Introducción al Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones. Parte 1

(Versión Preliminar)

Gabriel N. Gatica
Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI^{2}MA)
y Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción
ggatica@ing-mat.udec.cl/ggatica@ci2ma.udec.cl
http://colo-colo.ing-mat.udec.cl/∼ggatica

Concepción, Chile, Enero 2012

Índice general

1. INTRODUCCION 5
1.1. Un problema de valores iniciales 5
1.2. Algunos conceptos y resultados preliminares 13
1.3. Un problema de valores de contorno en $\mathbb{R}$ 20
1.4. Un problema de valores de contorno en $\mathbb{R}^n$ 24
1.5. Nociones básicas de distribuciones 26
1.6. Ejercicios 32

2. DUALIDAD 37
2.1. Preliminares 37
2.2. Teorema de Representación de Riesz 39
2.3. Teorema de Hahn-Banach 47
2.3.1. Preliminares 48
2.3.2. Forma analítica del Teorema de Hahn-Banach 49
2.3.3. Otras consecuencias del Teorema de Hahn-Banach 52
2.3.4. Forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach 55
2.4. Un ejercicio simple con tres soluciones 60
2.4.1. Solución 1 61
2.4.2. Solución 2 61
2.4.3. Solución 3 62
2.5. Ejercicios 62

3. OPERADORES LINEALES 69
3.1. Preliminares 69
3.2. Caracterización de $\mathcal{L}(X, Y)$ 72

3.3. El operador adjunto en espacios normados . . . 75
3.4. El operador adjunto en espacios de Hilbert . . . 77
3.5. La ecuación fundamental . . . 80
3.5.1. Preliminares . . . 80
3.5.2. Anuladores y ortogonales . . . 81
3.6. El operador inverso . . . 86
3.7. Otros dos teoremas clásicos . . . 91
3.8. Acotamiento uniforme sin Lema de Baire . . . 97
3.9. Operadores con rango cerrado . . . 100
3.10. Un problema de teoría de aproximaciones . . . 106
3.11. Ejercicios. . . . 115

Capítulo 1

INTRODUCCION

En este capítulo se presentan algunos ejemplos de aplicación que ilustran la utilización de (o la necesidad de utilizar) diversas herramientas del Análisis Funcional, y se introducen los conceptos básicos más importantes relacionados con espacios métricos, espacios normados, espacios de Banach, espacios de Hilbert y distribuciones.

1.1. Un problema de valores iniciales

Dados un subconjunto abierto A de $\mathbb{R}^2$, $(t_0, y_0) \in A$, $\delta > 0$, y una función f a valores reales definida sobre A, consideremos el problema de valores iniciales: Hallar $\psi \in C^1((t_0, t_0+\delta)) \cap C([t_0, t_0+\delta])$ tal que

$$\psi'(t) \,=\, f(t, \psi(t)) \qquad \forall\, t \,\in\, (t_0, t_0+\delta)\,, \quad \psi(t_0) \,=\, y_0\,. \tag{1.1}$$

De acuerdo al Teorema Fundamental del Cálculo se deduce que toda solución ψ de (1.1) satisface

$$\psi(t) \,=\, \psi(t_0) \,+\, \int_{t_0}^{t} \psi'(s)\, ds \qquad \forall\, t \,\in\, [t_0, t_0+\delta]\,,$$

o bien, reemplazando $\psi'(s)$ por $f(s, \psi(s))$ y $\psi(t_0)$ por y_0,

$$\psi(t) \,=\, y_0 \,+\, \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))\, ds \qquad \forall\, t \,\in\, [t_0, t_0+\delta]\,. \tag{1.2}$$

Recíprocamente, no es difícil ver que si ψ es solución de (1.2), entonces, evaluando en $t = t_0$ y derivando bajo el signo integral, se deduce que ψ es solución del problema de valores iniciales (1.1), con lo cual (1.1) y (1.2) resultan equivalentes.

Motivado por lo anterior, se define inicialmente el conjunto

$$U \,:=\, \{\, \varphi \,\in\, C[t_0, t_0+\delta] : \quad \varphi(t_0) \,=\, y_0 \,\} \tag{1.3}$$

y la aplicación $T : U \to U$, donde

$$T(\varphi)(t) \,:=\, y_0 \,+\, \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \qquad \forall\, t \,\in\, [t_0, t_0+\delta]\,, \quad \forall\, \varphi \,\in\, U\,. \tag{1.4}$$

No obstante, es importante notar que para que la definición de T tenga sentido se requiere que f sea continua en A y que $(s, \varphi(s)) \in A \quad \forall\, s \,\in\, [t_0, t_0+\delta]\,, \quad \forall\, \varphi \,\in\, U$. Lo primero se asume en lo que sigue y lo segundo requiere una modificación del conjunto U, como se detalla a continuación. En efecto, de ahora en adelante se supone que existe $M > 0$ tal que

$$|f(t,y)| \,\leq\, M \quad \forall\, (t,y) \in A \quad \text{y} \quad [t_0, t_0+\delta] \times [y_0 - M\delta, y_0 + M\delta] \,\subseteq\, A\,,$$

y se redefine

$$U \,:=\, \{\, \varphi \,\in\, C[t_0, t_0+\delta] : \quad \varphi(t_0) \,=\, y_0\,, \quad |\varphi(t) - y_0| \,\leq\, M\delta \quad \forall\, t \in [t_0, t_0+\delta] \}\,.$$

De este modo se observa que T está efectivamente bien definida, lo cual significa, en particular, que $T(\varphi) \,\in\, U \quad \forall\, \varphi \in U$, y por lo tanto queda claro que resolver (1.2) equivale a encontrar $\psi \,\in\, U$ tal que

$$\psi(t) \,=\, T(\psi)(t) \qquad \forall\, t \,\in\, [t_0, t_0+\delta]\,,$$

es decir hallar $\psi \,\in\, U$ tal que

$$\psi \,=\, T(\psi)\,. \tag{1.5}$$

En virtud de la ecuación de punto fijo para T dada por (1.5), nuestro siguiente propósito es introducir el teorema respectivo debido a Banach. Para ello, recordamos primero que si U es un conjunto arbitrario, entonces una MÉTRICA (O DISTANCIA) ρ sobre U es una aplicación $\rho : U \times U \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $\rho(u,v) \,\geq\, 0 \quad \forall\, u,\, v \,\in\, U$.

ii) $\rho(u,v) \,=\, 0 \quad$ sí y sólo sí $u = v$.

iii) $\rho(u,v) \,=\, \rho(v,u) \quad \forall\, u,\, v \,\in\, U$.

iv) $\rho(u,v) \leq \rho(u,w) + \rho(w,v) \quad \forall\, u,\, v,\, w \in U$ (Desigualdad Triangular).

En este caso, al par (U,ρ) se le llama Espacio Métrico, lo cual motiva la introducción de algunas definiciones.

Definición 1.1 *Una sucesión* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de un espacio métrico* (U,ρ) *se dice de Cauchy si* $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(u_n,u_m) = 0$*, esto es, si*

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad \rho(u_n,u_m) \leq \epsilon \quad \forall\, n,m \geq N\,.$$

Definición 1.2 *Una sucesión* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de un espacio métrico* (U,ρ) *se dice convergente si existe* $u \in U$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n,u) = 0$*, esto es, si*

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad \rho(u_n,u) \leq \epsilon \quad \forall\, n \geq N\,.$$

Notar que el concepto de convergencia de una sucesión implica la existencia de un único límite de ella. Además, el siguiente resultado muestra que una métrica ρ es continua por sucesiones en cada una de sus componentes.

Lema 1.1 *Sea* (U,ρ) *un espacio métrico y sea* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* U *que converge a* $u \in U$*. Entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n,v) = \rho(u,v) \quad \forall\, v \in U$*.*

Demostración. Utilizando la desigualdad triangular (propiedad iv)) y la simetría de ρ (propiedad iii)), se obtiene fácilmente que

$$\rho(u_n,v) - \rho(u,v) \leq \rho(u_n,u) \qquad \text{y} \qquad \rho(u,v) - \rho(u_n,v) \leq \rho(u_n,u)\,,$$

lo cual equivale a

$$|\,\rho(u_n,v) - \rho(u,v)\,| \leq \rho(u_n,u)\,,$$

y luego, tomando $\lim\limits_{n\to\infty}$, se concluye la demostración. □

Los siguientes conceptos se requieren para establecer el teorema ya anunciado y para aplicarlo posteriormente.

Definición 1.3 *Un espacio métrico* (U,ρ) *se dice completo si toda sucesión de Cauchy de* U *es convergente.*

Definición 1.4 *Sea* (U,ρ) *un espacio métrico y sea* $V \subseteq U$*. Se dice que* V *es un subconjunto cerrado de* U *si el límite de cada sucesión convergente de* V *pertenece a* V*.*

Como consecuencia de estas definiciones, se sigue inmediatamente que todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es también completo.

DEFINICIÓN 1.5 *Sea* (U, ρ) *un espacio métrico y sea* $T : U \to U$*. Se dice que la aplicación* T *es una* CONTRACCIÓN *si existe* $\kappa \in (0, 1)$ *tal que*

$$\rho(T(u), T(v)) \le \kappa\, \rho(u, v) \qquad \forall\, u,\, v \in U\,.$$

TEOREMA 1.1 (TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BANACH) *Sea* (U, ρ) *un espacio métrico completo y sea* $T : U \to U$ *una contracción. Entonces existe un único* $w \in U$ *tal que* $T(w) = w$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sea w_0 un elemento arbitrario de U y definamos la sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $w_1 = T(w_0)$, $w_2 = T(w_1)$, y en general $w_{n+1} = T(w_n)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Así, si $\kappa \in (0, 1)$ denota la constante de contracción de T, observamos que

$$\rho(w_n, w_{n+1}) = \rho(T(w_{n-1}), T(w_n)) \le \kappa\, \rho(w_{n-1}, w_n)\,,$$

lo cual, aplicado recursivamente, implica que

$$\rho(w_n, w_{n+1}) \le \kappa^n \rho(w_0, w_1) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{1.6}$$

Ahora, dados p, $n \in \mathbb{N}$, utilizamos la desigualdad triangular para la métrica ρ y la estimación (1.6), y obtenemos

$$\rho(w_n, w_{n+p}) \le \sum_{j=0}^{p-1} \rho(w_{n+j}, w_{n+j+1}) \le \sum_{j=0}^{p-1} \kappa^{n+j} \rho(w_0, w_1)$$

$$= \kappa^n \sum_{j=0}^{p-1} \kappa^j \rho(w_0, w_1) = \frac{\kappa^n (1 - \kappa^p)}{1 - \kappa}\, \rho(w_0, w_1)\,,$$

de donde

$$\rho(w_n, w_{n+p}) \le \frac{\kappa^n}{1 - \kappa}\, \rho(w_0, w_1) \qquad \forall\, p,\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{1.7}$$

Es fácil ver de (1.7) que $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en U, y por lo tanto existe $w \in U$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(w_n, w) = 0$. Además, fijando n en (1.7), tomando $\lim\limits_{p\to\infty}$, y aplicando Lemma 1.1, se deduce que

$$\rho(w_n, w) \le \frac{\kappa^n}{1 - \kappa}\, \rho(w_0, w_1) \qquad \forall\; n \in \mathbb{N}\,. \tag{1.8}$$

Veamos ahora que w es el único punto fijo de T. En efecto, usando nuevamente la desigualdad triangular, se tiene

$$\rho(T(w),w) \,\leq\, \rho(T(w),T(w_n)) \,+\, \rho(T(w_n),w)$$

$$=\, \rho(T(w),T(w_n)) \,+\, \rho(w_{n+1},w) \,\leq\, \kappa\,\rho(w,w_n) \,+\, \rho(w_{n+1},w)\,,$$

y tomando $\lim_{n\to\infty}$ resulta $\rho(T(w),w) \,=\, 0$, lo cual significa que $T(w) \,=\, w$. Para la unicidad, sea $\tilde{w}$ cualquier otro elemento de U tal que $T(\tilde{w}) \,=\, \tilde{w}$. Entonces, aplicando una vez más que T es contracción, podemos escribir $\rho(w,\tilde{w}) \,=\, \rho(T(w),T(\tilde{w})) \,\leq\, \kappa\,\rho(w,\tilde{w})\,$, esto es $(1-\kappa)\,\rho(w,\tilde{w}) \,\leq\, 0\,$, de donde necesariamente $w \,=\, \tilde{w}$. $\square$

Es interesante observar aquí que la demostración del Teorema 1.1 proporciona un esquema iterativo de punto fijo, a partir de cualquier elemento inicial $w_0 \,\in\, U$, para construir una sucesión que converja a $w \in U$. Mas aún, la eventual proximidad o lejanía de los elementos de esta sucesión a la solución exacta w está medida por (1.8). En particular, de esta estimación de error se deduce que el número mínimo n de iteraciones que garantiza a-priori que $\rho(w_n,w)$ es menor que una tolerancia dada $\epsilon > 0$, está dado por el primer natural n que satisface

$$n \;\;\geq\;\; \frac{\log\left(\frac{\epsilon(1-\kappa)}{\rho(w_0,w_1)}\right)}{\log\kappa}\,.$$

El siguiente objetivo es aplicar Teorema 1.1 a $T : U \to U$ definida por (1.4). Para este efecto, recordamos primero que el conjunto $C([t_0,t_0+\delta])$ provisto de la métrica uniforme

$$\rho(\psi,\varphi) \,:=\, \max_{t\in[t_0,t_0+\delta]} |\psi(t)-\varphi(t)| \qquad \forall\,\psi,\,\varphi\in C([t_0,t_0+\delta])$$

es un espacio métrico completo, y puesto que U constituye un subconjunto cerrado de $C([t_0,t_0+\delta])$, se deduce que (U,ρ) también es completo.

Además, ahora se introduce el supuesto adicional de que f sea Lipschitz-continua en su segunda variable, lo cual significa asumir la existencia de $K > 0$ tal que

$$|\,f(t,y_1)-f(t,y_2)\,| \,\leq\, K\,|y_1-y_2| \qquad \forall\,(t,y_1),\,(t,y_2)\,\in\, A\,. \tag{1.9}$$

Entonces, utilizando (1.9) y las definiciones de T y ρ, se observa que

$$|T(\psi)(t)-T(\varphi)(t)| = \left|\int_{t_0}^{t}\big\{f(s,\psi(s))-f(s,\varphi(s))\big\}\,ds\right| \,\leq\, \int_{t_0}^{t}\big|f(s,\psi(s))-f(s,\varphi(s))\big|\,ds$$

$$\leq\; K \int_{t_0}^{t} |\psi(s) - \varphi(s)|\, ds \;\leq\; K\,(t - t_0)\,\rho(\psi, \varphi) \qquad \forall\, t \,\in\, [t_0, t_0 + \delta]\,, \tag{1.10}$$

lo cual prueba que

$$\rho(T(\psi), T(\varphi)) \;\leq\; K\,\delta\;\rho(\psi, \varphi) \qquad \forall\,\psi,\,\varphi \in U\,.$$

Esta desigualdad indica que una condición suficiente para que T sea una contracción es que $K\,\delta\, < 1$, razón por la cual podemos afirmar que el análisis anterior ha demostrado el siguiente resultado.

Teorema 1.2 *Sea $f\,:\,A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y supongamos que existen M, $K > 0$ tales que*

i) $|f(t, y)| \,\leq\, M \qquad \forall\,(t, y) \in A.$

ii) $|\, f(t, y_1) - f(t, y_2)\,| \;\leq\; K\,|y_1 - y_2| \qquad \forall\,(t, y_1),\,(t, y_2) \,\in\, A.$

Además, sean $(t_0, y_0) \in A$ y $\delta > 0$ tales que

iii) $\delta\, <\, \dfrac{1}{K}$ *y* $[t_0, t_0 + \delta] \times [y_0 - M\delta, y_0 + M\delta] \,\subseteq\, A.$

Entonces la ecuación integral (1.2) *tiene una única solución $\psi \in U$. Equivalentemente, el problema de valores iniciales* (1.1) *tiene una única solución $\psi \,\in\, C^1((t_0, t_0 + \delta)) \cap C([t_0, t_0 + \delta])$.*

Ciertamente, Teorema 1.2 garantiza la solubilidad única de (1.1) sólo en un sentido local ya que este resultado ocurre en un intervalo $[t_0, t_0 + \delta]$ cuya longitud está acotada superiormente por $\frac{1}{K}$. En virtud de ello, y con el propósito de obtener existencia y unicidad de solución de (1.1), en un sentido global, se introduce a continuación una versión mejorada del Teorema del Punto Fijo de Banach.

Teorema 1.3 *Sea (U, ρ) un espacio métrico completo y sea $T : U \to U$ tal que T^m es una contracción, para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces existe un único $w \,\in\, U$ tal que $T(w) \,=\, w$.*

Demostración. Notemos primero que las potencias de T se definen recursivamente por $T^1(u) \,=\, T(u)$ y $T^n(u) \,=\, T(T^{n-1}(u)) \quad \forall\, u \in U, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\; n \geq 2$, lo cual implica que $T^m(u) \in U \quad \forall\, u \in U$. Ahora, de acuerdo a la hipótesis sobre T^m y a Teorema 1.1, se sigue que existe un único elemento $w \,\in\, U$ tal que $T^m(w) \,=\, w$. Veamos que w es también un punto fijo de T y que él es único. En efecto, si $\kappa \in (0,1)$ denota la constante de contracción de T^m, se tiene

$$\rho(T(w),w) \,=\, \rho(T^{m+1}(w),T^m(w)) \,=\, \rho(T^m(T(w)),T^m(w)) \,\leq\, \kappa\,\rho(T(w),w)\,,$$

de donde $\rho(T(w),w) = 0$, y por lo tanto $T(w) = w$. Para la unicidad, sea $\tilde{w}$ cualquier otro elemento de U tal que $T(\tilde{w}) = \tilde{w}$. Entonces, aplicando sucesivamente T a ésta identidad ($m-1$ veces), se deduce que $T^m(\tilde{w}) = \tilde{w}$, y en consecuencia $\tilde{w} = w$. $\square$

Del teorema anterior queda claro que no es necesario exigir que T sea una contracción, sino que simplemente requerir que alguna potencia de ella lo sea. En lo que sigue vemos que esto ocurre precisamente con nuestra aplicación definida por (1.4). Para este propósito probamos primero el siguiente resultado.

Lema 1.2 *Dados $\psi,\, \varphi \in U$, se tiene*

$$|\, T^n(\psi)(t) \,-\, T^n(\varphi)(t)\,| \,\leq\, \frac{K^n\,(t-t_0)^n}{n!}\,\rho(\psi,\varphi) \qquad \forall\, t \,\in\, [t_0, t_0+\delta], \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Demostración. Razonamos por inducción sobre n. Para $n = 1$ el resultado ya fué establecido en (1.10). Supongamos ahora su validez para n y probemos que también es cierto para $n+1$. En efecto, de acuerdo a la definición de T y sus potencias, se tiene

$$\begin{aligned} |\, T^{n+1}(\psi)(t) - T^{n+1}(\varphi)(t)\,| \,&=\, |\, T(T^n(\psi))(t) \,-\, T(T^n(\varphi))(t)\,| \\ &=\, \left| \int_{t_0}^{t} \{\, f(s, T^n(\psi)(s)) - f(s, T^n(\varphi)(s))\,\}\, ds \right|\,, \end{aligned}$$

de donde, aplicando la Lipschitz-continuidad de f y la hipótesis de inducción, resulta

$$\begin{aligned} |\, T^{n+1}(\psi)(t) - T^{n+1}(\varphi)(t)\,| \,&\leq\, K \int_{t_0}^{t} |\, T^n(\psi)(s) - T^n(\varphi)(s)\,|\; ds \\ \leq\, \frac{K^{n+1}}{n!} \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^n\, ds\;\rho(\psi,\varphi) \,&=\, \frac{K^{n+1}\,(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}\;\rho(\psi,\varphi)\,, \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración. $\square$

Del Lemma 1.2 y de la definición de la métrica ρ se sigue inmediatamente que

$$\rho(T^n(\psi), T^n(\varphi)) \,\leq\, \frac{(K\,\delta)^n}{n!}\,\rho(\psi,\varphi) \qquad \forall\, \psi,\, \varphi \,\in\, U, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

y puesto que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(K\,\delta)^n}{n!} \,=\, 0 \quad \forall\, K,\, \delta \,\in\, \mathbb{R}$, se deduce que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\frac{(K\,\delta)^n}{n!} \,<\, 1 \quad \forall n \,\geq\, m$, lo cual prueba, en particular, que T^m es contracción. En consecuencia, hemos demostrado así la siguiente version mejorada del Teorema 1.2.

TEOREMA 1.4 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continua y supongamos que existen* M, $K > 0$ *tales que*

i) $|f(t,y)| \leq M \qquad \forall\, (t,y) \in A.$

ii) $|\, f(t,y_1) - f(t,y_2)\,| \ \leq\ K\,|y_1 - y_2| \qquad \forall\,(t,y_1),\,(t,y_2)\ \in\ A.$

Además, sean $(t_0, y_0) \in A$ *y* $\delta > 0$ *tales que*

iii) $[t_0, t_0+\delta] \times [y_0 - M\delta, y_0 + M\delta]\ \subseteq\ A.$

Entonces la ecuación integral (1.2) *tiene una única solución* $\psi \in U$. *Equivalentemente, el problema de valores iniciales* (1.1) *tiene una única solución* $\psi \in C^1((t_0, t_0+\delta)) \cap C([t_0, t_0+\delta])$.

Naturalmente, el Teorema 1.4 tampoco garantiza existencia global de solución del problema (1.1), pero al menos reduce las restricciones sobre δ sólo a lo estipulado en iii), vale decir $[t_0, t_0+\delta] \times [y_0 - M\delta, y_0 + M\delta]\ \subseteq\ A$. No obstante, cuando $A = \mathbb{R}^2$ esta condición se satisface trivialmente para cualquier $\delta > 0$, lo cual permite establecer el siguiente resultado de existencia global de solución para (1.1).

TEOREMA 1.5 *Sean* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continua,* $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *y supongamos que existen* M, $K > 0$ *tales que*

i) $|f(t,y)| \leq M \qquad \forall\, (t,y) \in \mathbb{R}^2.$

ii) $|\, f(t,y_1) - f(t,y_2)\,| \ \leq\ K\,|y_1 - y_2| \qquad \forall\,(t,y_1),\,(t,y_2)\ \in\ \mathbb{R}^2.$

Entonces, para cualquier $\delta > 0$ *la ecuación integral* (1.2) *tiene una única solución* $\psi \in U$. *Equivalentemente, el problema de valores iniciales* (1.1) *tiene una única solución* $\psi \in C^1((t_0, t_0+\delta)) \cap C([t_0, t_0+\delta])$.

Incluso, en el caso en que $A = \mathbb{R}^2$ se puede mejorar aun más lo anterior aplicando nuevamente el Teorema 1.3 al operador integral T sobre el conjunto U definido originalmente por (1.3). De esta manera, una segunda versión para el resultado de existencia global de solución del problema de valores iniciales (1.1) queda dada como sigue.

TEOREMA 1.6 *Sean* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continua,* $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *y supongamos que existe* $K > 0$ *tal que*

i) $| f(t, y_1) - f(t, y_2) | \ \leq \ K\, |y_1 - y_2| \qquad \forall\, (t, y_1),\, (t, y_2) \ \in \ \mathbb{R}^2.$

Entonces, para cualquier $\delta > 0$ *la ecuación integral* (1.2) *tiene una única solución* $\psi \in U$*. Equivalentemente, el problema de valores iniciales* (1.1) *tiene una única solución* $\psi \in C^1((t_0, t_0 + \delta)) \cap C([t_0, t_0 + \delta])$*.*

1.2. Algunos conceptos y resultados preliminares

A través de esta sección suponemos conocido el concepto de espacio vectorial. Así, dado un espacio vectorial X sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, el cual puede ser $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, con elemento nulo $\theta \in X$, y con operaciones $+ : X \times X \to X$ (suma de vectores) y $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ (multiplicación por escalar), se introducen a continuación algunas definiciones básicas.

DEFINICIÓN 1.6 *Una aplicación* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *se dice una* NORMA *sobre* X *si ella satisface las siguientes propiedades*

i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall\, x \in X$ *y* $\|x\| = 0$ *sí y sólo sí* $x = \theta$ (POSITIVIDAD).

ii) $\|\alpha\, x\| \ = \ |\alpha|\, \|x\| \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall\, x \in X\,.$

iii) $\|x + y\| \ \leq \ \|x\| \, + \, \|y\| \qquad \forall\, x,\, y \ \in \ X$ (DESIGUALDAD TRIANGULAR).

