sobre la sustancia. Si el río es lento, entonces el término de convección es mucho más pequeño que el término de difusión y la EDP asume la forma aproximada

$$u_t(x, t) = \sigma u_{xx}(x, t) \quad x > 0, \quad t > 0,$$

la cual es la ecuación de difusión. Por otro lado, si el río es rápido, entonces la aproximación viene dada por la ecuación de convección

$$u_t(x, t) = -v u_x(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0.$$

Como ya hemos estudiado la ecuación de difusión (la ecuación del calor), nos concentraremos ahora en los casos de convección y combinados.

(i) El PVIF para convección pura es

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= -vu_x(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= \alpha, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{L}[u](x, s) = U(x, s)$. Aplicando $\mathcal{L}$ a la EDP y las condiciones de borde obtenemos

$$vU'(x, s) + sU(x, s) = 0, \quad x > 0; \quad U(0, s) = \frac{\alpha}{s}$$

con la solución

$$U(x, s) = \frac{\alpha}{s} e^{-(s/v)x} = \frac{\alpha}{s} e^{-(x/v)s}.$$

Como $\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}/s] = \mathcal{H}(t - a)$, ponemos $a = x/v$ para encontrar la siguiente solución del problema original:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}[U](x, t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{s} e^{-(x/v)s}\right] \\ &= \alpha H(t - x/v) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < x/v, \\ \alpha & \text{for } t \geq x/v. \end{cases} \end{aligned}$$

De acuerdo a lo anterior, la sustancia alcanza una posición fija x en el instante $t = x/v$; después de eso, la concentración de la sustancia en x permanece constante (igual a la concentración de la sustancia en el punto de descarga en el río). La recta $t = x/v$ en el plano (x, t) es el frente de onda avanzando de la sustancia (ver Figura 9.1).

(ii) Consideremos ahora un río muy largo suponiendo que la sustancia ya se encuentra distribuida uniformemente en él desde la fuente hasta el punto de observación $x = 0$. Supongamos que ambos efectos de convección y difusión sean significativos. Este problema mixto de convección-difusión en un medio uni-dimensional infinito es modelado por el PVI

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \sigma u_{xx}(x, t) - vu_x(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, t), u_x(x, t) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \pm\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 1 - H(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Ya conocemos dos métodos posibles para resolver este problema: podemos aplicar la transformación de Laplace con respecto a t o la transformación (completa) de Fourier con respecto a x . A raíz de la discusión del ítem (i) arriba queremos proponer un tercer método, el cual consiste en cambiar la coordenada x conectándola al frente de onda mediante la combinación

$$\xi = x - vt. \tag{9.6}$$

Claramente, $\xi = 0$ significa que el punto (x, t) pertenece al frente de onda, $\xi > 0$ significa que (x, t) está delante del frente de onda, y $\xi < 0$ significa que (x, t) está detrás del frente de onda. También escribimos

$$u(x, t) = u(\xi + vt, t) = w(\xi, t),$$

luego de acuerdo a la regla de la cadena,

$$u_t = w_\xi \xi_t + w_t = -vw_\xi + w_t, \quad u_x = w_\xi \xi_x = w_\xi, \quad u_{xx} = (w_\xi)_\xi \xi_x = w_{\xi\xi}.$$

Como $t = 0$ entrega $x = \xi$, el PVI arriba se convierte en

$$\begin{aligned} w_t(\xi, t) &= \sigma w_{\xi\xi}(\xi, t), \quad -\infty < \xi < \infty, \quad t > 0, \\ w(\xi, t), w_\xi(\xi, t) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } \xi \rightarrow \pm\infty, \quad t > 0, \\ w(\xi, 0) &= 1 - H(\xi), \quad -\infty < \xi < \infty. \end{aligned}$$

Este problema ya lo resolvimos mediante la transformación de Fourier (ver Sección 8.1). Su solución es

$$\begin{aligned} w(\xi, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma t}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - H(y)) e^{-(\xi-y)^2/(4\sigma t)} dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma t}} \int_{-\infty}^0 e^{-(\xi-y)^2/(4\sigma t)} dy. \end{aligned}$$

Luego, utilizando (9.6), obtenemos la siguiente solución del PVI en términos de las variables originales x y t :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma t}} \int_{-\infty}^0 e^{-(x-vt-y)^2/(4\sigma t)} dy.$$

9.2.5. Línea de transmisión con pérdidas. Problemas de este tipo también pueden ser tratados mediante el método de la transformación de Laplace.

Ejemplo 9.7. Consideremos el PVIF

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) + 4u_t(x, t) + 4u(x, t) &= u_{xx}(x, t) - 1, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(x, t) \text{ acotada cuando } x \rightarrow \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 1, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Escribiendo, como siempre, $\mathcal{L}[u](x, s) = U(x, s)$ y aplicando la transformación de Laplace a la EDP y las condiciones de borde, obtenemos el problema EDO

$$\begin{aligned} U''(x, s) - (s+2)^2 U(x, s) &= \frac{1-4s-s^2}{s}, \quad x > 0, \\ U(0, s) &= 0, \quad U(x, s) \text{ acotada cuando } x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

con la solución general

$$U(x, s) = C_1(s)e^{(s+2)x} + C_2(s)e^{-(s+2)x} + \frac{s^2 + 4s - 1}{s(s+2)^2}.$$

El requerimiento de acotación implica que $C_1 \equiv 0$, y a partir de la condición de borde,

$$U(x, s) = \frac{s^2 + 4s - 1}{s(s+2)^2} (1 - e^{-(s+2)x}).$$

Esto lo podemos escribir también en la forma

$$U(x, s) = F(s) - F(s)e^{-sx}e^{-2x}, \tag{9.7}$$

donde, utilizando fracciones parciales,

$$F(s) = \frac{s^2 + 4s - 1}{s(s+2)^2} = -\frac{1}{4s} + \frac{5}{4(s+2)} + \frac{5}{2(s+2)^2}.$$

A partir de las fórmulas (3) y (5)-(7) del Cuadro 9.1 obtenemos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{-2t} + \frac{5}{2}te^{-2t} = \frac{1}{4}(5(2t+1)e^{-2t} - 1).$$

Aplicando la fórmula (2) del Cuadro 9.1 a (9.7) obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}[U](x, t) = f(t) - f(t-x)H(t-x)e^{-2x} \\ &= \frac{1}{4}(5(2t+1)e^{-2t} - 1) - \frac{1}{4}(5(2t-2x+1)e^{-2t} - e^{-2x})H(t-x). \end{aligned}$$

El método de las funciones de Green

Los tipos de problemas que hemos considerado hasta ahora para las ecuaciones del calor, de la onda, y de Laplace poseen soluciones determinadas únicamente por sus datos (condiciones de frontera, condiciones iniciales, y cualquier término no homogéneo en la ecuación). Es muy natural buscar una fórmula que entregue la solución directamente en términos de los datos. Tales soluciones en forma cerrada son construidas mediante la llamada *función de Green* del problema dado, y son de gran importancia en aplicaciones prácticas.

10.1. La ecuación del calor

10.1.1. El problema de equilibrio. La distribución de equilibrio de la temperatura en una barra finita con fuentes internas y temperatura cero en sus extremos es modelado por el siguiente PVF (ver Sección 6.1):

$$u''(x) = -\frac{1}{k}q(x), \quad 0 < x < L; \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0. \quad (10.1)$$

(Por conveniencia omitimos el índice ∞ para denotar la solución de equilibrio, pero mantenemos el factor $-1/k$ porque más adelante compararemos las soluciones de los problemas de equilibrio y transientes.) Si tenemos solamente una fuente unitaria localizada en ξ , $0 < \xi < L$, entonces $q(x) = \delta(x - \xi)$ y la solución $G(x, \xi)$ del problema dado arriba satisface

$$G_{xx}(x, \xi) = -\frac{1}{k}\delta(x - \xi), \quad 0 < x < L; \quad G(0, \xi) = 0, \quad G(L, \xi) = 0. \quad (10.2)$$

La función $G(x, \xi)$ puede ser calculada explícitamente. Como $H_x(x - \xi) = \delta(x - \xi)$ (ver ítem (ii) del Comentario 9.2), a partir de (10.2) obtenemos

$$G_x(x, \xi) = -\frac{1}{k}H(x - \xi) + C_1(\xi) = \begin{cases} C_1(\xi) & \text{para } x < \xi, \\ -\frac{1}{k} + C_1(\xi) & \text{para } x > \xi, \end{cases}$$

lo que implica que

$$G(x, \xi) = \begin{cases} xC_1(\xi) + C_2(\xi) & \text{para } x < \xi, \\ x\left(C_1(\xi) - \frac{1}{k}\right) + C_3(\xi) & \text{para } x > \xi, \end{cases} \quad (10.3)$$

donde C_1 , C_2 y C_3 son funciones arbitrarias de ξ . Utilizando las condiciones de borde en (10.2) obtenemos

$$C_2 \equiv 0, \quad L\left(C_1(\xi) - \frac{1}{k}\right) + C_3(\xi) = 0,$$

luego $C_3(\xi) = -L(C_1(\xi) - 1/k)$ y (10.3) se convierte en

$$G(x, \xi) = \begin{cases} xC_1(\xi) & \text{para } x < \xi, \\ (x - L)\left(C_1(\xi) - \frac{1}{k}\right) & \text{para } x > \xi. \end{cases} \quad (10.4)$$

Si $G(x, \xi)$ tuviera una discontinuidad de salto (del tipo H) en $x = \xi$, entonces G_x tendría una singularidad del tipo δ en $x = \xi$. Como ésto no es el caso, debemos concluir que $G(x, \xi)$ es continua en $x = \xi$; en otras palabras, $G(\xi-, \xi) = G(\xi+, \xi)$. En virtud de (10.4), esto implica que

$$\xi C_1(\xi) = (\xi - L)\left(C_1(\xi) - \frac{1}{k}\right),$$

por lo tanto $C_1(\xi) = (L - \xi)/(kL)$ y (10.4) implica que

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x}{kL}(L - \xi) & \text{para } x \leq \xi, \\ \frac{\xi}{kL}(L - x) & \text{para } x > \xi. \end{cases} \quad (10.5)$$

Claramente, $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.

Utilizando integración por partes obtenemos que dos funciones suaves u y v sobre $[0, L]$ satisfacen

$$\begin{aligned} \int_0^L (u''v - v''u) dx &= [u'v - v'u]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L (u'v' - v'u') dx \\ &= u'(L)v(L) - v'(L)u(L) - (u'(0)v(0) - v'(0)u(0)). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Esta identidad es conocida como *fórmula de Green*. Ahora, si u es la solución de (10.1) y $v = G$ es la solución de (10.2), entonces el lado derecho en (10.6) se anula y podemos escribir

$$\int_0^L (u(x)\delta(x - \xi) - G(x, \xi)q(x)) dx = 0.$$

En virtud de (9.1), intercambiando x con ξ y recordando que $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ obtenemos

$$u(x) = \int_0^L G(x, \xi)q(\xi) d\xi. \quad (10.7)$$

La función $G(x, \xi)$, llamada la *función de Green* del PVF (10.1), es la temperatura en x debido a la fuente de calor unitaria concentrada en ξ . La fórmula (10.7) muestra la influencia agregada de todas las fuentes $q(\xi)$ en la barra con respecto a la temperatura en x .

Una fórmula de representación similar a (10.7) también puede ser derivada para problemas con condiciones de borde no homogéneas. Si reemplazamos las condiciones de borde en (10.1) por $u(0) = a$ y $u(L) = b$, entonces (10.6) con la misma elección de u y v que arriba se convierte en

$$\int_0^L (u(x)\delta(x - \xi) - G(x, \xi)q(x)) dx = -k[u(x)G_x(x, \xi)]_{x=0}^{x=L},$$

luego

$$u(x) = \int_0^L G(x, \xi) q(\xi) d\xi - k(bG_\xi(x, L) - aG_\xi(x, 0)).$$

En virtud de (10.5),

$$G_\xi(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{x}{kL} & \text{para } x \leq \xi, \\ -\frac{x-L}{kL} & \text{para } x > \xi, \end{cases}$$

por lo tanto la fórmula de representación deseada es

$$u(x) = \int_0^L G(x, \xi) q(\xi) d\xi + b\frac{x}{L} + a\left(1 - \frac{x}{L}\right). \quad (10.8)$$

Ejemplo 10.1. Para calcular la solución estacionaria del PVIF

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + x - 1, & 0 < x < 1, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 2, & u(1, t) &= -1, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

utilizamos (10.8) con $k = 1$, $L = 1$, $a = 2$, $b = -1$, y $q(x) = x - 1$. En virtud de (10.5),

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1 - \xi) & \text{para } x \leq \xi, \\ \xi(1 - x) & \text{para } x > \xi, \end{cases} \quad G_\xi(x, \xi) = \begin{cases} -x & \text{para } x < \xi, \\ 1 - x & \text{para } x > \xi, \end{cases}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(x, \xi) q(\xi) d\xi &= \int_0^x \xi(1 - x)(\xi - 1) d\xi + \int_x^1 x(1 - \xi)(\xi - 1) d\xi \\ &= (1 - x) \int_0^x (\xi^2 - \xi) d\xi - x \int_x^1 (\xi - 1)^2 d\xi = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{bx}{L} + a\left(1 - \frac{x}{L}\right) = -x + 2(1 - x) = 2 - 3x,$$

la solución estacionaria (10.8) del PVIF dada es dada por

$$u(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{10}{3}x + 2.$$

Ejemplo 10.2. En el caso del PVIF

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + q(x), & 0 < x < 1, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 1, & u(1, t) &= 3, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

con

$$q(x) = \begin{cases} 2 & \text{para } 0 < x \leq 1/2, \\ -1 & \text{para } 1/2 < x < 1, \end{cases}$$

notamos que la función G es la misma del Ejemplo 10.1, mientras que $a = 1$ y $b = 3$. Dado que las expresiones de q y G cambian en $x = 1/2$ y $x = \xi$, respectivamente, dividimos la computación de la solución de equilibrio (10.8) en dos partes.

- (i) Si $0 < x < 1/2$, el primer término del lado derecho de (10.8) se escribe como suma de tres integrales, una para cada uno de los intervalos $0 < \xi \leq x$, $x < \xi \leq 1/2$, y $1/2 < \xi < 1$. Por lo tanto, a partir de (10.8) obtenemos

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x 2\xi(1-x) d\xi + \int_x^{1/2} 2x(1-\xi) d\xi + \int_{1/2}^1 -x(1-\xi) d\xi + 2x + 1 \\ &= -x^2 + \frac{21}{8}x + 1. \end{aligned}$$

- (ii) Si $1/2 < x < 1$, las tres integrales son sobre cada uno de los intervalos $0 < \xi \leq 1/2$, $1/2 < \xi \leq x$, y $x < \xi < 1$. Por lo tanto, a partir de (10.8) obtenemos ahora

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^{1/2} 2\xi(1-x) d\xi + \int_{1/2}^x -\xi(1-x) d\xi + \int_x^1 -x(1-\xi) d\xi + 2x + 1 \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{8}x + \frac{11}{8}. \end{aligned}$$

Se puede verificar fácilmente que

$$u\left(\frac{1}{2}-\right) = u\left(\frac{1}{2}+\right) = \frac{33}{16}, \quad u'\left(\frac{1}{2}-\right) = u'\left(\frac{1}{2}+\right) = \frac{13}{8}$$

pero que

$$u''\left(\frac{1}{2}-\right) = -2 \neq u''\left(\frac{1}{2}+\right) = 1,$$

lo que reconfirma que tal como se esperaba, la discontinuidad de q en $x = 1/2$ ha reducido la suavidad de la solución.

Comentario 10.1. Comentamos que la función de Green puede ser expandida en una serie de Fourier doble. Considerando las funciones propias del problema de Sturm-Liouville asociado con (10.1) (ver Sección 5.1), la continuidad de G , y la simetría $G(x, \xi) = G(\xi, x)$, es razonable buscar una expansión en series de la forma

$$G(x, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \sin \frac{m\pi \xi}{L}. \quad (10.9)$$

Diferenciando (10.9) término por término con respecto a x e insertando el resultado en la EDO en (10.2) obtenemos

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 b_{mn} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \sin \frac{m\pi \xi}{L} = \frac{1}{k} \delta(x - \xi).$$

Multiplicando esta identidad por $\sin(p\pi x/L)$, $p \in \mathbb{N}$, integrando sobre $[0, L]$, y utilizando (2.5) y (9.1) obtenemos

$$\left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 \frac{kL}{2} \sum_{m=1}^{\infty} b_{mp} \sin \frac{m\pi x}{L} = \sin \frac{p\pi x}{L}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Ahora el ítem (ii) del Teorema 3.3 implica que los únicos coeficientes diferentes de cero son $b_{pp} = 2L/(kp^2\pi^2)$, luego la serie (10.9) asume la forma

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{kn^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi \xi}{L}.$$

10.1.2. El problema transiente. Una barra finita con fuentes internas y temperatura cero en sus extremos es modelada por el PVIF

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= ku_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

(De acuerdo a los argumentos presentados en el Capítulo 6, podemos considerar condiciones de borde homogéneas sin pérdida de generalidad.) Este problema puede ser resuelto mediante el método de expansión en funciones propias (ver Sección 7.1), por lo tanto supongamos que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

donde

$$q_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L q(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (10.10)$$

Reemplazando estas series en la EDP obtenemos por argumentos estándar que los coeficientes u_n , $n \in \mathbb{N}$ deben satisfacer

$$u'_n(t) + k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 u_n(t) = q_n(t), \quad t > 0; \quad u_n(0) = f_n.$$

Este problema puede ser resuelto, por ejemplo, mediante el factor integrante

$$\exp\left(\int k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 dt\right) = e^{k(n\pi/L)^2 t}.$$

Por lo tanto, considerando las condiciones iniciales para u_n ,

$$\begin{aligned} u_n(t) &= e^{-k(n\pi/L)^2 t} \left(\int_0^t q_n(\tau) e^{k(n\pi/L)^2 \tau} d\tau + C \right) \\ &= f_n e^{-k(n\pi/L)^2 t} + e^{-k(n\pi/L)^2 t} \int_0^t q_n(\tau) e^{k(n\pi/L)^2 \tau} d\tau, \end{aligned}$$

luego en virtud de (10.10),

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n e^{-k(n\pi/L)^2 t} + e^{-k(n\pi/L)^2 t} \int_0^t q_n(\tau) e^{k(n\pi/L)^2 \tau} d\tau \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{L} \int_0^L q(\xi, \tau) \operatorname{sen} \frac{n\pi \xi}{L} d\xi \right) e^{-k(n\pi/L)^2 t} \right. \\
&\quad \left. + e^{-k(n\pi/L)^2 t} \int_0^t \left(\frac{2}{L} \int_0^L q(\xi, \tau) \operatorname{sen} \frac{n\pi \xi}{L} d\xi \right) e^{k(n\pi/L)^2 \tau} d\tau \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \\
&= \int_0^L f(\xi) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi \xi}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \right) d\xi \\
&\quad + \int_0^L \int_0^t q(\xi, \tau) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi \xi}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 (t-\tau)} \right) d\tau d\xi.
\end{aligned}$$

Definiendo la función de Green de este problema por

$$G(x, t; \xi, \tau) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi \xi}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 (t-\tau)}, \quad \tau < t, \quad (10.11)$$

podemos escribir la solución del PVIF en la forma

$$u(x, t) = \int_0^L G(x, t; \xi, 0) f(\xi) d\xi + \int_0^L \int_0^t G(x, t; \xi, \tau) q(\xi, \tau) d\tau d\xi. \quad (10.12)$$

El primer término en esta fórmula describe la influencia de la temperatura inicial en la barra a la temperatura siguiente en cualquier punto x y cualquier instante t . El segundo término representa la influencia de todas las fuentes en la barra en todos los tiempos $0 < \tau < t$ a la temperatura en x en el instante t . Esto expresa lo que es conocido como *principio de causalidad*.