El espacio X provisto de la norma $\| \cdot \|$ recibe el nombre de ESPACIO VECTORIAL NORMADO y se denota $(X, \|\cdot\|)$. Al respecto, es importante resaltar que $(X, \|\cdot\|)$ constituye también un espacio métrico (X, ρ), con $\rho(x, y) \ := \ \|x - y\| \quad \forall\, x\,,\ y \ \in \ X$, y por lo tanto todas las definiciones y observaciones, y todos los resultados dados en la Sección 1.1 sobre dichos espacios también valen en el presente contexto. No obstante, para una mayor claridad de la presentación, algunas de esas definiciones se reescriben ahora en términos de la norma $\| \cdot \|$.

DEFINICIÓN 1.7 *Una sucesión* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *del espacio vectorial normado* $(X, \| \cdot \|)$ *se dice de Cauchy si* $\lim\limits_{n,m \to \infty} \|x_n - x_m\| \ = \ 0$*, esto es, si*

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad \|x_n - x_m\| \, \leq \, \epsilon \quad \forall\, n, m \, \geq \, N\,.$$

DEFINICIÓN 1.8 *Una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *del espacio vectorial normado* $(X, \|\cdot\|)$ *se dice convergente si existe* $x \in X$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$*, esto es, si*

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad \|x_n - x\| \,\leq\, \epsilon \quad \forall\, n \,\geq\, N\,.$$

Es fácil ver que toda sucesión convergente es de Cauchy, pero el recíproco no es siempre cierto, lo cual da origen a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.9 *El espacio vectorial normado* $(X, \|\cdot\|)$ *se dice* COMPLETO (*o* ESPACIO DE BANACH) *si toda sucesión de Cauchy en* X *es convergente*

Al respecto, el siguiente lema establece una condición necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión de Cauchy. Ciertamente, la suficiencia es de mucho mayor interés y aplicabilidad que la necesidad de esta condición.

LEMA 1.3 *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de Cauchy de* $(X, \|\cdot\|)$*. Entonces* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente sí y sólo sí ella posee una subsucesión convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente entonces todas sus subsucesiones también lo son. Recíprocamente, sea $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $x \in X$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n^{(1)} - x\| \,\leq\, \epsilon \quad \forall\, n \geq N_1$. A su vez, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| \,\leq\, \epsilon \quad \forall\, n,\, m \,\geq\, N_2$. Ahora, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \geq n$ tal que $x_n^{(1)}$ coincide con x_m. Luego, definiendo $N \,:=\, \max\{N_1, N_2\}$, se sigue que

$$\|x_n - x\| \,\leq\, \|x_n - x_n^{(1)}\| \,+\, \|x_n^{(1)} - x\| \,\leq\, 2\,\epsilon \qquad \forall\, n \,\geq\, N\,,$$

lo cual muestra que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a x. $\square$

EJEMPLO 1.1 Los siguientes son ejemplos de espacios de Banach.

1. $\mathbb{C}^n \,:=\, \{\,\mathbf{x} \,:=\, (x_1, x_2, ..., x_n) : \quad x_i \,\in\, \mathbb{C} \quad \forall\, i \in \{1, ..., n\}\,\}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, provisto de la norma
$$\|\mathbf{x}\| \,:=\, \sum_{j=1}^{n} |x_j| \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n\,.$$
2. $C([-1,1]) \,:=\, \{\, f : [-1,1] \to \mathbb{R} : \quad f \text{ continua}\,\}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, provisto de la norma
$$\|f\| \,:=\, \max_{x\in[-1,1]} |f(x)| \qquad \forall\, f \,\in\, C([-1,1])\,.$$

3. $\ell_\infty(\mathbb{C}) := \{ \mathbf{u} := \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \quad u_n \in \mathbb{C}, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty \}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, provisto de la norma

$$\|\mathbf{u}\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \ell_\infty(\mathbb{C}) .$$

4. $L^2(a,b) := \{ f : (a,b) \to \mathbb{R} : \quad f \text{ medible}, \quad \int_a^b |f|^2 < \infty \}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, donde $a,\, b \in \mathbb{R},\ a < b$, provisto de la norma

$$\|f\| = \left\{ \int_a^b |f|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, f \in L^2(a,b) .$$

Ejemplo 1.2 Aquí damos un ejemplo de un espacio vectorial normado que no es Banach. En efecto, consideremos nuevamente el espacio real $C([-1,1])$, pero provisto ahora de la norma de $L^2(-1,1)$, esto es $\|f\| = \left\{ \int_{-1}^1 |f|^2 \right\}^{1/2} \quad \forall\, f \in C([-1,1])$, la cual está bien definida ya que $C([-1,1]) \subseteq L^2(-1,1)$. Ahora, sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de $C([-1,1])$ dada por

$$f_n(t) := \begin{cases} 0 & , \quad -1 \le t < 0 \\ nt & , \quad 0 \le t < \frac{1}{n} \\ 1 & , \quad \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases} .$$

Entonces, dados $n,\, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, se tiene $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$ y luego

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_0^{1/n} (n-m)^2\, t^2\, dt + \int_{1/n}^{1/m} (1-mt)^2\, dt = -\frac{2}{3n} + \frac{m}{3n^2} + \frac{1}{3m} < \frac{1}{3m} - \frac{1}{3n} ,$$

lo cual prueba que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(C([-1,1]), \|\cdot\|)$. Por otro lado, sea $\tilde{f} : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la función de $L^2(-1,1)$ definida por

$$\tilde{f}(t) := \begin{cases} 0 & , \quad -1 \le t \le 0 \\ 1 & , \quad 0 < t \le 1 \end{cases} ,$$

y observemos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\tilde{f}$ en la norma de $L^2(-1,1)$ ya que

$$\|f_n - \tilde{f}\| = \int_0^{1/n} (nt-1)^2\, dt = \frac{1}{3n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

Entonces, si suponemos que existe $f \in C([-1,1])$ tal que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en la norma de $L^2(-1,1)$, necesariamente debe tenerse $f = \tilde{f}$, lo cual es contradictorio ya que $\tilde{f}$ no es continua. Esto prueba que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente y por lo tanto $(C([-1,1]), \|\cdot\|)$ no es un espacio de Banach.

A continuación se introducen los conceptos de espacios Pre-Hilbert y espacios de Hilbert, para lo cual se requiere previamente la definición de producto escalar.

DEFINICIÓN 1.10 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ se dice un* PRODUCTO ESCALAR (*o* PRODUCTO INTERIOR) *sobre X, si satisface las siguientes propiedades:*

i) $\langle x, x \rangle \ \geq \ 0 \quad \forall\, x \in X \quad y \quad \langle x, x \rangle \ = \ 0$ *sí y sólo sí* $x = \theta$ (POSITIVIDAD).

ii) $\langle x, y \rangle \ = \ \langle y, x \rangle \quad \forall\, x,\, y \,\in\, X$ (SIMETRÍA).

iii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall\, \alpha,\, \beta \,\in\, \mathbb{R}, \quad \forall\, x,\, y,\, z \,\in\, X$ (LINEALIDAD).

En lo que sigue, $\bar{z}$, $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$ denotan el conjugado, la parte real, y la parte imaginaria, respectivamente, de $z \in \mathbb{C}$. A su vez, $\bar{z} = \mathrm{Re}(z) = z$, e $\mathrm{Im}(z) = 0$, si $z \in \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 1.11 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ se dice un* PRODUCTO ESCALAR (*o un* PRODUCTO INTERIOR) *sobre X, si satisface las siguientes propiedades:*

i) $\langle x, x \rangle \ \geq \ 0 \quad \forall\, x \in X \quad y \quad \langle x, x \rangle \ = \ 0$ *sí y sólo sí* $x = \theta$ (POSITIVIDAD).

ii) $\langle x, y \rangle \ = \ \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall\, x,\, y \,\in\, X$ (SESQUISIMETRÍA).

iii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall\, \alpha,\, \beta \,\in\, \mathbb{C}, \quad \forall\, x,\, y,\, z \,\in\, X$
(LINEALIDAD EN LA PRIMERA COMPONENTE).

Es importante observar aquí que en el caso real las propiedades ii) y iii) garantizan también la linealidad del producto escalar en la segunda componente. Sin embargo, en el caso complejo ello no ocurre ya que ii) y iii) sólo implican que

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle \ = \ \bar{\alpha} \langle x, y \rangle \ + \ \bar{\beta} \langle x, z \rangle \quad \forall\, \alpha,\, \beta \,\in\, C, \quad \forall\, x,\, y,\, z \,\in\, X\,,$$

lo cual recibe el nombre de SESQUILINEALIDAD.

Una consecuencia directa de la linealidad o sesquilinealidad, al usar simplemente que $\theta = 0 \cdot \theta$, es el hecho que el producto escalar del vector nulo con cualquier vector de X es cero, esto es

$$\langle x, \theta \rangle \ = \ \langle \theta, x \rangle \ = \ 0 \qquad \forall\, x \,\in\, X\,. \tag{1.11}$$

El espacio vectorial X provisto de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se denomina ESPACIO PRE-HILBERT y se denota $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Uno de los resultados más importantes sobre estos espacios está dado por la siguiente desigualdad clásica.

TEOREMA 1.7 (DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ) *Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio pre-Hilbert sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces se tiene*

$$| \langle x, y \rangle | \ \leq \ \langle x, x \rangle^{1/2} \ \langle y, y \rangle^{1/2} \qquad \forall\, x,\, y \,\in\, X\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $x = \theta$ o $y = \theta$, entonces la desigualdad se satisface trivialmente gracias a (1.11). Ahora, dados $x,\, y \,\in\, X - \{\theta\}$, y $\alpha \in \mathbb{K}$, las propiedades del producto escalar implican que

$$0 \leq \langle x + \alpha\, y, x + \alpha\, y \rangle \ = \ \langle x, x \rangle \ + \ \alpha\, \langle y, x \rangle \ + \ \bar{\alpha}\, \langle x, y \rangle \ + \ \alpha\, \bar{\alpha}\, \langle y, y \rangle$$

$$= \ \langle x, x \rangle \ + \ 2\,\mathrm{Re}(\bar{\alpha}\, \langle x, y \rangle) \ + \ |\alpha|^2\, \langle y, y \rangle\,.$$

En particular, para $\alpha \ := \ -\, \langle x, y \rangle / \langle y, y \rangle$ se obtiene

$$0 \ \leq \ \langle x, x \rangle \ - \ 2\,\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \ + \ \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \ = \ \langle x, x \rangle \ - \ \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}\,,$$

de donde, multiplicando por $\langle y, y \rangle$ y sumando $|\langle x, y \rangle|^2$ a ambos lados de la desigualdad anterior, se completa la demostración. $\square$

Además del teorema anterior, es interesante constatar que todo producto escalar induce una norma sobre el espacio vectorial X respectivo. En efecto, se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 1.8 *Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio pre-Hilbert sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y consideremos la aplicación $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ definida por $\|x\| \ := \ \langle x, x \rangle^{1/2} \quad \forall\, x \,\in\, X$. Entonces $\| \cdot \|$ es una norma sobre X, la cual se llama* NORMA INDUCIDA *por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN. La positividad de $\| \cdot \|$ se sigue de la propiedad respectiva del producto escalar. Por otro lado, usando la linealidad y sesquilinealidad de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se sigue que $\|\alpha\, x\|^2 \ = \ \langle \alpha\, x, \alpha\, x \rangle \ = \ \alpha\, \bar{\alpha}\, \langle x, x \rangle \ = \ |\alpha|^2\, \|x\|^2$, y por lo tanto

$$\|\alpha\, x\| \ = \ |\alpha|\, \|x\| \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall\, x \in X\,.$$

Finalmente, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se deduce que

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \;=\; \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)\\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| \;=\; \{\,\|x\| + \|y\|\,\}^2 \qquad \forall\, x,\, y \in X\,,\end{aligned}$$

lo cual prueba la desigualdad triangular para $\|\cdot\|$. □

El teorema anterior induce la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.12 *Se dice que un espacio pre-Hilbert* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un* ESPACIO DE HILBERT *si él es completo con la norma inducida por su producto escalar.*

EJEMPLO 1.3 Los siguientes son ejemplos de espacios de Hilbert.

1. $\mathbb{R}^n := \{\, \mathbf{x} := (x_1, x_2, ..., x_n) : \quad x_i \in \mathbb{R} \quad \forall\, i \in \{1, ..., n\}\,\}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, provisto del producto escalar
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \qquad \forall\, \mathbf{x},\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\,.$$

2. $\mathbb{C}^n := \{\, \mathbf{x} := (x_1, x_2, ..., x_n) : \quad x_i \in \mathbb{C} \quad \forall\, i \in \{1, ..., n\}\,\}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, provisto del producto escalar
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i\, \bar{y}_i \qquad \forall\, \mathbf{x},\, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n\,.$$

3. $\ell_2(\mathbb{C}) := \{\, \mathbf{u} := \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \quad u_n \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty\,\}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, provisto del producto escalar
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} u_n\, \bar{v}_n \qquad \forall\, \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in \ell_2(\mathbb{C})\,.$$

4. $L^2(\Omega) := \{\, f : \Omega \to \mathbb{C} : \quad f$ medible, $\int_\Omega |f|^2 < \infty\,\}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, provisto del producto escalar
$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega f\,\bar{g} \qquad \forall\, f,\, g \in L^2(\Omega)\,.$$

5. $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) := \{\, A = (a_{ij})_{n\times n} : \quad a_{ij} \in \mathbb{R}\,\}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, provisto del producto escalar
$$\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^t\, B) \qquad \forall\, A,\, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\,,$$

donde $\mathrm{tr}(C)$ and C^t denotan la traza y la transpuesta, respectivamente, de una matriz dada $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Es interesante observar aquí que el cálculo explícito de este producto escalar se reduce a

$$\langle A, B\rangle \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij} \qquad \forall\, A := (a_{ij})_{n\times n},\, \forall\, B := (b_{ij})_{n\times n} \,\in\, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\,,$$

lo cual equivale a ubicar ordenadamente los coeficientes de estas matrices en dos vectores de R^{n^2} para luego realizar el producto escalar usual entre ellos.

A propósito de los ejemplos 1, 2 y 5 anteriores, podemos establecer ahora el siguiente resultado más general.

Lema 1.4 *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Sea $N \in \mathbb{N}$ la dimensión de X, consideremos una base $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ de este espacio, y definamos la aplicación $T : X \to \mathbb{K}^N$ que a cada $x \in X$ le asigna sus componentes con respecto a esta base. Por cuanto T es lineal y biyectiva, la aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ dada por

$$\langle x, y\rangle \;:=\; \langle T(x), T(y)\rangle_N \qquad \forall\, x,\, y \,\in\, X\,,$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_N$ es el producto usual de $\mathbb{K}^N$ (ver 1 y 2 en ejemplo 1.3), constituye un producto escalar sobre X. Luego, utilizando el hecho que $(\mathbb{K}^N, \langle\cdot,\cdot\rangle_N)$ es un espacio de Hilbert, se puede probar fácilmente que $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ también lo es. $\square$

Por otro lado, es claro que todo espacio de Hilbert es Banach, pero el recíproco no es necesariamente cierto. Es decir, existen espacios vectoriales normados completos cuyas normas respectivas no provienen de ningún producto escalar. Un resultado clásico que usualmente se emplea para constatar este hecho es el siguiente.

Lema 1.5 (Ley del paralelógramo) *Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-Hilbert sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto escalar. Entonces*

$$\|x+y\|^2 \,+\, \|x-y\|^2 \;=\; 2\,\left\{\, \|x\|^2 \,+\, \|y\|^2 \,\right\} \qquad \forall\, x,\, y \,\in\, X\,.$$

Demostración. Basta observar que

$$\|x \pm y\|^2 \;=\; \langle x \pm y, x \pm y\rangle \;=\; \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)$$

y luego sumar las expresiones con ambos signos. □

En virtud del lema anterior queda claro que si una norma no satisface la ley del paralelógramo, entonces ella no está inducida por ningún producto escalar. Un ejemplo simple de este hecho es el siguiente.

EJEMPLO 1.4 Consideremos el espacio de Banach complejo $(\ell_\infty(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$, donde

$$\ell_\infty(\mathbb{C}) := \{ \mathbf{u} := \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \quad u_n \in \mathbb{C}, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty \}$$

y

$$\|\mathbf{u}\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \ell_\infty(\mathbb{C}) .$$

Para ver que $(\ell_\infty(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ no es un espacio de Hilbert, basta mostrar un ejemplo concreto de elementos de $\ell_\infty(\mathbb{C})$ que no satisfacen la ley del paralelógramo. En particular, tomemos $\mathbf{u} := \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\mathbf{v} := \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$u_n := \begin{cases} 1\,, & \text{si} \quad n = 1 \\ \frac{1}{2}\,, & \text{si} \quad n = 2 \\ 0\,, & \text{si} \quad n \geq 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad v_n := \begin{cases} 0\,, & \text{si} \quad n = 1 \\ \frac{1}{2}\,, & \text{si} \quad n = 2 \\ 1\,, & \text{si} \quad n \geq 3 \end{cases} .$$

Se sigue que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = 1$, y por lo tanto

$$2\,\{\, \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \,\} - \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2 \neq 0\,,$$

lo cual prueba que $\|\cdot\|$ no satisface la ley mencionada. En realidad, no es difícil ver que existe una infinidad de contraejemplos (además del presentado aquí).

1.3. Un problema de valores de contorno en $\mathbb{R}$

Dados $\Omega := (0,1)$ y $f \in C(\Omega)$, consideremos el problema de valores de contorno: Hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que

$$-\,u'' = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) = u(1) = 0\,. \tag{1.12}$$

Nuestro objetivo es presentar un método de solución para (1.12), distinto del esquema clásico, y en el cual, en vez de pedir que la ecuación diferencial se satisfaga en cada punto $x \in \Omega$, se requiera solamente que se verifique alguna identidad integral apropiada. Para este efecto, necesitamos algunos conceptos previos.

Dado un abierto Ω de $\mathbb{R}$, $C^\infty(\Omega)$ denota el espacio de funciones a valores reales infinitamente diferenciables definidas sobre Ω. A su vez, para cada $\varphi \in C(\Omega)$ se define su soporte, y se denota $\operatorname{sop}\varphi$, como la adherencia de $\Omega - \varphi^{-1}(\{0\})$, es decir

$$\operatorname{sop}\varphi := \overline{\{\, x \in \Omega : \quad \varphi(x) \neq 0 \,\}}\,,$$

con lo cual se introduce el espacio de funciones

$$C_0^\infty(\Omega) := \{\, \varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{sop}\varphi \quad \text{es compacto} \quad \text{y } \operatorname{sop}\varphi \subseteq \Omega \,\}\,.$$

Notar que el requerimiento de compacidad para el soporte garantiza que las funciones de $C_0^\infty(\Omega)$ se anulan en alguna vecindad de la frontera de Ω.

Luego, multiplicando la ecuación diferencial de (1.12) por una función $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e integrando por partes en Ω, resulta

$$\int_0^1 f\,\varphi\,dx = -\int_0^1 u''\,\varphi\,dx = \int_0^1 u'\,\varphi'\,dx - u'(1)\,\varphi(1) + u'(0)\,\varphi(0)\,,$$

de donde, usando que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, se obtiene

$$\int_0^1 u'\,\varphi'\,dx = \int_0^1 f\,\varphi\,dx \qquad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,. \tag{1.13}$$

Para continuar la deducción de un nuevo esquema de solución para (1.12), necesitamos el siguiente concepto vinculado a la teoría de distribuciones (ver también Sección 1.6).

Definición 1.13 *Dada $v \in L^2(\Omega)$, se dice que $v' \in L^2(\Omega)$, en el sentido distribucional, si existe $z \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$-\int_\Omega v\,\varphi'\,dx = \int_\Omega z\,\varphi\,dx \qquad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

y en tal caso se escribe $v' := z$.

Ejemplo 1.5 Considere $\Omega = (0,2)$ y la función $v(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x\,, & 0 \le x \le 1 \\ 1\,, & 1 \le x \le 2 \end{array} \right.$. Entonces, dada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$ y luego

$$-\int_\Omega v\,\varphi'\,dx = -\int_0^1 x\,\varphi'\,dx - \int_1^2 \varphi'\,dx$$

$$= \int_0^1 \varphi\, dx \,-\, \varphi(1) \,-\, (\varphi(2) - \varphi(1)) \;=\; \int_0^1 \varphi\, dx \;=\; \int_\Omega z\, \varphi\, dx\,,$$

donde

$$z(x) \;=\; \begin{cases} 1\,, & 0 \le x < 1 \\ 0\,, & 1 < x \le 2 \end{cases}\,,$$

lo cual prueba que $v' = z \in L^2(\Omega)$.

Motivado por la definición anterior, se introduce el ESPACIO DE SOBOLEV

$$H^1(\Omega) \;:=\; \{\, v \in L^2(\Omega) : \quad v' \in L^2(\Omega)\,\}\,, \tag{1.14}$$

el cual es un espacio de Hilbert provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H^1(\Omega)} \;:=\; \int_\Omega (\, v'\, w' \,+\, v\, w\,)\, dx \qquad \forall\, v,\, w \in H^1(\Omega)\,. \tag{1.15}$$

Se sigue que la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)} \,:\, H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ está dada por

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \;:=\; \left\{ \int_\Omega \left((v')^2 \,+\, v^2 \right)\, dx \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

Por otro lado, se denota por $H_0^1(\Omega)$ a la adherencia de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, el cual se caracteriza también como el subespacio de elementos de $H^1(\Omega)$ que se anulan en la frontera de Ω, esto es

$$H_0^1(\Omega) \;:=\; \{\, v \in H^1(\Omega) : \quad v(0) \,=\, v(1) \,=\, 0\,\}\,. \tag{1.16}$$

Con estas notaciones, y en virtud de la identidad (1.13), podemos plantear el siguiente esquema de solución para nuestro problema de valores de contorno (1.12): Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u'\, \varphi'\, dx \;=\; \int_\Omega f\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,. \tag{1.17}$$

Más aún, en el siguiente lema probamos, usando la densidad de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$, que (1.17) se puede reformular como: Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u'\, v'\, dx \;=\; \int_\Omega f\, v\, dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,. \tag{1.18}$$

LEMA 1.6 *Las formulaciones* (1.17) *y* (1.18) *son equivalentes.*

Demostración. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ una solución de (1.18). Dado que $C_0^\infty(\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega)$ es claro que u es también solución de (1.17). Recíprocamente, sea $u \in H_0^1(\Omega)$ una solución de (1.17) y consideremos $v \in H_0^1(\Omega)$. Puesto que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$ se sigue que existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|v - \varphi_n\|_{H^1(\Omega)} \to 0$ cuando $n \to +\infty$, y en tal caso, de acuerdo a (1.17), se tiene

$$\int_\Omega u'\,\varphi_n'\,dx \;=\; \int_\Omega f\,\varphi_n\,dx \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{1.19}$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2(\Omega)$, se obtiene

$$\left| \int_\Omega u'\,v'\,dx \,-\, \int_\Omega u'\,\varphi_n'\,dx \right| \;=\; \left| \int_\Omega u'(v' - \varphi_n')\,dx \right|$$

$$\leq\; \|u'\|_{L^2(\Omega)}\;\|v' - \varphi_n'\|_{L^2(\Omega)} \;\leq\; \|u\|_{H^1(\Omega)}\;\|v - \varphi_n\|_{H^1(\Omega)}\,,$$

lo cual implica que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u'\,\varphi_n'\,dx \;=\; \int_\Omega u'\,v'\,dx$. De manera similar se muestra que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\,\varphi_n\,dx \;=\; \int_\Omega f\,v\,dx$, y así, tomando $\lim_{n\to\infty}$ en (1.19), se concluye que

$$\int_\Omega u'\,v'\,dx \;=\; \int_\Omega f\,v\,dx\,,$$

lo cual prueba que u es solución de (1.18). □

Por otro lado, definiendo $H := H_0^1(\Omega)$, y las aplicaciones $A : H \times H \to \mathbb{R}$ y $F : H \to \mathbb{R}$ dadas por

$$A(w,v) \;:=\; \int_\Omega w'\,v'\,dx \quad \text{y} \quad F(v) \;:=\; \int_\Omega f\,v\,dx \qquad \forall\, w, v \,\in\, H\,,$$

observamos que (1.18) se reduce a: Hallar $u \in H$ tal que

$$A(u,v) \;=\; F(v) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,. \tag{1.20}$$

En consecuencia, independientemente del problema de valores de contorno (1.12) que dió origen a (1.18), podemos pensar en estudiar la solubilidad de formulaciones abstractas del tipo (1.20). Precisamente, en uno de los capítulos siguientes de este texto se introduce el Teorema de Lax-Milgram, el cual da condiciones suficientes sobre H, A y F para que (1.20) tenga una única solución. Naturalmente, para llegar a establecer y demostrar dicho teorema, necesitaremos varios resultados previos de análisis funcional.

1.4. Un problema de valores de contorno en $\mathbb{R}^n$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\Gamma := \partial\Omega$ de clase C^1. La definición precisa del grado de suavidad de la frontera, incluyendo ciertamente C^1 y otras clases de funciones, puede verse en [2], [4], o [13].