Ejemplo 10.3. Queremos utilizar (10.11) y (10.12) para determinar la solución del PVIF

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + t(x-1), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\
u(x, 0) &= x, \quad 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

Aquí $k = 1$, $L = 1$, $q(x, t) = t(x-1)$, y $f(x) = x$, luego

$$G(x, t; \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(n\pi \xi) e^{-n^2 \pi^2 (t-\tau)}, \quad \tau < t;$$

por lo tanto,

$$u(x, t) = \int_0^1 G(x, t; \xi, 0) \xi d\xi + \int_0^1 \int_0^t G(x, t; \xi, \tau) \tau(\xi-1) d\tau d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{sen}(n\pi x) \left(\int_0^1 \xi \operatorname{sen}(n\pi \xi) d\xi \right) e^{-n^2 \pi^2 t} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{sen}(n\pi x) \left(\int_0^1 (\xi - 1) \operatorname{sen}(n\pi \xi) d\xi \right) \left(\int_0^t \tau e^{-n^2 \pi^2 (t-\tau)} d\tau \right).
\end{aligned}$$

Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \xi \operatorname{sen}(n\pi \xi) d\xi &= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad \int_0^1 (\xi - 1) \operatorname{sen}(n\pi \xi) d\xi = -\frac{1}{n\pi}, \\
\int_0^t \tau e^{-n^2 \pi^2 (t-\tau)} d\tau &= \frac{t}{n^2 \pi^2} - \frac{1 - e^{-n^2 \pi^2 t}}{n^4 \pi^4},
\end{aligned}$$

por lo tanto obtenemos la solución del PVIF en la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left((-1)^{n+1} e^{-n^2 \pi^2 t} - \frac{t}{n^2 \pi^2} + \frac{1 - e^{-n^2 \pi^2 t}}{n^4 \pi^4} \right) \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Comentario 10.2. Las funciones de Green y fórmulas de representación en términos de tales funciones también pueden ser construidas para PVIFs con otros tipos de condiciones de frontera y para PVIFs donde la variable espacial asume valores en un intervalo semi-infinito o infinito (ver, por ejemplo, (8.8)).

10.2. La ecuación de Laplace

La temperatura de equilibrio en una placa delgada, uniforme y rectangular con fuentes independientes del tiempo y temperatura cero en la frontera es la solución del PVIF

$$\begin{aligned}
(\Delta u)(x, y) &= q(x, y), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < K, \\
u(x, 0) &= 0, \quad u(x, K) = 0, \quad 0 < x < L, \\
u(0, y) &= 0, \quad u(L, y) = 0, \quad 0 < y < K.
\end{aligned}$$

Tal como en la Sección 10.1, $G(x, y; \xi, \eta)$ denota el efecto en (x, y) generado por una fuente unitaria localizada en el punto (ξ, η) , $0 < \xi < L$, $0 < \eta < K$. Entonces G es la solución del PVF

$$\begin{aligned}
\Delta(x, y)G(x, y; \xi, \eta) &= \delta(x - \xi, y - \eta), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < K, \\
G(x, 0; \xi, \eta) &= 0, \quad G(x, K; \xi, \eta) = 0, \quad 0 < x < L, \\
G(0, y; \xi, \eta) &= 0, \quad G(L, y; \xi, \eta) = 0, \quad 0 < y < K,
\end{aligned}$$

donde $\delta(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$ y $\Delta(x, y)$ indica que el Laplaciano es aplicado con respecto a las variables x e y . Sea, además, D el rectángulo sobre el cual el problema es formulado, es decir $D = (0, L) \times (0, K)$, y sea ∂D la frontera de D .

Como ∂D es suave a trozos, utilizamos el teorema de divergencia para reconfirmar que para dos funciones suaves u y v ,

$$\begin{aligned}
& \int_D (u\Delta v - v\Delta u) dA \\
&= \int_D (u \operatorname{div} \operatorname{grad} v - v \operatorname{div} \operatorname{grad} u) dA \\
&= \int_D (\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) - (\operatorname{grad} u) \cdot (\operatorname{grad} v) - \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u) + (\operatorname{grad} v) \cdot (\operatorname{grad} u)) dA \\
&= \int_{\partial D} ((u \operatorname{grad} v) \cdot \mathbf{n} - (v \operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{\partial D} (uv_{\mathbf{n}} - vu_{\mathbf{n}}) ds,
\end{aligned} \tag{10.13}$$

donde dA y ds son los elementos de área y longitud de arco, respectivamente, y el índice $\mathbf{n}$ denota la derivada en la dirección del vector normal unitario exterior sobre la frontera ∂D . (Este vector no es definido en los cuatro puntos de esquina, pero esto no influye el resultado.)

La identidad (10.13) es la *fórmula de Green* para funciones de dos variables espaciales. Si u es la solución del PVF dado y la función v es reemplazada por G , entonces debido a las condiciones de borde homogéneas satisfechas tanto por u como G anula el lado derecho de (10.13) y esta fórmula es reducida a

$$\int_D (u(x, y)\delta(x - \xi)\delta(y - \eta) - q(x, y)G(x, y; \xi, \eta)) dA(x, y) = 0,$$

donde la notación $dA(x, y)$ indica que la integración es realizada con respecto a x e y . En virtud de (9.1) esto entrega

$$u(\xi, \eta) = \int_D G(x, y; \xi, \eta)q(x, y) dA(x, y). \tag{10.14}$$

Por otro lado, aplicando (10.13) con $u(x, y)$ reemplazado por $G(x, y; \xi, \eta)$ y $v(x, y)$ reemplazado por $G(x, y; \varrho, \sigma)$ y utilizando (9.1) una vez más llegamos a la simetría

$$G(\xi, \eta; \varrho, \sigma) = G(\varrho, \sigma; \xi, \eta).$$

Luego un intercambio de variables simple muestra que (10.14) se convierte en la fórmula de representación

$$u(x, y) = \int_D G(x, y; \xi, \eta)q(\xi, \eta) dA(\xi, \eta), \tag{10.15}$$

donde $G(x, y; \xi, \eta)$ se llama *función de Green* para el PVF dado. La fórmula (10.15) muestra el efecto de todas las fuentes en D sobre la temperatura en el punto (x, y) .

Comentario 10.3. Para hallar una representación de G como serie de Fourier recordemos que el problema de valores propios bi-dimensional (5.65) asociado a nuestro PVF posee los pares valor propio-función propia

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{K}\right)^2, \quad S_{nm}(x, y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{K}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, es razonable buscar una expansión del tipo

$$G(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}(\xi, \eta) S_{nm}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}(\xi, \eta) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{K}.$$

Si insertamos esta serie en la ecuación satisfecha por G , entonces

$$\begin{aligned} \Delta(x, y)G(x, y; \xi, \eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}(\xi, \eta) (\Delta S_{nm})(x, y) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{nm} c_{nm} S_{nm}(x, y) = \delta(x - \xi) \delta(y - \eta). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $S_{pq}(x, y)$, integrando el resultado sobre D y considerando (9.1) obtenemos

$$c_{pq}(\xi, \eta) = -\frac{4}{LK\lambda_{pq}} S_{pq}(\xi, \eta).$$

De acuerdo a lo anterior la serie de Fourier doble de G es

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{4}{LK} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi\xi/L) \operatorname{sen}(m\pi\eta/K)}{(n\pi/L)^2 + (m\pi/K)^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{K}. \quad (10.16)$$

Ejemplo 10.4. Para calcular la solución del PVF

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= -5\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(2\pi y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u(x, 2) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0, y) &= 0, \quad u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 2, \end{aligned}$$

notamos que aquí $L = 1$, $K = 2$ y $q(x, t) = -5\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(2\pi y)$. Por lo tanto, de acuerdo a (10.16),

$$G(x, y; \xi, \eta) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi\xi) \operatorname{sen}(m\pi\eta/2)}{n^2\pi^2 + m^2\pi^2/4} \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{2}.$$

A partir de (10.15) y (2.5) obtenemos ahora

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^2 \int_0^1 (-2) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \operatorname{sen}(n\pi\xi) \operatorname{sen}(m\pi\eta/2)}{\pi^2(4n^2 + m^2)} \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{2} \\ &\quad \times (-5\pi^2) \operatorname{sen}(\pi\xi) \operatorname{sen}(2\pi\eta) d\xi d\eta \\ &= 40 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + m^2} \left(\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi\xi) \operatorname{sen}(n\pi\xi) d\xi \right) \\ &\quad \times \left(\int_0^2 \operatorname{sen}(2\pi\eta) \operatorname{sen} \frac{m\pi\eta}{2} d\eta \right) \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{2} \\ &= \left(\frac{40}{4 \cdot 1^2 + 4^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(2\pi y) = \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(2\pi y). \end{aligned}$$

10.3. La ecuación de la onda

Las vibraciones de una cuerda infinita pueden ser descritas por el PVI

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, t), u_x(x, t) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \pm\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Si tenemos una fuerza unitaria actuando sobre un punto ξ en el instante $\tau > 0$, entonces su influencia $G(x, t; \xi, \tau)$ sobre la vibración vertical de un punto x en el instante t es la solución del PVI

$$\begin{aligned} G_{tt}(x, t; \xi, \tau) &= c^2 G_{xx}(x, t; \xi, \tau) + \delta(x - \xi, t - \tau), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ G(x, t; \xi, \tau), G_x(x, t; \xi, \tau) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \pm\infty, \quad t > 0, \\ G(x, t; \xi, \tau) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t < \tau, \end{aligned}$$

donde $\delta(x - \xi, t - \tau) = \delta(x - \xi)\delta(t - \tau)$ y la condición inicial refleja la realidad física de que el desplazamiento del punto x no es afectada por la fuerza unitaria en ξ antes de que esta fuerza haya actuado en el instante τ .

Tal como lo hicimos en el Capítulo 8 para el caso del problema de Cauchy para la ecuación del calor, determinamos la función G mediante la transformación completa de Fourier. Primeramente notamos que en virtud de (9.1),

$$\mathcal{F}[\delta(x - \xi)] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) e^{i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega \xi}.$$

Por lo tanto, si escribimos $\mathcal{F}[G](\omega, t; \xi, \tau) = \tilde{G}(\omega, t; \xi, \tau)$ y aplicamos $\mathcal{F}$ a la EDP y las condiciones iniciales satisfechas por G , llegamos al problema transformado

$$\tilde{G}_{tt}(\omega, t; \xi, \tau) + c^2 \omega^2 \tilde{G}(\omega, t; \xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega \xi} \delta(t - \tau), \quad t > 0; \quad \tilde{G}(\omega, t; \xi, \tau) = 0, \quad t < \tau. \quad (10.17)$$

Como $\delta(t - \tau) = 0$ para $t \neq \tau$, la solución de (10.17) es

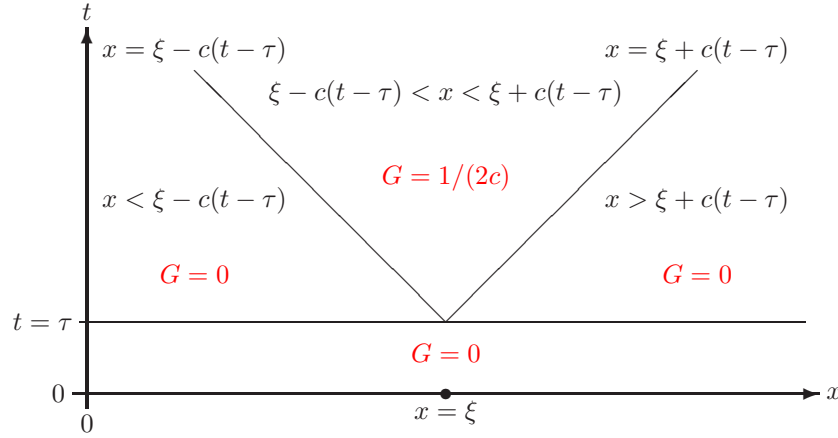
$$\tilde{G}(\omega, t; \xi, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < \tau, \\ C_1 \cos(c\omega(t - \tau)) + C_2 \sin(c\omega(t - \tau)) & \text{para } t > \tau, \end{cases} \quad (10.18)$$

donde C_1 y C_2 son funciones arbitrarias de ω , ξ , y τ . Requiriendo que $\tilde{G}$ sea continua en $t = \tau$ implica $C_1 = 0$. Para determinar C_2 consideremos un intervalo $[\tau_1, \tau_2]$ tal que $0 < \tau_1 < \tau < \tau_2$ e integramos (10.17) con respecto a t sobre este intervalo:

$$\begin{aligned} &\tilde{G}_t(\omega, \tau_2; \xi, \tau) - \tilde{G}_t(\omega, \tau_1; \xi, \tau) + c^2 \omega^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{G}(\omega, t; \xi, \tau) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega \xi} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \delta(t - \tau) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega \xi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega \xi}. \end{aligned}$$

En virtud de (10.18),

$$\tilde{G}_t(\omega, \tau_1; \xi, \tau) = 0; \quad \tilde{G}_t(\omega, \tau_2; \xi, \tau) = c\omega C_2 \cos(c\omega(\tau_2 - \tau)).$$

FIGURA 10.1. Valores de la función $G(x, t; \xi, \tau)$ dada por (10.19).

Considerando ahora $\tau_1, \tau_2 \rightarrow t$, obtenemos que la continuidad de G en $t = \tau$ implica que $C_2 = e^{i\omega\xi}/(\sqrt{2\pi}c\omega)$; por lo tanto

$$\tilde{G}(\omega, t; \xi, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < \tau, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega\xi} \frac{\text{sen}(c\omega(t - \tau))}{\omega} & \text{para } t > \tau. \end{cases}$$

De acuerdo a las fórmulas (12) y (3) del Cuadro 8.1,

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega} \right] = H(a - |x|), \quad \mathcal{F}^{-1}[e^{i\omega a} \mathcal{F}[f](\omega)] = f(x - a),$$

es decir poniendo $a = c(t - \tau)$ y $a = \xi$, respectivamente, obtenemos

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2c} H(c(t - \tau) - |x - \xi|). \quad (10.19)$$

El diagrama de la Figura 10.1 ilustra los valores de G en la parte superior ($t > 0$) del plano (x, t) , calculados a partir de (10.19). Un diagrama similar ilustra que (10.19) también puede ser escrito en la forma

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2c} \left(H((x - \xi) + c(t - \tau)) - H((x - \xi) - c(t - \tau)) \right). \quad (10.20)$$

Un procedimiento análogo a, pero más involucrado que, aquello utilizado en el caso de la ecuación de Laplace también puede ser desarrollado para la ecuación de la onda para obtener una relación de simetría para G y una fórmula de representación para una solución u

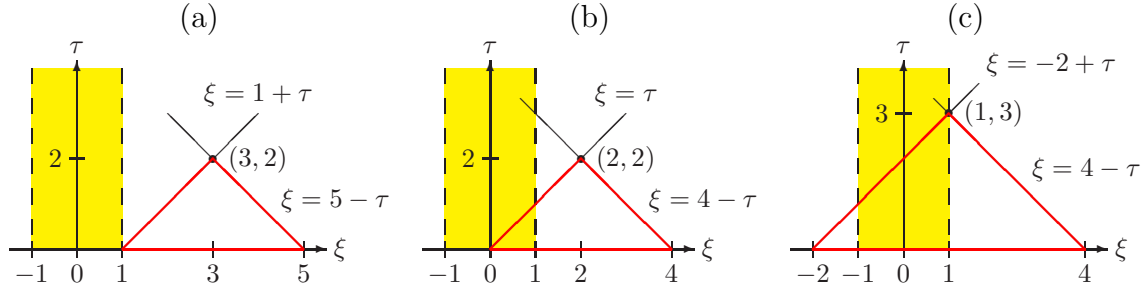


FIGURA 10.2. Ejemplo 10.5: El dominio de integración (triángulo marcado en rojo) para (a) $(x, t) = (3, 2)$, (b) $(x, t) = (2, 2)$ y (c) $(x, t) = (1, 3)$.

en términos de G . Entonces, en su forma más general esta última viene dada por

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \int_0^t \int_a^b G(x, t; \xi, \tau) q(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_a^b (G(x, t; \xi, 0)u(\xi, 0) - G_\tau(x, t; \xi, 0)u(\xi, 0)) d\xi \\
 & - c^2 \int_0^t [G_\xi(x, t; \xi, \tau)u(\xi, \tau) - G(x, t; \xi, \tau)u_\xi(\xi, \tau)]_{\xi=a}^{\xi=b} d\tau,
 \end{aligned} \tag{10.21}$$

donde q es el término de fuerzas exteriores y a y b son los puntos donde las condiciones de borde están prescritas. En este caso, $G(x, t; \xi, \tau)$ se llama *función de Green* para la ecuación de la onda. Si $-\infty < x < \infty$, tal como en nuestro problema, la fórmula correspondiente es obtenida a partir de la fórmula arriba dejando $a \rightarrow -\infty$ y $b \rightarrow \infty$ y tomando en cuenta que $G(x, t; \xi, \tau) = 0$ si $|x|$ es suficientemente grande.

Ejemplo 10.5. *Consideremos el PVI*

$$\begin{aligned}
 u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\
 u(x, t), u_x(x, t) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \pm\infty, \quad t > 0, \\
 u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty,
 \end{aligned}$$

donde

$$q(x, t) = \begin{cases} t & \text{para } -1 < x < 1, t > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A partir de las fórmulas (10.21) y (10.20) con $c = 1$ podemos calcular la solución de este problema como

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, \tau) q(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
 &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (H(x - \xi + t - \tau) - H(x - \xi - t + \tau)) q(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{x+t-\tau} q(\xi, \tau) d\xi d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\tau} q(\xi, \tau) d\xi d\tau,
 \end{aligned}$$

es decir,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Supongamos que queremos evaluar la solución en $(x, t) = (3, 2)$, es decir

$$u(3, 2) = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{1+\tau}^{5-\tau} q(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Para evaluar esta integral, dibujamos las rectas $\xi = 1 + \tau$ y $\xi = 5 - \tau$ en el sistema de coordenadas e identificamos el dominio de integración. Tal como ilustra el diagrama (Figura 10.2 (a)), $q = 0$ dentro del dominio, por lo tanto $u(3, 2) = 0$.

Utilizando el mismo procedimiento y tomando en cuenta la intersección del dominio de integración con la franja semi-infinita donde $q \neq 0$ (ver Figura 10.2 (b)), obtenemos para

$$u(2, 2) = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{\tau}^{4-\tau} q(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

el valor

$$u(2, 2) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau}^1 \tau d\xi d\tau = \frac{1}{2} \int_0^1 [\tau\xi]_{\xi=\tau}^{\xi=1} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^1 \tau(1 - \tau) d\tau = \frac{1}{12}.$$

Finalmente, para calcular

$$u(1, 3) = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{1+\tau}^{5-\tau} q(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

tomamos en cuenta el diagrama de la Figura 10.2 (c) para obtener

$$u(1, 3) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 \tau d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_1^3 \int_{-2+\tau}^1 \tau d\xi d\tau = \frac{13}{6}$$

o alternativamente,

$$u(1, 3) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{\xi+2} \tau d\tau d\xi = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (\xi + 2)^2 d\xi = \frac{13}{6}.$$

Comentario 10.4. En la ausencia de una fuerza externa ($q \equiv 0$) en el PVF general con $-\infty < x < \infty$ la fórmula de representación (10.21) se reduce a

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (G(x, t; \xi, 0)u_{\tau}(\xi, 0) - G_{\tau}(x, t; \xi, 0)u(\xi, 0)) d\xi. \quad (10.22)$$

Esta fórmula puede ser simplificada aún más si utilizamos la forma explícita de G . En virtud de (10.20) y el ítem (ii) del Comentario 9.2, de acuerdo a lo cual $H'(\tau - a) = \delta(\tau - a)$, obtenemos

$$G_{\tau}(x, t; \xi, \tau) = -\frac{1}{2} \left(\delta(x - \xi + c(t - \tau)) + \delta(x - \xi - c(t - \tau)) \right);$$

es decir, de acuerdo a la definición de δ y H (ver Sección 9.1), (10.22) se convierte en

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(x - \xi - ct) + \delta(x - \xi + ct)) f(\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} (H(x - \xi - ct) + H(x - \xi + ct)) g(\xi) \, d\xi \\ & = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) \, d\xi. \end{aligned}$$

Esta solución es la fórmula de d'Alembert, la cual revisitaremos en el Capítulo 12, donde esta fórmula será establecida por otro método.

EDPs lineales de segundo orden en dos variables independientes

Después de estudiar varios procedimientos de solución para las ecuaciones del calor, de la onda, y de Laplace debemos explicar por qué elegimos estos modelos particulares en lugar de otros. En el Capítulo 4 mencionamos que éstas ecuaciones son ejemplos típicos de lo que llamamos ecuaciones parabólicas, hiperbólicas, y elípticas, respectivamente. En este capítulo presentaremos una discusión sistemática de EDPs lineales de segundo orden generales en dos variables independientes y demostraremos como una ecuación de este tipo puede ser reducida a su forma más simple. Veremos que si la ecuación posee coeficientes constantes, su parte dominante—es decir, la suma de los términos que contienen las derivadas del mayor orden con respecto a cada una de las variables—consiste en los mismos términos que una de las tres ecuaciones mencionadas arriba. Esta observación es un buen indicador de la técnica de solución apropiada en cada caso, y del comportamiento esperado de la solución.

11.1. La forma canónica

11.1.1. Clasificación. La forma general de una EDP lineal de segundo orden en dos variables independientes es

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y), \quad (11.1)$$

donde $u = u(x, y)$ es la función incógnita y $A, \dots, G$ son coeficientes dados. (En particular, algunos o todos de estos coeficientes pueden ser constantes.)

Definición 11.1.

- (i) Si $B^2 - 4AC > 0$, entonces la ecuación (11.1) se llama hiperbólica.
- (ii) Si $B^2 - 4AC = 0$, entonces la ecuación (11.1) se llama parabólica.
- (iii) Si $B^2 - 4AC < 0$, entonces la ecuación (11.1) se llama elíptica.

Ejemplo 11.1. Para la ecuación de la onda uni-dimensional

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

tenemos (considerando t en lugar de y)

$$A = -c^2, \quad C = 1, \quad B = D = E = F = G = 0,$$

luego $B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$, por lo tanto la ecuación es hiperbólica en todos los puntos del plano (x, t) .

Ejemplo 11.2. Para la ecuación del calor uni-dimensional

$$u_t - k u_{xx} = 0$$

tenemos (considerando t en lugar de y)

$$A = -k, \quad E = 1, \quad B = C = D = F = G = 0,$$

luego $B^2 - 4AC = 0$, por lo tanto la ecuación es parabólica en todo el plano (x, t) .

Ejemplo 11.3. Para la ecuación de Laplace bi-dimensional

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

tenemos

$$A = 1, \quad C = 1, \quad B = D = E = F = G = 0,$$

luego $B^2 - 4AC = -4 < 0$, por lo tanto la ecuación es elíptica en todo el plano (x, y) .

Ejemplo 11.4. Para la ecuación

$$u_{xx} - \sqrt{y}u_{xy} + xu_{yy} + (2x + y)u_x - 3yu_y + 4u = \sin(x^2 - 2y), \quad y > 0,$$

tenemos

$$A = 1, \quad B = -\sqrt{y}, \quad C = x, \quad D = 2x + y,$$

$$E = -3y, \quad F = 4, \quad G = \sin(x^2 - 2y),$$

luego $B^2 - 4AC = y - 4x$, por lo tanto

- (i) si $y > 4x$, la ecuación es hiperbólica,
- (ii) si $y = 4x$, la ecuación es parabólica,
- (iii) si $y < 4x$, la ecuación es elíptica.

En otras palabras el tipo de esta ecuación en el punto (x, y) depende de la ubicación de este punto en el semiplano $y > 0$.

11.1.2. Reducción a la forma canónica. Introducimos coordenadas nuevas

$$r = r(x, y), \quad s = s(x, y),$$

o equivalentemente,

$$x = x(r, s), \quad y = y(r, s)$$

y escribimos

$$u(x(r, s), y(r, s)) = v(r, s).$$

Mediante la regla de la cadena,

$$u_x = v_r r_x + v_s s_x, \quad u_y = v_r r_y + v_s s_y,$$

luego

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_x)_x = (v_r r_x + v_s s_x)_x = (v_r)_x r_x + v_r (r_x)_x + (v_s)_x s_x + v_s (s_x)_x \\ &= ((v_r)_r r_x + (v_r)_s s_x) r_x + v_r r_{xx} + ((v_s)_r r_x + (v_s)_s s_x) s_x + v_s s_{xx} \\ &= v_{rr} r_x^2 + 2v_{rs} r_x s_x + v_{ss} s_x^2 + v_r r_{xx} + v_s s_{xx} \end{aligned}$$

y análogamente

$$u_{yy} = v_{rr} r_y^2 + 2v_{rs} r_y s_y + v_{ss} s_y^2 + v_r r_{yy} + v_s s_{yy},$$

$$u_{xy} = v_{rr}r_xr_y + v_{rs}(r_xs_y + r_ys_x) + v_{ss}s_xs_y + v_r r_{xy} + v_s s_{xy}.$$

Reemplazando todas las derivadas en (11.1) y agrupando términos similares obtenemos la igualdad nueva

$$\bar{A}(r, s)v_{rr} + \bar{B}(r, s)v_{rs} + \bar{C}(r, s)v_{ss} + \bar{D}(r, s)v_r + \bar{E}(r, s)v_s + \bar{F}(r, s)v = \bar{G}(r, s), \quad (11.2)$$

donde los coeficientes nuevos $\bar{A}, \dots, \bar{G}$ son relacionados a los antiguos $A, \dots, G$ mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} \bar{A} &= Ar_x^2 + Br_xr_y + Cr_y^2, & \bar{B} &= 2Ar_xs_x + B(r_xs_y + r_ys_x) + 2Cr_ys_y, \\ \bar{C} &= As_x^2 + Bs_xs_y + Cs_y^2, & \bar{D} &= Ar_{xx} + Br_{xy} + Cr_{yy} + Dr_x + Er_y, \\ \bar{E} &= As_{xx} + Bs_{xy} + Cs_{yy} + Ds_x + Es_y, & \bar{F} &= F, \quad \bar{G} = G. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Debemos elegir r y s en tal forma que $\bar{A} = \bar{C} = 0$. Como ni $r = r(x, y)$ ni $s = s(x, y)$ puede ser una una constante, por lo menos una de las cantidades r_x y r_y y una de las cantidades s_x y s_y debe ser diferente de cero. Supongamos que $r_y \neq 0$ y $s_y \neq 0$. Igualando la expresión de $\bar{A}$ en (11.3) a cero y dividiendo por r_y^2 llegamos a la ecuación

$$A\left(\frac{r_x}{r_y}\right)^2 + B\frac{r_x}{r_y} + C = 0; \quad (11.4)$$

aplicando un procedimiento similar a la expresión para $\bar{C}$ en (11.3) obtenemos

$$A\left(\frac{s_x}{s_y}\right)^2 + B\frac{s_x}{s_y} + C = 0. \quad (11.5)$$

A partir de (11.4) y (11.5) obtenemos

$$\frac{r_x}{r_y} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad \frac{s_x}{s_y} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (11.6)$$

Ahora es obvio que la naturaleza de las soluciones de (11.6) depende de si la ecuación dada es hiperbólica, parabólica, o elíptica.

11.2. Ecuaciones hiperbólicas

Aquí $B^2 - 4AC > 0$, por lo tanto (11.6) son dos ecuaciones distintas. Consideremos las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (11.7)$$

llamadas *ecuaciones características* para (11.1), y sean $\varphi(x, y) = c_1$, $\psi(x, y) = c_2$, con constantes arbitrarias c_1 y c_2 las familias de sus curvas de solución, llamadas *características*. A lo largo de estas curvas tenemos las respectivas identidades

$$d\varphi + \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0, \quad d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy = 0,$$

lo que entrega

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{dy}{dx} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{dy}{dx} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Concluimos que las funciones

$$r = \varphi(x, y), \quad s = \psi(x, y) \quad (11.8)$$

son soluciones de (11.6); es decir, ellas definen el cambio de variables que genera $\bar{A} = \bar{C} = 0$. Utilizando (11.3) y (11.8) calculamos ahora los coeficientes nuevos $\bar{A}, \dots, \bar{G}$ y escribimos la forma canónica (11.2) como

$$\bar{B}(r, s)v_{rs} + \bar{D}(r, s)v_r + \bar{E}(r, s)v_s + \bar{F}(r, s)v = \bar{G}(r, s). \quad (11.9)$$

Comentario 11.1. *La ecuación hiperbólica posee una forma canónica alternativa. Introduciendo variables nuevas α y β mediante las fórmulas*

$$\alpha = \frac{r+s}{2}, \quad \beta = \frac{r-s}{2}$$

y escribiendo $v(r(\alpha, \beta), s(\alpha, \beta)) = w(\alpha, \beta)$, entonces

$$\begin{aligned} v_r &= w_\alpha \alpha_r + w_\beta \beta_r = \frac{w_\alpha}{2} + \frac{w_\beta}{2}, \quad v_s = w_\alpha \alpha_s + w_\beta \beta_s = \frac{w_\alpha}{2} - \frac{w_\beta}{2}, \\ v_{rs} &= (v_r)_s = \frac{1}{2}((w_\alpha + w_\beta)_\alpha \alpha_s + (w_\alpha + w_\beta)_\beta \beta_s) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\alpha}) - \frac{1}{2}(w_{\alpha\beta} + w_{\beta\beta}) \right) = \frac{w_{\alpha\alpha}}{4} - \frac{w_{\beta\beta}}{4}, \end{aligned}$$

y (11.9) se convierte en

$$\bar{B}(w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta}) + 2(\bar{D} + \bar{E})w_\alpha + 2(\bar{D} - \bar{E})w_\beta + 4\bar{F}w = 4\bar{G}.$$

La ecuación de la onda uni-dimensional $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ puede ser escrita en esta forma con coeficientes nuevos $\bar{D} = \bar{E} = \bar{F} = \bar{G} = 0$ a través de la substitución $\tau = ct$.

Ejemplo 11.5. *Los coeficientes de la EDP*

$$yu_{xx} + 3yu_{xy} + 3u_x = 0, \quad y \neq 0,$$

son $A = y$, $B = 3y$, $C = 0$, $D = 3$, y $E = F = G = 0$. Como $B^2 - 4AC = 9y^2 > 0$, la ecuación es hiperbólica en todos los puntos (x, y) con $y \neq 0$. Las ecuaciones características (11.7) son $y'(x) = 0$ e $y'(x) = 3$ con las soluciones generales respectivas $y = c_1$ e $y = 3x + c_2$, por lo tanto podemos elegir la transformación de coordenadas $r = y$ y $s = y - 3x$, la cual mediante (11.3) implica que $\bar{B} = -9y = -9r$, $\bar{E} = -9$, y $\bar{D} = \bar{F} = \bar{G} = 0$ (ya sabemos que $\bar{A} = \bar{C} = 0$). Reemplazando esto en (11.9) obtenemos la forma canónica

$$rv_{rs} + v_s = 0, \quad v(r, s) = u(x(r, s), y(r, s)).$$

Escribiendo esta ecuación en la forma $r(v_s)_r + v_s = 0$ y utilizando, por ejemplo, el método del factor integrante obtenemos que $v_s(r, s) = C(s)/r$, donde $C(s)$ es una función arbitraria. Utilizando una segunda integración, esta vez con respecto a s , obtenemos $v(r, s) = \psi(r) + \varphi(s)/r$, o en términos de las variables x e y originales,

$$u(x, y) = v(r(x, y), s(x, y)) = \frac{\varphi(y - 3x)}{y} + \psi(y),$$

donde φ y ψ son funciones arbitrarias de una variable.

Ejemplo 11.6. Para la ecuación

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 6u_y = 18x - 9y$$

tenemos

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = -2, \quad D = -3, \quad E = -6, \quad F = 0, \quad G = 18x - 9y.$$

Como $B^2 - 4AC = 9 > 0$, esta EDP es hiperbólica en todos los puntos del plano (x, y) . En virtud de (11.7), las ecuaciones características son $y'(x) = 2$ e $y'(x) = -1$ con las soluciones respectivas $y = 2x + c_1$ e $y = -x + c_2$, donde c_1 y c_2 son constantes. Por lo tanto, la transformación de coordenadas es

$$r = y - 2x, \quad s = y + x.$$

A partir de (11.3) se tiene que $\bar{B} = -9$, $\bar{E} = -9$, $\bar{G} = -9r$, y $\bar{D} = \bar{F} = 0$; por lo tanto, la forma canónica (11.9) de la EDP dada es

$$v_{rs} + v_s = r, \quad v(r, s) = u(x(r, s), y(r, s)),$$

o $(v_s)_r + v_s = r$, lo que entrega $v_s(r, s) = r - 1 + C(s)e^{-r}$, luego

$$v(r, s) = s(r - 1) + \varphi(s)e^{-r} + \psi(t),$$

por lo tanto la solución general de la EDP es

$$u(x, y) = v(r(x, y), s(x, y)) = (x + y)(y - 2x - 1) + \varphi(x + y)e^{2x-y} + \psi(y - 2x),$$

donde φ y ψ son funciones arbitrarias de una variable.

Ejemplo 11.7. Consideremos el siguiente PVI, donde la variable t ha sido reemplazada por y para facilitar el uso de las fórmulas generales ya desarrolladas en este capítulo:

$$2u_{xx} - 5u_{xy} + 2u_{yy} = -36x - 18y, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0,$$

$$u(x, 0) = 4x^3 + 3x, \quad u_y(x, 0) = 12x^2 + 4, \quad -\infty < x < \infty.$$

Aquí

$$A = 2, \quad B = -5, \quad C = 2, \quad D = E = F = 0, \quad G = -36x - 18y,$$

luego $B^2 - 4AC = 9 > 0$, es decir la ecuación es hiperbólica. A partir de (11.7) obtenemos las ecuaciones características

$$y'(x) = -2, \quad y'(x) = -\frac{1}{2}$$

con las respectivas soluciones

$$y = -2x + c_1, \quad y = -\frac{1}{2}x + c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const.},$$

lo cual implica la transformación de coordenadas $r = 2x + y$, $s = x + 2y$. Utilizando (11.3) obtenemos $\bar{B} = -9$, $\bar{D} = \bar{E} = \bar{F} = 0$, y $\bar{G} = -18r$, luego la forma canónica está dada por

$$v_{rs} = 2r, \quad v(r, s) = u(x(r, s), y(r, s))$$

con la solución general

$$v(r, s) = r^2s + \varphi(r) + \psi(s).$$

Por lo tanto la solución general de la EDP dada es

$$u(x, y) = (2x + y)^2(x + 2y) + \varphi(2x + y) + \psi(x + 2y),$$

donde nuevamente φ y ψ son funciones de una variable. Para aplicar las condiciones iniciales diferenciamos u con respecto a y para obtener

$$u_y(x, y) = 2(2x + y)(x + 2y) + 2(2x + y)^2 + \varphi'(2x + y) + 2\psi'(x + 2y),$$

luego insertamos $y = 0$ en u y u_y . Cancelando términos obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\varphi(2x) + \psi(x) = 3x, \quad \varphi'(2x) + 2\psi'(x) = 4.$$

Diferenciando la primera ecuación con respecto a x obtenemos

$$2\varphi'(2x) + \psi'(x) = 3.$$

Combinando esta ecuación con la segunda obtenemos $\psi'(x) = 5/3$, luego

$$\psi(x) = \frac{5}{3}x + c, \quad c = \text{const.}$$

Ahora

$$\varphi(2x) = 3x - \psi(x) = 3x - \frac{5}{3}x - c = \frac{2}{3}(2x) - c,$$

es decir

$$\varphi(x) = \frac{2}{3}x - c.$$

La solución del PVI dado es

$$u(x, y) = (2x + y)^2(x + 2y) + \frac{2}{3}(2x + y) + \frac{5}{3}(x + 2y) = (2x + y)^2(x + 2y) + 3x + 4y.$$

11.3. Ecuaciones parabólicas

Como en este caso $B^2 - 4AC = 0$, a partir de (11.6) observamos que r y s satisfacen la misma EDO, lo que significa que podemos conseguir que sólo una de las cantidades $\bar{A}$ y $\bar{C}$ se anule. Supongamos que $\bar{A} = 0$. Entonces (11.6) se reduce a

$$\frac{r_x}{r_y} = -\frac{B}{2A},$$

lo que implica que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r_x}{r_y} = \frac{B}{2A}. \quad (11.10)$$

La solución general de esta ecuación genera la función $r(x, y)$. Ahora $B^2 - 4AC = 0$ implica que $AC \geq 0$ y $B = 2\sqrt{AC}$. Sin pérdida de generalidad también podemos presuponer que $A, C \geq 0$, luego en virtud de (11.3),

$$\begin{aligned} \bar{B} &= 2Ar_x s_x + B(r_x s_y + r_y s_x) + 2Cr_y s_y \\ &= 2(Ar_x s_x + \sqrt{A}\sqrt{C}(r_x s_y + r_y s_x) + Cr_y s_y) \\ &= 2(\sqrt{A}r_x(\sqrt{A}s_x + \sqrt{C}s_y) + \sqrt{C}r_y(\sqrt{A}s_x + \sqrt{C}s_y)) \end{aligned}$$

$$= 2(\sqrt{A}r_x + \sqrt{C}r_y)(\sqrt{A}s_x + \sqrt{C}s_y).$$

Pero, de acuerdo a (11.10),

$$\frac{r_x}{r_y} = -\frac{B}{2A} = -\frac{2\sqrt{A}\sqrt{C}}{2A} = -\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}},$$

luego $\bar{B} = 0$. Concluimos que s puede ser elegido arbitrariamente, en cualquier forma que no se contradiga con r dado por (11.10) (más precisamente, el jacobiano de la transformación debe ser no nulo). En este caso la forma canónica es

$$\bar{C}(r, s)v_{ss} + \bar{D}(r, s)v_r + \bar{E}(r, s)v_s + \bar{F}(r, s)v = \bar{G}(r, s). \quad (11.11)$$

Comentario 11.2. La ecuación del calor uni-dimensional $u_t - ku_{xx} = 0$ es de la forma (11.11) con $\bar{C} = -k$, $\bar{D} = 1$, y $\bar{E} = \bar{F} = \bar{G} = 0$.

Ejemplo 11.8. Los coeficientes de la EDP

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

son $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = E = F = G = 0$. Como $b^2 - 4AC = 0$, la ecuación es parabólica, y su ecuación característica (11.10) es $y'(x) = 1$ con solución general $y = x + c$, $c = \text{const}$. Por lo tanto, tomamos $r = y - x$; la función s puede ser elegida adecuadamente pero libremente, por ejemplo, $s = y$. Entonces $\bar{C} = 1$ y $\bar{D} = \bar{E} = \bar{F} = \bar{G} = 0$ (ya sabemos que $\bar{A} = \bar{B} = 0$), lo que debido a (11.11) implica la forma canónica $v_{ss} = 0$. Integrando dos veces con respecto a t obtenemos la solución general

$$v(r, s) = s\varphi(r) + \psi(r)$$

o en términos de x e y ,

$$u(x, y) = v(r(x, y), s(x, y)) = y\varphi(y - x) + \psi(y - x),$$

donde φ y ψ son funciones arbitrarias de una variable.

Ejemplo 11.9. Para la ecuación

$$4u_{xx} + 12u_{xy} + 9u_{yy} - 9u = 9$$

tenemos

$$A = 4, \quad B = 12, \quad C = 9, \quad D = E = 0, \quad F = -9, \quad G = 9,$$

luego $B^2 - 4AC = 0$, por lo tanto la EDP es parabólica. En virtud de (11.10) la ecuación característica es $y'(x) = 3/2$ con la solución general $y = (3/2)x + c$ o $2y - 3x = c'$, $c' = \text{const}$. Por lo tanto, podemos escoger $r = 2y - 3x$ y, por ejemplo, $s = y$, como arriba. Entonces $\bar{C} = 9$, $\bar{F} = -9$ y $\bar{G} = 9$. Reemplazando estos valores en (11.11) obtenemos la forma canónica $v_{ss} - v = 1$ con la solución general

$$v(r, s) = \varphi(r) \cosh s + \psi(r) \sinh s - 1,$$

o para la EDP dada,

$$u(x, y) = v(r(x, y), s(x, y)) = \varphi(2y - 3x) \cosh y + \psi(2y - 3x) \sinh y - 1,$$

donde φ y ψ son funciones arbitrarias de una variable.

Ejemplo 11.10. *La EDP*

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + (x+y)u_x = x^2 - 2y, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

posee los coeficientes

$$A = x^2, \quad B = 2xy, \quad C = y^2, \quad D = x + y, \quad E = F = 0, \quad G = x^2 - 2y.$$

Como $B^2 - 4AC = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0$, la ecuación es parabólica y su ecuación característica es $y'(x) = y/x$ con la solución $y = cx$, $c = \text{const.}$, por lo tanto podemos usar la transformación $r = y/x$, $s = y$, bajo la cual los coeficientes nuevos, dados por (11.3), son

$$\bar{C} = s^2, \quad \bar{D} = -r - r^2, \quad \bar{E} = \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = \frac{s^2}{r^2} - 2s.$$

En virtud de (11.11) obtenemos la forma canónica

$$r^2 s^2 v_{ss} - (r^4 + r^3) v_r = s^2 - 2r^2 s, \quad v(r, s) = u(x(r, s), y(r, s)).$$

11.4. Ecuaciones elípticas

El procedimiento en este caso es el mismo que para ecuaciones hiperbólicas, pero como ahora $B^2 - 4AC < 0$, las curvas características son complejas. No obstante, todavía una forma canónica real puede ser obtenida.

Ejemplo 11.11. *Los coeficientes de la EDP*

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + u_x = 0$$

son $A = 1$, $B = 2$, $C = 5$, $D = 1$, $E = F = G = 0$, luego $B^2 - 4AC = -16 < 0$, por lo tanto la ecuación es elíptica. A raíz de (11.7) las ecuaciones características son $y'(x) = 1 - 2i$, $y'(x) = 1 + 2i$, con las soluciones generales respectivas

$$y = (1 - 2i)x + c_1, \quad y = (1 + 2i)x + c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const.}$$

La transformación de coordenadas es

$$r = y - (1 - 2i)x, \quad s = y - (1 + 2i)x.$$

Entonces $\bar{B} = 16$, $\bar{D} = -(1 - 2i)$, $\bar{E} = -(1 + 2i)$, y $\bar{F} = \bar{G} = 0$ (además de $\bar{A} = \bar{C} = 0$ debido a la transformación), es decir obtenemos la forma canónica compleja

$$16v_{rs} - (1 - 2i)v_r - (1 + 2i)v_s = 0, \quad v(r, s) = u(x(r, s), y(r, s)).$$

Aplicando la segunda transformación

$$\alpha = \frac{r + s}{2}, \quad \beta = \frac{r - s}{2i}$$

llegamos fácilmente a la forma canónica nueva (real)

$$4(w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\beta}) - w_{\alpha} + 2w_{\beta} = 0, \quad w(\alpha, \beta) = v(r(\alpha, \beta), s(\alpha, \beta)).$$

Comentario 11.3. La ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ es elíptica, con $A = C = 1$ y $B = D = F = G = 0$.