Entonces, dada una función $f \in C(\Omega)$, nos interesa el siguiente problema de valores de contorno: Hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que

$$-\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma. \tag{1.21}$$

Con el objeto de derivar un esquema de solución para (1.21), análogo al de la sección anterior, se deducen a continuación las IDENTIDADES DE GREEN. Para ello, recordamos primero el Teorema de la Divergencia de Gauss, el cual dice que para un campo vectorial $G \in [C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})]^n$ se tiene

$$\int_\Omega \operatorname{div} G \, d\mathbf{x} \;=\; \int_\Gamma G \cdot \boldsymbol{\nu} \, ds\,,$$

donde $\operatorname{div} G := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial x_i}$ y $\boldsymbol{\nu} := (\nu_1, ..., \nu_n)^{\mathtt{t}}$ es el vector normal unitario exterior a Ω. En particular, si G tiene todas sus componentes nulas, excepto la i-ésima que es igual a uv, con u, $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, entonces se obtiene

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(uv) \, d\mathbf{x} \;=\; \int_\Gamma uv \, \nu_i \, ds\,,$$

o bien

$$\int_\Omega v \, \frac{\partial u}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} \;=\; -\int_\Omega u \, \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} \,+\, \int_\Gamma uv \, \nu_i \, ds \quad \forall\, i \in \{1, ..., n\}\,,$$

la cual se conoce como FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

Reemplazando u por $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ en la ecuación anterior, resulta

$$\int_\Omega v \, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} \, d\mathbf{x} \;=\; -\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} \,+\, \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial x_i} v \, \nu_i \, ds \quad \forall\, i \in \{1, ..., n\}\,,$$

y luego, sumando sobre todos los índices i, se concluye la PRIMERA IDENTIDAD DE GREEN

$$\int_\Omega v \, \Delta w \, d\mathbf{x} \;=\; -\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \,+\, \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} v \, ds\,, \tag{1.22}$$

la cual es válida para todo $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ y para todo $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Aquí, $\dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} := \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial w}{\partial x_i}\, \nu_i$ denota la derivada normal sobre Γ.

Intercambiando los roles de v y w en (1.22) y luego restando la ecuación resultante a (1.22) se obtiene la SEGUNDA IDENTIDAD DE GREEN:

$$\int_\Omega (\, v\, \Delta w \,-\, w\, \Delta v\,)\, d\mathbf{x} \;=\; \int_\Gamma \left(v\, \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} \,-\, w\, \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) ds\,, \tag{1.23}$$

para todo $v,\, w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.

Ahora, consideramos nuevamente el espacio $C_0^\infty(\Omega)$, cuya definición en el caso n-dimensional es análoga a la dada en la Sección 1.3 para un abierto Ω de $\mathbb{R}$. Multiplicando la ecuación diferencial parcial de (1.21) por una función $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, aplicando la PRIMERA IDENTIDAD DE GREEN (1.22), y usando el hecho que $\varphi \,=\, 0$ on Γ, resulta

$$\int_\Omega \nabla u \,\cdot\, \nabla \varphi \, d\mathbf{x} \;=\; \int_\Omega f \varphi \, d\mathbf{x} \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,. \tag{1.24}$$

DEFINICIÓN 1.14 *Dada $v \in L^2(\Omega)$, se dice que $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ en el sentido distribucional, si existe $z_i \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$-\int_\Omega v\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, d\mathbf{x} \;=\; \int_\Omega z_i\, \varphi \, d\mathbf{x} \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

y en tal caso se escribe $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \,=\, z_i$.

De acuerdo a la definición anterior, podemos introducir el ESPACIO DE SOBOLEV análogo al dado en (1.14),

$$H^1(\Omega) \;:=\; \left\{ v \in L^2(\Omega) \;:\; \frac{\partial v}{\partial x_i} \,\in\, L^2(\Omega) \quad \forall\, i \in \{1, ..., n\} \right\}, \tag{1.25}$$

el cual también es un espacio de Hilbert provisto del siguiente producto escalar

$$\langle v, w \rangle_{H^1(\Omega)} \;:=\; \int_\Omega (\, \nabla v \cdot \nabla w \,+\, v\, w \,)\, d\mathbf{x} \qquad \forall\, v,\, w \in H^1(\Omega)\,.$$

Entonces, la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)} \,:\, H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ está dada por

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \;:=\; \left\{ |v|^2_{H^1(\Omega)} \,+\, \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

donde $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ es la semi-norma asociada definida como

$$|v|_{H^1(\Omega)} \,:=\, \left\{ \int_\Omega \|\nabla v\|^2 \, d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \,=\, \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

Al igual que en la Sección 1.3 se define el espacio $H_0^1(\Omega)$ como la adherencia de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Puede probarse (ver Capítulo 1 en [13]) que $H_0^1(\Omega)$ coincide con el subespacio de elementos de $H^1(\Omega)$ que se anulan en la frontera en el sentido de trazas, esto es

$$H_0^1(\Omega) \,:=\, \left\{ \, v \in H^1(\Omega) \,:\, v = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \, \right\}\,.$$

En virtud de la identidad (1.24) y de la densidad de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$, la cual permite probar un resultado análogo al dado por Lemma 1.6, el esquema alternativo de solución para el problema de valores de contorno (1.21) se reduce a: Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \,=\, \int_\Omega f v \, d\mathbf{x} \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,. \tag{1.26}$$

Entonces, definiendo $H \,:=\, H_0^1(\Omega)$, y las aplicaciones $A \,:\, H \times H \to \mathbb{R}$ y $F : H \to \mathbb{R}$ dadas por

$$A(w, v) \,:=\, \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \quad \text{y} \quad F(v) \,:=\, \int_\Omega f v \, d\mathbf{x} \quad \forall\, w,\, v \in H\,, \tag{1.27}$$

observamos que (1.26) se reduce a: Hallar $u \in H$ tal que

$$A(u, v) \,=\, F(v) \qquad \forall\, v \in H\,. \tag{1.28}$$

Ciertamente, la estructura abstracta de (1.28) coincide con la del problema (1.20) y por lo tanto los mismos comentarios dados al final de la Sección 1.3 valen en este caso. En particular, se reitera una vez más que el Teorema de Lax-Milgram nos dará condiciones suficientes sobre H, A y F para que formulaciones de este tipo sean bien propuestas.

1.5. Nociones básicas de distribuciones

En esta sección se dan algunos resultados básicos sobre distribuciones, los cuales formalizan varios de los argumentos dados en las dos secciones anteriores y proporcionan, además, algunos fundamentos necesarios para los capítulos siguientes. Para este efecto, consideremos $n \in \mathbb{N}$ y un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 1.15 *Un multíndice es una* $n-$*upla* $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *donde cada* α_i *es un entero no negativo. La longitud (u orden) de la* $n-$*upla* α *se define como* $|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. *Dadas dos* $n-$*uplas* α, β, *la suma de ellas se define componente a componente, esto es, si* $\beta := (\beta_1, ..., \beta_n)$, *entonces* $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$. *Además, para una función* $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, *se escribe*

$$\partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

DEFINICIÓN 1.16 *El espacio vectorial* $C_0^\infty(\Omega)$, *provisto de una topología inducida por una familia de seminormas (ver detalles en* [10]*), se denota* $\mathcal{D}(\Omega)$ *y se llama* ESPACIO DE FUNCIONES TEST.

EJEMPLO 1.6 Consideremos la función $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(t) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0, \\ e^{-1/t} & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$$

No es difícil probar que ψ pertenece a $C^\infty(\mathbb{R})$, el espacio de funciones infinitamente diferenciables definidas sobre $\mathbb{R}$. Este hecho sugiere definir entonces la función $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) := \psi(1 - \|x\|^2) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, la cual, al ser la compuesta de ψ con una función polinomial, pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mas aún, se sigue que

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \|x\| \geq 1, \\ e^{-1/(1-\|x\|^2)} & \text{si} \quad \|x\| < 1, \end{cases}$$

lo cual indica que el soporte de φ es la bola unitaria $\bar{B}(\mathbf{0}, 1) := \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \|x\| \leq 1\}$ ($\mathbf{0} := (0, ..., 0)^{\mathtt{t}}$ denota el vector nulo de $\mathbb{R}^n$), y por lo tanto $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ para cualquier abierto Ω que contiene a $\bar{B}(\mathbf{0}, 1)$. En general, dados $\epsilon > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la función $\varphi_{\epsilon, x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_{\epsilon, x_0}(x) := \psi(1 - \|x - x_0\|^2/\epsilon^2) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \|x - x_0\| \geq \epsilon, \\ e^{-\epsilon^2/(\epsilon^2 - \|x - x_0\|^2)} & \text{si} \quad \|x - x_0\| < \epsilon, \end{cases}$$

también pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y su soporte se reduce a $\bar{B}(x_0, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \|x - x_0\| \leq \epsilon\}$. Se concluye así que $\varphi_{\epsilon, x_0} \in C_0^\infty(\Omega)$ para cualquier abierto Ω que contiene a $\bar{B}(x_0, \epsilon)$.

El ejemplo anterior muestra que se pueden construir funciones test en cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$, con soportes tan pequeños como se desee, o tan grandes como lo permita el dominio respectivo.

Por otro lado, una consecuencia importante de la topología de $\mathcal{D}(\Omega)$ es la equivalencia entre el concepto usual (topológico) de continuidad y el de continuidad por sucesiones. De acuerdo a ello, se introducen ahora las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 1.17 *Sea $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$. Se dice que $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a la función nula en $\mathcal{D}(\Omega)$, si existe un compacto $K_0 \subset \Omega$ tal que* sop $\varphi_k \subseteq K_0$ *para todo $k \in \mathbb{N}$, y para toda $n-$upla α se tiene que $\{\partial^\alpha \varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a cero sobre K_0, esto es $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in K_0} |\partial^\alpha \varphi_k(x)| = 0$.*

DEFINICIÓN 1.18 *Una aplicación $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ se dice una* FORMA LINEAL *si*

$$u(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\, u(\varphi) + \beta\, u(\psi) \qquad \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall\, \varphi,\ \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

DEFINICIÓN 1.19 *Una forma lineal $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ se llama una* DISTRIBUCIÓN SOBRE *Ω si ella es continua (equivalentemente, continua por sucesiones). En otras palabras, $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ se dice una distribución si para toda sucesión $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ que converge a la función nula, se tiene que $u(\varphi_k)$ converge a cero cuando $k \to \infty$. Al espacio de todas las distribuciones sobre Ω se le denota $\mathcal{D}'(\Omega)$. Además, dada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se adopta la notación $u(\varphi) = \langle u, \varphi\rangle$.*

Un resultado de caracterización de las distribuciones, más fácil de verificar que la definición 1.19, está dado por el siguiente teorema.

TEOREMA 1.9 *Una forma lineal $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ es una distribución sobre Ω sí y sólo sí para cada compacto $K \subseteq \Omega$, existen un entero no negativo N y una constante positiva C, tal que*

$$|\langle u, \varphi\rangle| \le C \sum_{|\alpha|\le N} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)\,, \tag{1.29}$$

donde $\mathcal{D}_K(\Omega) := \{\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \text{sop}\ \varphi \subseteq K \,\}$.

DEMOSTRACIÓN. Para la primera implicación supongamos, por contradicción, que existe un compacto $K \subseteq \Omega$ tal que para todo entero no negativo N, y para todo $C > 0$, existe $\tilde\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ tal que $|\langle u, \tilde\varphi\rangle| > C \sum\limits_{|\alpha|\le N} \sup\limits_{x\in K} |\partial^\alpha \tilde\varphi(x)|$. En particular, para $C = N$, existe $\tilde\varphi_N \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ tal que $|\langle u, \tilde\varphi_N\rangle| > N \sum\limits_{|\alpha|\le N} \sup\limits_{x\in K} |\partial^\alpha \tilde\varphi_N(x)|$. Para cada N, definamos la función $\varphi_N := \dfrac{\tilde{\varphi}_N}{|\langle u, \tilde{\varphi}_N \rangle|}$. Se sigue que

$$|\langle u, \varphi_N \rangle| \,=\, 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{N} > \sum_{|\alpha| \le N} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_N(x)| \,. \tag{1.30}$$

Notemos ahora que $\operatorname{sop} \varphi_N \,=\, \operatorname{sop} \tilde{\varphi}_N \,\subseteq\, K$. Además, dada una $n-$upla β, se deduce de (1.30) que para todo $N \ge |\beta|$ se tiene que $\displaystyle\sup_{x \in K} |\partial^\beta \varphi_N(x)| \,\le\, \frac{1}{N}$, y por lo tanto $\displaystyle\lim_{N \to \infty} \sup_{x \in K} |\partial^\beta \varphi_N(x)| \,=\, 0 \quad \forall\, \beta$. Esto prueba que la sucesión $\{\, \varphi_N \}_{N \in \mathbb{N}}$ converge a la función nula en $\mathcal{D}(\Omega)$. Sin embargo, debido a (1.30), $\{\langle u, \varphi_N \rangle\}_{N \in \mathbb{N}}$ no converge a cero en $\mathbb{C}$, lo cual contradice el hecho que u es continua.

Recíprocamente, supongamos que para todo compacto $K \subseteq \Omega$ existen $N \in \mathbb{N} \cup 0$ y $C > 0$, tales que (1.29) se cumple, y sea $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ una sucesión que converge a cero en $\mathcal{D}(\Omega)$. Esto significa que existe un compacto $K_0 \subseteq \Omega$ tal que $\operatorname{sop} \varphi_k \subseteq K_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y para toda $n-$upla α se tiene

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_k(x)| \,=\, 0 \,.$$

Luego, aplicando (1.29) con $K = K_0$ se concluye que $\{\langle u, \varphi_k \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a cero en $\mathbb{C}$, probando así la continuidad de u. $\square$

Definición 1.20 *El espacio de funciones localmente integrables sobre Ω se denota por $L^1_{loc}(\Omega)$ y se define como*

$$L^1_{loc}(\Omega) \,:=\, \Big\{\, f \,:\, \Omega \to \mathbb{C} \,:\, f \textit{ medible}, \quad \int_K |f| \, dx \,<\, \infty \quad \forall \textit{ compacto } K \subseteq \Omega \,\Big\} \,.$$

Ejemplo 1.7 Las funciones localmente integrables constituyen los ejemplos más simples de distribuciones. En efecto, dada $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, la distribución inducida, que denotamos nuevamente por f, se define como

$$\langle f, \varphi \rangle \,:=\, \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \,\in\, \mathcal{D}(\Omega) \,.$$

Veamos que $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La linealidad es una consecuencia clara de la misma propiedad de la integral. Para la continuidad consideramos un compacto $K \subseteq \Omega$ y tomamos $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Se sigue que

$$|\langle f, \varphi \rangle| \,=\, \left| \int_\Omega f \varphi \, dx \right| \,=\, \left| \int_K f \varphi \, dx \right| \,\le\, \int_K |f||\varphi| \, dx \,\le\, \int_K |f| \, dx \, \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \,.$$

Por lo tanto, en virtud del Teorema 1.9, basta elegir $C := \displaystyle\int_K |f|\,dx$ y $N = 0$, con lo cual

$$|\langle f, \varphi\rangle| \,\le\, C \sum_{|\alpha|\le N} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|\,.$$

El ejemplo anterior muestra que el espacio $L^1_{loc}(\Omega)$ se identifica con un subespacio de $\mathcal{D}'(\Omega)$, lo cual induce la siguiente definición.

Definición 1.21 *Se dice que una distribución $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es* REGULAR *si ella es generada por una función localmente integrable. En caso contrario, u se dice* SINGULAR.

El ejemplo clásico de distribución singular es el dado por $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, llamada DELTA de Dirac, y definida como

$$\langle \delta, \varphi\rangle \;:=\; \varphi(\mathbf{0}) \qquad \forall\, \varphi \,\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Más generalmente, si $x_0 \in \Omega$ entonces también se define $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ como

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle \;:=\; \varphi(x_0) \qquad \forall\, \varphi \,\in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Lema 1.7 *La distribución $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ es singular.*

Demostración. Por simplicidad, consideramos el caso $n = 1$. La demostración para $n > 1$ es análoga. Dada la función test $\varphi_{\epsilon,0} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (definida en el Ejemplo 1.6), con $\epsilon \in (0,1)$, observamos primero que $\langle \delta, \varphi_{\epsilon,0}\rangle = \varphi_{\epsilon,0}(0) = e^{-1}$, $|\varphi_{\epsilon,0}(x)| \le e^{-1} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, y $\operatorname{sop}\varphi_{\epsilon,0} = [-\epsilon, \epsilon]$. Supongamos ahora, por contradicción, que existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $\langle \delta, \varphi\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\,\varphi\,dx \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Se sigue así que

$$e^{-1} \;=\; |\,\langle \delta, \varphi_{\epsilon,0}\rangle\,| \;=\; \left|\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f\,\varphi_{\epsilon,0}\,dx\right| \;\le\; e^{-1}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} |f|\,dx \;=\; e^{-1}\int_{-1}^{1} \mathbf{1}_{[-\epsilon,\epsilon]}\,|f|\,dx\,,$$

donde $\mathbf{1}_{[-\epsilon,\epsilon]}$ es la función característica del intervalo $[-\epsilon, \epsilon]$. Luego, tomando $\lim\limits_{\epsilon\to 0}$ y aplicando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se obtiene $e^{-1} \le 0$, lo cual es absurdo. Esto prueba que δ no puede ser regular. $\Box$

Por otro lado, una de las nociones más importantes sobre distribuciones se refiere a la derivación de ellas. Para entender el origen de este concepto consideremos ahora un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ y una función $u \in C^1(\Omega)$. Puesto que para cada $i \in \{1, ..., n\}$, la derivada parcial $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ es una función continua, se sigue que ella induce la distribución dada por

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle \;=\; \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Sin embargo, usando la fórmula de integración por partes se obtiene

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle \;=\; -\int_\Omega u\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \;=\; -\,\langle u\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,$$

y se observa así que la diferenciabilidad de u no es una condición necesaria para que este último término esté bien definido. En efecto, basta que u defina una distribución para que esa expresión tenga sentido. De la misma manera se deduce que si β es un multiíndice y $u \in C^{|\beta|}(\Omega)$, entonces aplicando integración por partes $|\beta|$ veces, resulta

$$\langle \partial^\beta u, \varphi \rangle \;=\; (-1)^{|\beta|}\, \langle u, \partial^\beta \varphi \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Los comentarios anteriores inducen la siguiente definición.

Definición 1.22 *Sean $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y β un multiíndice. Se define la derivada β-ésima de u, y se denota $\partial^\beta u$, como la forma lineal sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ dada por*

$$(\partial^\beta u)(\varphi) \;:=\; (-1)^{|\beta|}\, \langle u, \partial^\beta \varphi \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Veamos ahora que para cualquier multiíndice β, $\partial^\beta u$ es también una distribución sobre Ω. En efecto, en virtud del Teorema 1.9 y del hecho que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, sabemos que dado un compacto $K \subseteq \Omega$, existen un entero no negativo N y una constante positiva C, tal que

$$|\,\langle u, \varphi \rangle\,| \;\le\; C \sum_{|\alpha| \le N} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)\,. \tag{1.31}$$

Se sigue que para cada $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$

$$|\,\langle \partial^\beta u, \varphi \rangle\,| \;=\; |\,\langle u, \partial^\beta \varphi \rangle\,| \;\le\; C \sum_{|\alpha| \le N} \sup_{x \in K} |\partial^{\alpha+\beta} \varphi(x)| \;\le\; C \sum_{|\alpha| \le N+|\beta|} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|\,,$$

lo cual, de acuerdo nuevamente a Teorema 1.9, implica que $\partial^\beta u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

1.6. Ejercicios

▶ **1.1** *Sea X un espacio vectorial normado y sea $S := \{x \in X : \quad \|x\| = 1\}$. Pruebe que S es completo sí y sólo sí X es Banach.*

▶ **1.2** *Sean $I := (t_0, t_0 + \tau)$, $f_j : \bar{I} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, j \in \{1, \ldots, n\}$, funciones continuas, y considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Hallar $u := (u_1, \cdots, u_n)^{\mathtt{t}} \in [C^1(I) \times C(\bar{I})]^n$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{du_j}{dt} = f_j(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)) \quad \forall\, t \in I \qquad y \\ \\ u_j(t_0) = \eta_j \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \end{cases} \tag{1.32}$$

donde t_0, τ, η_j, $j = 1, \cdots, n$ son constantes reales dadas y τ es positivo. Suponga además que existe $M > 0$ tal que

$$|f_j(t, z) - f_j(t, w)| \leq M \|z - w\|_\infty \quad \forall\, z, w \in \mathbf{R}^n, \quad \forall\, t \in \bar{I}.$$

Demuestre que (1.32) tiene una única solución $u(t)$ para todo $t \in \bar{I}$.

▶ **1.3** *Demuestre el Teorema 1.6.*

▶ **1.4** *Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y considere una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de H tal que $\langle x_n, x_m \rangle = \begin{cases} 1 & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n \neq m \end{cases}$. Pruebe que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall\, x \in H$. Además, dada una sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge en H sí y sólo sí $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$.*

▶ **1.5** *Dado Ω abierto de $\mathbb{R}^n$ y $m \in \mathbb{N}$, se define el* espacio de Sobolev *de orden m, como*

$$H^m(\Omega) := \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \quad \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad \forall\, \alpha, |\alpha| \leq m \right\},$$

el cual se provee de la norma $\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left\{ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2}$. Asuma que $L^2(\Omega)$ con el producto escalar usual $\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \displaystyle\int_\Omega uv\, dx$ es un espacio de Hilbert, y demuestre que $H^m(\Omega)$ también lo es.

▶ **1.6** *Se dice que un espacio de Banach X es* UNIFORMEMENTE CONVEXO *si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\Big(x, y \in X\,,\ \|x\| \le 1\,,\ \|y\| \le 1 \quad y \quad \|x - y\| > \epsilon \Big) \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta\,.$$

Demuestre que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

▶ **1.7** *Sea H un espacio vectorial normado real. Pruebe que si la norma de H satisface*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\big\{ \|x\|^2 + \|y\|^2 \big\} \quad \forall\, x, y \in H,$$

entonces ella proviene de un producto escalar.

▶ **1.8** *El* TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER *establece que si S es un subconjunto compacto, convexo, y no vacío de un espacio vectorial de dimensión finita, y T es una aplicación continua de S en S, entonces T tiene al menos un punto fijo. Use este resultado de Brouwer para demostrar que si X es un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $\|\cdot\|$, y si F es una aplicación continua de X en X tal que, para algún $\mu > 0$, $\langle F(u), u\rangle \ge 0 \quad \forall\, u \in X$ con $\|u\| = \mu$, entonces existe $u_0 \in X$, $\|u_0\| \le \mu$, tal que $F(u_0) = 0$.*

▶ **1.9** *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$.* EL PROBLEMA DE NAVIER-STOKES, *un problema de suma importancia en mecánica de fluidos, consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ y la presión p de un fluido, tales que*

$$\begin{gathered} -\Delta\,\mathbf{u} + \sum_{j=1}^{2} u_j\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \nabla p = \mathbf{f} \quad en \quad \Omega\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad en \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} = 0 \quad en \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\,dx = 0\,. \end{gathered} \tag{1.33}$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$, $Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\,dx = 0 \right\}$, y demuestre que la formulación débil de (1.33) se reduce a: encontrar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ tales que:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= f(\mathbf{v}) \qquad \forall\, \mathbf{v} \in H \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \qquad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned} \tag{1.34}$$

donde $a : H \times H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$, y $f : H \to \mathbb{R}$, están definidas por

$$a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\,dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega w_j\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,v_i\,dx\,,$$

$$b(\mathbf{v}, p) := -\int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v}\,dx \quad , \quad f(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\,dx\,.$$

▶ **1.10** *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$.* El problema de Stokes *corresponde a una versión linealizada del problema de Navier-Stokes y consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ y la presión p de un fluido, tales que*

$$\begin{gathered} -\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p \,=\, \mathbf{f} \quad en \quad \Omega\,, \quad \nabla\cdot\mathbf{u} \,=\, 0 \quad en \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} \,=\, 0 \quad en \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\,dx \,=\, 0\,. \end{gathered} \tag{1.35}$$

Utilice el ejercicio anterior para deducir la formulación débil de (1.35).