Capítulo 12

El método de características

Todas las ecuaciones en los problemas que investigamos hasta ahora son lineales y los términos que contienen la función incógnita y sus derivadas poseen coeficientes constantes. La única excepción es el tipo de problemas donde hay que utilizar coordenadas polares, pero para tales problemas el radio polar está presente en algunos de los coeficientes en forma muy específica, lo que no afecta el método de solución. Aquí discutiremos un procedimiento para la solución de EDPs de primer orden lineales con coeficientes variables más generales y para EDPs de primer orden no lineales de una forma particular. También revisaremos la ecuación de la onda uni-dimensional desde la perspectiva de esta técnica nueva.

12.1. Ecuaciones de primer orden lineales

Consideremos el PVI

$$u_t(x, t) + cu_x(x, t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (12.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (12.2)$$

donde $c = \text{const}$. Si medimos la tasa de cambio de u desde una posición móvil dada por $x = x(t)$, entonces de acuerdo a la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t)x'(t).$$

El primer término en el lado derecho es el cambio en u en una posición fija x mientras que el segundo es el cambio en u que resulta del movimiento de la posición de observación. Suponiendo que $x'(t) = c$ obtenemos a partir de (12.1)

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + cu_x(x(t), t) = 0;$$

es decir $u = \text{const}$. como percibido desde el punto de observación móvil. La posición de este punto es obtenida por integración de su velocidad $x'(t) = c$:

$$x = ct + x_0, \quad x_0 = x(0). \quad (12.3)$$

Esta fórmula define una familia de curvas en el plano (x, t) , las llamadas *características*; en este caso, se trata de una familia de rectas paralelas (ver Figura 12.1).

Tal como ya comentamos, las características poseen la propiedad de que $u(x, t)$ asume un valor constante a lo largo de cada una (pero, por supuesto, valores constantes diferentes sobre características diferentes). De acuerdo a lo anterior, para hallar el valor de u en (x, t) consideramos la característica por (x, t) de la ecuación $x = ct + x_0$, la cual intersecta el eje x

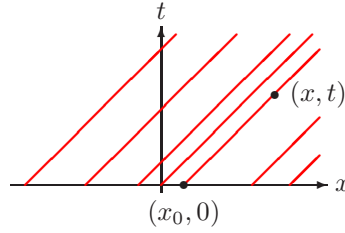
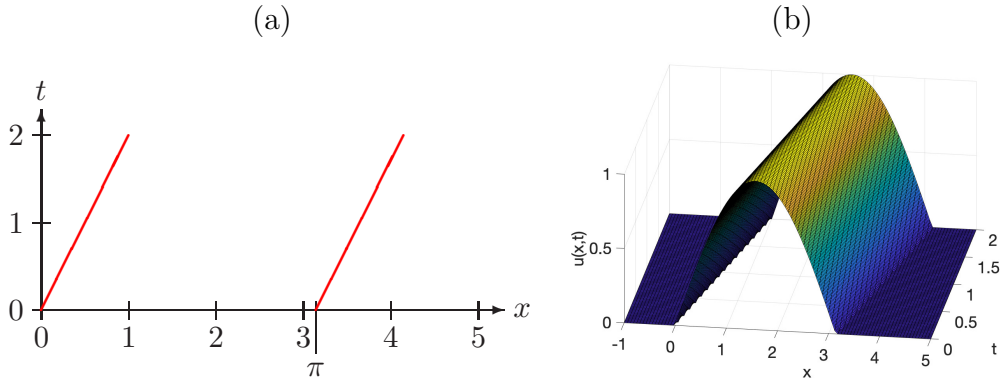


FIGURA 12.1. Rectas características (12.3).

FIGURA 12.2. Ejemplo 12.1: (a) rectas características por $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$, (b) solución $u = u(x, t)$.

($t = 0$) en $(x_0, 0)$. Como u es constante a lo largo de esta recta, su valor en (x, t) es el mismo que en $(x_0, 0)$. Pero este último es conocido a partir de la condición inicial, luego

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = f(x_0). \quad (12.4)$$

El parámetro x_0 ahora es reemplazado a partir de la ecuación (12.3) de la recta característica: $x_0 = x - ct$. De acuerdo a (12.4), la solución del PVI dado es $u(x, t) = f(x - ct)$. Esta fórmula muestra que en un tiempo t fijo, la forma de la solución es la misma que en $t = 0$, pero es trasladada en ct a lo largo del eje x . En otras palabras, la forma de la función inicial se traslada en la dirección positiva (negativa) del eje x con velocidad c si $c > 0$ ($c < 0$), es decir la solución es una *onda*.

Ejemplo 12.1. Consideremos el PVI

$$u_t(x, t) + \frac{1}{2}u_x(x, t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = \begin{cases} \sin x & \text{para } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La EDO de las características es $x'(t) = 1/2$, por lo tanto la característica que pasa por $x = x_0$ en el instante $t = 0$ posee la ecuación $x = t/2 + x_0$, ver Figura 12.2. Como

$$\frac{du}{dt} = u_t + u_x x' = u_t + \frac{1}{2}u_x = 0,$$

la solución u es constante a lo largo de las características:

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = \begin{cases} \sin x_0 & \text{para } 0 \leq x_0 \leq \pi, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

por lo tanto, como $x_0 = x - t/2$ sobre la característica por (x, t) , tenemos

$$u(x, t) = \begin{cases} \sin(x - t/2) & \text{para } 0 \leq x - t/2 \leq \pi, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \sin(x - t/2) & \text{para } t/2 \leq x \leq t/2 + \pi, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 12.2. La velocidad del punto de observación en el PVI

$$u_t = 3tu_x(x, t) = u, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = \cos x, \quad -\infty < x < \infty,$$

es $x'(t) = 3t$, es decir la característica por (x, t) es

$$x = \frac{3}{2}t^2 + x_0, \quad x_0 = x(0).$$

A lo largo de esta característica,

$$\frac{du}{dt} = u_t + u_x x' = u_t + 3tu_x = u,$$

con la solución $u(x, t) = Ce^t$, $C = \text{const.}$ Como la característica por (x, t) también pasa por $(x_0, 0)$ y $ue^{-t} = C$ es constante a lo largo de esta curva, utilizamos la condición inicial para escribir

$$C = u(x, t)e^{-t} = u(x_0, 0)e^0 = u(x_0, 0) = \cos x_0.$$

Pero $x_0 = x - 3t^2/2$ a lo largo de esta característica; por lo tanto,

$$u(x, t) = Ce^t = e^t \cos x_0 = e^t \cos\left(x - \frac{3}{2}t^2\right).$$

Ejemplo 12.3. En el PVI

$$u_t(x, t) + xu_x(x, t) = 1, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = x^2, \quad -\infty < x < \infty$$

la velocidad del punto de observación satisface $x'(t) = x$, con la solución general $x = ce^t$, $c = \text{const.}$ Por lo tanto, la característica por (x, t) que también pasa por $(x_0, 0)$ posee la ecuación $x = x_0 e^t$. A lo largo de esta característica,

$$\frac{du}{dt} = u_t + u_x x' = u_t + xu_x = 1,$$

con la solución $u(x, t) = t + C$, $C = \text{const.}$ Utilizando la condición inicial obtenemos

$$C = u(x, t) - t = u(x_0, 0) - 0 = u(x_0, 0) = x_0^2.$$

Ahora la solución del PVI es obtenida reemplazando $x_0 = xe^{-t}$ a partir de la ecuación de la característica:

$$u(x, t) = t + C = t + x_0^2 = t + x^2 e^{-2t}.$$

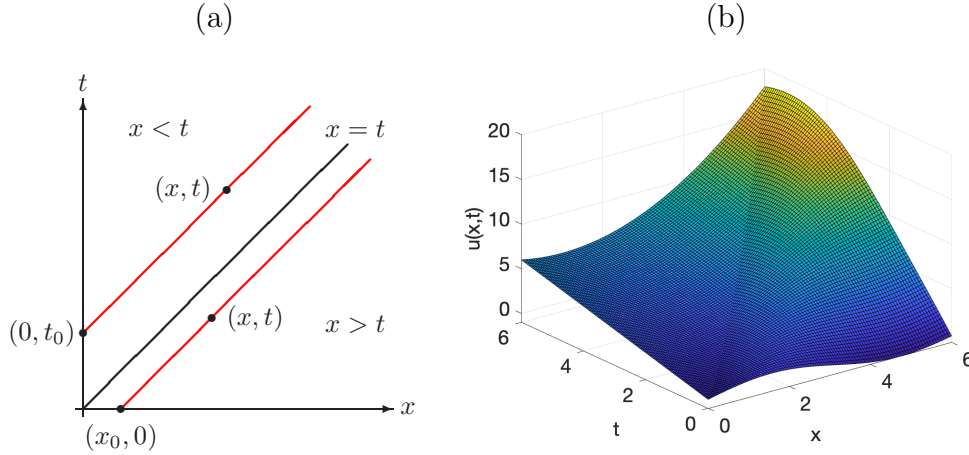


FIGURA 12.3. Ejemplo 12.4: (a) rectas características en el primer cuadrante, (b) solución $u = u(x, t)$.

Ejemplo 12.4. EL PVIF

$$u_t(x, t) + u_x(x, t) = x, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad u(0, t) = t, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = \sin x, \quad x > 0,$$

necesita un tratamiento ligeramente diferente considerando que aquí x es restringida a valores no negativos y también tenemos una condición de frontera en $x = 0$. En primer lugar, utilizando el argumento estándar, vemos que la velocidad del punto de observación móvil satisface $x'(t) = 1$, por lo tanto la ecuación de la familia de características es $x = t + c$, $c = \text{const}$. Como este problema está definido en el primer cuadrante del plano (x, t) , notamos (ver Figura 12.3 (a)) que si el punto (x, t) se encuentra localizado arriba de la línea $x = t$, entonces la característica que pasa por este punto nunca llega al eje x , por lo tanto la condición inicial no puede ser utilizada para esta característica. No obstante, esta característica llega al eje t , y podemos utilizar la condición de borde. Subdividiremos la discusión en tres partes.

- (i) Sea $x > t$. Entonces la característica por (x, t) también pasa por $(x_0, 0)$, su ecuación se escribe en la forma $x = t + c = t + x_0$, y la EDP muestra que a lo largo de esta recta,

$$\frac{du}{dt} = u_t + u_x x' = u_t + u_x = x = t + x_0;$$

luego

$$u(x, t) = \frac{1}{2}t^2 + x_0 t + C, \quad C = \text{const}.$$

Por lo tanto,

$$C = u(x, t) - \frac{1}{2}t^2 - x_0 t = u(x_0, 0) - 0 - 0 = \sin x_0,$$

lo cual, sustituyendo $x_0 = x - t$ a partir de la ecuación de la característica, entrega

$$u(x, t) = \frac{1}{2}t^2 + x_0 t + \sin x_0 = \frac{1}{2}t^2 + t(x - t) + \sin(x - t)$$

$$= tx - \frac{1}{2}t^2 + \operatorname{sen}(x - t).$$

- (ii) Sea $x < t$. En este caso la característica por (x, t) también pasa por $(0, t_0)$, su ecuación se escribe como $x = t + c = t - t_0$, y sobre la característica,

$$\frac{du}{dt} = x = t - t_0$$

con la solución

$$u(x, t) = \frac{1}{2}t^2 - t_0t + C, \quad C = \text{const.},$$

es decir, utilizando la condición de borde obtenemos

$$C = u(x, t) - \frac{1}{2}t^2 + t_0t = u(0, t_0) - \frac{1}{2}t_0^2 + t_0^2 = t_0 + \frac{1}{2}t_0^2.$$

Para hallar la solución en (x, t) tenemos que reemplazar el parámetro $t_0 = t - x$ a partir de la ecuación de la característica. Esto entrega

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}t^2 - t_0t + t_0 + \frac{1}{2}t_0^2 = \frac{1}{2}t^2 - t(t - x) + t - x + \frac{1}{2}(t - x)^2 \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x + t. \end{aligned}$$

- (iii) Observamos que cuando el punto (x, t) se acerca a la línea $x = t$ desde cualquier lado, el valor límite de u es el mismo, $u(x, x) = x^2/2$.

De acuerdo a lo anterior, la solución es continua a través de la línea $x = t$ y podemos escribir

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + t & \text{para } x \leq t, \\ xt - \frac{1}{2}t^2 + \operatorname{sen}(x - t) & \text{para } x > t \end{cases}$$

(ver Figura 12.3 (b)).

Comentario 12.1. La continuidad de u a través de $x = t$ (en el Ejemplo 12.4) se debe a la continuidad de los datos en $(0, 0)$; es decir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = \lim_{t \rightarrow 0} t = 0.$$

Si esta condición no está satisfecha, entonces la solución u es discontinua a través de línea de división correspondiente en el plano (x, t) . Las discontinuidades, y en general, perturbaciones de cualquier tipo, se propagan a lo largo de las líneas características.

Ejemplo 12.5. El problema

$$\begin{aligned} u_x(x, y) + u_y(x, y) + 2u(x, y) &= 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \\ u(x, y) &= x + 1 \quad \text{a lo largo de la recta } 2x + y + 1 = 0 \end{aligned}$$

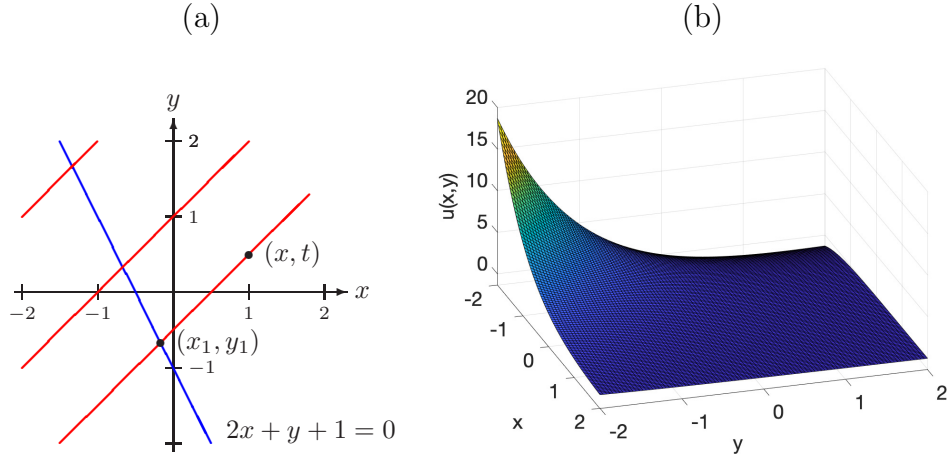


FIGURA 12.4. Ejemplo 12.5: (a) características y línea de datos, demostrando que a $(x, y) = (1, \frac{1}{2})$ corresponde $(x_1, y_1) = (-\frac{1}{6}, -\frac{2}{3})$; (b) solución $u = u(x, t)$.

no es ni un PVI, ni un PVF pero sí podemos resolverlo mediante el método de características. Suponiendo que $x = x(y)$ podemos escribir

$$\frac{d}{dy}u(x(y), y) = u_y(x(y), y) + u_x(x(y), y)x'(y),$$

es decir, si $x'(y) = 1$ (es decir, $x = y + c$, $c = \text{const.}$), entonces la EDP asume la forma

$$\frac{du}{dy} + 2u = 0$$

con la solución general

$$u(x, y) = Ce^{-2y}, \quad C = \text{const.}$$

La ecuación de la característica por (x, y) y (x_1, y_1) (ver Figura 12.4 (a)) es $x = y + x_1 - y_1$ y a raíz de los datos prescritos, a lo largo de esta línea tenemos

$$u(x, y)e^{2y} = C = u(x_1, y_1)e^{2y_1} = (x_1 + 1)e^{2y_1}.$$

Como el punto (x_1, y_1) pertenece a la característica y la línea de datos, sus coordenadas satisfacen el sistema

$$x_1 - y_1 = x - y, \quad 2x_1 + y_1 = -1$$

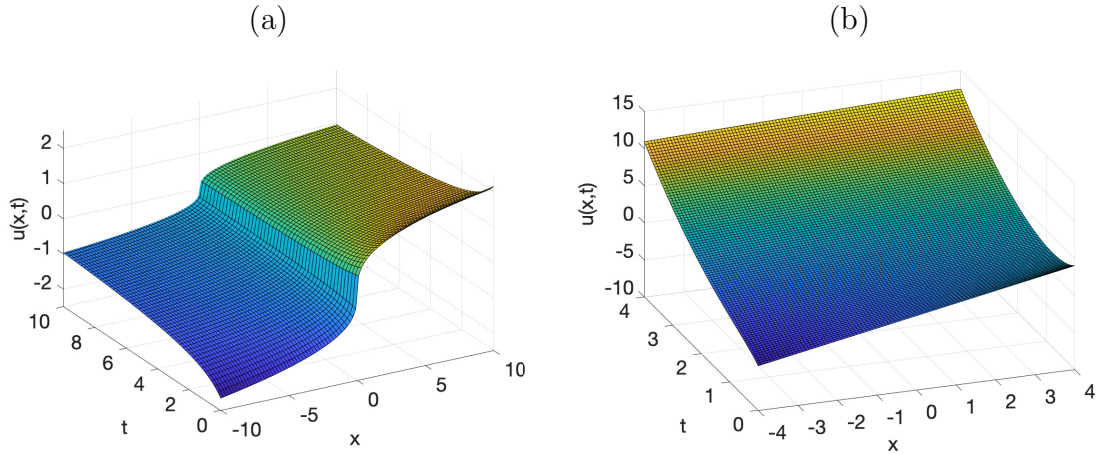
con la solución

$$x_1 = \frac{1}{3}(x - y - 1), \quad y_1 = \frac{1}{3}(-2x + 2y - 1).$$

De acuerdo a lo anterior, la solución del problema dado es

$$u(x, y) = Ce^{-2y} = (x_1 + 1)e^{2(y_1 - y)} = \frac{1}{3}(x - y + 2) \exp\left(-\frac{2}{3}(2x + y + 1)\right)$$

(ver Figura 12.4 (b)).

FIGURA 12.5. Soluciones $u = u(x, t)$ del Ejemplo (a) 12.6, (b) 12.7.

12.2. Ecuaciones cuasi-lineales de primer orden

Una EDP de la forma

$$u_t(x, t) + c(x, t, u)u_x(x, t) = q(x, t, u)$$

se llama *cuasi-lineal*. Aunque esta ecuación es no lineal (técnicamente), es lineal en las derivadas de primer orden de u . Tales ecuaciones se presentan en una variedad de fenómenos, por ejemplo como modelos de tráfico vehicular o de sedimentación, y pueden ser resueltas por el método de características.

Ejemplo 12.6. Consideremos el PVI

$$u_t(x, t) + u^3(x, t)u_x(x, t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = x^{1/3}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Si $x = x(t)$, entonces la característica por (x, t) y $(x_0, 0)$ satisface

$$x'(t) = u^3(x(t), t), \quad x(0) = x_0.$$

Sobre esta característica,

$$\frac{du}{dt} = u_t + u_x x' = u_t + u^3 u_x = 0,$$

lo que en virtud de la condición inicial entrega

$$u(x, t) = C = u(x_0, 0) = x_0^{1/3}.$$

De acuerdo a lo anterior el problema EDO para la línea característica se convierte en $x'(t) = x_0$, $x(0) = x_0$, con la solución $x = x_0 t + x_0 = x_0(t + 1)$. Como $x_0 = x/(t + 1)$ a lo largo de esta línea, podemos escribir la solución del PVI dado como (ver Figura 12.5 (a))

$$u(x, t) = x_0^{1/3} = \left(\frac{x}{t + 1} \right)^{1/3},$$

Ejemplo 12.7. *Un procedimiento similar es aplicado para resolver el PVI*

$$u_t(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) = 2t, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = x, \quad -\infty < x < \infty.$$

Si $x = x(t)$ satisface $x'(t) = u(x(t), t)$, $x(0) = x_0$, entonces a lo largo de la curva característica por (x, t) y $(x_0, 0)$,

$$\frac{du}{dt} = u_t + u_x x' = u_t + uu_x = 2t,$$

por lo tanto $u(x, t) = t^2 + C$ o $u(x, t) - t^2 = C = u(x_0, 0) - 0 = x_0$, luego $u(x, t) = t^2 + x_0$. Entonces la curva característica satisface $x'(t) = t^2 + x_0$ con $x(0) = x_0$, con la solución

$$x = \frac{1}{3}t^3 + x_0t + x_0 = \frac{1}{3}t^3 + x_0(t + 1).$$

Como sobre esta curva se tiene

$$x_0 = \frac{1}{t + 1} \left(x - \frac{1}{3}t^3 \right) = \frac{3x - t^3}{3(t + 1)},$$

la solución del PVI es

$$u(x, t) = t^2 + \frac{3x - t^3}{3(t + 1)},$$

ver Figura 12.5 (b).

12.3. La ecuación de la onda uni-dimensional

Reconsideraremos ahora la ecuación de la onda en términos de detalles resultando del método de características.

12.3.1. La fórmula de d'Alembert. Formalmente podemos escribir la ecuación de la onda uni-dimensional como

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) w(x, t) = w_t(x, t) + cw_x(x, t) = 0. \end{aligned} \tag{12.5}$$

De acuerdo a la Sección 12.1, la solución general de la ecuación satisfecha por w en (12.5) es

$$w(x, t) = u_t(x, t) - cu_x(x, t) = P(x - ct), \tag{12.6}$$

donde P es una función arbitraria de una sola variable. Por otro lado, si escribimos la ecuación de la onda, alternativamente, como

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) v(x, t) = v_t(x, t) - cv_x(x, t) = 0, \end{aligned}$$

entonces tal como arriba,

$$v(x, t) = u_t(x, t) + cu_x(x, t) = Q(x + ct), \tag{12.7}$$

donde Q es otra función arbitraria de una sola variable. Sumando (12.6) y (12.7) (lado por lado), obtenemos

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2}(P(x - ct) + Q(x + ct)).$$

Integrando esto directamente obtenemos

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct), \quad (12.8)$$

donde F y G son funciones arbitrarias de una sola variable.

De acuerdo a la explicación dada en la Sección 12.1, $F(x - ct)$ es una onda de forma fija que viaja hacia la derecha con velocidad c , y es constante sobre las características $x - ct = \text{const.}$ Análogamente, $G(x + ct)$ es una onda de forma fija que viaja hacia la izquierda con velocidad $-c$ que es constante sobre las características $x + ct = \text{const.}$ Cada punto (x, t) en el semiplano superior ($t > 0$) es atravesado por dos características, una de cada familia.

Consideremos una cuerda vibrante infinita, la cual es modelada por el PVIF

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Diferenciando la solución (12.8) de la EDP con respecto a t y recordando que F y G son funciones de una variable obtenemos

$$u_t(x, t) = -cF'(x - ct) + cG'(x + ct).$$

A partir de las condiciones iniciales tenemos ahora

$$f(x) = u(x, 0) = F(x) + G(x), \quad g(x) = u_t(x, 0) = -cF'(x) + cG'(x).$$

Resolveremos estas ecuaciones para F y G , luego $F' = f' - G'$, por lo tanto $g/c = -f' + 2G'$, lo que implica que

$$G' = \frac{1}{2}\left(f' + \frac{1}{c}g\right), \quad F' = \frac{1}{2}\left(f' - \frac{1}{c}g\right);$$

integrando obtenemos

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) dy, \quad G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) dy.$$

A partir de estas expresiones y (12.8) concluimos que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy. \quad (12.9)$$

Esta solución es la *fórmula de d'Alembert*, la cual ya derivamos en la Sección 10.3 mediante la fórmula de Green para la ecuación de la onda.

Ejemplo 12.8. Supongamos que en el PVI arriba tenemos

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } |x| < h, \\ 0 & \text{para } |x| > h, \end{cases} \quad u_t(x, 0) = g(x) = 0.$$

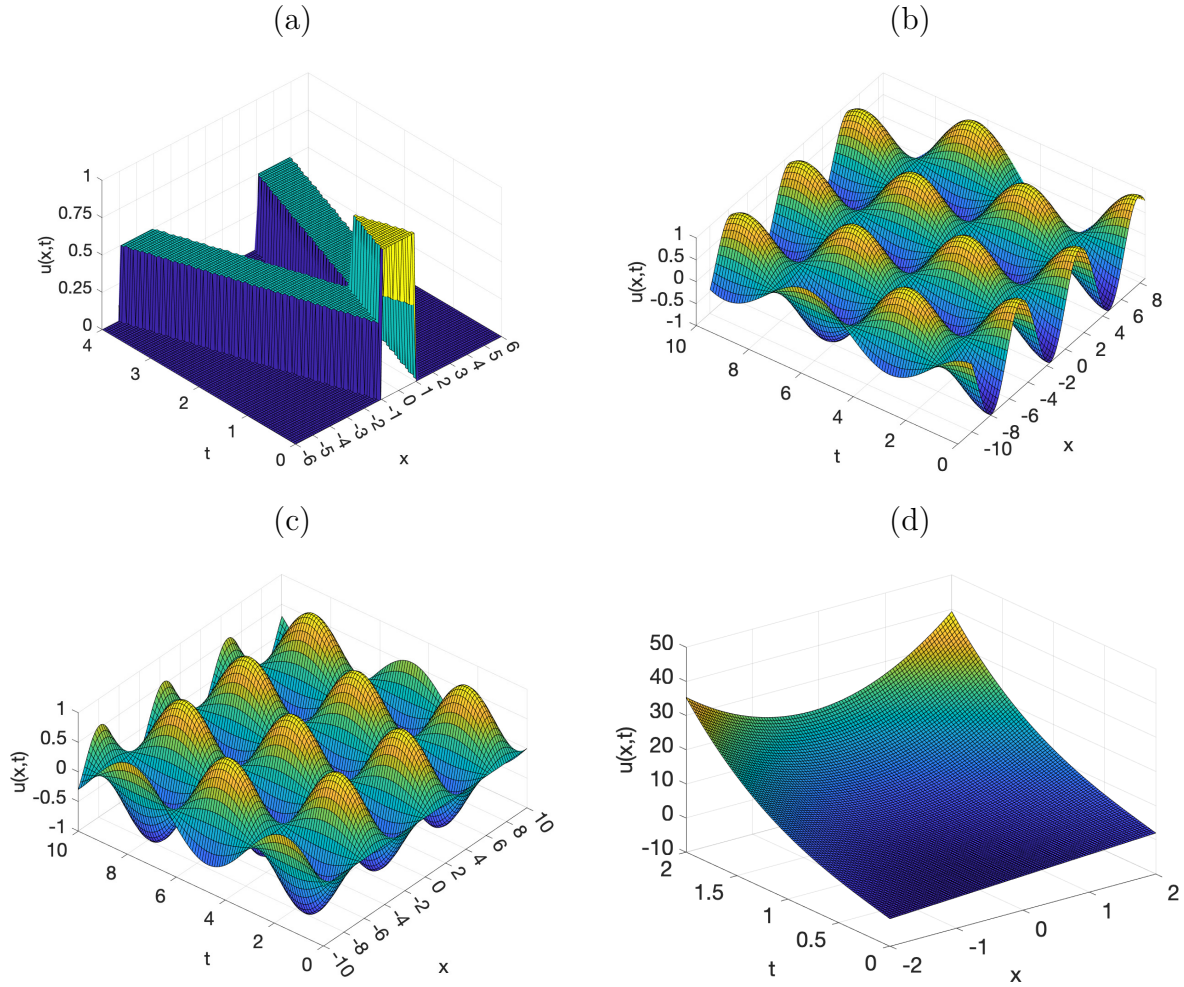


FIGURA 12.6. Soluciones $u = u(x, t)$ (a) del Ejemplo 12.8, con $c = h = 1$, (b) del Ejemplo 12.9 con $c = 1$, (c) del Ejemplo 12.10 con $c = 1$, (d) del Ejemplo 12.11.

A raíz de (12.9) la solución es

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x - ct) + f(x + ct)),$$

donde

$$\frac{1}{2}f(x - ct) = \begin{cases} 1/2 & \text{para } |x - ct| < h, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad \frac{1}{2}f(x + ct) = \begin{cases} 1/2 & \text{para } |x + ct| < h, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De acuerdo a lo anterior, la solución es la suma de dos impulsos con amplitud $1/2$, los cuales se separan con una velocidad de separación $2c$. Como la distancia entre sus extremos es inicialmente $2h$, se separan después de $t = h/c$ (ver Figura 12.6 (a)).

Ejemplo 12.9. *En el caso del PVI*

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

la solución de d'Alembert (12.9) entrega

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\sin(x + ct) + \sin(x - ct)) = \sin x \cos(ct)$$

(ver Figura 12.6 (b)). Tales soluciones, donde las variables se separan, se llaman ondas estacionarias.

Ejemplo 12.10. *La solución del PVI*

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = \sin x, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

de acuerdo a (12.9), viene dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \sin y \, dy = \frac{1}{2c} (\cos(x - ct) - \cos(x + ct)) = \frac{1}{c} \sin x \sin(ct)$$

(ver Figura 12.6 (c)). Esta solución también representa una onda estacionaria.

Ejemplo 12.11. *Para el PVI*

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= 4u_{xx}(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= x, \quad u_t(x, 0) = 2x^2, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

la fórmula de d'Alembert (12.9) con $c = 2$ da origen a la solución (ver Figura 12.6 (d))

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(x - 2t + x + 2t) + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} 2y^2 \, dy = x + 2x^2t + \frac{8}{3}t^3.$$

12.3.2. La cuerda vibrante semi-infinita. La solución del PVI

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0; \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x > 0. \end{aligned}$$

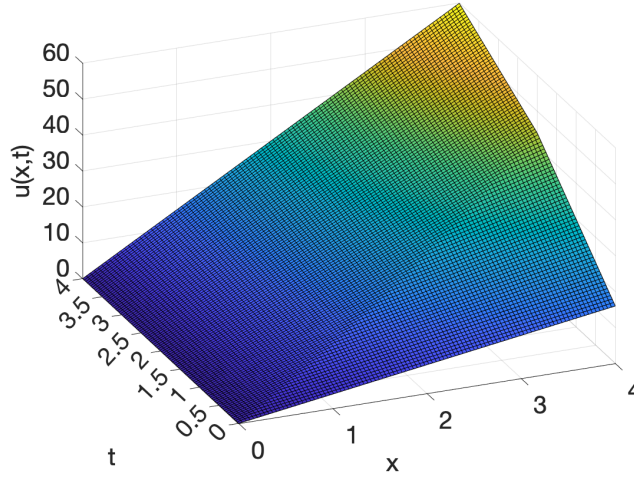
Tal como en el caso anterior, a partir de la EDP obtenemos

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct),$$

donde

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) \, dy, \quad G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) \, dy, \quad x > 0.$$

Como $x > 0$ en este problema, las funciones F y G son determinadas solamente para valores positivos de sus argumentos. Esto no afecta $G(x + ct)$ (ya que $t > 0$). Pero el argumento de $F(x - ct)$ es negativo si $0 < x < ct$. Para obtener $F(x - ct)$ cuando $x - ct < 0$ utilizamos

FIGURA 12.7. Ejemplo 12.12: solución $u = u(x, t)$.

la condición de borde, luego $u(0, t) = 0 = F(-ct) + G(ct)$ para $t > 0$, es decir para $\xi < 0$ tenemos $F(\xi) = -G(-\xi)$, lo que significa que para $0 < x < ct$,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x - ct) + G(x + ct) = -G(ct - x) + G(x + ct) \\ &= \frac{1}{2}(f(x + ct) - f(ct - x)) + \frac{1}{2c} \left(\int_0^{x+ct} g(y) dy - \int_0^{ct-x} g(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{2}(f(ct + x) - f(ct - x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} g(y) dy. \end{aligned} \quad (12.10)$$

El término $-G(ct - x)$ es una onda de forma fija que viaja hacia la derecha que se llama *onda reflejada*. Para $x > ct$ la solución del problema es dada por la fórmula de d'Alembert (como antes).

Ejemplo 12.12. *Calculamos la solución del PIVF*

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= 4u_{xx}(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) &, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = 4x, \quad u_t(x, 0) = 2x + 6, \quad x > 0 \end{aligned}$$

en dos etapas. Primeramente, para $0 < x < 2t$ utilizamos (12.10) con $c = 2$ para obtener

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(4(2t + x) - 4(2t - x)) + \frac{1}{4} \int_{2t-x}^{2t+x} (2y + 6) dy = 2xt + 7x;$$

luego, en virtud de (12.9) obtenemos para $x > 2t$

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(4(x + 2t) + 4(x - 2t)) + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} (2y + 6) dy = 2xt + 4x + 6t.$$

La solución es continua a través de la línea característica $x = 2t$ porque

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(0, t) = 0.$$

Por lo tanto podemos escribir

$$u(x, t) = \begin{cases} 2xt + 7x & \text{para } 0 \leq x \leq 2t, \\ 2xt + 4x + 6t & \text{para } x > 2t, \end{cases}$$

ver Figura 12.7.

12.3.3. La cuerda finita. Consideremos el PVIF

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

Utilizando la separación de variables obtuvimos en la Sección 5.2 la solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(b_{1n} \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_{2n} \sin \frac{n\pi ct}{L} \right),$$

donde los coeficientes b_{1n} y b_{2n} son determinados a partir de las expansiones

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Supongamos que $f \not\equiv 0$ y $g \equiv 0$, entonces $b_{2n} = 0$ para $n \in \mathbb{N}$. Utilizando la fórmula

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

escribimos la solución en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n} \left(\sin \frac{n\pi(x+ct)}{L} + \sin \frac{n\pi(x-ct)}{L} \right) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)). \quad (12.11)$$

Supongamos ahora que $f \equiv 0$ y $g \not\equiv 0$, entonces $b_{1n} = 0$ para $n \in \mathbb{N}$. Utilizando la fórmula

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

escribimos la solución en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \left(\cos \frac{n\pi(x-ct)}{L} - \cos \frac{n\pi(x+ct)}{L} \right).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy &= \sum_{n=1}^{\infty} c b_{2n} \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{n\pi}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= c \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \left(\cos \frac{n\pi(x-ct)}{L} - \cos \frac{n\pi(x+ct)}{L} \right), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy. \quad (12.12)$$

Combinando las dos fórmulas separadas (12.11) y (12.12) y utilizando el principio de superposición recuperamos la fórmula de d'Alembert (12.9).

12.4. Otras ecuaciones hiperbólicas

El método desarrollado en la Sección 12.3 puede ser extendido a ecuaciones hiperbólicas más generales. Ilustraremos el procedimiento en dos casos importantes.

12.4.1. Ondas uni-dimensionales. La solución de problemas del tipo discutido aquí está basada en una descomposición del operador diferencial parcial similar al tratamiento de la ecuación de la onda.

Ejemplo 12.13. *El PVI*

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) + 5u_{xt} + 6u_{xx}(x, t) &= 0, & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x + 2, & u_t(x, 0) &= 2x, & -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

es hiperbólico porque $B^2 - 4AC = 25 - 24 = 1 > 0$. Se puede verificar fácilmente que la EDP puede ser escrita alternativamente como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + 3\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + 3\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t) = 0.$$

Poniendo $u_t + 3u_x =: w$ y $u_t + 2u_x =: v$ tenemos

$$w_t + 2w_x = 0, \quad v_t + 3v_x = 0.$$

A raíz del argumento desarrollado en la Sección 12.1 las soluciones respectivas de estas ecuaciones son $w(x, t) = P(x - 2t)$ y $v(x, t) = Q(x - 3t)$, donde P y Q son funciones de una variable; luego

$$u_t + 3u_x = P(x - 2t), \quad u_t + 2u_x = Q(x - 3t).$$

Ahora la eliminación de u_x entre estas ecuaciones entrega

$$u_t(x, t) = 3Q(x - 3t) - 2P(x - 2t),$$

es decir, integrando esta identidad,

$$u(x, t) = F(x - 2t) + G(x - 3t),$$

donde F y G son otro par de funciones de una variable arbitrarias. Comentamos que debido a la regla de la cadena,

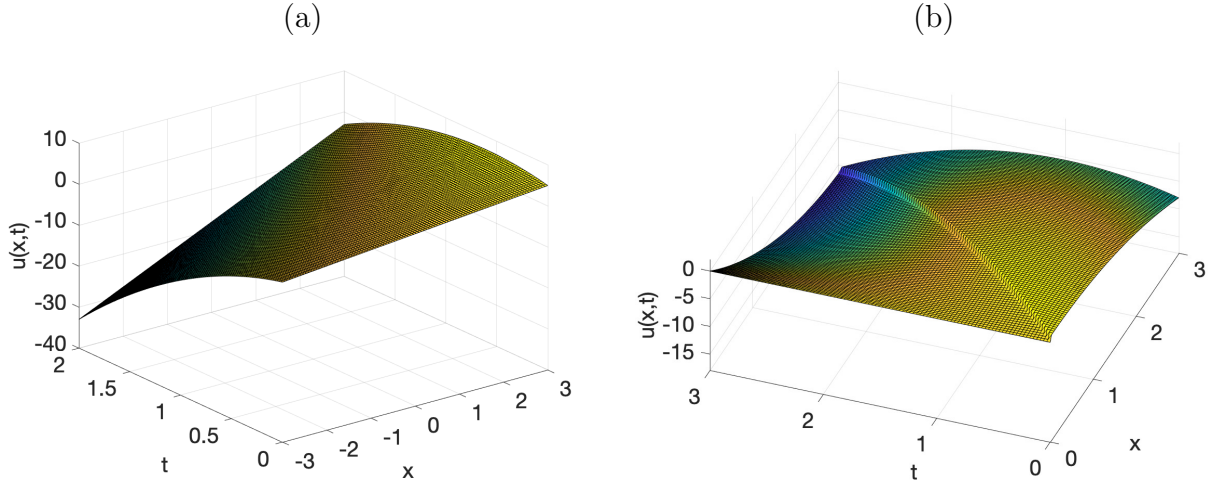
$$u_t(x, t) = -2F'(x - 2t) - 3G'(x - 3t). \quad (12.13)$$

Aplicando las condiciones iniciales llegamos a las ecuaciones

$$F(x) + G(x) = x + 2, \quad -2F'(x) - 3G'(x) = 2x.$$

Diferenciando la primera ecuación término por término, obtenemos $F'(x) + G'(x) = 1$. Combinando esto con la primera ecuación arriba obtenemos $G'(x) = -2x - 2$. Esto nos permite determinar G y luego F :

$$G(x) = -x^2 - 2x + c, \quad c = \text{const.}; \quad F(x) = x + 2 - G(x) = x^2 + 3x + 2 - c.$$

FIGURA 12.8. Soluciones $u = u(x, t)$ del Ejemplo (a) 12.13, (b) 12.14.

Reemplazando esto en (12.13) obtenemos la solución del PVIF deseada (ver Figura 12.8 (a))

$$\begin{aligned} u(x, t) &= ((x - 2t)^2 + 3(x - 2t) + 2 - c) + (-(x - 3t)^2 - 2(x - 3t) + c) \\ &= 2xt - 5t^2 + x + 2. \end{aligned}$$

Ejemplo 12.14. Consideremos el PVIF

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - 3u_{xt}(x, t) - 4u_{xx}(x, t) &= 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = 1 - x^2, \quad u_t(x, 0) = x + 2, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Como $B^2 - 4AC = 9 + 16 = 25 > 0$, la EDP es hiperbólica. Reescribiéndola como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - 4\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - 4\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t) = 0$$

y procediendo como en el Ejemplo 12.13 obtenemos

$$u(x, t) = F(x - t) + G(x + 4t), \quad (12.14)$$

donde las funciones

$$F(x) = \frac{1}{10}(-9x^2 - 4x + 10) - c, \quad c = \text{const.}; \quad G(x) = -\frac{1}{10}(-x^2 + 4x) + c \quad (12.15)$$

son definidas para valores positivos de sus argumentos.

Si $x > t$, entonces $x - t > 0$ y reemplazando (12.15) en (12.14) obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{10}(-9(x - t)^2 - 4(x - t) + 10 - (x + 4t)^2 + 4(x + 4t)) \\ &= -x^2 + xt - \frac{5}{2}t^2 + 2t + 1. \end{aligned}$$

Si $0 \leq x < t$, entonces $x - t < 0$ y utilizamos la condición de borde:

$$0 = u(0, t) = F(-t) + G(4t) = F(-t) + G(-4(-t)),$$

lo que implica que $F(z) = -G(-4z)$ para $z < 0$, luego de acuerdo a (12.14) y (12.15),

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -G(-4x + 4t) + G(x + 4t) \\ &= \frac{1}{10}((-4x + 4t)^2 - 4(-4x + 4t) - (x + 4t)^2 + 4(x + 4t)) = \frac{3}{2}x^2 - 4xt + 2x. \end{aligned}$$

La solución completa del problema puede ser escrita como

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - 4xt + 2x & \text{para } 0 \leq x < t, \\ -x^2 + xt - \frac{5}{2}t^2 + 2t + 1 & \text{para } x > t, \end{cases}$$

ver Figura 12.8 (b). Esta solución es discontinua a través de $x = t$.