▶ **1.11** *Dado Ω abierto de $\mathbb{R}^n$ y $p \in [1, +\infty)$, se define*

$$L^p(\Omega) \,:=\, \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \quad f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^p\,dx \,<\, \infty \right\}.$$

Puede probarse que $L^p(\Omega)$, provisto de la norma $\|f\|_{L^p(\Omega)} \,:=\, \left\{ \int_\Omega |f|^p\,dx \right\}^{1/p}$ es un espacio de Banach. Además, dados $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega |f\,g|\,dx \,\leq\, \|f\|_{L^p(\Omega)}\,\|g\|_{L^q(\Omega)}\,.$$

Entonces, dado $m \in \mathbb{N}$ se define el Espacio de Sobolev *de orden (m, p), como*

$$W^{m,p}(\Omega) \,:=\, \left\{ u \,\in\, \mathcal{D}'(\Omega) : \quad \partial^\alpha u \,\in\, L^p(\Omega) \quad \forall\,\alpha,\, |\alpha| \,\leq\, m \right\},$$

el cual se provee de la norma $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \,:=\, \left\{ \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right\}^{1/p}$. Demuestre que $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

▶ **1.12** *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{T} \,:=\, \{T_1, T_2, ..., T_N\}$ una triangularización de Ω, es decir:*

i) $\bar{T}_j$ *es un triángulo con interior no-vacío* $\quad\forall\, j \in \{1, ..., N\}$,

ii) $T_i \cap T_j \,=\, \phi \quad \forall\, i \neq j$, *y*

iii) $\bar{\Omega} \,=\, \cup\,\{\,\bar{T}_j : \quad j \in \{1, ..., N\}\,\}$.

Defina el subespacio de $[L^2(\Omega)]^2$

$$H \,:=\, \{\,\boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \,\in\, L^2(T_j) \quad \forall\, j \,\in\, \{1, ..., N\}\,\}\,,$$

donde la pertenencia local $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j)$ *está dada en el sentido distribucional, es decir en* $\mathcal{D}'(T_j)$*, lo cual significa que existe* $z_j \in L^2(T_j)$ *tal que*

$$-\int_{T_j} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx \;=\; \int_{T_j} z_j\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(T_j)\,,$$

y en tal caso se escribe $z_j = \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})$ *en* T_j*. Demuestre que* H *provisto de la norma*

$$\|\boldsymbol{\tau}\| \;:=\; \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \;+\; \sum_{j=1}^{N} \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{L^2(T_j)} \right\}^{1/2} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,$$

es un espacio de Hilbert real.

Capítulo 2

DUALIDAD

2.1. Preliminares

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Toda aplicación $F : V \to \mathbb{K}$ se llama FUNCIONAL. Note, por ejemplo, que cualquier norma de V es un funcional. A continuación se definen los conceptos de linealidad y acotamiento asociados a un funcional.

DEFINICIÓN 2.1 *Un funcional $F : V \to \mathbb{K}$ se dice lineal si*

$$F(\alpha v + \beta w) = \alpha F(v) + \beta F(w) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall v, w \in V .$$

DEFINICIÓN 2.2 *Un funcional lineal $F : V \to \mathbb{K}$ se dice acotado con respecto a una norma dada $\|\cdot\|$ de V si existe una constante $M > 0$ tal que*

$$|F(v)| \leq M \|v\| \qquad \forall v \in V .$$

EJEMPLO 2.1 Los siguientes son ejemplos simples de funcionales.

1. Dado un espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|)$, la norma $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ es un funcional no-lineal. En particular, basta ver que para $\alpha < 0$ y $x \in V$, $x \neq \mathbf{0}$, se tiene $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \neq \alpha \|x\|$.

2. Dados un espacio de Hilbert $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $x \in V$, la aplicación que a cada $v \in V$ le asigna $\langle v, x\rangle \in \mathbb{K}$ es un funcional lineal. Además, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se prueba fácilmente que este funcional es acotado. Al respecto, es importante destacar

aquí que el Teorema de Representación de Riesz, resultado que se demuestra luego en la Sección 2.2, constituye precisamente el recíproco de este hecho. En otras palabras, dicho teorema establece que todo funcional lineal acotado F definido sobre V admite un único *representante* $x \in V$ a través de la relación: $F(v) = \langle v, x \rangle \; \forall\, v \in V$.

El conjunto de todos los funcionales lineales y acotados definidos sobre V se llama **dual** de V y se denota V'. Sobre V' se definen las siguientes operaciones

$$\begin{array}{rccl} + : & V' \times V' & \to & V' \\ & \text{(F,G)} & \to & \text{F + G}\,, \qquad (F+G)(v) \,:=\, F(v) + G(v) \quad \forall\, v \,\in\, V\,, \end{array} \tag{2.1}$$

y

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{K} \times V' & \to & V' \\ & (\lambda, F) & \to & \lambda\, F\,, \qquad (\lambda\, F)(v) \,:=\, \lambda\, F(v) \quad \forall\, v \,\in\, V\,. \end{array} \tag{2.2}$$

Entonces, se demuestra fácilmente que $(V', +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, cuyo elemento neutro para la adición es el funcional nulo $\Theta : V \to \mathbb{K}$ definido como $\Theta(v) = 0$ para todo $v \in V$.

Definición 2.3 *Dado* $F \in V'$ *se define* $\|F\|_{V'}$ *como el ínfimo de todas las constantes* $M > 0$ *que satisfacen la condición de acotamiento de* F *según se indica en la Definición* 2.2*, esto es*

$$\|F\|_{V'} \,:=\, \text{ínf}\{\, M > 0 : \quad |F(v)| \,\le\, M\, \|v\|_V \quad \forall\, v \in V \,\}\,.$$

Se sigue que

$$\|F\|_{V'} \;=\; \sup_{0 \ne v \in V} \frac{|F(v)|}{\|v\|_V} \qquad \forall\, F \,\in\, V'\,. \tag{2.3}$$

Igualmente, $\|F\|_{V'}$ se define también como

$$\|F\|_{V'} \,:=\, \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\| \le 1}} |F(v)|\,,$$

o bien

$$\|F\|_{V'} \,:=\, \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\| = 1}} |F(v)|\,.$$

En cualquier caso, se prueba fácilmente que efectivamente $\|\cdot\|_{V'}$ es una norma sobre V', con lo cual $(V', +, \cdot, \|\cdot\|_{V'})$ constituye un espacio vectorial normado. Más aun, se puede demostrar, usando la completitud del cuerpo $\mathbb{K}$, que V' es un espacio de Banach.

Un resultado más general, del cual la completitud de los espacios duales es un caso particular, se probará posteriormente en el Capítulo 3 (ver Teorema 3.1).

En lo que sigue, y cuando no haya confusión al respecto, escribiremos simplemente $\|v\|$ y $\|F\|$ en vez de $\|v\|_V$ y $\|F\|_{V'}$, para cada $v \in V$ y $F \in V'$.

Al terminar esta sección nos preguntamos si es posible obtener una identidad dual a la establecida en (2.3), esto es, si acaso se tiene que:

$$\|v\| \;=\; \sup_{\Theta \neq F \in V'} \frac{|F(v)|}{\|F\|} \qquad \forall\, v \,\in\, V\,. \tag{2.4}$$

La respuesta a esta simple interrogante es positiva y estará dada posteriormente como una de las tantas consecuencias del Teorema de Hahn-Banach, uno de los resultados clásicos mas importantes del Análisis Funcional.

2.2. Teorema de Representación de Riesz

El propósito de esta sección es demostrar el Teorema de Representación de Riesz, el cual ya fue anunciado en el Ejemplo 2.1. Para este efecto, necesitamos algunos resultados previos.

TEOREMA 2.1 (PRIMER TEOREMA DE MEJOR APROXIMACIÓN) *Sea $U \neq \phi$ un subespacio cerrado de un Hilbert $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Entonces, para todo $x \in V$ existe un único $z \in U$ tal que*

$$\|x - z\| \;=\; \inf_{u \in U} \|x - u\|\,, \tag{2.5}$$

el cual se llama la mejor aproximación de x por elementos de U. Además, $z \in U$ está caracterizado por la relación de ortogonalidad

$$\langle x \,-\, z, u\rangle \;=\; 0 \qquad \forall\, u \,\in\, U\,. \tag{2.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $d := \inf\limits_{u \in U} \|x - u\|$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe $u \in U$ tal que $d \leq \|x - u\| < d + \epsilon$. En particular, tomando $\epsilon = \frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$, se deduce que existe una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U$ tal que $d \leq \|x - z_n\| < d + \frac{1}{n}$ y por lo tanto $\|x - z_n\| \to d$ cuando $n \to +\infty$. Ahora, aplicando la ley del paralelógramo a $(x - z_n)$ y $(x - z_m)$, con $m,\, n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\|(x - z_n) + (x - z_m)\|^2 \,+\, \|(x - z_n) - (x - z_m)\|^2 \;=\; 2\,\left\{\|x - z_n\|^2 \,+\, \|x - z_m\|^2\right\}\,,$$

o bien

$$4\left\|x-\frac{(z_n+z_m)}{2}\right\|^2+\|z_n-z_m\|^2\,=\,2\,\|x-z_n\|^2+2\,\|x-z_m\|^2\,,$$

de donde

$$\|z_n-z_m\|^2\,=\,2\,\|x-z_n\|^2+2\,\|x-z_m\|^2-4\left\|x-\frac{(z_n+z_m)}{2}\right\|^2.$$

Puesto que $\frac{z_n+z_m}{2}\in U$ resulta $\|x-\frac{(z_n+z_m)}{2}\|\geq d$, y luego

$$\|z_n-z_m\|^2\,\leq\,2\,\|x-z_n\|^2\,+\,2\,\|x-z_m\|^2\,-\,4\,d^2\,.$$

Así, tomando límite cuando $m,n\to+\infty$, obtenemos $\|z_n-z_m\|\to 0$, lo que indica que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en V. Como U es cerrado, se deduce que existe $z\in U$ tal que $z_n\to z$ y por lo tanto

$$d\,=\,\lim_{n\to+\infty}\,\|x-z_n\|\,=\,\|x-z\|\,.$$

Para la unicidad, sean $z_1,\ z_2\,\in\,U$ tales que $\|x-z_1\|\,=\,\|x-z_2\|\,=\,d$. Aplicando nuevamente los mismos cálculos anteriores, se obtiene

$$\begin{aligned}0\,\leq\,\|z_1-z_2\|^2\,&=\,2\,\|x-z_1\|^2\,+\,2\,\|x-z_2\|^2\,-\,4\left\|x-\frac{(z_1+z_2)}{2}\right\|^2\\&=4\,d^2-4\left\|x-\frac{(z_1+z_2)}{2}\right\|^2\,\leq\,0\,,\end{aligned}$$

con lo cual $\|z_1-z_2\|\,=\,0$.

Ahora probamos la equivalencia entre (2.5) y (2.6). Sea $z\in U$ tal que

$$d\,:=\,\|x-z\|\,\,=\,\,\inf_{u\in U}\,\,\|x-u\|\,.$$

Se sigue que $d^2\,\leq\,\|x-u\|^2$ para todo $u\in U$, y en particular, dado que U es subespacio,

$$d^2\,\leq\,\|x-(z-\alpha\,u)\|^2\,=\,\|(x-z)+\alpha\,u)\|^2\qquad\forall\,\alpha\,\in\,\mathbb{R}\,,\quad\forall\,u\,\in\,U\,.$$

Desarrollando la desigualdad anterior se obtiene

$$d^2\,\leq\,\|x-z\|^2\,+\,2\,\alpha\,\langle x-z,u\rangle\,+\,\alpha^2\,\|u\|^2\,=\,d^2\,+\,2\,\alpha\,\langle x-z,u\rangle\,+\,\alpha^2\,\|u\|^2\,,$$

de donde

$$0\,\leq\,2\,\alpha\,\langle x-z,u\rangle\,+\,\alpha^2\,\|u\|^2\qquad\forall\,\alpha\,\in\,\mathbb{R}\,,\quad\forall\,u\,\in\,U\,.$$

Luego, dividiendo por $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$) y tomando límite cuando $\alpha \to 0^+$ (resp. $\alpha \to 0^-$), resulta $\langle x - z, u \rangle = 0$ para todo $u \in U$.

Recíprocamente, sea $z \in U$ tal que $\langle x - z, u \rangle = 0$ para todo $u \in U$. Se sigue fácilmente que

$$\|x-u\|^2 = \|(x-z)-(u-z)\|^2 = \|x-z\|^2 + \|u-z\|^2 ,$$

de donde $\|x - z\| \leq \|x - u\|$ para todo $u \in U$ y $\|x - z\| = \|x - u\|$ si y sólo si $u = z$, lo cual completa la demostración. □

Es importante observar aquí que la misma demostración utilizada para probar la existencia y unicidad de la mejor aproximación $z \in U$, es válida en el caso en que U es sólo un subconjunto convexo y cerrado del Hilbert V. En efecto, el único argumento que en esta parte hace uso del hecho que U es un subespacio de V es aquel que permite concluir que el promedio de dos elementos de U sigue estando en U, lo cual naturalmente también es cierto si U es convexo. No obstante, la convexidad de U no es suficiente para probar una eventual equivalencia entre (2.5) y (2.6). De hecho, el teorema de caracterización correspondiente, que será detallado más adelante en el capítulo de Problemas Variacionales, implica una desigualdad en vez de la relación de ortogonalidad (2.6).

De acuerdo a lo anterior, ahora podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 2.2 (Segundo Teorema de Mejor Aproximación) *Sea $U \neq \phi$ un subconjunto convexo y cerrado de un Hilbert $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Entonces, para todo $x \in V$ existe un único $z \in U$ tal que*

$$\|x - z\| = \inf_{u \in U} \|x - u\| , \tag{2.7}$$

el cual se llama la mejor aproximación de x por elementos de U.

Ejemplo 2.2 Este ejemplo ilustra el caso finito-dimensional del Teorema 2.1.

1. Si U es un subespacio de dimensión finita de V, entonces el cálculo de la mejor aproximación se reduce a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. En efecto, si $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ es una base de U, entonces (2.6) es equivalente a

$$\langle x - z, u_j \rangle = 0 \qquad \forall\, j \in \{1, 2, ..., N\} .$$

Así, si $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\, u_i$, entonces podemos escribir

$$\langle x, u_j \rangle = \langle z, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \,\langle u_i, u_j \rangle ,$$

o bien, matricialmente, se tiene el sistema de Gramm

$$A\,\vec{\alpha} \;=\; \vec{b}\,, \tag{2.8}$$

donde $A := (a_{ij})_{N\times N}$, con $a_{ij} := \langle u_i, u_j\rangle$, $\vec{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)^{\mathtt{t}}$ y $\vec{b} := (b_1, b_2, ..., b_N)^{\mathtt{t}}$, con $b_j := \langle x, u_j\rangle$.

2. Si la base $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ de U es ortogonal, esto es si $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ para $i \neq j$, entonces la resolución de (2.8) es directa, obteniéndose en tal caso

$$\alpha_i \;=\; \frac{b_i}{\|u_i\|^2} \;=\; \frac{\langle x, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} \qquad \forall\, i \,\in\, \{1, 2, ..., N\}\,, \tag{2.9}$$

con lo cual la mejor aproximación queda dada por

$$z \;=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{\langle x, u_i\rangle}{\|u_i\|^2}\; u_i\,.$$

3. Un ejemplo particular de 2. lo constituye la seria finita de Fourier. En efecto, en este caso consideramos $V := L^2(-\pi, \pi)$ provisto de su producto escalar usual $\langle f, g\rangle := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$, para todo $f,\, g \,\in\, L^2(-\pi, \pi)$, y elegimos U como el subespacio generado por las funciones trigonométricas $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_N\}$, donde $\varphi_j(x) := \cos(j\,x)\ \forall\, j \in \{0, 1, 2, ..., N\}$, y $\psi_j(x) := \sin(j\,x)\ \forall\, j \in \{1, 2, ..., N\}$, $\forall\, x \in (-\pi, \pi)$. Así, dada $f \in L^2(-\pi, \pi)$, su mejor aproximación por elementos de U queda dada por

$$f_N(x) \;=\; \sum_{i=0}^{N} \alpha_i\; \cos(i\,x) \;+\; \sum_{i=1}^{N} \beta_i\; \sin(i\,x) \qquad \forall\, x \,\in\, (-\pi, \pi)\,,$$

donde los escalares α_i y β_i, llamados coeficientes de Fourier, están definidos de acuerdo a (2.9), esto es

$$\alpha_i \;:=\; \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\; \cos(i\,x)\, dx}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(i\,x)\, dx} \quad \text{y} \quad \beta_i \;:=\; \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\; \sin(i\,x)\, dx}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(i\,x)\, dx}\,.$$

Definición 2.4 *Dado un subconjunto S de un espacio de Hilbert $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, se define el ortogonal de S, y se denota $S^\perp$, como*

$$S^\perp \;:=\; \{\, x \in V \;:\; \langle x, v\rangle \;=\; 0 \quad \forall\, v \in S\,\}\,,$$

el cual es un subespacio cerrado de V. Notar que $S \cap S^\perp = \{\theta\}$ para todo $S \subseteq V$ tal que $\theta \,\in\, S$.

Otra consecuencia importante del Teorema 2.1 está dada por el siguiente resultado, el cual establece que un espacio de Hilbert puede escribirse siempre como suma directa de todo subespacio cerrado con su ortogonal.

TEOREMA 2.3 (TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL) *Sea $U \neq \phi$ un subespacio cerrado de un Hilbert $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Entonces*

$$V \;=\; U \oplus U^{\perp}\,. \tag{2.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Dado $x \in V$, podemos escribir $x \;=\; z + (x - z)$, donde $z \in U$ es la mejor aproximación de x por elementos de U y, gracias a la relación de ortogonalidad (2.6), $(x - z) \in U^{\perp}$. □

Puesto que $U^{\perp}$ también es un subespacio cerrado del Hilbert V, observamos que $z \in U$ es la mejor aproximación de x (por elementos de U) si y sólo si $(x - z) \in U^{\perp}$ es la mejor aproximación de x (por elementos de $U^{\perp}$). Equivalentemente, si P_S es la aplicación (posteriormente se usará el nombre *operador*) que a cada $x \in V$ le asigna su mejor aproximación por elementos de un subespacio cerrado S de V, entonces (2.10) se re-escribe como

$$I \;=\; P_U \,+\, P_{U^{\perp}}\,,$$

donde I es la aplicación identidad de V en V. Aprovechamos de mencionar, en virtud de la relación de ortogonalidad (2.6), que las aplicaciones $P_U : V \to U$ y $P_{U^{\perp}} : V \to U^{\perp}$ se llaman PROYECCIONES ORTOGONALES sobre U y $U^{\perp}$, respectivamente. De acuerdo a esto, el Teorema 2.1 también recibe el nombre de TEOREMA DE PROYECCIÓN ORTOGONAL.

EJEMPLO 2.3 Los siguientes ejemplos ilustran el Teorema de Descomposición Ortogonal.

1. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y consideremos el espacio de Lebesgue $V \;:=\; L^2(\Omega)$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ con el producto escalar usual $\langle f, g\rangle \;:=\; \displaystyle\int_{\Omega} f\,g \quad \forall\, f,\, g \,\in\, V$. A su vez, definamos el subespacio

$$U \;:=\; \{\,\varphi : \Omega \to \mathbb{R} : \quad \varphi \text{ es constante}\,\} \;=\; \mathrm{span}\{\varphi_0\}\,,$$

donde $\varphi_0 \in V$ es tal que $\varphi_0(x) \;=\; 1 \;\forall\, x \in \Omega$. Se sigue que

$$U^{\perp} \;=\; \{\, f \in V : \quad \langle f, \varphi_0\rangle \;=\; 0\} \;=\; \left\{\, f \in V : \quad \int_{\Omega} f \;=\; 0\right\}.$$

Entonces, dada $f \in V$, su mejor aproximación por elementos de U se reduce a la función constante

$$f_U(x) := \frac{\langle f, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} \varphi_0(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f \qquad \forall\, x \in \Omega\,.$$

De este modo, cada $f \in V$ puede descomponerse de manera única como

$$f = f_U + f_{U^\perp}\,, \quad \text{con} \quad f_U \in U \quad \text{y} \quad f_{U^\perp} := \Big(f - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f \Big) \in U^\perp\,.$$

2. Sea $V := \mathbb{R}^{n\times n}$, el espacio de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, provisto del producto escalar $\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(B^{\mathtt{t}} A)$. Entonces, definimos los subespacios

$$U_1 := \{\kappa\,\mathbb{I} : \quad \kappa \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{\mathbb{I}\} \quad \text{y} \quad U_2 := \{\, A \in V : \quad A = A^{\mathtt{t}}\,\}\,,$$

donde $\mathbb{I}$ denota la matriz identidad de V. Se sigue que

$$U_1^\perp = \{\, A \in V : \quad \operatorname{tr}(A) = 0\,\} \quad \text{y} \quad U_2^\perp = \{\, A \in V : \quad A^{\mathtt{t}} = -\,A\,\}\,.$$

Entonces, dada $A \in V$, se prueba que sus mejores aproximaciones por elementos de U_1 y U_2 se reducen, respectivamente, a

$$A_1 := \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A)\,\mathbb{I} \quad \text{y} \quad A_2 := \frac{1}{2} \big(A + A^{\mathtt{t}} \big)\,.$$

Luego, cada $A \in V$ puede descomponerse de manera única como

$$A = A_1 + A_1^\perp\,, \quad \text{con} \quad A_1 \in U_1 \quad \text{y} \quad A_1^\perp := \left(A - \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A)\,\mathbb{I} \right) \in U_1^\perp\,,$$

y también como

$$A = A_2 + A_2^\perp\,, \quad \text{con} \quad A_2 \in U_2 \quad \text{y} \quad A_2^\perp := \frac{1}{2}\big(A - A^{\mathtt{t}} \big) \in U_2^\perp\,.$$

Un caso particular de esta segunda descomposición, de gran interés en mecánica de medios continuos, tiene que ver con el gradiente del vector de desplamientos $\mathbf{u}$ de un sólido sometido a ciertas fuerzas de volúmen y de superficie. En tal caso, usualmente se escribe

$$\nabla \mathbf{u} := \mathbf{e}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})\,,$$

donde $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \dfrac{1}{2} \big(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathtt{t}} \big)$ es el tensor de pequeñas deformaciones y $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) := \dfrac{1}{2} \big(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^{\mathtt{t}} \big)$ es el tensor de rotaciones.

3. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y consideremos el espacio de Hilbert $V := [L^2(\Omega)]^{n\times n}$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ con el producto escalar $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}$, donde $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} := \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}\,\tau_{ij}$ $\forall\, \boldsymbol{\sigma} := (\sigma_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{\tau} := (\tau_{ij})_{n\times n} \in V$. Equivalentemente, es fácil ver que $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} = \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar utilizado en 2. A su vez, definamos el subespacio

$$U := \{\, \kappa\, \mathbb{I} : \quad \kappa \in \mathbb{R} \,\} = \mathrm{span}\{\mathbb{I}\}\,,$$

donde $\mathbb{I}$ es el tensor identidad de V. Se sigue que

$$U^\perp = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \in V : \quad \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \right\}.$$

Luego, dada $\boldsymbol{\sigma} \in V$, sus mejores aproximaciones por elementos de U y $U^\perp$ se reducen, respectivamente, a

$$\boldsymbol{\sigma}_U := \frac{1}{n\,|\Omega|} \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\, \mathbb{I} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\sigma}_{U^\perp} := \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{n\,|\Omega|} \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\, \mathbb{I}\,,$$

con lo cual, cada $\boldsymbol{\sigma} \in V$ se descompone de manera única como la suma de un tensor $\boldsymbol{\sigma}_U$, múltiplo de la identidad, y un tensor $\boldsymbol{\sigma}_{U^\perp}$, cuya traza tiene media nula en Ω. Este resultado, análogo a la primera descomposición de 2., es también de gran utilidad en mecánica de medios continuos, especialmente para el análisis de formulaciones variacionales mixtas de algunos problemas en elasticidad.

4. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y consideremos el espacio de Sobolev $V := H^1(\Omega)$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, provisto de su producto escalar usual $\langle w, v \rangle := \int_\Omega \{\, \nabla w \cdot \nabla v + w\, v \}$ $\forall\, w\,,\ v \in V$. Ademas, sea $U := H_0^1(\Omega)$ la adherencia de $C_0^\infty(\Omega)$ con respecto a la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entonces, es fácil ver que

$$U^\perp = \{\, v \in V : \quad -\Delta v + v = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \,\}.$$

En consecuencia, dado $w \in V$, su mejor aproximación w_U por elementos de U es la única solución débil del problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\, w_U + w_U = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad w_U = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega\,,$$

donde $f := -\,\Delta\, w + w$.

El siguiente lema es un corolario directo del Teorema 2.3.

LEMA 2.1 *Sea $U \neq \phi$ un subespacio cerrado propio de un Hilbert V. Entonces, existe $\tilde{x} \in V$, $\tilde{x} \neq \theta$, tal que $\tilde{x} \in U^\perp$.*

Con los resultados anteriores estamos en condiciones de demostrar a continuación el teorema principal de esta sección.

Teorema 2.4 (Teorema de Representación de Riesz) *Sea* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espacio de Hilbert y sea* $F \in V'$. *Entonces, existe un único* $x \in V$ *tal que* $F(v) = \langle v, x \rangle$ *para todo* $v \in V$, *y además* $\|F\| = \|x\|$.

Demostración. Dado $F \in V'$, definamos $U := \{v \in V : F(v) = 0\}$. Si $U = V$ entonces F es el funcional nulo Θ y en tal caso basta tomar $x = \theta$.