Comentario 12.2. Una fórmula del tipo de la fórmula de d'Alembert también puede ser derivada para las EDPs del tipo estudiado en los Ejemplos 12.13 y 12.14.

12.4.2. Ondas esféricas. Consideremos la ecuación de la onda tri-dimensional

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad (12.16)$$

donde Δu es expresado en términos de un sistema de coordenadas apropiado para la geometría del problema. Si la amplitud de las ondas depende solamente de la distancia r del frente de la onda desde una fuente puntual, entonces escogimos coordenadas esféricas y en este caso $u = u(r, t)$. En virtud del ítem (v) del Comentario 4.4,

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r = \frac{2r u_r + r^2 u_{rr}}{r^2} = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r,$$

por lo tanto la ecuación que describe la propagación de ondas esféricas es

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr}(r, t) + \frac{2}{r} u_r(r, t) \right).$$

Multiplicando esta ecuación por r obtenemos

$$r u_{tt} = c^2 (r u_{rr} + u_r) = c^2 ((r u_r)_r + u_r) = c^2 (r u_r + u)_r = c^2 ((r u)_r)_r = c^2 (r u)_{rr}.$$

La sustitución $ru(r, t) = v(r, t)$ reduce esta ecuación a $v_{tt}(r, t) = c^2 v_{rr}(r, t)$, es decir en analogía con el argumento desarrollado en la Sección 12.1, $v(r, t) = F(r - ct) + G(r + ct)$; por lo tanto la solución general de (12.16) es

$$u(r, t) = \frac{1}{r} (F(r - ct) + G(r + ct)),$$

donde F y G son funciones de una variable.

Métodos de perturbación y métodos asintóticos

Debido a la complejidad de las EDPs que se presentan en algunos modelos matemáticos no siempre es posible hallar una solución exacta a un problema de valores iniciales y de frontera dado. La mejor opción en este caso consiste en la computación de una solución aproximada. Ésta es la idea detrás del método de expansión asintótica, el cual puede ser aplicado a problemas que dependen de un parámetro positivo pequeño y que está basado en la expansión de la solución en una serie de potencias de este parámetro. Si la serie converge, entonces la técnica se llama *método de perturbación*; si la serie diverge pero es asintótica (en un sentido precisado más abajo) entonces se trata de un *método asintótico*.

En lo siguiente discutiremos solamente la construcción formal de la solución en forma de serie y obtendremos los primeros términos sin considerar el problema de convergencia.

13.1. Series asintóticas

Para poder discutir el concepto de una serie asintótica necesitamos un mecanismo para poder comparar la “magnitud” de funciones.

Definición 13.1. Sean f y g funciones reales de una variable real x .

- (i) Se dice que f es del orden g cerca de $x = a$, es decir

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \text{cuando } x \rightarrow a,$$

si el cociente $|f(x)/g(x)|$ es acotado cuando $x \rightarrow a$.

- (ii) Se escribe

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{cuando } x \rightarrow a,$$

si $f(x)/g(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow a$.

Ejemplo 13.1.

- (i) La función $\sin x$ es del orden x cerca de $x = 0$, es decir

$$\sin x = \mathcal{O}(x) \quad \text{cuando } x \rightarrow 0,$$

porque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

por lo tanto, $(\sin x)/x$ es acotado para x cerca de 0.

- (ii) Se tiene que $x^2 \ln |x| = o(x)$ cerca de $x = 0$ porque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln |x|}{x} = 0.$$

(iii) Similarmente, $e^{-1/|x|} = o(x^n)$ cerca de $x = 0$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/|x|}}{x^n} = 0.$$

Definición 13.2. Se dice que una función $f = f(x, \varepsilon)$, donde $0 < \varepsilon \ll 1$ es un parámetro pequeño, posee la serie (de potencias) asintótica

$$f(x, \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \varepsilon^n \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0+$$

si para cualquier $N \in \mathbb{N}$,

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n(x) \varepsilon^n + \mathcal{O}(\varepsilon^N) \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0+ \quad (13.1)$$

uniformemente para x en algún intervalo.

Comentario 13.1.

(i) La igualdad (13.1) significa que el residuo después de N términos es del orden ε^N cuando $\varepsilon \rightarrow 0+$; también podemos escribirla como

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n(x) \varepsilon^n + o(\varepsilon^{N-1}) \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

- (ii) El lado derecho de (13.1) puede divergir cuando $N \rightarrow \infty$, pero entrega una buena aproximación de $f(x, \varepsilon)$ cuando N es fijo y $\varepsilon > 0$ es muy pequeño. No necesitamos convergencia para que el resultado sea aceptable. También puede suceder que la aproximación no mejore al incluir términos adicionales porque la serie puede ser divergente.
- (iii) En una serie asintótica se supone que los términos que contienen potencias altas de ε son mucho más pequeños que los términos con potencias bajas.
- (iv) En este capítulo se supone que las series asintóticas pueden ser diferenciadas e integradas término por término.
- (v) Si $k \gg 1$ es un parámetro grande, podemos reducir el problema a un problema con un parámetro pequeño poniendo $k = 1/\varepsilon$.

Definición 13.3. Consideremos un PVI que dependa (suavemente) de un parámetro $\varepsilon > 0$ pequeño. El problema obtenido poniendo $\varepsilon = 0$ en la EDP y las condiciones de borde e iniciales se llama problema reducido (problema no perturbado). Si el problema reducido es del mismo tipo y del mismo orden que el problema originalmente dado y ambos poseen soluciones únicas, entonces el problema dado se llama problema de perturbación regular; en caso contrario se habla de un problema de perturbación singular.

Ejemplo 13.2. El PVI

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= k u_{xx}(x, t) + \varepsilon u_x(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \end{aligned}$$

es un problema de perturbación regular porque tanto este PVIF como su versión reducida (involucrando la ecuación del calor) son problemas parabólicos de segundo orden con soluciones únicas.

Ejemplo 13.3. El PVI hiperbólico

$$\begin{aligned}\varepsilon u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) + u_t(x, t) &= 0, \quad x > 0, \quad -\infty < t < \infty, \\ u(0, t) &= f(t), \quad -\infty < t < \infty,\end{aligned}$$

se reduce a un problema parabólico si ponemos $\varepsilon := 0$. Por lo tanto, aunque tanto el problema dado como el problema reducido posean soluciones únicas, el PVI dado es un problema de perturbación singular.

Ejemplo 13.4. Sea D una región finita acotada por una curva suave, cerrada y simple ∂D en el plano (x, y) , y sea $\mathbf{n}$ el vector normal unitario exterior a ∂D . El PVF de cuarto orden

$$\begin{aligned}(\Delta \Delta u)(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in D, \\ u(x, y) &= f(x, y), \quad \varepsilon u_{\mathbf{n}}(x, y) + u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial D,\end{aligned}$$

donde $u_{\mathbf{n}} = \partial u / \partial \mathbf{n}$, se reduce para $\varepsilon = 0$ al PVF

$$\begin{aligned}(\Delta \Delta u)(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in D, \\ u(x, y) &= f(x, y), \quad u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial D.\end{aligned}$$

Si $f \neq g$, el problema reducido no posee solución. Por otro lado, si $f = g$, entonces la solución no es única, ya que perdimos una de las condiciones de borde. Por lo tanto, el PVF dado es un problema de perturbación singular.

Definición 13.4. Si la solución u de un problema de perturbación posee la expansión en serie asintótica

$$u \approx \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n,$$

entonces $u - u_0$ se llama una perturbación de la solución del problema reducido.

13.2. Problemas de perturbación regulares

Para ilustrar como el método funciona en este caso examinaremos un número de ejemplos.

Ejemplo 13.5. Consideremos el disco unitario D y su frontera ∂D :

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r < 1, -\pi \leq \theta < \pi\}, \quad \partial D = \{(r, \theta) : r = 1, -\pi \leq \theta < \pi\}$$

y el problema de Dirichlet para la ecuación de Helmholtz bi-dimensional

$$(\Delta u)(r, \theta) + \varepsilon u(r, \theta) = 0, \quad (r, \theta) \in D, \quad r \neq 0; \quad u(r, \theta) = 1, \quad (r, \theta) \in \partial D,$$

donde $0 < \varepsilon \ll 1$, lo que asegura que el PVF arriba posee una solución única. El problema reducido (para $\varepsilon = 0$) es el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace, el cual igualmente posee una solución única. Tanto el problema reducido como el problema perturbado son elípticos y de segundo orden, por lo tanto el PVF dado es un problema de perturbación regular.

Suponiendo una serie de perturbación del tipo

$$u(r, \theta) \approx \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \theta) \varepsilon^n$$

obtenemos a partir de la EDP

$$\Delta u + \varepsilon u \approx \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta u_n) \varepsilon^n + \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^{n+1} = \Delta u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta u_n + u_{n-1}) \varepsilon^n = 0 \quad \text{en } D, r \neq 0.$$

Por otro lado, las condiciones de frontera implican que

$$u \approx u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varepsilon^n = 1 \quad \text{sobre } \partial D.$$

Igualando los coeficientes de cada potencia de ε en ambos lados obtenemos los PVFs

$$\Delta u_0 = 0 \quad \text{en } D, r \neq 0; \quad u_0 = 1 \quad \text{sobre } \partial D,$$

y para $n \geq 1$,

$$\Delta u_n = -u_{n-1} \quad \text{en } D, r \neq 0; \quad u_n = 0 \quad \text{sobre } \partial D.$$

Como la región en la cual planteamos el problema y las condiciones de borde son independientes del ángulo polar θ , podemos suponer que $u_n = u_n(r)$; a raíz del ítem (ii) del Comentario 4.4 podemos escribir el problema para u_0 como

$$(\Delta u_0)(r) = u_0''(r) + \frac{u_0'(r)}{r} = 0, \quad 0 < r < 1; \quad u_0(1) = 1.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por r y notando que el lado izquierdo de la EDO nueva es $(ru_0')'$ obtenemos

$$u_0(r) = C_1 \ln r + C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Sabemos (ver Sección 5.3) que para este tipo de problemas también existen condiciones adicionales generadas por consideraciones físicas. Como hemos supuesto que la solución es independiente de θ , la única condición de este tipo que debe estar satisfecha aquí es que la solución y sus derivadas deben ser continuas (y por ende acotadas) en D . Esto implica que $C_1 = 0$; el valor de C_2 es obtenido a partir de la condición de borde en $r = 1$, lo que entrega $u_0 \equiv 1$.

El siguiente paso consiste en la aplicación del mismo argumento al PVF satisfecho por u_1 , es decir

$$(\Delta u_1)(r) = u_1''(r) + \frac{u_1'(r)}{r} = -u_0(r) = -1, \quad 0 < r < 1; \quad u_1(1) = 0,$$

lo que entrega $u_1(r) = (1 - r^2)/4$, por lo tanto

$$u(r) = 1 + \frac{\varepsilon}{4}(1 - r^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (13.2)$$

Efectivamente para este problema ya podemos evaluar cuan buena es la aproximación (13.2). La ecuación (perturbada) dada puede ser escrita en la forma

$$u''(r) + \frac{u'(r)}{r} + \varepsilon u(r) = 0,$$

la cual es la ecuación de Bessel del orden cero (ver (3.12) con $m = 0$, $\lambda = \varepsilon$, y x reemplazado por r). Su solución acotada satisfaciendo $u(1) = 1$ es

$$u(r) = J_0(\sqrt{\varepsilon}r) / J_0(\sqrt{\varepsilon}),$$

donde J_0 es la función de Bessel de primera especie del orden cero. Esta fórmula es razonable ya que $0 < \varepsilon \ll 1$, es decir $\sqrt{\varepsilon}$ es más menor que el primer cero ($\zeta \approx 2,4$) de $J_0(\xi)$. Como para valores pequeños de ξ ,

$$J_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{4} + \mathcal{O}(\xi^4),$$

utilizamos la fórmula para la serie geométrica,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1 - q}, \quad 0 < |q| < 1,$$

para deducir que

$$\begin{aligned} \frac{J_0(\sqrt{\varepsilon}r)}{J_0(\sqrt{\varepsilon})} &= \frac{1 - \frac{\varepsilon}{4}r^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}{1 - \frac{\varepsilon}{4} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{4}r^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}{1 - \left(\frac{\varepsilon}{4} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)} \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}r^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{4} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) = 1 + \frac{\varepsilon}{4}(1 - r^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Esto significa que la solución de perturbación (13.2) coincide con la solución exacta hasta los términos $\mathcal{O}(\varepsilon)$ sobre D .

Ejemplo 13.6. El PVF elíptico no lineal

$$\Delta u(r, \theta) + \varepsilon u^2(r, \theta) = 36r, \quad (r, \theta) \in D; \quad u(r, \theta) = 4, \quad (r, \theta) \in \partial D,$$

donde $0 < \varepsilon \ll 1$ y D y ∂D son como en el Ejemplo 13.5, es un problema de perturbación regular. Como nuevamente notamos que la solución u dependerá solamente de r podemos suponer una representación como serie de la forma

$$u(r) \approx \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r) \varepsilon^n.$$

En la forma habitual tomamos en cuenta la expansión asintótica

$$u^2 = (u_0 + \varepsilon u_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2))^2 = u_0^2 + 2\varepsilon u_0 u_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

y recordamos la condición de acotación mencionada en el Ejemplo 13.5. Así vemos que u_0 y u_1 son soluciones de los respectivos PVFs

$$u_0''(r) + \frac{u_0'(r)}{r} = 36r, \quad 0 < r < 1; \quad u_0(r), u_0'(r) \text{ acotadas cuando } r \rightarrow 0+, \quad u_0(1) = 4,$$

$u_1''(r) + \frac{u_1'(r)}{r} = -u_0^2(r)$, $0 < r < 1$; $u_1(r), u_1'(r)$ acotadas cuando $r \rightarrow 0+$, $u_1(1) = 0$,
con las soluciones $u_0(r) = 4r^3$ y $u_1(r) = (1 - r^8)/4$. Concluimos que

$$u(r) = 4r^3 + \frac{\varepsilon}{4}(1 - r^8) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Este ejemplo ilustra que en ciertos casos el método de perturbación reduce un problema no lineal a una sucesión de problemas lineales.

Ejemplo 13.7. *En el PVI*

$$\begin{aligned} w_{tt}(x, t) - w_{xx}(x, t) + (3 + \varepsilon)w(x, t) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ w(x, 0) &= \varepsilon \cos x, \quad w_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

el parámetro pequeño $0 < \varepsilon \ll 1$ aparece no solamente en la EDP pero también en una de las condiciones iniciales. Tanto el PVI dado como el PVI reducido son problemas hiperbólicos de segundo orden con soluciones únicas, así que aquí se trata de un problema de perturbación regular.

Como la ecuación es homogénea y las funciones de datos son uniformemente pequeñas, esperamos que la solución posea la misma propiedad, por lo tanto buscamos una solución de la forma $w(x, y) = \varepsilon u(x, y)$. Insertando esto obtenemos

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + (3 + \varepsilon)u(x, t) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \cos x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

donde el parámetro pequeño aparece en la EDP solamente. Reemplazando

$$u(x, t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \varepsilon^n$$

en la EDP y las condiciones iniciales e igualando los coeficientes de potencias iguales de ε en ambos lados obtenemos que las funciones u_n , $n \in \mathbb{N}_0$, son soluciones de los PVI's respectivos

$$\begin{aligned} (u_0)_{tt}(x, t) - (u_0)_{xx}(x, t) + 3u_0(x, t) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u_0(x, 0) &= \cos x, \quad (u_0)_t = 0, \quad -\infty < x < \infty; \\ (u_1)_{tt}(x, t) - (u_1)_{xx}(x, t) + 3u_1(x, t) &= -u_0(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u_1(x, 0) &= 0, \quad (u_1)_t = 0, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

etcétera.

Resolvemos el problema para u_0 por separación de variables. Buscamos una solución de la forma $u_0(x, t) = X(x)T(t)$ donde, tal como comentamos en el Capítulo 5, se excluye $X \equiv 0$ o $T \equiv 0$. Reemplazando esto en las condiciones iniciales obtenemos

$$X(x)T(0) = \cos x, \quad X(x)T'(0) = 0.$$

Claramente $T(0) \neq 0$. Como $X \not\equiv 0$, se sigue que

$$X(x) = \frac{\cos x}{T(0)}, \quad T'(0) = 0,$$

luego

$$u_0(x, t) = \frac{\cos x}{T(0)} T(t),$$

y la EDP para u_0 asume la forma

$$\frac{\cos x}{T(0)} T''(t) + \frac{\cos x}{T(0)} T(t) + 3 \frac{\cos x}{T(0)} T(t) = 0,$$

es decir T es la solución del PVI

$$T''(t) + 4T(t) = 0, \quad t > 0; \quad T'(0) = 0,$$

la cual es $T(t) = T(0) \cos(2t)$; luego

$$u_0(x, t) = \cos(2t) \cos x.$$

La EDP para u_1 ahora puede ser escrita como

$$(u_1)_{tt}(x, t) - (u_1)_{xx}(x, t) + 3u_1(x, t) = -\cos(2t) \cos x. \quad (13.3)$$

A raíz de la función en el lado derecho buscamos su solución en la forma $u_1(x, t) = T(t) \cos x$, $T \neq 0$. Insertando esto en (13.3), igualando los coeficientes de $\cos x$ en ambos lados y utilizando las condiciones iniciales como arriba, obtenemos que T es la solución del PVI

$$T''(t) + 4T(t) = -\cos(2t), \quad t > 0; \quad T(0) = 0, \quad T'(0) = 0,$$

la cual es $T(t) = -t \sin(2t)/4$, luego

$$u_1(x, t) = -\frac{t}{4} \sin(2t) \cos x.$$

Combinando u_0 y u_1 concluimos que

$$u(x, t) = \cos(2t) \cos x - \frac{\varepsilon}{4} t \sin(2t) \cos x + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (13.4)$$

Esta serie es una buena aproximación asintótica de la solución del PVI dado cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ si t es restringido a algún intervalo fijo $[0, t_0]$. Pero en ausencia de una restricción de este tipo vemos que cuando $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, el término $(\varepsilon/4)t \sin(2t) \cos x$ es del mismo orden de magnitud que el primer término $\cos(2t) \cos x$ que es del orden de magnitud $\mathcal{O}(1)$. Tal término se llama secular, y su presencia significa que la serie de perturbación no es válida para valores de t muy grandes.

Para extender la validez de la serie a todo $t > 0$, utilizamos la expansiones de $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ en series de potencias para escribir

$$\begin{aligned} \cos\left(2t + \frac{\varepsilon t}{4}\right) &= \cos(2t) \cos \frac{\varepsilon t}{4} - \sin(2t) \sin \frac{\varepsilon t}{4} \\ &= \cos(2t) \left(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) - \sin(2t) \left(\frac{\varepsilon t}{4} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right) \\ &= \cos(2t) - \frac{\varepsilon t}{4} \sin(2t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Luego la expansión asintótica (13.4) puede ser escrita en la forma

$$u(x, t) = \cos x \cos\left(2t + \frac{\varepsilon t}{4}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

la cual no contiene el término secular identificado anteriormente. No obstante, términos de orden mayor en ε podrían contener términos seculares adicionales.

Ejemplo 13.8. El PVI de primer orden

$$\begin{aligned} u_t(x, t) + u_x(x, t) + \varepsilon u(x, t) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \cos x, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

donde $0 < \varepsilon \ll 1$, es un problema de perturbación regular porque el problema reducido también es de primer orden y ambos problemas poseen soluciones únicas. Escribiendo

$$u(x, t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \varepsilon^n$$

obtenemos la sucesión de PVI's

$$\begin{aligned} (u_0)_t(x, t) + (u_0)_x(x, t) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u_0(x, 0) &= \cos x, \quad -\infty < x < \infty; \\ (u_1)_t(x, t) + (u_1)_x(x, t) &= -u_0(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u_1(x, 0) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

etcétera. Utilizando el método de características (ver Sección 12.1) obtenemos $u_0(x, t) = \cos(x - t)$ y $u_1(x, t) = -t \cos(x - t)$, luego

$$u(x, t) = \cos(x - t) - \varepsilon t \cos(x - t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Tal como explicamos en el Ejemplo 13.7, $\varepsilon t \cos(x - t)$ es un término secular. Como el procedimiento para remover este término del ejemplo anterior no funciona en este caso, trataremos otra técnica el llamado método de escalas múltiples, el cual consiste en introducir una variable adicional $\tau = \varepsilon t$. Denotando por $v(x, t, \tau)$ la función incógnita nueva y comentando que v depende de t tanto directamente como indirectamente a través de τ , llegamos al problema

$$\begin{aligned} v_t(x, t, \tau) + \varepsilon v_\tau(x, t, \tau) + v_x(x, t, \tau) + \varepsilon v(x, t, \tau) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t, \tau > 0, \\ v(x, 0, 0) &= \cos x, \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Ahora poniendo

$$v(x, t, \tau) \approx \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t, \tau) \varepsilon^n$$

deducimos que v_0 y v_1 son soluciones de los problemas respectivos

$$\begin{aligned} (v_0)_t(x, t, \tau) + (v_0)_x(x, t, \tau) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t, \tau > 0, \\ v_0(x, 0, 0) &= \cos x, \quad -\infty < x < \infty; \\ (v_1)_t(x, t, \tau) + (v_1)_x(x, t, \tau) &= -(v_0)_\tau(x, t, \tau) - (v_0)(x, t, \tau), \quad -\infty < x < \infty, \quad t, \tau > 0, \\ v_1(x, 0, 0) &= 0, \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Buscamos la solución del problema para v_0 en la forma $v_0(x, t, \tau) = f(x, t)\varphi(\tau)$, donde φ satisface la condición $\varphi(0) = 1$ pero a parte de esto es una función arbitraria. Entonces el problema para v_0 se reduce al PVI

$$f_t(x, t) + f_x(x, t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad f(x, 0) = \cos x, \quad -\infty < x < \infty$$

con la solución $f(x, t) = \cos(x - t)$, luego $v_0(x, t, \tau) = \varphi(\tau) \cos(x - t)$. Insertando esto en el lado derecho de la EDP para v_1 obtenemos la ecuación

$$(v_1)_t(x, t, \tau) + (v_1)_x(x, t, \tau) = -(\varphi'(\tau) + \varphi(\tau)) \cos(x - t),$$

cuya solución satisfaciendo la condición $v_1(x, 0, 0) = 0$ es

$$v_1(x, t, \tau) = -(\varphi'(\tau) + \varphi(\tau))t \cos(x - t).$$

Concluimos que la solución del problema modificado es

$$v(x, t, \tau) = \varphi(\tau) \cos(x - t) - \varepsilon(\varphi'(\tau) + \varphi(\tau))t \cos(x - t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Para eliminar el término secular en el lado derecho arriba elegimos φ en tal forma que $\varphi' + \varphi = 0$. En virtud de la condición anterior $\varphi(0) = 1$ obtenemos $\varphi(\tau) = e^{-\tau}$, luego $v(x, t, \tau) = e^{-\tau} \cos(x - t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, lo que en virtud de $\tau = \varepsilon t$ significa que

$$u(x, t) = e^{-\varepsilon t} \cos(x - t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Aplicando el método de características al problema original obtenemos que su solución exacta es, efectivamente, $u(x, t) = e^{-\varepsilon t} \cos(x - t)$. El término adicional $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ representa “ruido” generado por la naturaleza aproximativa de la técnica de expansión asintótica.

13.3. Problemas de perturbación singulares

Para este tipo de problemas tenemos que construir soluciones diferentes válidas en regiones diferentes. Luego las emparejamos en forma apropiada para genera una solución válida en todas partes.

Ejemplo 13.9. Consideremos el PVI

$$\begin{aligned} \varepsilon(u_t(x, t) + 2u_x(x, t)) + u(x, t) &= \sin t, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

donde $0 < \varepsilon \ll 1$. Este es un problema de perturbación singular porque el problema reducido (no perturbado) no contiene derivadas de u . Siguiendo el procedimiento estándar tratamos buscar una solución en la forma

$$u(x, t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)\varepsilon^n.$$

Insertando este planteo en la EDP obtenemos

$$u_0(x, t) = \sin t; \quad u_n(x, t) = -(u_{n-1})_t(x, t) - 2(u_{n-1})_x(x, t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

A partir de esta relación de recurrencia obtenemos

$$u_{2n} = (-1)^n \sin t, \quad u_{2n+1} = (-1)^{n+1} \cos t, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

luego

$$u(x, t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^{2n} \right) \sin t - \varepsilon \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^{2n} \right) \cos t = \frac{\sin t - \varepsilon \cos t}{1 + \varepsilon^2}.$$

No obstante, es obvio inmediatamente que esta función no satisface la condición inicial. También, si $t \approx \varepsilon$, utilizando la expansión en series de $\cos \varepsilon$ y $\sin \varepsilon$,

$$\sin t - \varepsilon \cos t \approx \sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon = (\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) - \varepsilon(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) = \mathcal{O}(\varepsilon^2);$$

en otras palabras, para $t = \mathcal{O}(\varepsilon)$ los dos términos en $u(x, t)$ son del mismo orden, lo que no es permitido en una serie asintótica. Concluimos que esta serie no está bien ordenada en la región donde $t = \mathcal{O}(\varepsilon)$, por lo tanto no es una representación válida de la solución en esta región. Esto significa que debemos buscar una serie diferente en una capa límite del grosor $\mathcal{O}(\varepsilon)$ cerca del eje x ($t = 0$). Para construir esta serie nueva aplicamos un cambio de variables

$$\tau = t/\varepsilon, \quad u(x, t) = u(x, \varepsilon\tau) = u^i(x, \tau)$$

que corresponde a un estiramiento del argumento temporal cerca de $t = 0$. Bajo esta transformación el PVI asume la forma

$$\begin{aligned} u_\tau^i(x, \tau) + 2\varepsilon u_x^i(x, \tau) + u^i(x, \tau) &= \sin(\varepsilon\tau) = \varepsilon\tau + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0, \\ u^i(x, 0) &= x, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

Para la solución interior u^i de este PVI de capa límite buscamos una expansión asintótica de la forma

$$u^i(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^i(x, \tau) \varepsilon^n.$$

La EDP y las condiciones iniciales nuevas entregan la sucesión de PVI's

$$\begin{aligned} (u_0^i)_\tau(x, \tau) + u_0^i(x, \tau) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0, \\ u_0^i(x, 0) &= x, \quad -\infty < x < \infty; \\ (u_1^i)_\tau(x, \tau) + u_1^i(x, \tau) &= -2(u_0^i)_x(x, \tau), \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0, \\ u_1^i(x, 0) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

etcétera. Restringiendo nuestra atención a los primeros dos términos obtenemos a partir del primer problema

$$u_0^i(x, \tau) = xe^{-\tau},$$

y a partir del segundo problema (buscando una integral particular de la forma $a\tau e^{-\tau}$, $a = \text{const.}$),

$$u_1^i(x, \tau) = \tau - 1 + (1 - 2\tau)e^{-\tau},$$

por lo tanto

$$u_1^i(x, \tau) = xe^{-\tau} + \varepsilon(\tau - 1 + (1 - 2\tau)e^{-\tau}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Renombramos la primera solución como solución exterior, denotada por u^e :

$$u^e(x, t) = \frac{\sin t - \varepsilon \cos t}{1 + \varepsilon^2} = \sin t - \varepsilon \cos t + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Ahora tenemos que emparejar u^e (válida para $t = \mathcal{O}(1)$) con u^i (válida para $t = \mathcal{O}(\varepsilon)$) hasta el orden de ε considerado (aquí, $\mathcal{O}(\varepsilon)$) en alguna región de validez común. Para tal efecto escribimos primeramente la solución exterior en términos de la variable interior $\tau = t/\varepsilon$ y la expandimos para τ fijo y ε pequeño, listando todos los términos hasta $\mathcal{O}(\varepsilon)$, después de lo cual reversionamos a t :

$$(u^e)^i \approx \sin t - \varepsilon \cos t + \dots = \sin(\varepsilon\tau) - \varepsilon \cos(\varepsilon\tau) + \dots = \varepsilon(\tau - 1) + \dots = t - \varepsilon + \dots$$

Por otro lado, escribimos la solución interior en términos de la variable exterior $t = \varepsilon\tau$ y la expandimos para t fijo y ε pequeño hasta el mismo orden:

$$(u^i)^e = xe^{-t/\varepsilon} + \varepsilon \left(\frac{t}{\varepsilon} - 1 + \left(1 - 2\frac{t}{\varepsilon} \right) e^{-t/\varepsilon} \right) + \dots = t - \varepsilon + \dots$$

(los demás términos son $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$). Finalmente imponemos la condición $(u^e)^i = (u^i)^e$ hasta términos $\mathcal{O}(\varepsilon)$. En nuestro caso esto ya está satisfecho, por lo tanto ambas soluciones emparejan.

Como la región común de validez no es obvia, es útil considerar una solución compuesta de la forma

$$u^c = u^e + u^i - (u^e)^i = u^e + u^i - (u^i)^e.$$

Esto es válido uniformemente para $t > 0$ ya que

$$\begin{aligned} (u^c)^e &= (u^e)^e + (u^i)^e - ((u^i)^e)^e = u^e + (u^i)^e - (u^i)^e = u^e, \\ (u^c)^i &= (u^e)^i + (u^i)^i - ((u^e)^i)^i = (u^e)^i + u^i - (u^e)^i = u^i. \end{aligned}$$

Aquí obtenemos

$$u(x, t) \approx u^c(x, t) = \sin t - \varepsilon \cos t + (x - 2t + \varepsilon)e^{-t/\varepsilon} + \dots$$

Ejemplo 13.10. Consideremos el problema elíptico en una franja semi-infinita

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Delta u)(x, y) + u_x(x, y) + u_y(x, y) &= 0, \quad x > 0, \quad 0 < y < 1, \\ u(x, 0) &= e^{-x}, \quad u(x, 1) = p(x), \quad x > 0, \\ u(0, y) &= y, \quad u(x, y) \text{ acotada cuando } x \rightarrow \infty, \quad 0 < y < 1, \end{aligned}$$

donde $0 < \varepsilon \ll 1$ y

$$p(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{para } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{para } x \geq 1. \end{cases}$$

Este es un problema de perturbación singular porque el PVF perturbado es de segundo orden mientras que el PVF reducido es de primer orden. Para

$$u(x, y) \approx \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \varepsilon^n$$

obtenemos que u_0 es la solución del PVF

$$\begin{aligned}(u_0)_x(x, y) + (u_0)_y(x, y) &= 0, \quad x > 0, \quad 0 < y < 1, \\ u_0(x, 0) &= e^{-x}, \quad u_0(x, 1) = p(x), \quad x > 0, \\ u_0(0, y) &= y, \quad u_0(x, y) \text{ acotada cuando } x \rightarrow \infty, \quad 0 < y < 1,\end{aligned}$$

u_1 es la solución del PVF

$$\begin{aligned}(u_1)_x(x, y) + (u_1)_y(x, y) &= -(\Delta u_0)(x, y), \quad x > 0, \quad 0 < y < 1, \\ u_1(x, 0) &= 0, \quad u_1(x, 1) = 0, \quad x > 0, \\ u_1(0, y) &= 0, \quad u_1(x, y) \text{ acotada cuando } x \rightarrow \infty, \quad 0 < y < 1,\end{aligned}$$

etcétera.

Podemos hallar u_0 por el método de características (ver Capítulo 12), utilizando $y = 1$ como línea de datos. Si $x = x(y)$ es una curva característica, entonces sobre ésta,

$$\frac{d}{dy} u_0(x(y), y) = (u_0)_x(x(y), y) x'(y) + (u_0)_y(x(y), y),$$

luego $x'(y) = 1$ implica que $du_0/dy = 0$, por lo tanto

$$x = y + c, \quad u_0(x, y) = c', \quad c, c' = \text{const.}$$

La ecuación de la característica por los puntos (x, y) y $(x_0, 1)$ es $x = y + x_0 - 1$, y a lo largo de esta recta,

$$u_0(x, y) = c' = u_0(x_0, 1) = p(x_0) = p(x - y + 1);$$

por lo tanto la solución del PVF dado es

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon) = p(x - y + 1) + \mathcal{O}(\varepsilon) = \begin{cases} y - x + \mathcal{O}(\varepsilon) & \text{para } 0 < x < y, \\ \mathcal{O}(\varepsilon) & \text{para } x \geq y. \end{cases} \quad (13.5)$$

Como esta solución no satisface las otras condiciones de borde tenemos que introducir dos capas límites. En la capa límite cerca de $y = 0$ aplicamos la sustitución $\eta = y/\delta(\varepsilon)$, escribiendo $u(x, y) = u(x, \delta(\varepsilon)\eta) = v(x, \eta)$, llegando al PVF nuevo

$$\varepsilon v_{xx} + \frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} v_{\eta\eta} + \frac{v_\eta}{\delta(\varepsilon)} = 0, \quad v(x, 0) = e^{-x}. \quad (13.6)$$

La capa límite no especificada del grosor $\delta(\varepsilon)$ debe ser escogida en tal forma que el término con $v_{\eta\eta}$ es uno de los términos dominantes en (13.6). Comparando los coeficientes de todos los términos en (13.6) vemos que existen tres posibilidades:

- (i) $\varepsilon/\delta^2(\varepsilon) \approx \varepsilon$;
- (ii) $\varepsilon/\delta^2(\varepsilon) \approx 1$; y
- (iii) $\varepsilon/\delta^2(\varepsilon) \approx 1/\delta(\varepsilon)$.

No es difícil verificar que los casos (i) y (ii) no satisfacen nuestro requerimiento de magnitud, mientras que (iii) sí lo satisface. Por lo tanto, podemos (por simplicidad) escoger $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, y el PVF se convierte en

$$\varepsilon^2 v_{xx} + v_{\eta\eta} + \varepsilon v_x + v_\eta = 0, \quad v(x, 0) = e^{-x}.$$

Escribiendo

$$v(x, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, \eta) \varepsilon^n$$

obtenemos a partir de la EDP y de las condiciones de borde satisfechas por v que

$$(v_0)_{\eta\eta} + (v_0)_\eta = 0, \quad v_0(x, 0) = e^{-x}$$

con la solución

$$v_0(x, \eta) = \alpha(x) + (e^{-x} - \alpha(x))e^{-\eta},$$

donde α es una función arbitraria; por lo tanto,

$$u(x, y) = v(x, y) = v_0(x, \eta) + \mathcal{O}(\varepsilon) = \alpha(x) + (e^{-x} - \alpha(x))e^{-\eta} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (13.7)$$

Renombramos (13.5) como solución exterior u^e y (13.7) como primera solución interior $u^{i,1}$, y las emparejamos utilizando el método del Ejemplo 13.9. Entonces, expandiendo p en potencias de ε tenemos

$$\begin{aligned} (u^e)^{i,1} &= p(x - \varepsilon\eta + 1) + \mathcal{O}(\varepsilon) = p(x + 1) + \mathcal{O}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon), \\ (u^{i,1})^e &= \alpha(x) + (e^{-x} - \alpha(x))e^{-y/\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) = \alpha(x) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (13.8)$$

es decir $(u^e)^{i,1} = (u^{i,1})^e$ hasta términos $\mathcal{O}(1)$ si

$$\alpha(x) = 0, \quad x > 0. \quad (13.9)$$

La segunda capa límite debe ser construida cerca de $x = 0$. Procediendo como arriba (esta vez con el término transformado u_{xx} como uno de los términos dominantes en la EDP nueva) concluimos nuevamente que el grosor correcto de la capa límite es $\delta(\varepsilon) \approx \varepsilon$, por lo tanto ponemos $\xi = x/\varepsilon$. Escribiendo $u(x, y) = u(\varepsilon\xi, y) = w(\xi, y)$ obtenemos el PVF nuevo

$$w_{\xi\xi} + \varepsilon^2 w_{yy} + w_\xi + \varepsilon w_y = 0, \quad w(0, y) = y.$$

Suponiendo que

$$w(\xi, y) \approx \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\xi, y) \varepsilon^n$$

llegamos al problema

$$(w_0)_{\xi\xi} + (w_0)_\xi = 0, \quad w_0(0, y) = y,$$

con la solución

$$w_0(\xi, y) = \beta(y) + (y - \beta(y))e^{-\xi},$$

donde β es otra función arbitraria; por lo tanto

$$u(x, y) = w(\xi, y) = w_0(\xi, y) + \mathcal{O}(\varepsilon) = \beta(y) + (y - \beta(y))e^{-\xi} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (13.10)$$

Renombramos (13.10) como segunda solución interior $u^{i,2}$, la cual emparejamos con u^e hasta términos $\mathcal{O}(1)$. Tal como arriba tenemos

$$\begin{aligned}(u^e)^{i,2} &= p(\varepsilon\xi - y + 1) + \mathcal{O}(\varepsilon) = p(-y + 1) + \mathcal{O}(\varepsilon) = y + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ (u^{i,2})^e &= \beta(y) + (y - \beta(y))e^{-x/\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) = \beta(y) + \mathcal{O}(\varepsilon),\end{aligned}\tag{13.11}$$

luego

$$\beta(y) = y.\tag{13.12}$$

Se puede verificar que en este caso la solución compuesta es

$$u^c = u^e + u^{i,1} + u^{i,2} - (u^{i,1})^e - (u^{i,2})^e = u^e + u^{i,1} + u^{i,2} - (u^e)^{i,1} - (u^e)^{i,2},$$

porque $(u^{i,1})^{i,2} = (u^{i,1})^e$ y $(u^{i,2})^{i,1} = (u^{i,2})^e$. Entonces, en virtud de (13.5)–(13.12), la solución asintótica del PVF dado hasta términos $\mathcal{O}(1)$ es

$$\begin{aligned}u(x, y) &\approx u^c(x, y) = p(x - y + 1)(e^{-x} - p(x + 1))e^{-y/\varepsilon} + (y - p(1 - y))e^{-x/\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \begin{cases} y - x + e^{-x-y/\varepsilon} & \text{para } 0 < x < y, \\ e^{-x-y/\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) & \text{para } x \geq y. \end{cases}\end{aligned}$$

Comentario 13.2.

- (i) No consideramos efectos causados por la incompatibilidad de los valores de frontera en los puntos “esquina” $(0, 0)$ y $(0, 1)$.
- (ii) Si hubiesemos tratado de construir la primera solución de capa límite cerca de $y = 1$ en lugar de $y = 0$ (y luego utilizar $y = 0$ como línea de datos para calcular el primer término en u^e) habríamos fracasado. En esta región sería necesario sustituir $\eta = (1 - y)/\varepsilon$, y poniendo $u(x, y) = u(x, 1 - \varepsilon\eta) = v(x, \eta)$ llegaríamos al PVF

$$\varepsilon^2 v_{xx} + v_{\eta\eta} + \varepsilon v_x - v_\eta = 0, \quad v(x, 0) = p(x),$$

a partir del cual

$$(v_0)_{\eta\eta} - (v_0)_\eta = 0, \quad v_0(x, 0) = p(x).$$

Esto entregaría

$$v_0(x, \eta) = \alpha(x) + (p(x) - \alpha(x))e^\eta.$$

Esta fórmula no es buena para el emparejamiento ya que $e^\eta = e^{y/\varepsilon} \rightarrow \infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0+$ con y fijo.

Métodos de variables complejas

Ciertos problemas lineales elípticos en dos dimensiones resultan ser difíciles de resolver en un marco de coordenadas cartesianas. En muchos casos de este tipo es recomendable pasar a formulaciones en términos de variables complejas, las que pueden ayudarnos a encontrar las soluciones en forma mucho más elegante y rápida. Aunque los números complejos ya han sido mencionados en los Capítulos 1, 3, 8, 9, y 11, presentaremos aquí una breve reseña de sus reglas de manipulación y algunos resultados esenciales relacionados a funciones complejas.

14.1. Ecuaciones elípticas

Un *número complejo* es una expresión de la forma $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, donde x e y son llamados *parte real* y *parte imaginaria* de z , respectivamente. El número $\bar{z} = x - iy$ se llama *complejo conjugado* de z y

$$r = |z| = (z\bar{z})^{1/2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

se llama *módulo* de z . Un número complejo también puede ser escrito en *forma polar* como

$$z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

donde el ángulo $\theta \in (-\pi, \pi]$ se llama *argumento* de z y es determinado a partir de las igualdades $\cos \theta = x/r$, $\sin \theta = y/r$. Obviamente,

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = re^{-i\theta}.$$

La adición y la multiplicación de números complejos se llevan a cabo de acuerdo a las reglas algebraicas habituales para números reales.

Una *función compleja* de una variable compleja posee la forma general

$$f(z) = (\operatorname{Re} f)(x, y) + i(\operatorname{Im} f)(x, y),$$

donde $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ son sus partes real e imaginaria, respectivamente. Una función f de este tipo se llama *holomorfa* si su derivada $f'(z)$ existe en todos los puntos de su dominio de definición. Una función holomorfa es *analítica*, es decir puede ser expandida en una serie de potencias convergente.

Ejemplo 14.1. Si $f(z) = z^2$, entonces $(\operatorname{Re} f)(x, y) = x^2 - y^2$, $(\operatorname{Im} f)(x, y) = 2xy$.

Teorema 14.1. Una función f es holomorfa si y sólo si f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$(\operatorname{Re} f)_x = (\operatorname{Im} f)_y, \quad (\operatorname{Im} f)_x = -(\operatorname{Re} f)_y. \quad (14.1)$$

En este caso, tanto $\operatorname{Re} f$ como $\operatorname{Im} f$ son armónicas, es decir son soluciones de la ecuación de Laplace.

Comentario 14.1.