Supongamos ahora que $U \neq V$. Puesto que U es un subespacio cerrado de V, se deduce, de acuerdo al Lema 2.1, que existe $\tilde{x} \in V$, $\tilde{x} \neq \theta$ tal que $\tilde{x} \in U^{\perp}$. Es claro entonces que $\tilde{x} \notin U$ y por lo tanto $F(\tilde{x}) \neq 0$. Además, para cada $v \in V$ se observa que $F(\tilde{x})\, v - F(v)\, \tilde{x} \in U$, y dado que $\tilde{x} \in U^{\perp}$ se deduce que

$$0 = \langle F(\tilde{x})\, v - F(v)\, \tilde{x}, \tilde{x} \rangle \qquad \forall\, v \in V\,,$$

o bien

$$\langle F(\tilde{x})\, v, \tilde{x} \rangle = \langle F(v)\, \tilde{x}, \tilde{x} \rangle = F(v)\ \|\tilde{x}\|^2\,,$$

de donde

$$F(v) = \langle v, x \rangle \qquad \forall\, v \in V\,,$$

con $\quad x := \dfrac{\overline{F(\tilde{x})}\, \tilde{x}}{\|\tilde{x}\|^2}$. Para la unicidad de x, si suponemos que existe $z \in V$ tal que

$$F(v) = \langle v, x \rangle = \langle v, z \rangle \qquad \forall\, v \in V\,,$$

entonces $x - z \in V^{\perp} = \{\theta\}$, y luego $x = z$.

Por otro lado, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$\|F\| := \sup_{0 \neq v \in V} \frac{|F(v)|}{\|v\|} = \sup_{0 \neq v \in V} \frac{|\langle v, x \rangle|}{\|v\|} \leq \|x\|\,,$$

y además, tomando $v = x$, resulta

$$\|F\| := \sup_{0 \neq v \in V} \frac{|F(v)|}{\|v\|} \geq \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \|x\|\,,$$

con lo cual se concluye que $\|F\| = \|x\|$. □

Es muy importante observar que el Teorema de Representación de Riesz induce la definición del OPERADOR DE RIESZ

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{R}: & V' & \to & V \\ & F & \to & \mathcal{R}(F) \end{array} \tag{2.11}$$

donde $\mathcal{R}(F)$ es el único elemento en V, llamado REPRESENTANTE DE F, tal que

$$F(v) \;=\; \langle v, \mathcal{R}(F)\rangle \qquad \forall\, v \,\in\, V\,.$$

Notar entonces que $\mathcal{R}$ es una biyección isométrica.

2.3. Teorema de Hahn-Banach

En esta sección demostramos uno de los teoremas más clásicos del Análisis Funcional. Para tal efecto, en lo que sigue consideramos $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$, y nos hacemos la pregunta esencial que motiva el desarrollo del Teorema de Hahn-Banach:

Existe algún elemento no nulo del dual V' ?

Para responder parcialmente esta pregunta tomamos un elemento arbitrario $x_0 \in V$, $x_0 \neq \theta$, y definimos el subespacio de V

$$V_0 \;:=\; \{\, \alpha\, x_0 : \quad \alpha \,\in\, \mathbb{R}\,\} \;=\; \mathrm{span}\{x_0\}\,,$$

el cual es claramente de dimension 1. Entonces, se define el funcional

$$\begin{array}{rccl} f: & V_0 & \to & \mathbb{R} \\ & \alpha\, x_0 & \to & f(\alpha\, x_0) \;:=\; \alpha\,. \end{array}$$

Es simple ver que f es lineal. Además, dado $x \;:=\; \alpha\, x_0 \,\in\, V_0$, se tiene

$$|f(x)| \;=\; |\alpha| \;=\; \frac{|\alpha|\, \|x_0\|}{\|x_0\|} \;=\; \frac{1}{\|x_0\|}\, \|x\|\,,$$

lo cual prueba que f es acotado y $\|f\|_{V_0'} \;=\; \dfrac{1}{\|x_0\|}$. Luego, la respuesta a la pregunta esencial será afirmativa si f, que es un funcional no-nulo de V_0', puede extenderse a un funcional $F \in V'$. Precisamente, la existencia de esta extensión es lo que garantiza el Teorema de Hahn-Banach.

2.3.1. Preliminares

En esta sección damos algunas definiciones y resultados previos necesarios para la demostración del teorema mencionado.

DEFINICIÓN 2.5 *Un conjunto $M \neq \emptyset$ se dice parcialmente ordenado si existe una relación de orden ($\leq$) definida sobre un subconjunto de $M \times M$, tal que*

- $x \leq x \quad \forall x \in M$ (REFLEXIVIDAD).
- $x \leq y \quad e \quad y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y$ (ANTISIMETRÍA).
- $x \leq y \quad e \quad y \leq z \quad \Rightarrow \quad x \leq z$ (TRANSITIVIDAD).

El concepto *parcialmente* enfatiza el hecho que M puede contener elementos x e y para los cuales ni $x \leq y$ ni $y \leq x$ ocurren. En tal caso, x e y se dicen *incomparables*. En caso contrario, esto es, si $x \leq y$ o si $y \leq x$, entonces x e y se dicen *comparables*.

EJEMPLO 2.4 *Dado un conjunto A se considera $\mathcal{P}(A) := \{X : \quad X \subseteq A\}$ y se define la relación de orden $X \leq Y$ si y sólo si $X \subseteq Y$, con $X, Y \in \mathcal{P}(A)$. En general, $\mathcal{P}(A)$ es parcialmente ordenado.*

DEFINICIÓN 2.6 *Sea $(M, \leq)$ un conjunto no vacío, parcialmente ordenado.*

- *Se dice que M es totalmente ordenado (o cadena) si no posee elementos incomparables.*
- *Suponga que M es totalmente ordenado y sea $S \neq \emptyset$ un subconjunto de M. Se dice que un elemento $z \in M$ es una cota superior de S si $x \leq z$ para todo $x \in S$.*
- *Un elemento $z \in M$ se dice maximal si cada vez que $x \in M$ verifica $z \leq x$, entonces necesariamente $x = z$.*

Notar que M puede o no tener elementos maximales. Además, un elemento maximal no es necesariamente una cota superior. El recíproco sí es cierto.

LEMA 2.2 (LEMA DE ZORN/AXIOMA DE ELECCIÓN) *Sea $(M, \leq)$ un conjunto no vacío, parcialmente ordenado, y suponga que cada cadena de M tiene una cota superior. Entonces, M tiene al menos un elemento maximal.*

2.3.2. Forma analítica del Teorema de Hahn-Banach

Esta versión del teorema requiere del concepto de funcional sublineal.

Definición 2.7 *Sea V un espacio vectorial sobre R. Un funcional $p : V \to \mathbb{R}$ se dice sublineal si*

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall\, x\,,\ y \in V.$
- $p(\alpha\, x) = \alpha\, p(x) \qquad \forall\, x \in V\,, \quad \forall\, \alpha > 0.$

Teorema 2.5 (Teorema de Hahn-Banach) *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $p : V \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Sea U un subespacio de V y sea $f : U \to \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que*

$$f(x) \leq p(x) \qquad \forall\, x \in U\,.$$

Entonces, existe un funcional lineal $F : V \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in U \qquad y \qquad F(x) \leq p(x) \qquad \forall\, x \in V\,.$$

Demostración. La demostración hará uso del Lema de Zorn. Para este efecto, se define primero la familia $\mathcal{F}$ de todas las extensiones lineales de f acotadas por p, es decir

$$\mathcal{F} := \Big\{ g : \mathcal{D}(g) \to \mathbb{R} \text{ lineal} : \quad \mathcal{D}(g) \text{ subespacio de } V \text{ tal que } U \subseteq \mathcal{D}(g)\,,$$
$$g(x) = f(x) \quad \forall\, x \in U\,, \quad g(x) \leq p(x) \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(g) \Big\}.$$

Notemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ya que claramente $f \in \mathcal{F}$. Luego, sobre $\mathcal{F}$ definimos una relación de orden como sigue: dados g, $h \in \mathcal{F}$ se dice que $g \leq h$ si y sólo si h es una extensión lineal de g, es decir $\mathcal{D}(g) \subseteq \mathcal{D}(h)$ y $h(x) = g(x)\ \forall\, x \in \mathcal{D}(g)$.

Ahora, dada una cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$, se define el conjunto

$$\hat{\mathcal{D}} := \cup \{ \mathcal{D}(g) : \quad g \in \mathcal{C} \}\,,$$

el cual resulta ser un subespacio vectorial de V. En efecto, notemos primero que $\hat{\mathcal{D}} \neq \emptyset$ ya que $\theta \in \hat{\mathcal{D}}$. A su vez, dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \hat{\mathcal{D}}$ se tiene que $x \in \mathcal{D}(g_0)$ para algún $g_0 \in \mathcal{D}$, y por lo tanto $\lambda\, x \in \mathcal{D}(g_0)$, con lo cual $\lambda\, x \in \hat{\mathcal{D}}$. Ahora, dados x, $y \in \hat{\mathcal{D}}$, existen g_1, $g_2 \in \mathcal{C}$ tales que $x \in \mathcal{D}(g_1)$ e $y \in \mathcal{D}(g_2)$. Como $\mathcal{C}$ es cadena, se tiene que $g_1 \leq g_2$ o bien $g_2 \leq g_1$, y en cualquiera de los dos casos se concluye que $x + y \in \hat{\mathcal{D}}$.

Definamos entonces

$$\begin{array}{rccl} \hat{g}: & \hat{\mathcal{D}} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \hat{g}(x) := g(x), \quad \text{si } x \in \mathcal{D}(g), \text{ con } g \in \mathcal{C}, \end{array}$$

y veamos que $\hat{g}$ está bien definida. En efecto, si $x \in \mathcal{D}(g_1) \cap \mathcal{D}(g_2)$, con g_1, $g_2 \in \mathcal{C}$, se tiene que $g_1 \leq g_2$ o bien $g_2 \leq g_1$, y en ambos casos resulta $g_1(x) = g_2(x)$. Además, es claro que $\hat{g}$ es una extensión lineal de todo $g \in \mathcal{C}$, lo cual muestra que $g \leq \hat{g} \quad \forall\, g \in \mathcal{C}$, y por lo tanto $\hat{g}$ constituye una cota superior de la cadena $\mathcal{C}$.

En consecuencia, en virtud del Lema de Zorn se deduce que la familia $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal F. De acuerdo a la definición de $\mathcal{F}$, esto significa que F es una extensión lineal de f, cuyo dominio $\mathcal{D}(F)$ es un subespacio de V, y de modo que

$$U \subseteq \mathcal{D}(F), \quad F(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(F), \quad \text{y} \quad F(x) = f(x) \quad \forall\, x \in U.$$

También, si $g \in \mathcal{F}$ es tal que $F \leq g$, entonces necesariamente $F = g$.

Sólo resta probar ahora que $\mathcal{D}(F) = V$ para terminar la demostración. Supongamos, por contradicción, que existe $y_1 \in V$ tal que $y_1 \notin \mathcal{D}(F)$, y consideremos el subespacio $Y_1 := \mathcal{D}(F) + \text{span}\{y_1\}$, esto es

$$Y_1 := \{\, x := y + \alpha\, y_1 : \quad y \in \mathcal{D}(F), \quad \alpha \in \mathbb{R}\,\}.$$

Notemos que $y_1 \neq \theta$. Además, la representación de los elementos de Y_1 es única, esto es $Y_1 := \mathcal{D}(F) \oplus \text{span}\{y_1\}$ ya que $\mathcal{D}(F) \cap \text{span}\{y_1\} = \{\theta\}$. Entonces, podemos definir el funcional lineal

$$\begin{array}{rccl} g_1: & Y_1 & \to & \mathbb{R} \\ & x := y + \alpha\, y_1 & \to & g_1(x) := F(y) + \gamma\, \alpha, \end{array}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$ es un parámetro por determinar. Se sigue que $g_1(x) = F(x)$ para todo $x \in \mathcal{D}(F)$, lo cual prueba que g_1 es una extensión propia de F (puesto que $\mathcal{D}(F)$ es un subespacio propio de Y_1). El siguiente objetivo es probar que γ se puede elegir convenientemente de modo que resulte $g_1(x) \leq p(x)$ para todo $x \in Y_1$. Esto mostraría que $g_1 \in \mathcal{F}$ y que $F \leq g_1$, con $g_1 \neq F$, lo cual contradice el hecho que F es maximal, y así, necesariamente $\mathcal{D}(F) = V$.

Dados y, $z \in \mathcal{D}(F)$, podemos escribir

$$F(y) - F(z) = F(y - z) \leq p(y - z) = p((y + y_1) + (-y_1 - z)),$$

y usando la sublinealidad de p, se obtiene

$$F(y) - F(z) \leq p(y + y_1) + p(-y_1 - z),$$

de donde

$$-p(-y_1 - z) - F(z) \leq p(y + y_1) - F(y) \qquad \forall\, y,\; z \in \mathcal{D}(F).$$

La desigualdad anterior sugiere definir las constantes

$$m^- := \sup_{z \in \mathcal{D}(F)} \left\{ -p(-y_1 - z) - F(z) \right\},$$

y

$$m^+ := \inf_{y \in \mathcal{D}(F)} \left\{ p(y + y_1) - F(y) \right\},$$

para las cuales es claro que $m^- \leq m^+$. Entonces, dado $\gamma \in [m^-, m^+]$ se tiene

$$-p(-y_1 - z) - F(z) \leq \gamma \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}(F), \tag{2.12}$$

y

$$\gamma \leq p(y + y_1) - F(y) \qquad \forall\, y \in \mathcal{D}(F). \tag{2.13}$$

Ahora, sea $x := y + \alpha\, y_1 \in Y_1$, con $y \in \mathcal{D}(F)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Para probar que $g_1(x) \leq p(x)$ consideramos tres casos posibles. Si $\alpha = 0$ se tiene que $x \in \mathcal{D}(F)$ y por lo tanto la desigualdad es inmediata. Si $\alpha < 0$ tomamos $z = \alpha^{-1}\, y$ en (2.12) y obtenemos

$$-p(-y_1 - \alpha^{-1}\, y) - F(\alpha^{-1}\, y) \leq \gamma,$$

de donde, multiplicando por $(-\alpha) > 0$, resulta

$$\alpha\, p(-y_1 - \alpha^{-1}\, y) + F(y) \leq -\alpha\, \gamma,$$

o bien

$$g_1(x) := F(y) + \alpha\, \gamma \leq (-\alpha)\, p(-y_1 - \alpha^{-1}\, y) = p(y + \alpha\, y_1) = p(x).$$

Análogamente, si $\alpha > 0$ tomamos $y = \alpha^{-1}\, y$ en (2.13) y luego multiplicamos por α. Esto concluye la demostración. $\square$

El siguiente teorema considera el caso particular en que V es un espacio vectorial normado y constituye una de las versiones más conocidas del Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 2.6 (Teorema de Hahn-Banach en Espacios Normados) *Sea* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial normado sobre* $\mathbb{R}$ *y sea* $f \in U'$*, donde* U *es un subespacio de* V*. Entonces, existe* $F \in V'$ *tal que*

$$F(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in U \qquad y \qquad \|F\|_{V'} = \|f\|_{U'}\,.$$

Demostración. Aplicando el Teorema 2.5 a $f \in U'$ y al funcional sublineal $p : V \to \mathbb{R}$ definido por $p(x) = \|f\|_{U'}\,\|x\|$ para todo $x \in V$, se deduce que existe $F : V \to \mathbb{R}$ lineal, tal que

$$F(x) = f(x) \quad \forall\, x \in U \quad \text{y} \quad F(x) \le \|f\|_{U'}\,\|x\| \quad \forall\, x \in V\,.$$

Se sigue que

$$F(-x) \le \|f\|_{U'}\,\|-x\| = \|f\|_{U'}\,\|x\|\,,$$

de donde, usando la linealidad de F,

$$F(x) \ge -\|f\|_{U'}\,\|x\|\,,$$

y por lo tanto

$$|\,F(x)\,| \le \|f\|_{U'}\,\|x\| \quad \forall\, x \in V\,.$$

Esta desigualdad prueba que $F \in V'$ y $\|F\|_{V'} \le \|f\|_{U'}$. Por otro lado, es claro que

$$\|F\|_{V'} = \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq\theta}} \frac{|F(v)|}{\|v\|} \ge \sup_{\substack{v\in U\\ v\neq\theta}} \frac{|F(v)|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v\in U\\ v\neq\theta}} \frac{|f(v)|}{\|v\|} = \|f\|_{U'}\,,$$

lo cual completa la demostración. □

2.3.3. Otras consecuencias del Teorema de Hahn-Banach

A continuación presentamos algunos resultados que se siguen del Teorema de Hahn-Banach y que se aplican con bastante frecuencia en diversos contextos.

Teorema 2.7 *Sea* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial normado sobre* $\mathbb{R}$ *y sea* $x_0 \in V$ *tal que* $x_0 \neq \theta$*. Entonces, existe* $F \in V'$ *tal que* $\|F\| = 1$ *y* $F(x_0) = \|x_0\|$*.*

Demostración. Sea $S := \text{span}\{x_0\} := \{\,\alpha\, x_0 : \quad \alpha \in \mathbb{R}\,\}$ y definamos el funcional

$$\begin{array}{rccl} f: & S & \to & \mathbb{R} \\ & x = \alpha\, x_0 & \to & f(x) := \alpha\,\|x_0\|\,. \end{array}$$

Es claro que f es lineal. Además, $|f(\alpha\, x_0)| \,=\, |\alpha|\, \|x_0\| \,=\, \|\alpha\, x_0\|$, lo cual muestra que f es acotado y $\|f\|_{S'} \,=\, 1$. Así, aplicando Teorema 2.6 se concluye que existe $F \in V'$ tal que $F(x) \,=\, f(x)$ para todo $x \in S$ y $\|F\|_{V'} \,=\, \|f\|_{S'} \,=\, 1$. En particular, para $x_0 \in S$ se tiene $F(x_0) \,=\, f(x_0) \,=\, \|x_0\|$, lo cual completa la demostración. $\square$

Observemos aquí que si V' es estrictamente convexo entonces el funcional $F \in V'$ del teorema anterior es único. En efecto, recordemos primero que la convexidad estricta del dual significa que para todo F_1, $F_2 \in V'$ tal que $F_1 \neq F_2$ y $\|F_1\| \,=\, \|F_2\| \,=\, 1$, se tiene que $\|t\, F_1 \,+\, (1-t)\, F_2\| \,<\, 1$ para todo $t \in]0,1[$. Entonces, si suponemos que existen F, $G \in V'$, distintos, tales que $\|F\| \,=\, \|G\| \,=\, 1$ y $F(x_0) \,=\, G(x_0) \,=\, \|x_0\|$, obtenemos

$$1 \,>\, \|tF + (1-t)\, G\|_{V'} \,=\, \sup_{\substack{x\in V\\ x\neq\theta}} \frac{t\, F(x) \,+\, (1-t)\, G(x)}{\|x\|} \,\geq\, \frac{t\, F(x_0) \,+\, (1-t)\, G(x_0)}{\|x_0\|} \,=\, 1\,,$$

lo cual es una contradicción.

Lema 2.3 *Sea* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial normado sobre* $\mathbb{R}$ *y sea* $v \in V$ *tal que* $F(v) \,=\, 0$ *para todo* $F \in V'$. *Entonces* $v \,=\, \theta$.

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 2.7 $\square$

Otra consecuencia importante del Teorema 2.7 está dada por el siguiente resultado, el cual ya fue anunciado al final de la Seccion 2.1 (ver (2.4)).

Lema 2.4 *Sea* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial normado. Entonces*

$$\|v\| \;=\; \sup_{\Theta\neq F\in V'} \frac{|F(v)|}{\|F\|} \;=\; \max_{\Theta\neq F\in V'} \frac{|F(v)|}{\|F\|} \qquad \forall\, v \,\in\, V\,.$$

Demostración. Si $v \,=\, \theta$ el resultado es trivial. Si $v \neq \theta$, se sigue del Teorema 2.7 que existe $\bar{F} \in V'$ tal que $\|\bar{F}\| \,=\, 1$ y $\bar{F}(v) \,=\, \|v\|$, con lo cual

$$\sup_{\Theta\neq F\in V'} \frac{|F(v)|}{\|F\|} \,\geq\, \frac{|\bar{F}(v)|}{\|\bar{F}\|} \,=\, \|v\|\,.$$

A su vez, es claro que

$$\sup_{\Theta\neq F\in V'} \frac{|F(v)|}{\|F\|} \,\leq\, \|v\|\,,$$

lo cual completa la demostración $\square$

Finalizamos la presente sección con un resultado que también será usado con cierta frecuencia en los capítulos siguientes.

Teorema 2.8 *Sea S un subespacio de un espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|)$ y sea $x_0 \in V$ tal que $d := \operatorname{dist}(x_0, S) := \inf_{x\in S} \|x_0 - x\| > 0$. Entonces existe $F \in V'$ tal que $\|F\| = 1$, $F(x_0) = d$ y $F(x) = 0$ para todo $x \in S$.*

Demostración. Sea $S_1 := S + \operatorname{span}\{x_0\}$, esto es

$$S_1 := \{\, z = x + \alpha\, x_0 : \quad x \in S\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,\}\,.$$

Notemos que la representación de los elementos del subespacio S_1 es única, esto es $S_1 := S \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$. En efecto, si $x \in S \cap \operatorname{span}\{x_0\}$ entonces $x \in S$ y $x = \alpha\, x_0$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Se sigue que necesariamente $\alpha = 0$ y así $x = \theta$, ya que en caso contrario se tendría $x_0 = \frac{1}{\alpha} x \in S$, lo cual contradice el hecho que $\operatorname{dist}(x_0, S) > 0$. De acuerdo a lo anterior podemos definir el siguiente funcional

$$\begin{array}{rccl} f: & S_1 & \to & \mathbb{R} \\ & z = x + \alpha\, x_0 & \to & f(z) := \alpha\, d\,, \end{array}$$

el cual es claramente lineal y satisface $f(z) = 0$ para todo $z \in S$. Además, dado $z = x + \alpha\, x_0 \in S_1$, con $\alpha \neq 0$, se tiene que $\frac{1}{\alpha} x \in S$ y luego

$$|f(z)| = |\alpha\, d| = |\alpha|\, d \leq |\alpha| \left\| x_0 + \frac{1}{\alpha} x \right\| = \|z\|\,,$$

lo cual muestra que f es acotado y $\|f\|_{S_1'} \leq 1$.

Por otro lado, dado $\epsilon > 0$ existe $x_1 \in S$ tal que $\|-x_1 + x_0\| < d + \epsilon$. Se sigue que $f(-x_1 + x_0) = d$ y luego

$$\frac{|f(-x_1 + x_0)|}{\|-x_1 + x_0\|} > \frac{d}{d+\epsilon}\,,$$

con lo cual

$$\|f\|_{S_1'} := \sup_{\substack{z\in S_1\\ z\neq\theta}} \frac{|f(z)|}{\|z\|} \geq \frac{|f(-x_1 + x_0)|}{\|-x_1 + x_0\|} > \frac{d}{d+\epsilon} \qquad \forall \epsilon > 0\,,$$

de donde, tomando limite cuando $\epsilon \to 0$, resulta $\|f\|_{S_1'} \geq 1$. Así, $\|f\|_{S_1'} = 1$ y aplicando el Teorema 2.6 se deduce que existe $F \in V'$ tal que $\|F\|_{V'} = \|f\|_{S_1'} = 1$ y $F(z) = f(z)$ para todo $z \in S_1$. En particular, $F(x_0) = d$ y $F(x) = 0$ para todo $x \in S$. $\square$

2.3.4. Forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach

Esta versión del teorema tiene que ver con la separación de conjuntos convexos. En lo que sigue, E es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 2.8 *Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ y un funcional lineal $f : E \to \mathbb{R}$, no nulo y no necesariamente acotado, se define un hiperplano afín como*

$$H := \{x \in E : \quad f(x) = \alpha\}\,,$$

y se dice que H es el hiperplano de ecuación $[f = \alpha]$.