- (i) Supongamos que una función suave f de variables reales x e y es expresada en términos de las variables complejas z y $\bar{z}$, es decir $f(x, y) = g(z, \bar{z})$. Entonces a partir de la regla de la cadena de la diferenciación se tiene que

$$\begin{aligned} f_x &= g_z + g_{\bar{z}}, \\ f_y &= i(g_z - g_{\bar{z}}), \\ f_{xx} &= g_{zz} + 2g_{z\bar{z}} - g_{\bar{z}\bar{z}}, \\ f_{yy} &= -g_{zz} + 2g_{z\bar{z}} - g_{\bar{z}\bar{z}}, \\ f_{xy} &= f_{yx} = i(g_{zz} - g_{\bar{z}\bar{z}}). \end{aligned} \tag{14.2}$$

- (ii) La ecuación de Laplace, la cual no puede ser integrada fácilmente en términos de variables reales, posee una solución muy simple en términos de variables complejas. Si $u(x, y) = v(z, \bar{z})$, entonces en virtud de (14.2),

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 4v_{z\bar{z}}, \tag{14.3}$$

luego $\Delta u(x, y) = 0$ es equivalente con $v_{z\bar{z}} = 0$. Es trivial ver que esta última ecuación posee la solución $v(z, \bar{z}) = \varphi(z) + \psi(\bar{z})$, donde φ y ψ son funciones arbitrarias analíticas de z .

Si queremos la solución general real, entonces se debe tener que $v(z, \bar{z}) = \bar{v}(\bar{z}, z)$, es decir $\varphi(z) + \bar{\psi}(\bar{z}) = \bar{\varphi}(\bar{z}) + \psi(z)$ o

$$\varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z}) = \psi(z) - \bar{\psi}(\bar{z}),$$

es decir $\text{Im } \varphi = \text{Im } \psi$. Utilizando esta igualdad y (14.1) obtenemos que igualmente $\text{Re } \varphi = \text{Re } \psi$, es decir $\psi = \varphi$; por lo tanto, la solución general real de la ecuación de Laplace bi-dimensional es

$$v(z, \bar{z}) = \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}), \tag{14.4}$$

donde φ es una función analítica arbitraria.

- (iii) Una discusión similar puede ser aplicada a la ecuación biarmónica $\Delta \Delta u(x, y) = 0$. Ya vimos que $\Delta v = 4v_{z\bar{z}}$, donde $v(z, \bar{z}) = u(x, y)$, por lo tanto

$$\Delta \Delta v(x, y) = 16v_{zz\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z});$$

por lo tanto la ecuación biarmónica es equivalente a

$$v_{zz\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z}) = 0.$$

Entonces, de acuerdo al ítem (ii),

$$\Delta v(z, \bar{z}) = 4v_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}).$$

Integrando y aplicando el argumento de (ii), llegamos a la solución real general

$$v(z, \bar{z}) = \bar{z}\Phi(z) + z\bar{\Phi}(\bar{z}) + \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}),$$

donde Φ y φ son funciones arbitrarias analíticas de z .

Ejemplo 14.2. Consideremos el PVF

$$\Delta u = 8 \quad \text{en } D; \quad u = 1 - 2 \cos \theta - \cos(2\theta) + 2 \sin(2\theta) \quad \text{sobre } \partial D,$$

donde D y ∂D denotan el disco circular unitario y su frontera, respectivamente, y r y θ son las coordenadas polares correspondientes. Sobre ∂D se tiene

$$\begin{aligned} z = e^{i\theta} = \sigma, \quad \bar{z} = e^{-i\theta} = \sigma^{-1}, \\ \cos(n\theta) = \frac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = \frac{1}{2}(\sigma^n + \sigma^{-n}), \\ \sin(n\theta) = -\frac{1}{2}i(e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = -\frac{1}{2}i(\sigma^n - \sigma^{-n}), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (14.5)$$

por lo tanto, utilizando (14.3) podemos expresar el PVF en la forma equivalente

$$v_{z\bar{z}} = 2 \quad \text{en } D; \quad v = -\left(\frac{1}{2} - i\right)\sigma^{-2} - \sigma^{-1} + 1 - \sigma - \left(\frac{1}{2} + i\right)\sigma^2 \quad \text{sobre } \partial D.$$

Es fácil ver que $2z\bar{z}$ es una solución particular de la EDP, es decir en virtud de (14.4) la solución general de la ecuación es

$$v(z, \bar{z}) = \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}) + 2z\bar{z}. \quad (14.6)$$

Como la función arbitraria φ es analítica, permite una expansión en serie de la forma

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (14.7)$$

Reemplazando (14.7) en (14.6) y luego v con $z = \sigma$ y $\bar{z} = \sigma^{-1}$ en las condiciones de borde y realizando la habitual comparación de coeficientes obtenemos

$$a_0 + \bar{a}_0 + 2 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = -\left(\frac{1}{2} + i\right), \quad a_n = 0 \quad (n \neq 0, 1, 2).$$

Por lo tanto, $a_0 + \bar{a}_0 = -1$, y a partir de (14.6) y (14.7) obtenemos la solución

$$\begin{aligned} v(z, \bar{z}) &= a_0 + \bar{a}_0 + a_1 z + \bar{a}_1 \bar{z} + a_2 z^2 + \bar{a}_2 \bar{z}^2 + 2z\bar{z} \\ &= -1 - z - \bar{z} - \left(\frac{1}{2} + i\right)z^2 - \left(\frac{1}{2} - i\right)\bar{z}^2 + 2z\bar{z}. \end{aligned}$$

En coordenadas cartesianas centradas en el centro del disco esto se convierte en

$$u(x, y) = -1 - 2x + x^2 + 4xy + 3y^2.$$

Ejemplo 14.3. Para resolver el PVF elíptico

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 4 \quad \text{en } D; \quad u = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{3}{2} \sin(2\theta) \quad \text{sobre } \partial D,$$

donde la notación es la misma que en el Ejemplo 14.2, utilizamos un procedimiento ligeramente modificado. En primer lugar, considerando (14.2) vemos que $v(z, \bar{z}) = u(x, y)$ es la solución del problema

$$(1 + 2i)v_{zz} - 6v_{z\bar{z}} + (1 - 2i)v_{\bar{z}\bar{z}} = -4 \quad \text{en } D; \quad v = -\frac{1 - 3i}{4}\sigma^{-2} + \frac{3}{2} - \frac{1 + 3i}{4} \quad \text{sobre } \partial D. \quad (14.8)$$

Aplicaremos ahora una transformación simple de la forma $\zeta = z + \bar{\alpha}\bar{z}$, $\bar{\zeta} = \bar{z} + \alpha z$, $v(z, \bar{z}) = w(\zeta, \bar{\zeta})$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$ es elegido en tal forma que el lado izquierdo de la EDP para w consiste solamente en la derivada de segundo orden mixta. Mediante la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} v_{zz} &= w_{\zeta\zeta} + 2\alpha w_{\zeta\bar{\zeta}} + \alpha^2 w_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}, \\ v_{z\bar{z}} &= \bar{\alpha} w_{\zeta\zeta} + (1 + \alpha\bar{\alpha}) w_{\zeta\bar{\zeta}} + \alpha w_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}, \\ v_{\bar{z}\bar{z}} &= \bar{\alpha}^2 w_{\zeta\zeta} + 2\bar{\alpha} w_{\zeta\bar{\zeta}} + w_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}. \end{aligned}$$

Reemplazando esto en la EDP en (14.8) obtenemos que los coeficientes tanto de $w_{\zeta\zeta}$ como de $w_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}$ se anulan si α es una raíz de la ecuación cuadrática

$$(1 + 2i)\alpha^2 - 6\alpha + 1 - 2i = 0,$$

es decir si $\alpha = (1 - 2i)$ o $\alpha = (1 - 2i)/5$. Eligiendo la primera raíz (por ejemplo) llegamos a la transformación

$$\zeta = z + (1 + 2i)\bar{z}, \quad \bar{\zeta} = \bar{z} + (1 - 2i)z, \quad (14.9)$$

la cual entrega la ecuación $w_{\zeta\bar{\zeta}} = 1/4$ con la solución general

$$w(\zeta, \bar{\zeta}) = \varphi(\zeta) + \bar{\varphi}(\bar{\zeta}) + \frac{1}{4}\zeta\bar{\zeta}, \quad (14.10)$$

donde $\varphi(\zeta)$ es una función arbitraria analítica. Tal como en (14.7), y considerando (14.9), escribimos ahora

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + (1 + 2i)\bar{z})^n,$$

es decir en virtud de (14.9) y (14.10),

$$v(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n (z + (1 + 2i)\bar{z})^n + \bar{a}_n (\bar{z} + (1 - 2i)z)^n \right) + \frac{1}{4} (z + (1 + 2i)\bar{z}) (\bar{z} + (1 - 2i)z). \quad (14.11)$$

Sobre ∂D , esta identidad y la condición de borde en (14.8) implican la igualdad

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n (\sigma + (1 + 2i)\sigma^{-1})^n + \bar{a}_n (\sigma^{-1} + (1 - 2i)\sigma)^n \right) + \frac{1}{4} ((1 + 2i)\sigma^{-2} + 6 + (1 - 2i)\sigma^2) \\ &= -\frac{1 - 3i}{4}\sigma^{-2} + \frac{3}{2} - \frac{1 + 3i}{4}\sigma^2. \end{aligned}$$

Expandiendo los términos del lado izquierdo e igualando los coeficientes de cada potencia de σ en ambos lados, notamos inmediatamente que $a_n = 0$ para $n = 3, 4, \dots$, y que en este caso,

$$\begin{aligned} a_0 + \bar{a}_0 + 2(1 + 2i)a_2 + 2(1 - 2i)\bar{a}_2 + \frac{3}{2} &= \frac{3}{2}, \\ a_1 + (1 - 2i)\bar{a}_1 &= 0, \\ a_2 - (3 + 4i)\bar{a}_2 + \frac{1 - 2i}{4} &= -\frac{1 + 3i}{4}. \end{aligned} \quad (14.12)$$

La segunda y la tercera ecuación, conjuntamente con sus conjugadas, entregan los sistemas

$$a_1 + (1 - 2i)\bar{a}_1 = 0, \quad (1 + 2i)a_1 + \bar{a}_1 = 0$$

y

$$a_2 - (3 + 4i)\bar{a}_2 = -\frac{2+i}{4}, \quad (-3 + 4i)a_2 + \bar{a}_2 = -\frac{2-i}{4},$$

a partir de los cuales $a_1 = 0$ y $a_2 = (2+i)/16$. Reemplazando a_2 en la primera igualdad en (14.12) obtenemos $a_0 + \bar{a}_0 = 0$, luego a partir de (14.11),

$$\begin{aligned} v(z, \bar{z}) &= a_0 + \bar{a}_0 + a_1(z + (1 + 2i)\bar{z}) + \bar{a}_1(\bar{z} + (1 - 2i)z) \\ &\quad + a_2(z + (1 + 2i)\bar{z})^2 + \bar{a}_2(\bar{z} + (1 - 2i)z)^2 \\ &= -\frac{1+3i}{4}z^2 + \frac{3}{2}z\bar{z} - \frac{1-3i}{4}\bar{z}^2, \end{aligned}$$

o en coordenadas cartesianas,

$$u(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2.$$

14.2. Sistemas de ecuaciones

Para ilustrar la eficiencia del método de variables complejas para resolver sistemas lineales bi-dimensionales de EDPs consideremos el modelo de la deformación plana de un cuerpo elástico. Este estado es caracterizado por un vector de desplazamiento $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ definido en el dominio bi-dimensional ocupado por el cuerpo. En la ausencia de fuerzas de cuerpo, $\mathbf{u}$ satisface el sistema de EDPs

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)((u_1)_{xx} + (u_2)_{xy}) + \mu\Delta u_1 &= 0, \\ (\lambda + \mu)((u_1)_{xy} + (u_2)_{yy}) + \mu\Delta u_2 &= 0, \end{aligned} \tag{14.13}$$

donde λ y μ son constantes físicas y Δ es el Laplaciano. Se supone que D es acotado, simplemente conexo (a grandes rasgos, esto significa que D no tiene “hoyos”), y se considera el problema de Dirichlet para (14.13); es decir el PVF con el desplazamiento prescrito en la frontera:

$$u_1|_{\partial D} = f_1, \quad u_2|_{\partial D} = f_2,$$

donde f_1 y f_2 son funciones dadas. Queremos determinar $\mathbf{u}$ en cada punto $(x, y) \in D$.

Ejemplo 14.4. Utilizando la misma notación que en el Ejemplo 14.2 se considera el PVF

$$2((u_1)_{xx} + (u_2)_{xy}) + \Delta u_1 = 0, \quad 2((u_1)_{xy} + (u_2)_{yy}) + \Delta u_2 = 0 \quad \text{en } D, \tag{14.14}$$

$$u_1|_{\partial D} = \frac{1}{2}\sin(2\theta), \quad u_2|_{\partial D} = \cos\theta. \tag{14.15}$$

Para tratar este problema en términos de variables complejas, definimos el desplazamiento complejo $U := u_1 + iu_2$, observando que

$$(u_1)_x + (u_2)_y = (u_1)_z + u_{1,\bar{z}} + iu_{2,z} - iu_{2,\bar{z}} = (u_1 + iu_2)_z + (u_1 - iu_2)_{\bar{z}} = U_z + \bar{U}_{\bar{z}}. \tag{14.16}$$

Luego reescribimos el sistema (14.14) en la forma

$$2((u_1)_x + (u_2)_y)_x + \Delta u_1 = 0, \quad 2((u_1)_x + (u_2)_y)_y + \Delta u_2 = 0,$$

donde comentamos que en virtud de (14.2) tenemos la igualdad operacional $\partial_x + i\partial_y = 2\partial_{\bar{z}}$. Multiplicando la segunda ecuación arriba por i , sumándola a la primera, y utilizando (14.16) y (14.3) obtenemos

$$0 = 2(\partial_x + i\partial_y)((u_1)_x + (u_2)_y) + \Delta(u_1 + iu_2) = 4\partial_{\bar{z}}(U_z + \bar{U}_{\bar{z}}) + \Delta U = 4((U_z + \bar{U}_{\bar{z}})_{\bar{z}} + U_{z\bar{z}}),$$

o $(2U_z + \bar{U}_{\bar{z}})_{\bar{z}} = 0$ con la solución general

$$2U_z + \bar{U}_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\alpha'(z),$$

donde α' es una función analítica de z . El sistema algebraico formado por esta ecuación y su conjugada entrega

$$U_z = \frac{1}{3}\alpha'(z) - \frac{1}{6}\bar{\alpha}'(\bar{z}); \quad (14.17)$$

luego, por integración,

$$U(z, \bar{z}) = \frac{1}{3}\alpha(z) - \frac{1}{6}z\bar{\alpha}'(\bar{z}) + \bar{\beta}(\bar{z}), \quad (14.18)$$

donde β es otra función analítica de z .

Para investigar la arbitrariedad de α y β , supongamos que p y q son funciones de z tales que $\alpha + p$ y $\beta + q$ generen el mismo desplazamiento U que α y β . Entonces de acuerdo a (14.17),

$$\frac{1}{3}(\alpha'(z) + p'(z)) - \frac{1}{6}(\bar{\alpha}'(\bar{z}) + \bar{p}'(\bar{z})) = \frac{1}{3}\alpha'(z) - \frac{1}{6}\bar{\alpha}'(\bar{z}),$$

lo que implica que $2p'(z) - \bar{p}'(\bar{z}) = 0$. Esta ecuación conjuntamente con su conjugada entrega $p'(z) = 0$, luego $p(z) = c$, donde c es un número complejo. Utilizando (14.18) obtenemos ahora

$$\frac{1}{3}\alpha(z) + \frac{1}{3}c - \frac{1}{6}z\bar{\alpha}'(\bar{z}) + \bar{\beta}(\bar{z}) + \bar{q}(\bar{z}) = \frac{1}{3}\alpha(z) - \frac{1}{6}z\bar{\alpha}'(\bar{z}) + \bar{\beta}(\bar{z}),$$

es decir $q(z) = -\bar{c}/3$. La arbitrariedad generada por la constante compleja c en las funciones α y β puede ser eliminada si imponemos una condición adicional. Por ejemplo, si D contiene el origen, podemos exigir que

$$\alpha(0) = 0. \quad (14.19)$$

Tal como en la sección anterior, sea σ un punto genérico sobre la circunferencia ∂D . Entonces en virtud de (14.5) y considerando que $\bar{\sigma} = \sigma^{-1}$ podemos reescribir la condición de frontera (14.15) como

$$U|_{\partial D} = (u_1 + iu_2)|_{\partial D} = \frac{i}{4}(\sigma^{-2} + 2\sigma^{-1} + 2\sigma - \sigma^2);$$

por lo tanto, considerando (14.18) se tiene

$$\frac{1}{3}\alpha(\sigma) - \frac{1}{6}\sigma\bar{\alpha}'(\sigma^{-1}) + \bar{\beta}(\sigma^{-1}) = \frac{i}{4}(\sigma^{-2} + 2\sigma^{-1} + 2\sigma - \sigma^2). \quad (14.20)$$

Como D es acotado y simplemente conexo podemos considerar expansiones en series de las funciones analíticas α y β de la forma

$$\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Insertando estas series en (14.20) obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} a_n \sigma^n - \frac{1}{6} n \bar{a}_n \sigma^{-n+2} + \bar{b}_n \sigma^{-n} \right) = \frac{i}{4} (\sigma^{-2} + 2\sigma^{-1} + 2\sigma - \sigma^2).$$

El paso siguiente consiste en igualar los coeficientes de cada potencia de σ en ambos lados, y claramente $a_n = b_n = 0$ para $n = 3, 4, \dots$. Por lo tanto, como (14.19) implica que $a_0 = 0$, los únicos coeficientes diferentes de cero son

$$\bar{b}_2 = \frac{i}{4}, \quad \bar{b}_1 = \frac{i}{2}, \quad \bar{b}_0 - \frac{1}{3} \bar{a}_2 = 0, \quad \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{6} \bar{a}_1 = \frac{i}{2}, \quad \frac{1}{3} a_2 = -\frac{i}{4}.$$

El coeficiente a_1 es calculado combinando la ecuación que satisface con su versión compleja conjugada. Finalmente obtenemos los coeficientes

$$a_1 = i, \quad a_2 = -\frac{3i}{4}, \quad b_0 = -\frac{i}{4}, \quad b_1 = -\frac{i}{2}, \quad b_2 = -\frac{i}{4},$$

los cuales generan las funciones

$$\alpha(z) = iz - \frac{3i}{4} z^2, \quad \beta(z) = -\frac{i}{4} - \frac{i}{2} z - \frac{i}{4} z^2$$

y en virtud de (14.18) el desplazamiento complejo

$$U(z, \bar{z}) = \frac{i}{4} (1 + 2z + 2\bar{z} - z^2 - z\bar{z} + \bar{z}^2).$$

En términos de coordenadas cartesianas, la solución del PVF dado es

$$u_1(x, y) = \operatorname{Re}(U(z, \bar{z})) = xy, \quad u_2(x, y) = \operatorname{Im}(U(z, \bar{z})) = \frac{1}{4} (1 + 4x - x^2 - y^2).$$

Comentario 14.2. Si las funciones f_1 y f_2 dadas sobre ∂D no son sumas finitas de potencias enteras de σ , estas deben ser expandidas en series de Fourier completas. Utilizando un argumento similar al usado en la Sección 8.1, podemos escribir una serie de este tipo en la forma

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \sigma^{-n}$$

(ver Capítulo 8), donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in\theta} d\theta.$$

Bibliografía

- [1] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, Fourth Ed., Springer-Verlag, New York, 1993.
- [2] C. Constanda, *Solution Techniques for Elementary Partial Differential Equations*, Second Ed., CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2010.
- [3] W. Craig, *A Course on Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2018.
- [4] C. David, P. Gosselet, *Équations aux dérivées partielles*, 3e édition, Dunod, Malakoff, France, 2022.
- [5] L. Debnath, *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Second Edition, Birkhäuser, Boston, 2005.
- [6] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Second Edition, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2010.
- [7] S.J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover, Mineola, NY, USA, 1993.
- [8] F. John, *Partial Differential Equations*, Fourth Edition, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [9] J. Ockendon, S. Howison, A. Lacey, A. Movchan, *Applied Partial Differential Equations*, revised edition, Oxford University Press, 2003.
- [10] D.F. Parker, *Fields, Flows and Waves. An Introduction to Continuum Models*, Springer, London, 2003.
- [11] M. Renardy & R.C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [12] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2008.
- [13] M. Shubin, *Invitation to Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2020.
- [14] D.G. Zill & M.R. Cullen, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería: Ecuaciones Diferenciales*, Tercera Edición, McGraw-Hill Interamericana, México D.F., 2008.
- [15] N. Xiang & C.R. Landschoot, Bayesian inference for acoustic direction of arrival analysis using spherical harmonics, *Entropy* **21** (2019), paper 579.