LEMA 2.5 *El hiperplano $[f = \alpha]$ es cerrado si y sólo si f es acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Si f es continuo entonces claramente $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ es cerrado porque $\{\alpha\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$. Recíprocamente, supongamos que H es cerrado. Se sigue que $H^c = E \setminus H$ es abierto y no vacío ya que f es no nulo. Sea entonces $x_0 \in H^c$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(x_0) < \alpha$. Elijamos $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset H^c$. Afirmamos que $f(x) < \alpha \quad \forall x \in B(x_0, r)$. En efecto, supongamos por contradicción que existe $x_1 \in B(x_0, r)$ tal que $f(x_1) > \alpha$. Notar que $f(x_1) \neq \alpha$ ya que $x_1 \notin H$. Es claro que el segmento $\{(1-t)x_1 + tx_0 : \quad t \in [0,1]\} \subseteq B(x_0, r)$ y por lo tanto

$$f((1-t)x_1 + tx_0) \neq \alpha \quad \forall t \in [0,1]\,.$$

Sin embargo, dado que $f(x_0) < \alpha < f(x_1)$ se deduce que $\tilde{t} := \dfrac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)} \in\,]0,1[$ y

$$f((1-\tilde{t})\, x_1 + \tilde{t}\, x_0) = (1-\tilde{t})\, f(x_1) + \tilde{t}\, f(x_0) = \alpha\,,$$

lo cual es una contradicción. Así, necesariamente $f(x) < \alpha \quad \forall x \in B(x_0, r)$, o equivalentemente $f(x_0 + rz) < \alpha \quad \forall\, z \in B(0,1)$, de donde

$$f\left(x_0 \pm r\,\varepsilon \frac{x}{\|x\|}\right) < \alpha \qquad \forall\, x \in E\,,\ x \neq \theta\,,\ \forall \varepsilon \in (0,1)\,,$$

o bien

$$|f(x)| < \frac{1}{r\varepsilon}\,(\alpha - f(x_0))\,\|x\| \qquad \forall\, x \in E\,, \quad \forall\, \varepsilon \in (0,1)\,.$$

Luego, tomando $\lim\limits_{\varepsilon \to 1^-}$ nos queda

$$|f(x)| \leq \frac{1}{r}\,(\alpha - f(x_0))\,\|x\| \quad \forall\, x \in E\,,$$

lo cual prueba que f es acotado y $\|f\|_{E'} \leq \dfrac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$.

$\square$

DEFINICIÓN 2.9 *Sean A, $B \subseteq E$. Se dice que el hiperplano $[f = \alpha]$ separa A y B en el sentido* AMPLIO *si se tiene*

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \qquad y \qquad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B\,.$$

A su vez, se dice que este hiperplano separa A y B en el sentido ESTRICTO *si existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A \qquad y \qquad f(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in B\,.$$

LEMA 2.6 ("JAUGE" DE UN CONVEXO) *Sea $S \subseteq E$ convexo, abierto, tal que $\theta \in S$, y definamos el funcional de Minkowski $p : E \to \mathbb{R}$ por:*

$$p(x) = \inf\{\, \alpha > 0 : \quad \alpha^{-1} x \in S \,\} \qquad \forall x \in E.$$

Entonces p es sublineal y existe $M \geq 0$ tal que $0 \leq p(x) \leq M\,\|x\| \quad \forall x \in E$. Además

$$S = \{\, x \in E : \quad p(x) < 1 \}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que el vector nulo θ pertenece al abierto S, se sigue que existe $r > 0$ tal que $\bar{B}(\theta, r) \subseteq S$. Ahora, para cada $x \in E$, $x \neq \theta$, se tiene $r\,\dfrac{x}{\|x\|} \in S$. Además, dado $z \in S$ es claro que $p(z) \leq 1$ porque $1^{-1} z = z \in S$, y en particular se tiene $p\left(r\,\dfrac{x}{\|x\|}\right) \leq 1$. Pero, de la definición de p se observa que

$$p(\lambda x) = \lambda\, p(x) \quad \forall\, \lambda > 0, \forall x \in E\,,$$

y por lo tanto

$$p(x) \leq \frac{1}{r}\,\|x\| \qquad \forall\, x \in E, \quad x \neq \theta\,,$$

lo cual implica la estimación requerida ya que $p(\theta) = 0$.

A continuación probamos que $S = \{\, x \in E : \quad p(x) < 1\}$. En efecto, sea $x \in S$. Como S es abierto existe $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño, tal que $(x + \varepsilon x) = (1 + \varepsilon)\,x$ pertenece a S, y luego $1 \geq p((1 + \varepsilon)x) = (1 + \varepsilon)\,p(x)$, de donde

$$p(x) \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1\,.$$

Recíprocamente, sea $x \in E$ tal que $p(x) < 1$. Se sigue que existe $\alpha \in]0,1[$ tal que $\alpha^{-1} x \in S$ y por lo tanto, como S es convexo, $\alpha\,(\alpha^{-1} x) + (1-\alpha)\,\theta = x \in S$.

Resta probar la propiedad tipo desigualdad triangular que caracteriza la sublinealidad del funcional p (cf. Definición 2.7). En efecto, dados $x,\, y \in E$ y $\varepsilon > 0$, se observa primero que

$$p\left(\frac{x}{p(x)\,+\,\varepsilon}\right) = \frac{p(x)}{p(x)+\varepsilon} < 1 \quad \text{y} \quad p\left(\frac{y}{p(y)\,+\,\varepsilon}\right) = \frac{p(y)}{p(y)+\varepsilon} < 1\,,$$

lo cual indica que $\dfrac{x}{p(x)+\varepsilon}, \dfrac{y}{p(y)+\varepsilon} \in S$, y luego, de acuerdo a la convexidad de S, se tiene

$$\frac{t\,x}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)\,y}{p(y)+\varepsilon} \in S \quad \forall\, t \in [0,1]\,.$$

En particular, para $t := \dfrac{p(x)\,+\,\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in\,]0,1[$, resulta $\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in S$, y por lo tanto

$$1 > p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\right) = \frac{p(x+y)}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \qquad \forall \varepsilon > 0\,,$$

de donde $p(x+y) \le p(x)+p(y)$.

□

Lema 2.7 *Sea $S \subseteq E$, convexo, abierto, no vacío, y sea $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin S$. Entonces, existe $f \in E'$ tal que $f(x) < f(x_0) \quad \forall\, x \in S$, lo cual indica que el hiperplano de ecuación $[f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ y S en el sentido amplio.*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\theta \in S$, y definamos el funcional de Minkowski $p : E \to \mathbb{R}$ por

$$p(x) := \inf\{\,\alpha > 0 : \quad \alpha^{-1} x \in S\} \quad \forall\, x \in E\,.$$

A su vez, sea G el espacio generado por x_0, esto es $G := \{\, t\, x_0 : \quad t \in \mathbb{R}\}$, y sea $g : G \to \mathbb{R}$ el funcional lineal definido por $g(t\,x_0) := t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Puesto que $x_0 \notin S$ se sigue del Lema 2.6 que $p(x_0) \ge 1$. Entonces, para $t > 0$ resulta

$$g(t\,x_0) = t \le t\,p(x_0) = p(t\,x_0)\,.$$

A su vez, si $t \le 0$ se obtiene

$$g(t\,x_0) = t \le 0 \le p(t\,x_0)\,,$$

y en consecuencia

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall \in G \,.$$

Aplicando la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach se deduce que existe un funcional lineal $f : E \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in G$ y $f(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in E$. En particular, se tiene $f(x_0) = g(x_0) = 1$. Además, de acuerdo al Lema 2.6 sabemos que $0 \leq p(x) \leq M\,\|x\| \quad \forall\, x \in E$, y luego $f(x) \leq M\,\|x\| \quad \forall\, x \in E$. A su vez, $-f(x) = f(-x) \leq M\,\|x\|$, con lo cual $f(x) \geq -M\,\|x\|$, y por lo tanto

$$|f(x)| \leq M\,\|x\| \quad \forall\, x \in E \,,$$

probando así que $f \in E'$. Por último, utilizando la caracterización del convexo S dada en Lema 2.6, se concluye que $f(x) \leq p(x) < 1 = f(x_0) \quad \forall\, x \in S$, lo cual completa la demostración en primera instancia. En el caso en que el vector nulo θ no pertenece a S, se considera un elemento arbitrario $\tilde{x} \in S$ y se define el conjunto trasladado $\tilde{S} := \{\, x - \tilde{x} : \quad x \in S \,\}$, el cual, además de convexo y abierto, sí contiene a θ. Entonces, aplicando el análisis anterior a $\tilde{S}$ y al vector $\tilde{x}_0 := x_0 - \tilde{x}$ que no está en $\tilde{S}$, se deduce que existe $f \in E'$ tal que $f(z) < f(\tilde{x}_0) \quad \forall\, z \in \tilde{S}$, esto es $f(x) < f(x_0) \quad \forall\, x \in S$.

□

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar las dos versiones geométricas del Teorema de Hahn-Banach, las cuales establecen separaciones amplia y estricta, respectivamente, de conjuntos convexos.

Teorema 2.9 (Primera versión geométrica/Teorema de Hahn-Banach) *Sean A, $B \subseteq E$ convexos, no vacíos y disjuntos, tales que A es abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B en el sentido amplio.*

Demostración. Sea $S = A - B := \{\, x - y : \quad x \in A,\ y \in B\}$. Es claro que S es convexo ya que A y B lo son. Además, S es abierto ya que $S = \cup\{\, A - \{y\} : \quad y \in B\,\}$ y el conjunto $A - \{y\} := \{x - y : \quad x \in A\}$ es abierto porque A lo es. También $\theta \notin S$ porque $A \cap B = \phi$. Entonces, aplicando Lema 2.7 se deduce que existe $f \in E'$ tal que $f(z) < f(\theta) = 0 \quad \forall z \in S$, esto es

$$f(x) < f(y) \quad \forall\, x \in A, \quad \forall\, y \in B \,.$$

Definamos ahora

$$m := \sup_{x \in A} f(x) \quad \text{y} \quad M := \inf_{y \in B} f(y) \,.$$

Se sigue que para cualquier $\alpha \in [m, M]$, el hiperplano H de ecuación $[f = \alpha]$ separa A y B en el sentido amplio.

$\square$

TEOREMA 2.10 (SEGUNDA VERSIÓN GEOMÉTRICA/TEOREMA DE HAHN-BANACH) *Sean A, $B \subseteq E$, convexos, no vacíos y disjuntos, tales que A es cerrado y B es compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B en el sentido estricto.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $\varepsilon > 0$ definamos los conjuntos no vacíos

$$A_\varepsilon := A + B(\theta, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B_\varepsilon := B + B(\theta, \varepsilon),$$

donde $B(\theta, \varepsilon)$ es la bola abierta de radio ε centrada en θ. Es fácil ver, por la convexidad de A, B y $B(\theta, \varepsilon)$, que A_ε y B_ε son convexos. Además, A_ε y B_ε son abiertos ya que los conjuntos $\{x\} + B(\theta, \varepsilon)$ y $\{y\} + B(\theta, \varepsilon)$ lo son $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, y se tiene claramente

$$A_\varepsilon = \cup\{\{x\} + B(\theta, \varepsilon): \quad x \in A\} \quad \text{y} \quad B_\varepsilon = \cup\{\{y\} + B(\theta, \varepsilon): \quad y \in B\}.$$

Probemos a continuación que existe $\varepsilon > 0$ tal que A_ε y B_ε son disjuntos. En efecto, supongamos por contradicción que no es así. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_{1/n} \cap B_{1/n}$ es no vacío, lo cual implica que existen $x_n \in A$, $y_n \in B$, $u_n, v_n \in B(\theta, 1/n)$, tales que $x_n + u_n = y_n + v_n$. Se sigue que

$$\|x_n - y_n\| = \|u_n - v_n\| < \frac{2}{n}.$$

Ahora, como B es compacto, existen una subsucesión $\{y_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $y \in B$ tales que $y_n^{(1)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, y de acuerdo a la desigualdad anterior, se deduce que $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a y. Luego, como A es cerrado, necesariamente se tiene que $y \in A$, lo cual contradice el hecho que A y B son disjuntos.

Entonces, aplicando la primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach a los conjuntos disjuntos A_ε y B_ε, se deduce que existe un hiperplano cerrado de ecuación $[f = \alpha]$ que los separa en el sentido amplio. Esto significa que

$$f(x+u) \le \alpha \le f(y+v) \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \forall u, v \in B(\theta, \varepsilon),$$

y en particular

$$f(x+\varepsilon z) \le \alpha \le f(y-\varepsilon z) \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \forall z \in B(\theta, 1),$$

o bien

$$f(x) + \varepsilon f(z) \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon f(z) \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \forall z \in B(\theta, 1).$$

Finalmente, eligiendo $\bar{z} \in B(\theta, 1)$ tal que $f(\bar{z}) > 0$, se deduce que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon f(\bar{z}) \qquad \text{y} \qquad f(y) \geq \alpha + \varepsilon f(\bar{z}) \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B,$$

lo cual prueba que el hiperplano $[f = \alpha]$ separa A y B en el sentido estricto.

□

Notar que la demostración del teorema anterior (extraída básicamente de [3]) puede simplificarse procediendo sólo con los conjuntos A_ε y B (en vez de B_ε). En tal caso, siguiendo exactamente la misma secuencia de razonamiento, se llega a que los conjuntos A y B son separados en el sentido estricto por el hiperplano $[f = \alpha - \frac{\varepsilon}{2} f(\bar{z})]$.

2.4. Un ejercicio simple con tres soluciones

En esta sección se considera un ejercicio muy simple, aparentemente inofensivo, el cual, sin embargo, dió origen a tres soluciones muy distintas, dos de ellas utilizando resultados del presente capítulo. Los autores respectivos son el autor de este apunte y los ex-alumnos de la asignatura Análisis Funcional y Aplicaciones I del Departamento de Ingeniería Matemática de la Universidad de Concepción, Sres. Miguel Silva y Sebastián Niklitschek.

El ejercicio se describe como sigue. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y un vector $b \in \mathbb{R}^m$, $b \neq \theta$, se define el conjunto solución

$$S(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n : \quad A x = b\},$$

y se supone que $S(A, b) \neq \emptyset$. El objetivo es probar que existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\inf_{x \in S(A, b)} \langle z, x \rangle > 0,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$.

2.4.1. Solución 1

Definamos el conjunto $\mathcal{A} := S(A,\, B)$, el cual es claramente convexo, cerrado, y no vacío (según se indica en la hipótesis). A su vez, sea $\mathcal{B}$ el conjunto convexo, compacto y disjunto con $\mathcal{A}$ dado por $\mathcal{B} := \{\theta\}$. Entonces, aplicando la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach (cf. Teorema 2.10), se deduce que existen $f \in (\mathbb{R}^n)'$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que el hiperplano $[f = \alpha]$ separa $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en el sentido estricto. Esto significa que existen $\widetilde{z} \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$f(x) \,=\, \langle \widetilde{z},\, x \rangle \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,,$$

y además

$$f(x) \,=\, \langle \widetilde{z},\, x \rangle \,\leq\, \alpha - \epsilon \,<\, \alpha + \epsilon \,\leq\, f(\theta) \,=\, 0 \quad \forall\, x \,\in\, \mathcal{A}\,.$$

Luego, definiendo $z \,:=\, -\,\widetilde{z}$, resulta:

$$\langle\, z,\, x \rangle \,\geq\, -(\alpha - \epsilon) \,>\, -(\alpha + \epsilon) \,\geq\, 0 \quad \forall\, x \,\in\, \mathcal{A}\,,$$

de donde

$$\inf_{x \,\in\, \mathcal{A}} \langle\, z,\, x \rangle \,>\, 0.$$

2.4.2. Solución 2

Sea $N(A)$ el espacio nulo asociado a la matriz A, esto es

$$N(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : \quad A\,x = \theta\}.$$

Puesto que $S(A,\, b) \neq \emptyset$, existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\,x_0 = b$, y luego es fácil ver que

$$S(A,\, b) = \{x_0\} + N(A) \tag{2.14}$$

Ahora, sean $\Pi : \mathbb{R}^n \,\to\, N(A)$ y $(I - \Pi) : \mathbb{R}^n \,\to\, N(A)^{\perp}$ los proyectores ortogonales respectivos, y definamos $z := (I - \Pi)(x_0) \in\, N(A)^{\perp}$. Es claro que $z \neq \theta$ ya que, en caso contrario, se obtiene $x_0 = \Pi(x_0) \in\, N(A)$, lo cual contradice el hecho que $b = A(x_0) \neq \theta$. Se sigue así que

$$\inf_{x \in\, S(A,\, b)} \langle\, z,\, x\,\rangle = \inf_{y \in\, N(A)} \langle\, (I - \Pi)(x_0), x_0 + y\,\rangle = \inf_{y \in\, N(A)} \langle\, (I - \Pi)(x_0), x_0\,\rangle$$

$$= \langle\, (I - \Pi)(x_0), x_0\,\rangle = \|(I - \Pi)(x_0)\|^2 = \|z\|^2 > 0.$$

2.4.3. Solución 3

Usamos nuevamente que $S(A,\, b)$ es convexo y cerrado. En particular, notar que lo segundo se obtiene de la identidad (2.14) y del hecho que $N(A)$ es obviamente cerrado. Además, es claro que $\theta \notin S(A,\, b)$ ya que $b \neq \theta$. Así, aplicando el resultado de mejor aproximación sobre un convexo cerrado (cf. Teorema 2.2), se deduce que existe un único $z \in S(A,\, b)$ tal que

$$\mathrm{dist}(\theta,\, S(A,\, b)) := \inf_{x \in S(A,\, b)} \|x\| = \|z\| > 0.$$

Además, el resultado de caracterización de esta mejor aproximación, el cual se establecerá más adelante en el Teorema **??**, dice que

$$0 \geq \langle \theta - z,\, x - z \rangle = \|z\|^2 - \langle\, z,\, x\, \rangle \quad \forall\, x \in S(A,\, b),$$

esto es

$$\langle\, z,\, x\, \rangle \geq \|z\|^2 \quad \forall\, x \in S(A,\, b),$$

de donde se concluye que

$$\inf_{x \in S(A,\, b)} \langle\, z,\, x\, \rangle = \|z\|^2 > 0.$$

2.5. Ejercicios

▶ **2.1** *Sea X un espacio vectorial normado y $f : X \to \mathbb{R}$ un funcional lineal. Pruebe que $f \in X'$ sí y sólo sí $N(f)$ es un subespacio cerrado de X.*

▶ **2.2** *Sea V un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Demuestre que el dual V' es Banach.*

▶ **2.3** *Sea H un espacio vectorial normado real. Pruebe que si la norma de H satisface*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left\{ ||x||^2 + ||y||^2 \right\} \quad \forall\, x, y \in H,$$

entonces ella proviene de un producto escalar.

▶ **2.4** *Sea $X := C([0,1])$ provisto de la norma uniforme*

$$\|u\| := \max\{\, |u(t)| : \quad t \in [0,1]\,\} \qquad \forall\, u \in X\,,$$

y dado $f \in X$, fijo, defina el funcional lineal $F : X \to \mathbb{R}$ como

$$F(u) := \int_0^1 u(t)\, f(t)\, dt \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Demuestre que $F \in X'$ y $\|F\| = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt$.

INDICACIÓN*: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $x_n \in X$ dada por $x_n(t) := u_n(f(t))$ $\forall\, t \in [0,1]$, donde $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función continua*

$$u_n(t) := \begin{cases} 1 & si \quad t \geq 1/n\,, \\ -1 & si \quad t \leq -1/n\,, \\ n\,t & si \quad -1/n \leq t \leq 1/n\,, \end{cases}$$

y luego use x_n para probar que $\quad \|F\| \geq \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt - \frac{1}{n}$.

► **2.5** *Considere un abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio*

$$H(\mathrm{div}\,;\Omega) := \left\{ v \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\ v := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w\, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\ v\ \mathrm{div}\ w\, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\,.$$

a) *Demuestre que $(H(\mathrm{div}\,;\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.*

b) *Pruebe que para todo $g \in [L^2(\Omega)]^n$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega v_g \cdot w\, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\ v_g\ \mathrm{div}\ w\, dx = \int_\Omega g \cdot w\, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\,.$$

IND.: *Dada $v \in [L^2(\Omega)]^n$, se dice que $\mathrm{div}\ v := z \in L^2(\Omega)$ si*

$$-\sum_{i=1}^n \int_\Omega v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega z\, \varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

► **2.6** *Considere un abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio*

$$H(\mathrm{rot};\Omega) := \{\, v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}\, v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)\,\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w\, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v\ \mathrm{rot}\, w\, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

a) *Demuestre que* $(H(\mathrm{rot};\Omega);\langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)})$ *es un espacio de Hilbert.*

b) *Pruebe que para todo* $g\in H(\mathrm{rot};\Omega)$ *existe un único* $v_g\in H(\mathrm{rot};\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega v_g\cdot w\,dx+\int_\Omega \mathrm{rot}\,v_g\,\mathrm{rot}\,w\,dx=\int_\Omega \mathrm{rot}\,g\,\mathrm{rot}\,w\,dx\quad\forall\,w\in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

IND.: *Notar que* $v\in H(\mathrm{rot};\Omega)$ *sí y sólo sí* $(v_2,-v_1)\in H(\mathrm{div}\,;\Omega)$. *También, dada* $v\in[L^2(\Omega)]^2$, *se dice que* $\mathrm{rot}\,v:=z\in L^2(\Omega)$ *si*

$$-\int_\Omega v_2\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx+\int_\Omega v_1\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,dx=\int_\Omega z\,\varphi\,dx\qquad\forall\,\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

▶ **2.7** *Sea* X *un espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{C}$ *y sea* $p:X\to\mathbb{R}$ *tal que*

$$p(\alpha\,x)=|\alpha|\,p(x)\quad y\quad p(x+y)\le p(x)+p(y)\qquad\forall\,\alpha\in\mathbb{C}\,,\ \forall\,x\,,\,y\in X\,.$$

Además, sean S *un subespacio de* X *y* $f:S\to\mathbb{C}$ *un funcional lineal tales que*

$$|f(x)|\le p(x)\qquad\forall\,x\in S\,.$$

Demuestre que f *puede extenderse a un funcional lineal* $F:X\to\mathbb{C}$ *tal que*

$$|F(x)|\le p(x)\qquad\forall\,x\in X\,.$$

▶ **2.8** *Pruebe que todo espacio de Hilbert es estrictamente convexo.*

▶ **2.9** *Demuestre que para todo* $f\in(H^m(\Omega))'$ *existen funciones* $f_\alpha\in L^2(\Omega)$, $|\alpha|\le m$, *tales que*

$$f(v)=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega f_\alpha\,\partial^\alpha v\,dx\quad\forall\,v\in H^m(\Omega)\,.$$

▶ **2.10** *Sea* X *un espacio vectorial normado.*

a) *Sea* Y *un subespacio no denso de* X. *Demuestre que existe un funcional no nulo* $F\in X'$ *tal que* $F(x)=0$ *para todo* $x\in Y$.

b) *Sean* x_0, $x_1\in X$ *tal que* $x_0\ne x_1$. *Pruebe que existe una sucesión* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X'$ *tal que* $||F_n||=||x_0-x_1||^n$ *y* $F_n(x_1)=F_n(x_0)+||x_1-x_0||^{n+1}$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$.

▶ **2.11** *Sea* $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio de Hilbert y sea* $J:V\to\mathbb{R}$ *un funcional nolineal. Se dice que* J *admite una derivada direccional en* $v\in V$, *en la dirección* $\varphi\in V$, *si la expresión* $\frac{J(v+\epsilon\varphi)-J(v)}{\epsilon}$ *admite un límite cuando* $\epsilon\to0$. *El valor de este límite se denota* $DJ(v,\varphi)$. *Entonces,* J *se* *dice diferenciable en el sentido de* GATEAUX *(o G-diferenciable) en* $v \in V$, *si* $DJ(v, \varphi)$ *existe para todo* $\varphi \in V$. *Ahora, si* J *es G-diferenciable en* $v \in V$ *y si* $DJ(v, \cdot) \in V'$, *se concluye, por el Teorema de Representación de Riesz, que existe un único elemento* $z \in V$ *tal que* $DJ(v, \varphi) = \langle z, \varphi \rangle \; \forall \varphi \in V$. *En tal caso, se denota* $z := J'(v)$ *y se llama el* GRADIENTE *de* J *en* v.

Se dice que J *tiene segunda diferencial en el sentido de Gateaux en* $v \in V$, *en las direcciones* φ *y* $\psi \in V$, *si la expresión* $\frac{DJ(v+\epsilon\psi,\varphi) - DJ(v,\varphi)}{\epsilon}$ *admite un límite cuando* $\epsilon \to 0$. *El valor de este límite se denota* $D^2J(v, \varphi, \psi)$.

a) *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *y considere* $V := L^2(\Omega)$. *Defina* $J_0 : V \to \mathbb{R}$ *por*

$$J_0(v) := \int_\Omega (v^2 + v)\, dx \quad \forall\, v \in V$$

y calcule $J_0'(v)$ *para todo* $v \in V$. *Qué puede decir de* $J_0'(v)$ *si* J_0 *se restringe al espacio de Sobolev* $H^1(\Omega)$ *?*

b) *Suponga que* J *es G-diferenciable en* $(v + \alpha\varphi)$, *en la dirección* φ, *para todo* $\alpha \in [0, 1]$. *Demuestre que existe* $\beta \in (0, 1)$ *tal que*

$$J(v + \varphi) \;=\; J(v) \;+\; DJ(v + \beta\,\varphi, \varphi)\,.$$

c) *Suponga que* J *es* α*-convexo, esto es, existe* $\alpha > 0$ *tal que para todo* u, $v \in V$ *y para todo* $\beta \in [0, 1]$:

$$J((1-\beta)\,u + \beta\,v) \;\le\; (1-\beta)\,J(u) \;+\; \beta\,J(v) \;-\; \frac{\alpha}{2}\,\beta\,(1-\beta)\,||u-v||^2\,.$$

Además, asuma que J *es G-diferenciable en todo* $v \in V$. *Demuestre que para todo* u, $v \in V$ *se tiene:*

$$DJ(u, u-v) \;-\; DJ(v, u-v) \;\ge\; \alpha\,||u-v||^2$$

y

$$J(v) \;\ge\; J(u) \;+\; DJ(u, v-u) \;+\; \frac{\alpha}{2}\,||v-u||^2\,.$$

d) *Suponga que* J *es G-diferenciable en* $v \in V$ *y que, dada una dirección* $\varphi \in V$, $D^2J(v + \alpha\varphi, \varphi, \varphi)$ *existe* $\forall\,\alpha \in [0, 1]$. *Demuestre que hay una constante* $\beta \in (0, 1)$ *tal que*

$$J(v + \varphi) \;=\; J(v) + DJ(v, \varphi) + \frac{1}{2}\,D^2J(v + \beta\varphi, \varphi, \varphi)\,.$$

▶ **2.12** *Sea* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio de Hilbert y sea* V *un subespacio cerrado de* H*. El anulador (o aniquilador) de* V *se denota por* V^o *y se define como*

$$V^o := \{\, F \in H' : \quad F(x) = 0 \quad \forall\, x \in V \,\}\,.$$

Demuestre que

$$H \;=\; V \,\oplus \mathcal{R}(V^o)\,,$$

donde $\mathcal{R} : H' \to H$ *denota la aplicación de Riesz.*

▶ **2.13** *Sea* X *un espacio vectorial normado y sea* $x_0 \in X$ *tal que* $|\,F(x_0)\,| \,\le\, C_0$ *para todo* $F \in X'$ *con* $||F||_{X'} \,=\, 1$*. Demuestre que* $||x_0|| \,\le\, C_0$*.*

▶ **2.14** *Sea* V *un subespacio de un Hilbert* $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *y defina*

$$V^\perp := \{y \in Y : \quad \langle y, z\rangle = 0 \quad \forall\, z \in V\}\,.$$

Si $\overline{V}$ *denota la clausura de* V*, demuestre que* $\overline{V}^\perp = V^\perp$*. Concluya que* V *es denso en* Y *sí y sólo sí* $V^\perp = \{0\}$*.*

▶ **2.15**

a) *Sea* S *un subconjunto de un Hilbert* H *y sea* M *el subespacio cerrado generado por* S*. Pruebe que* $S^\perp$ *es un subespacio cerrado de* H*,* $M^\perp = S^\perp$*, y* $M = (S^\perp)^\perp$*.*

b) *Sea* V *un subespacio de un Hilbert* H*. Demuestre que* $H = \overline{V} \oplus V^\perp$*.*

▶ **2.16**

a) *Sea* S *un subespacio de un Hilbert* H*. Demuestre que* $S^\perp = \bar{S}^\perp$*.*

b) *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera suave* Γ*, y considere el espacio de Sobolev* $H^1(\Omega)$*. Encuentre y caracterice el subespacio* V *de* $H^1(\Omega)$ *tal que* $H^1(\Omega) \;=\; H^1_0(\Omega) \oplus V$*.*

▶ **2.17** *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$*, y sea* $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función continua para la cual existen constantes* M*,* $\beta > 0$*, tales que* $\beta \le \kappa(x) \;\le\; M$ *para todo* $x \in \Omega$*. Defina el conjunto*

$$S \;:=\; \left\{\, v \in H^1_0(\Omega) : \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \;\le\; 1 \,\right\}\,,$$

y demuestre que para todo $u \in H^1_0(\Omega)$ *existe un único* $g \in S$ *tal que*

$$\int_\Omega \kappa(x)\,\|\nabla u(x) - \nabla g(x)\|^2_{\mathbb{R}^n}\,dx \;=\; \min_{v\in S} \int_\Omega \kappa(x)\,\|\nabla u(x) - \nabla v(x)\|^2_{\mathbb{R}^n}\,dx\,.$$

▶ **2.18** *Sea* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espacio de Hilbert* COMPLEJO, *y sean* $u\,,\ v \in H$, $u \neq v$, *tales que* $\|u\| = \|v\|$. *Defina* $w := u - v$ *y considere la proyección ortogonal* $\mathbf{P} : H \to S^{\perp}$, *donde* S *es el subespacio generado por* w. *Demuestre que*

$$\mathbf{P}(u) \,=\, \mathbf{P}(v) \,=\, \frac{u+v}{2} \,+\, \left\{ \frac{\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(\langle u, v\rangle)}{\|w\|^2} \right\} w\,.$$

Qué sucede cuando H *es un Hilbert* REAL *? Interprete gráficamente.*

▶ **2.19** *Sea* $\Omega := (0,1) \times (0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ *y considere el espacio de Hilbert* $(H(\mathrm{div};\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, *donde*

$$H(\mathrm{div};\Omega) \,:=\, \{\, \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(\Omega) \,\}$$

y

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle \,:=\, \int_\Omega \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx \,+\, \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\zeta})\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \qquad \forall\, \boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

Además, sea S *el subespacio de* $H(\mathrm{div};\Omega)$ *dado por*

$$S := \{\boldsymbol{\tau} :\ \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma\, x_1, \beta + \gamma\, x_2)\ \forall\, x := (x_1, x_2) \in \Omega;\ \textit{con}\ \alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbb{R}\,\}\,,$$

y sea $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ *definida por* $\boldsymbol{\sigma}(x) = (x_1 x_2, x_1 + x_2)\ \ \forall\, x := (x_1, x_2) \in \Omega$. *Aplique el teorema de caracterización respectivo y encuentre la mejor aproximación de* $\boldsymbol{\sigma}$ *por elementos de* S, *con respecto a la norma inducida por* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

▶ **2.20** *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *y* $X := \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, *el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden* n *con coeficientes reales, provisto del producto escalar* $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^t\, B)\ \ \forall\, A,\, B \in X$.

a) *Demuestre que* $X = X_{\mathtt{sim}} \oplus X_{\mathtt{asim}}$, *donde*

$$X_{\mathtt{sim}} \,=\, \{\, A \in X : \quad A^t \,=\, A \,\} \quad \textit{y} \quad X_{\mathtt{asim}} \,=\, \{\, A \in X : \quad A^t \,=\, -\, A \,\}\,.$$

b) *Sea* $C := (c_{ij})_{n\times n} \in X$ *tal que* $c_{ij} = 1\ \ \forall\, i \geq j$ *y* $c_{ij} = 0\ \ \forall\, i < j$. *Encuentre las mejores aproximaciones de* C *por matrices de* $X_{\mathtt{sim}}$ *y* $X_{\mathtt{asim}}$, *con respecto a la norma inducida por* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

▶ **2.21** *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial normado y sea* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *una base de un subespacio* U *de* X.

a) Demuestre que existen $F_1, F_2, ..., F_n \in X'$ *tales que* $F_j(x_i) = \delta_{ij}\ \ \ \forall\, i, j \in \{1, ..., n\}$.

b) Pruebe que $X = U \oplus V$, *donde* $V := \{\, x \in X : \quad F_j(x) = 0 \quad \forall\, j \in \{1, ..., n\}\,\}$.

Capítulo 3

OPERADORES LINEALES

3.1. Preliminares

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios vectoriales normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, con vectores nulos θ_X y θ_Y, respectivamente. Una aplicación $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ que asigna a cada $x \in \mathcal{D}(A)$ un único vector $y \in Y$ se llama un operador (o transformación) de X en Y. El conjunto $\mathcal{D}(A)$ sobre el cual actúa A se llama el dominio del operador.

Definición 3.1 *Se dice que un operador $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es* LINEAL *si*

- *$\mathcal{D}(A)$ es un subespacio de X.*
- *$A(\alpha\, x + \beta\, z) = \alpha\, A(x) + \beta\, A(z) \qquad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall\, x,\, z \in \mathcal{D}(A)$.*

Notar que si $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es lineal se tiene claramente $A(\theta_X) = \theta_Y$.

Definición 3.2 *Se dice que un operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es* ACOTADO *si existe una constante $M > 0$ tal que*

$$\|A(x)\|_Y \leq M\, \|x\|_X \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\,.$$

Ejemplo 3.1

1. Dado un espacio de Hilbert real $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, la aplicación de Riesz

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{R}: & H' & \to & H \\ & F & \to & \mathcal{R}(F) \end{array}$$

   es lineal y acotada.

2. Dada $f \in L^2(\Omega)$, consideramos $u \in H_0^1(\Omega)$ la única solución débil del problema de valores de contorno:

$$-\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega\,,$$

es decir, u es el único elemento en $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \;=\; \int_\Omega f\, v \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Entonces, se puede probar que el operador A definido por

$$\begin{array}{rlcl} A: & L^2(\Omega) & \to & H_0^1(\Omega) \\ & f & \to & A(f) := u \end{array}$$

es lineal y acotado.

En lo que sigue, a menos que se diga explícitamente lo contrario, se asume que $\mathcal{D}(A) = X$.

Definición 3.3 *El conjunto de todos los operadores lineales y acotados de X en Y se designa por $\mathcal{L}(X,Y)$ (o $\mathcal{B}(X,Y)$). En particular, cuando $X = Y$ se escribe simplemente $\mathcal{L}(X)$ en vez de $\mathcal{L}(X,X)$. Además, notar que $X' = \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$.*

Ahora, sobre el conjunto $\mathcal{L}(X,Y)$ se definen las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{rlcl} +: & \mathcal{L}(X,Y)\times\mathcal{L}(X,Y) & \to & \mathcal{L}(X,Y) \\ & \text{(A,B)} & \to & \text{A+B}\,, \quad (A+B)(x) := A(x) + B(x) \quad \forall\, x \in X\,, \end{array} \tag{3.1}$$

y

$$\begin{array}{rlcl} \cdot: & \mathbb{K}\times\mathcal{L}(X,Y) & \to & \mathcal{L}(X,Y) \\ & (\lambda, A) & \to & \lambda\, A\,, \qquad (\lambda\, A)(x) := \lambda\, A(x) \quad \forall\, x \in X\,. \end{array} \tag{3.2}$$

Entonces, se demuestra fácilmente que $(\mathcal{L}(X,Y), +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, cuyo elemento neutro para la adición es el operador nulo $\Theta : X \to Y$ definido como $\Theta(x) = \theta_Y$ para todo $x \in X$.

Definición 3.4 *Dado $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ se define $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ como el ínfimo de todas las constantes $M > 0$ que satisfacen la condición de acotamiento de A según se indica en la Definición 3.2, esto es*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \text{ínf}\left\{\, M > 0 : \quad \|A(x)\|_Y \le M\, \|x\|_X \quad \forall\, x \in X \,\right\}.$$

Es fácil ver que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ es una norma sobre $\mathcal{L}(X,Y)$, con lo cual la estructura $(\mathcal{L}(X,Y),+,\cdot,\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ constituye un espacio vectorial normado. Más aún, puede mostrarse que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ se define también como:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \;=\; \sup_{\theta_X \neq x \in X} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} \qquad \forall\, A \,\in\, \mathcal{L}(X,Y)\,, \tag{3.3}$$

o bien:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \;:=\; \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X \leq 1}} \|A(x)\|_Y \;=\; \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X = 1}} \|A(x)\|_Y\,.$$

En particular, si $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X)$, se puede probar que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} \;=\; \sup_{\substack{x,\,z\in X\\ \|x\|,\,\|z\| \leq 1}} |\langle A(x), z\rangle|\,. \tag{3.4}$$

En general, dado $A \,\in\, \mathcal{L}(X,Y)$, se tiene claramente:

$$\|A(x)\|_Y \;\leq\; \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\,\|x\|_X \qquad \forall\, x \,\in\, X\,,$$

y si $M > 0$ es tal que $\quad \|A(x)\|_Y \;\leq\; M\,\|x\|_X \qquad \forall\, x \,\in\, X$, entonces necesariamente

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \;\leq\; M\,.$$

Es interesante comentar aquí que el análogo al Lema 2.4, vale decir la identidad

$$\|x\|_X \;=\; \max_{\substack{A\in\mathcal{L}(X,Y)\\ A\neq\Theta}} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}} \qquad \forall\, x \in X\,, \tag{3.5}$$

también ocurre en este caso. Al final de esta sección se da la demostración respectiva.

En lo que sigue, y cuando no haya lugar a confusión, se omitirán los subíndices respectivos de cada norma y de los vectores nulos θ_X y θ_Y.

Definición 3.5 *Un operador $A : X \to Y$ se dice continuo en $x_0 \in X$ si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x_0, se tiene que $\{A(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $A(x_0)$ en Y, esto es $\|A(x_n) - A(x_0)\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Equivalentemente, A es continuo en x_0 si $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad$ tal que:*

$$\|A(x) - A(x_0)\| \;<\; \epsilon \quad \forall\, x \,\in\, B(x_0,\delta) := \{x \in X :\; \|x - x_0\| < \delta\}\,.$$

Es importante observar que si $A : X \to Y$ es un operador lineal acotado, esto es $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces A es continuo en todo $x_0 \in X$. En efecto, dada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a $x_0 \in X$, se tiene

$$\|A(x_n) - A(x_0)\| \;=\; \|A(x_n - x_0)\| \;\leq\; \|A\|\,\|x_n - x_0\|\,,$$

lo cual prueba que $\{A(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $A(x_0)$ en Y.

Recíprocamente, se tiene el siguiente resultado, hasta cierto punto sorprendente, que establece que la continuidad en un vector individual de X garantiza el acotamiento de un operador lineal y por lo tanto su continuidad en todo el espacio.

Lema 3.1 *Sea $A : X \to Y$ un operador lineal y sea $x_0 \in X$ tal que A es continuo en x_0. Entonces A es acotado y por lo tanto continuo en todo X.*

Demostración. Supongamos, por contradicción, que A no es acotado. Entonces, para todo $M > 0$ existe $x_M \in X$ tal que $\|A(x_M)\| > M\,\|x_M\|$. En particular, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $\|A(x_n)\| > n\,\|x_n\| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Notar que $x_n \neq \theta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ya que en caso contrario se obtendría una contradicción a partir de la desigualdad anterior. Luego, definiendo

$$z_n \;:=\; \frac{x_n}{n\,\|x_n\|} \;+\; x_0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

se sigue que $\|z_n - x_0\| \;=\; \dfrac{1}{n}$, lo cual prueba que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0. Sin embargo, usando la linealidad de A se obtiene que

$$A(z_n) \;=\; \frac{A(x_n)}{n\,\|x_n\|} \;+\; A(x_0)\,,$$

de donde

$$\|A(z_n) - A(x_0)\| \;=\; \frac{\|A(x_n)\|}{n\,\|x_n\|} \;>\; 1\,,$$

lo cual contradice la continuidad de A en x_0. $\square$

3.2. Caracterización de $\mathcal{L}(X,Y)$

El propósito siguiente es caracterizar la eventual completitud del espacio $\mathcal{L}(X,Y)$. Más precisamente, probaremos que $\mathcal{L}(X,Y)$ es Banach si y sólo si Y es Banach. En particular, cuando Y es el cuerpo $\mathbb{K}$, lo anterior probará lo afirmado al comienzo del Capítulo 2 en cuanto a que todos los duales son completos. Necesitamos el siguiente resultado previo.

Lema 3.2 *Sean X y Y espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{K}$ y sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tales que $x_0 \neq \theta$. Entonces existe $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que*

$$A(x_0) \,=\, y_0 \qquad y \qquad \|A\| \,=\, \frac{\|y_0\|}{\|x_0\|}\,.$$

Demostración. De acuerdo al Teorema 2.7 (cf. Sección 2.3.3 sobre otras consecuencias del Teorema de Hahn-Banach), sabemos que existe un funcional $F \in X'$ tal que $\|F\| \,=\, 1$ y $F(x_0) \,=\, \|x_0\|$. Luego, podemos definir el operador $A : X \to Y$ dado por

$$A(x) \,:=\, \frac{F(x)}{\|x_0\|}\, y_0 \qquad \forall\, x \in X\,.$$

Es claro que A es lineal, porque F lo es, y $A(x_0) \,=\, y_0$. A su vez, se tiene que

$$\|A\| \,=\, \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq\theta}} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \,=\, \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq\theta}} \frac{|F(x)|\,\|y_0\|}{\|x\|\,\|x_0\|} \,=\, \frac{\|y_0\|}{\|x_0\|} \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq\theta}} \frac{|F(x)|}{\|x\|} \,=\, \frac{\|y_0\|}{\|x_0\|}\,\|F\| \,=\, \frac{\|y_0\|}{\|x_0\|}\,,$$

lo cual completa la demostración $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado aunciado.

Teorema 3.1 *Sean X y Y espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{K}$. Entonces $\mathcal{L}(X,Y)$ es Banach si y sólo si Y es Banach.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{L}(X,Y)$ es Banach y sean $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en Y y $x_0 \in X$ tal que $x_0 \neq \theta$. Entonces, aplicando Lema 3.2 se deduce la existencia de una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ tal que

$$A_n(x_0) \,=\, y_n \quad \text{y} \quad \|A_n\| \,=\, \frac{\|y_n\|}{\|x_0\|} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Más precisamente, de acuerdo a la demostración de dicho lema, sabemos que

$$A_n(x) \,:=\, \frac{F(x)}{\|x_0\|}\, y_n \qquad \forall\, x \in X\,,$$

donde $F \in X'$ es tal que $\|F\| \,=\, 1$ y $F(x_0) \,=\, \|x_0\|$. Se sigue que

$$(A_n - A_m)(x) \,=\, \frac{F(x)}{\|x_0\|}\,(y_n - y_m) \quad \text{y} \quad \|A_n - A_m\| \,=\, \frac{\|y_n - y_m\|}{\|x_0\|} \quad \forall\, x \in X\,,\ \forall\, n\,,\, m \in \mathbb{N}\,,$$

con lo cual $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathcal{L}(X,Y)$. En consecuencia, si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ es el límite de esta sucesión, se obtiene que

$$\|y_n - A(x_0)\| \,=\, \|A_n(x_0) - A(x_0)\| \,=\, \|(A_n - A)(x_0)\| \,\leq\, \|A_n - A\|\,\|x_0\| \,\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\, 0\,,$$

y por lo tanto $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $A(x_0)$ en Y.

Recíprocamente, supongamos que Y es Banach y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X,Y)$. Esto significa que dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A_n - A_m\| \;\le\; \epsilon \qquad \forall\, n\,,\; m \ge N\,,$$

lo cual, en virtud de la Definición 3.4 y ecuación (3.3), es equivalente a escribir:

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \;\le\; \epsilon\,\|x\| \qquad \forall\, x \in X\,, \qquad \forall\, n\,,\; m \ge N\,. \tag{3.6}$$

Se sigue de (3.6) que para cada $x \in X$, $\{A_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto convergente en Y. De este modo, podemos definir el operador $A : X \to Y$ dado por

$$A(x) \;:=\; \lim_{m\to\infty} A_m(x) \qquad \forall\, x \,\in\, X\,,$$

el cual es claramente lineal. Además, fijando $n \ge N$ y aplicando la desigualdad triangular y (3.6), obtenemos:

$$\|A_n(x) - A(x)\| \;\le\; \epsilon\,\|x\| \,+\, \|A_m(x) - A(x)\| \qquad \forall\, m \ge N\,,$$

de donde, tomando límite cuando $m \to \infty$, resulta:

$$\|A_n(x) - A(x)\| \;\le\; \epsilon\,\|x\| \qquad \forall\, x \in X\,, \qquad \forall\, n \,\ge\, N\,. \tag{3.7}$$

En particular, para $\epsilon = 1$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A_n(x) - A(x)\| \;\le\; \|x\| \qquad \forall\, x \in X\,, \qquad \forall\, n \,\ge\, M\,,$$

y en consecuencia

$$\|A(x)\| \;\le\; \|A(x) - A_M(x)\| \,+\, \|A_M(x)\| \;\le\; (1 + \|A_M\|)\,\|x\| \qquad \forall\, x \in X\,,$$

lo cual prueba que A es acotado y así $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Por último, de (3.7) se deduce que

$$\|A_n - A\| \;\le\; \epsilon \qquad \forall\, n \,\ge\, N\,,$$

y por lo tanto $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A en $\mathcal{L}(X,Y)$. □

Se concluye esta sección con la demostración de la identidad (3.5).

Lema 3.3 *Sean X e Y espacios vectoriales normados sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, tales que Y es no trivial. Entonces*

$$\|x\| \;=\; \sup_{\substack{A\in\mathcal{L}(X,Y)\\ A\neq\Theta}} \frac{\|A(x)\|}{\|A\|} \;=\; \max_{\substack{A\in\mathcal{L}(X,Y)\\ A\neq\Theta}} \frac{\|A(x)\|}{\|A\|} \qquad \forall\, x \in X\,. \tag{3.8}$$

Demostración. Si $x = \theta$ la identidad es inmediata ya que $A(\theta) = \theta \quad \forall\, A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Si $x \neq \theta$, elegimos un vector $y_0 \in Y$, $y_0 \neq \theta$, y aplicamos Lemma 3.2. De este modo, se sigue que existe $A_0 \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $A_0(x) = y_0$ y $\|A_0\| = \frac{\|y_0\|}{\|x\|}$, lo cual implica que

$$\sup_{\substack{A\in\mathcal{L}(X,Y)\\ A\neq\Theta}} \frac{\|A(x)\|}{\|A\|} \;\geq\; \frac{\|A_0(x)\|}{\|A_0\|} \;=\; \|x\| \qquad \forall\, x \in X\,.$$

Por último, es claro que

$$\sup_{\substack{A\in\mathcal{L}(X,Y)\\ A\neq\Theta}} \frac{\|A(x)\|}{\|A\|} \;\leq\; \|x\| \qquad \forall\, x \in X\,,$$

lo cual completa la demostración. □

3.3. El operador adjunto en espacios normados

Sean X, Y espacios vectoriales normados sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Entonces, dado $G \in Y'$ definimos el funcional $G \circ A : X \longrightarrow \mathbb{K}$ como

$$(G \circ A)(x) \;:=\; G(A(x)) \qquad \forall\, x \,\in\, X\,.$$

Es claro que $G \circ A$ es lineal y acotado porque G y A lo son, y por lo tanto $G \circ A \,\in\, X'$. Esto induce la definición del operador

$$\begin{aligned} A' : Y' &\;\longrightarrow\; X' \\ G &\;\longrightarrow\; A'(G) \;:=\; G \circ A\,, \end{aligned}$$

el cual se llama operador adjunto de A.

Lema 3.4 *Dado $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ se tiene $A' \in \mathcal{L}(Y',X')$ y $\|A\| \;=\; \|A'\|$.*

Demostración. La linealidad de A' se sigue de las definiciones de suma y multiplicación por escalares en los espacios duales X' e Y' (ver (2.1) y (2.2) para el caso general). Para el acotamiento de A' observamos primero que

$$\|A'(G)\| := \|G \circ A\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq\theta}} \frac{|G(A(x))|}{\|x\|} \le \|A\| \, \|G\| \qquad \forall\, G \in Y' ,$$

lo cual prueba que A' es efectivamente acotado y $\|A'\| \le \|A\|$. Por otro lado, aplicando la consecuencia del Teorema de Hahn-Banach dada por Lema 2.4, se obtiene

$$\begin{aligned} \|A(x)\| &= \sup_{\substack{G\in Y'\\ G\neq\Theta}} \frac{|G(A(x))|}{\|G\|} = \sup_{\substack{G\in Y'\\ G\neq\Theta}} \frac{|A'(G)(x)|}{\|G\|} \\ &\le \sup_{\substack{G\in Y'\\ G\neq\Theta}} \frac{\|A'(G)\| \, \|x\||}{\|G\|} \le \|A'\| \, \|x\| \qquad \forall\, x \in X , \end{aligned}$$

de donde $\|A\| \le \|A'\|$, lo cual completa la demostración. $\square$

El siguiente lema, cuya demostración se sigue directamente de las definiciones de operador adjunto y de la suma y multiplicación por escalares en $\mathcal{L}(X,Y)$ (ver (3.1) y (3.2)), se deja como ejercicio para el lector.

Lema 3.5 *Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados. Entonces*

i) $(A + B)' = A' + B' \qquad \forall\, A,\ B \in \mathcal{L}(X,Y)$.

ii) $(\alpha\, A)' = \alpha\, A' \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall\, A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

iii) $(AB)' = B'\, A' \qquad \forall\, A \in \mathcal{L}(X,Y), \quad \forall\, B \in \mathcal{L}(Z,X)$.

El siguiente ejemplo ilustra el cálculo explícito de un operador adjunto.

Ejemplo 3.2 Sea X el espacio vectorial real de las funciones continuas sobre $[0,1]$, provisto de la norma uniforme $\|u\| := \max\limits_{t\in[0,1]} |u(t)| \quad \forall\, u \in X$, y sean $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ los $n+1$ polinomios mónicos de X, esto es $p_j(t) := t^j \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \forall\, j \in \{0,1,...,n\}$. Entonces, se define el operador $A : X \longrightarrow X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in X .$$

El objetivo es probar que $A \in \mathcal{L}(X)$ y encontrar su adjunto A'. Para ello, dado $j \in \{0, 1, ..., n\}$, se define el funcional $F_j : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$F_j(u) := \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Es claro que F_j es lineal y acotado. En particular, para el acotamiento se tiene fácilmente

$$|F_j(u)| \,\leq\, \int_0^1 |u(t)|\,|p_j(t)|\, dt \,\leq\, \int_0^1 |p_j(t)|\, dt\, \|u\| \,\leq\, \|u\|\,,$$

lo cual prueba que $F_j \in X'$ y $\|F_j\| \leq 1$. Utilizando estos funcionales, podemos redefinir el operador A como

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} F_j(u)\; p_j \qquad \forall\, u \in X\,,$$

el cual es claramente lineal y acotado ya que cada uno de los F_j lo es. De este modo, dado $G \in X'$ y $u \in X$, se obtiene

$$\begin{aligned} A'(G)(u) \,&=\, (G \circ A)(u) \,=\, G(A(u)) \,=\, G\left(\sum_{j=0}^{n} F_j(u)\; p_j\right) \\ &=\, \sum_{j=0}^{n} F_j(u)\; G(p_j) \,=\, \sum_{j=0}^{n} G(p_j)\, F_j(u) \,=\, \left(\sum_{j=0}^{n} G(p_j)\, F_j\right)(u)\,, \end{aligned}$$

con lo cual

$$A'(G) \,=\, \sum_{j=0}^{n} G(p_j)\, F_j \qquad \forall\, G \,\in\, X'\,.$$

3.4. El operador adjunto en espacios de Hilbert

Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dado $y \in Y$, definamos el funcional

$$\begin{array}{rcl} X & \to & \mathbb{K} \\ x & \to & \langle A(x), y\rangle_Y\,, \end{array}$$

el cual es claramente lineal y acotado. En efecto, la linealidad se sigue del hecho que A y la primera componente del producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$ son lineales. A su vez, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene que

$$|\,\langle A(x), y\rangle_Y\,| \,\leq\, \|A(x)\|\,\|y\| \,\leq\, \|A\|\,\|x\|\,\|y\|\,,$$

lo cual prueba que dicho funcional es acotado y que su norma es menor o igual que $\|A\|\,\|y\|$. Luego, aplicando el Teorema de Representación de Riesz, se deduce que existe un único $z \in X$ tal que

$$\langle A(x), y\rangle_Y \;=\; \langle x, z\rangle_X \qquad \forall\, x \in X\,.$$

Este análisis induce la definición del operador

$$\begin{aligned} A^* : Y \;&\rightarrow\; X \\ y \;&\rightarrow\; A^*(y) \;:=\; z\,, \end{aligned} \tag{3.9}$$

el cual se llama ADJUNTO DE HILBERT de A y está caracterizado por la relación

$$\langle A(x), y\rangle_Y \;=\; \langle x, A^*(y)\rangle_X \qquad \forall\, x \in X\,, \quad \forall\, y \in Y\,. \tag{3.10}$$

El análogo del Lema 3.4 se prueba a continuación.

LEMA 3.6 *Dados X e Y espacios de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, se tiene $A^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ y $\|A^*\| \;=\; \|A\|$.*

DEMOSTRACIÓN. La linealidad de A^* se sigue de la caracterización (3.10) y de las propiedades de los productos escalares. En efecto, dados $y_1,\, y_2 \in Y$ y $\alpha_1,\, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle x, A^*(\alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2)\rangle_X \;&=\; \langle A(x), \alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2\rangle_Y \;=\; \bar{\alpha}_1\,\langle A(x), y_1\rangle_Y \;+\; \bar{\alpha}_2\,\langle A(x), y_2\rangle_Y \\ &=\; \bar{\alpha}_1\,\langle x, A^*(y_1)\rangle_X \;+\; \bar{\alpha}_2\,\langle x, A^*(y_2)\rangle_X \;=\; \langle x, \alpha_1\, A^*(y_1) \;+\; \alpha_2\, A^*(y_2)\rangle_X \qquad \forall\, x \in X\,, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $A^*(\alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2) \;=\; \alpha_1\, A^*(y_1) \;+\; \alpha_2\, A^*(y_2)$. A su vez, usando el Teorema de Representación de Riesz en X, la identidad (3.10) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene

$$\|A^*(y)\| \;=\; \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq\theta}} \frac{\langle x, A^*(y)\rangle_X}{\|x\|} \;=\; \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq\theta}} \frac{\langle A(x), y\rangle_Y}{\|x\|} \;\leq\; \|A\|\,\|y\| \qquad \forall\, y \in Y\,,$$

de donde A^* es acotado y $\|A^*\| \;\leq\; \|A\|$. Procediendo de manera análoga, usando ahora el Teorema de Representación de Riesz en Y, y nuevamente la identidad (3.10) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se demuestra que $\|A\| \;\leq\; \|A^*\|$, lo cual concluye la demostración. $\square$

Por otro lado, notar que los operadores A^* y A' están relacionados según el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{A}{\underset{A^*}{\rightleftarrows}} & Y \\ \mathcal{R}_X \uparrow & & \uparrow \mathcal{R}_Y \\ X' & \overset{A'}{\longleftarrow} & Y' \,, \end{array}$$

es decir

$$A^* \;=\; \mathcal{R}_X \circ A' \circ \mathcal{R}_Y^{-1} \,,$$

o bien

$$A' \;=\; \mathcal{R}_X^{-1} \circ A^* \circ \mathcal{R}_Y \,.$$

Definición 3.6 *Sean X un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X, X)$. Se dice que A es* AUTO-ADJUNTO *si $A = A^*$.*

Ejemplo 3.3 Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert, y, dado $m \in \mathbb{N}$, consideremos conjuntos $\{F_1, F_2, ..., F_m\} \subseteq X'$, $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \subseteq X$, e $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subseteq Y$. Entonces se definen los operadores $A : X \to Y$ y $B : X \to X$ por

$$A(x) \;:=\; \sum_{j=1}^{m} F_j(x)\, y_j \qquad \forall\, x \in X \,,$$

y

$$B(x) \;:=\; \sum_{j=1}^{m} \langle x, x_j\rangle_X \, x_j \quad \forall\, x \in X \,.$$

El objetivo de este ejemplo es calcular A^* y luego mostrar que B es autoadjunto. En efecto, de acuerdo al Teorema de Representación de Riesz, para cada $j \in \{1, 2, ..., m\}$ existe un único $z_j \in X$ tal que $F_j(x) := \langle x, z_j\rangle_X \;\forall\, x \in X$. Se sigue que

$$A(x) \;:=\; \sum_{j=1}^{m} \langle x, z_j\rangle_X \; y_j \qquad \forall\, x \in X \,, \tag{3.11}$$

y luego, dado $y \in Y$, se tiene

$$\langle A(x), y\rangle_Y \;=\; \left\langle \sum_{j=1}^{m} \langle x, z_j\rangle_X \; y_j, y \right\rangle_Y \;=\; \sum_{j=1}^{m} \langle x, z_j\rangle_X \; \langle y_j, y\rangle_Y \;=\; \left\langle x, \sum_{j=1}^{m} \langle y, y_j\rangle_Y \, z_j \right\rangle_X \,,$$

de donde se deduce que

$$A^*(y) \;:=\; \sum_{j=1}^{m} \langle y, y_j \rangle_Y \, z_j \,. \tag{3.12}$$

Por otro lado, puesto que B es un caso particular del operador A (escrito en la forma (3.11) con $Y = X$ y $z_j = y_j = x_j$), se obtiene directamente de (3.12) que

$$B^*(x) \;:=\; \sum_{j=1}^{m} \langle x, x_j \rangle_X \, x_j \;=\; B(x)\,,$$

lo cual prueba que B es autoadjunto.

3.5. La ecuación fundamental

3.5.1. Preliminares

Sean X e Y espacios vectoriales normados sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dado $y \in Y$, la ecuación fundamental consiste en:

$$\text{Hallar } x \in X \text{ tal que } \quad A(x) \;=\; y\,, \tag{3.13}$$

es decir, encontrar una pre-imagen de y a través del operador A. Con el objeto de analizar este problema, se introducen los siguientes conjuntos.

Definición 3.7 *Se define el espacio nulo o kernel de A como:*

$$N(A) \;:=\; \{\, x \in X : \quad A(x) \;=\; \theta \,\}\,.$$

Definición 3.8 *Se define el rango o recorrido de A como:*

$$R(A) \;:=\; \{\, y \in Y : \quad \textit{existe } x \in X \quad \textit{tal que} \quad A(x) \;=\; y \,\}\,.$$

Es fácil ver que $N(A)$ y $R(A)$ son subespacios de X e Y, respectivamente. Además, puesto que $N(A)$ es la imagen inversa por A de $\{\theta\}$, se sigue que $N(A)$ es cerrado. Por otro lado, es claro que el operador lineal A es inyectivo si y sólo si $N(A) = \{\theta\}$, lo cual dice que, de haber solución para (3.13), ella es única. A su vez, el operador A es sobreyectivo si y sólo si $R(A) = Y$, lo cual significa que (3.13) tiene siempre al menos una solución.

El siguiente objetivo es caracterizar $R(A)$. Para este efecto, consideremos un elemento $y \in R(A)$. Se sigue que existe $x \in X$ tal que $A(x) = y$, y luego, dado $G \in N(A')$, se tiene que

$$G(y) = G(A(x)) = A'(G)(x) = \theta \,. \tag{3.14}$$

Lo anterior motiva la siguiente sección.

3.5.2. Anuladores y ortogonales

Comenzamos con las definiciones clásicas de anuladores.

Definición 3.9 *Sea X un espacio vectorial normado y sea $S \subseteq X$. Un funcional $F \in X'$ se dice* ANULADOR *de S si $F(x) = 0 \ \forall\, x \in S$. En tal caso, se introduce también el conjunto anulador de S*

$$S^\circ := \Big\{ F \in X' : \quad F(x) = 0 \qquad \forall\, x \in S \Big\}.$$

Definición 3.10 *Sea X un espacio vectorial normado y sea $T \subseteq X'$. Un elemento $x \in X$ se dice* ANULADOR *de T si $F(x) = 0 \quad \forall\, F \in T$. En tal caso, se introduce también el conjunto anulador de T*

$$^\circ T := \big\{ x \in X : \quad F\,(x) = 0 \quad \forall\, F \in T \big\}.$$

De acuerdo a lo anterior, la ecuación (3.14) es equivalente a decir que $y \in {}^\circ N(A')$, y por lo tanto se ha demostrado así que:

$$R(A) \subseteq {}^\circ N(A'). \tag{3.15}$$

En el caso en que $\big(X, \langle \cdot\,, \cdot \rangle_X\big)$ e $\big(Y, \langle \cdot\,, \cdot \rangle_Y\big)$ son espacios de Hilbert y $A \in \mathcal{L}\,(X, Y)$, lo anterior se reduce a

$$R(A) \subseteq N(A^*)^\perp. \tag{3.16}$$

En efecto, dado $y \in R(A)$ existe $x \in X$ tal que $y = A(x)$. Luego, si $z \in N(A^*)$ se obtiene

$$\langle\, y,\, z \,\rangle_Y = \langle\, A\,(x),\, z \,\rangle_Y = \langle\, x,\, A^*(z) \,\rangle_X = \langle\, x,\, \theta \,\rangle_X = 0,$$

lo cual prueba que $y \in N(A^*)^\perp$. Con el objeto de deducir eventuales recíprocos de las inclusiones (3.15) y (3.16), se necesitan algunos resultados adicionales sobre conjuntos anuladores y ortogonales.

Lema 3.7 *Sea* $\big(X, \|\cdot\|\big)$ *un espacio vectorial normado y sean* $S \subseteq X$ *y* $T \subseteq X'$*. Entonces* S° *y* ${}^\circ T$ *son subespacios cerrados de* X' *y* X*, respectivamente.*

Demostración. Procedemos a demostrar sólo para ${}^\circ T$. El caso de S° es análogo. Es claro que $F(\theta) = 0 \quad \forall\, F \in X'$, y en particular $F(\theta) = 0 \quad \forall\, F \in T$, lo cual prueba que $\theta \in {}^\circ T$. A su vez, dados $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$, $x,\, \widetilde{x} \in {}^\circ T$ y $F \in T$, se obtiene:

$$F(\alpha\, x + \beta\, \widetilde{x}) \,=\, \alpha\, F(x) + \beta\, F(\widetilde{x}) \,=\, \alpha\cdot\theta + \beta\cdot\theta \,=\, 0\,,$$

con lo cual $\alpha\, x + \beta\, \widetilde{x} \in {}^\circ T$, probando así que ${}^\circ T$ es un subespacio de X. Para ver que ${}^\circ T$ es cerrado, consideremos una sucesión $\big\{x_n\big\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq {}^\circ T$ que converge a $x \in X$. Así, dado $F \in T$, se tiene:

$$|\,F(x)\,| \,=|\,F(x) - F(x_n)\,| = |\,F(x - x_n)\,| \,\le\, \|F\|\,\|\,x - x_n\,\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

y por lo tanto $x \in {}^\circ T$. □

Lema 3.8 *Sea* $\big(X, \langle\cdot\,,\cdot\rangle_X\big)$ *un espacio de Hilbert con aplicación de Riesz* $\mathcal{R} : X' \to X$*, y sean* $S \subseteq X$ *y* $T \subseteq X'$*. Entonces*

$$S^\perp \,=\, \mathcal{R}(S^\circ) \quad y \quad {}^\circ T \,=\, \mathcal{R}(T)^\perp$$

Demostración. Se tiene claramente

$$\begin{aligned} x \in S^\perp \;&\Leftrightarrow\quad \langle s\,, x\rangle = 0 \qquad \forall\, s \in S \\ &\Leftrightarrow\quad \mathcal{R}^{-1}(x)\,(s) = 0 \qquad \forall\, s \in S \\ &\Leftrightarrow\quad \mathcal{R}^{-1}(x) \,\in\, S^\circ \\ &\Leftrightarrow\quad x \,\in\, \mathcal{R}(S^\circ). \end{aligned}$$

A su vez,

$$\begin{aligned} x \in {}^\circ T \;&\Leftrightarrow\quad F(x) = 0 \qquad \forall\, F \in T \\ &\Leftrightarrow\quad \langle x, \mathcal{R}(F)\rangle = 0 \qquad \forall\, F \in T \\ &\Leftrightarrow\quad x \perp \mathcal{R}(F) \qquad \forall\, F \in T \\ &\Leftrightarrow\quad x \in \mathcal{R}(T)^\perp. \end{aligned}$$

□

Notar que la identidad $S^\perp = \mathcal{R}(S^\circ)$, junto con lo estipulado por Lema 3.7 y el hecho que $\mathcal{R} : X' \to X$ es una biyección isométrica, garantizan que $S^\perp$ también es un subespacio cerrado de X.

LEMA 3.9 *Sea M un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado $\big(X\,, \|\cdot\|\big)$. Entonces* $^\circ(M^\circ) \,=\, M$

DEMOSTRACIÓN. Procedemos por doble inclusión. Sea $x \,\in\, M$. Se sigue claramente que $F(x) = 0 \quad \forall\, F \,\in\, M^\circ$, lo cual indica que $x \,\in\, {}^\circ(M^\circ)$, y por lo tanto $M \,\subseteq\, {}^\circ(M^\circ)$. Para la otra inclusión utilizaremos el contrarecíproco. En efecto, sea $\widetilde{x} \,\in\, X$ tal que $\widetilde{x} \,\notin\, M$. Puesto que M es cerrado se tiene que dist $(\widetilde{x}, M) \,>\, 0$. Luego, aplicando la consecuencia del Teorema de Hahn-Banach dada por Teorema 2.8, se deduce que $\exists\, \widetilde{F} \,\in\, X'$ tal que $\|\widetilde{F}\| \,=\, 1$, $\widetilde{F}(\widetilde{x}) \,=\, \mathrm{dist}(\widetilde{x}, M)$ y $\widetilde{F}(m) \,=\, 0 \quad \forall\, m \,\in\, M$. Esto indica que $\widetilde{F} \,\in\, M^\circ$, y dado que $\widetilde{F}(\widetilde{x}) \,\neq\, 0$, se tiene que $\widetilde{x} \,\notin\, {}^\circ(M^\circ)$. De este modo se concluye que $^\circ(M^\circ) \,\subseteq\, M$, lo cual completa la demostración □

Como corolario de los Lemas 3.8 y 3.9 se obtiene el siguiente resultado.

LEMA 3.10 *Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\big(X,\, \langle\cdot\,,\cdot\rangle\big)$. Entonces* $(M^\perp)^\perp \,=\, M$.

DEMOSTRACIÓN. Utilizando el resultado del Lema 3.9 y las identidades del Lema 3.8, se obtiene:

$$M \,=\, {}^\circ(M^\circ) \,=\, {}^\circ(\mathcal{R}^{-1}(M^\perp)) \,=\, \big\{\mathcal{R}\big(\mathcal{R}^{-1}(M^\perp)\big)\big\}^\perp \,=\, (M^\perp)^\perp\,.$$

□

A continuación se establece un resultado más general que Lema 3.9, en el cual no se considera un subespacio cerrado vectorial normado sino sólo un subconjunto del espacio vectorial normado.

LEMA 3.11 *Sea $(X,\, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sean $W \,\subseteq\, X$ y S el subespacio cerrado generado por W. Entonces $W^\circ \,=\, S^\circ$ y $S \,=\, {}^\circ(W^\circ)$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta mostrar que $W^\circ \,=\, S^\circ$ ya que entonces, de acuerdo a Lema 3.9, se obtiene $^\circ(W^\circ) \,=\, {}^\circ(S^\circ) \,=\, S$. En efecto, puesto que $W \,\subseteq\, S$, es claro que $S^\circ \,\subseteq\, W^\circ$. Resta probar que $W^\circ \,\subseteq\, S^\circ$. Para ello, sea $F \,\in\, W^\circ$, es decir $F \,\in\, X'$ y $F(x) \,=\, 0 \quad \forall\, x \,\in\, W$. Ahora, dado $x \,\in\, \langle W\rangle$, el subespacio generado por W, existen $N \,\in\, \mathbb{N}$, escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N \,\in\, \mathbb{C}$, y vectores $x_1, x_2, \cdots, x_N \,\in\, W$, tales que $x \,=\, \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \alpha_j\, \mathbf{x}_j$. Se sigue que $F(x) \,=\, \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \alpha_j\, F(x_j) \,=\, \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cdot 0 \,=\, 0$, lo cual prueba que $F \,\in\, \langle W\,\rangle^\circ$. Por último, para $x \in S = \overline{\langle W \rangle}$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \langle W \rangle$ tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, y luego $|\,F(x)\,| = |\,F(x) - F(x_n)\,| = |\,F(x - x_n)\,| \leq \|F\|\,\|\,x - x_n\,\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, de donde $F(x) = 0$. Esto demuestra que $F \in S^\circ$ y por lo tanto $W^\circ \subseteq S^\circ$. □

El análogo del resultado anterior para el caso Hilbert se establece como sigue.

Lema 3.12 *Sea $(X, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sean $W \subseteq X$ y S el subespacio cerrado generado por W. Entonces $W^\perp = S^\perp$ y $S = (W^\perp)^\perp$.*

Demostración. Aplicando las identidades dadas por Lemas 3.8, 3.11 y 3.10, se deduce fácilmente que:

$$W^\perp = \mathcal{R}(W^\circ) = \mathcal{R}(S^\circ) = S^\perp \quad y \quad S = (S^\perp)^\perp = (W^\perp)^\perp\,.$$

□

Finalizamos esta sección con un par de resultados claves sobre el rango de un operador lineal y acotado.

Teorema 3.2 *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios vectoriales normados, y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Entonces:*

i) $R(A)^\circ = N(A')$

ii) $\overline{R(A)} = {}^\circ N(A')$

iii) $R(A)$ *es cerrado si y sólo si* $R(A) = {}^\circ N(A')$.

Demostración. Para $i)$ se observa fácilmente que

$$\begin{aligned} G \in R(A)^\circ \Leftrightarrow \quad & G \in Y' \quad \text{y} \quad G(z) = 0 \quad \forall z \in R(A) \\ \Leftrightarrow \quad & G \in Y' \quad \text{y} \quad G(A(x)) = 0 \quad \forall x \in X \\ \Leftrightarrow \quad & G \in Y' \quad \text{y} \quad A'(G)(x) = 0 \quad \forall x \in X \\ \Leftrightarrow \quad & G \in Y' \quad \text{y} \quad A'(G) = \Theta \in X' \\ \Leftrightarrow \quad & G \in N(A'). \end{aligned}$$

Luego, aplicando la segunda identidad del Lema 3.11, y notando que $\overline{R(A)}$ es el subespacio cerrado generado por $R(A)$, se deduce que:

$${}^\circ N(A') = {}^\circ(R(A)^\circ) = \overline{R(A)}\,,$$

lo cual prueba *ii*). Finalmente, *iii*) se sigue de *ii*) y del hecho que, de acuerdo al Lema 3.7, $^{\circ}T$ es un subespacio cerrado de $Y \quad \forall T \subseteq Y'$. □

La versión Hilbert del teorema anterior está dada como sigue.

TEOREMA 3.3 *Sea* $\big(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X\big)$ *e* $\big(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y\big)$ *espacios de Hilbert, y sea* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Entonces:*

i) $R(A)^{\perp} = N(A^*)$

ii) $\overline{R(A)} = N(A^*)^{\perp}$

iii) $R(A)$ *es cerrado si y sólo si* $R(A) = N(A^*)^{\perp}$.

DEMOSTRACIÓN. La parte *i*) se puede probar directamente, de manera análoga a la demostración de *i*) en Teorema 3.2. Alternativamente, si $\mathcal{R}_X : X' \to X$ y $\mathcal{R}_Y : Y' \to Y$ son las aplicaciones de Riesz correspondientes, recordamos primero de la Sección 3.4 que $A' = \mathcal{R}_X^{-1} \circ A^* \circ \mathcal{R}_Y$. Se sigue fácilmente que $N(A') = \mathcal{R}_Y^{-1}(N(A^*))$, y luego, aplicando la primera identidad del Lema 3.8 y Teorema 3.2, parte *i*), se obtiene

$$R(A)^{\perp} = \mathcal{R}_Y\left(R(A)^{\circ}\right) = \mathcal{R}_Y(N(A')) = \mathcal{R}_Y\left(\mathcal{R}_Y^{-1}(N(A^*))\right) = N(A^*)\,,$$

lo cual prueba también *i*). Entonces, utilizando ahora la segunda identidad de Lema 3.12, se deduce que $N(A^*)^{\perp} = (R(A)^{\perp})^{\perp} = \overline{R(A)}$, lo cual prueba *ii*). Por último, *iii*) es consecuencia de *ii*) y del hecho que $N(A^*)^{\perp}$ es un subespacio cerrado de Y. □

En el caso en que Y es de dimensión finita, $R(A)$ es ciertamente cerrado, y por lo tanto, dado que $N(A^*)^{\perp}$ es también cerrado, el teorema anterior se resume simplemente con la identidad $\quad R(A) = \quad N(A^*)^{\perp}$.

EJEMPLO 3.4 El presente es un ejemplo clásico en dimensión finita, el cual tiene que ver con la resolución de un sistema lineal de ecuaciones. En efecto, sea $\mathbb{R}^{n\,x\,m}$ el espacio de las matrices de orden $n\,x\,m$ con coeficientes reales, y sean $A \in \mathbb{R}^{n\,x\,m}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Entonces, interesa el sistema lineal: Hallar $x \in \mathbb{R}^m$ tal que $Ax = b$. Equivalentemente, si denotamos $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{A} : X \to Y$ el operador lineal y acotado inducido por A, es decir $\mathcal{A}(x) := A\,x \quad \forall \in X$, entonces resolver el sistema se reduce a averiguar si b pertenece o no a $R(\mathcal{A})$. Para este efecto, recordemos que $\mathcal{A}^* : Y \to X$ está definido por $\mathcal{A}^*(y) = A^t\,y \quad \forall y \in$

Y. Luego, en virtud del Teorema 3.3, el cual en dimensión finita se reduce simplemente a la identidad $R(\mathcal{A}) = N(\mathcal{A}^*)^\perp$, se deduce que $Ax = b$ tiene solución

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad b \in \quad R(\mathcal{A}) \\
&\Leftrightarrow \quad b \in \quad N(\mathcal{A}^*)^\perp \\
&\Leftrightarrow \quad \langle b\,, z\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \quad \forall\, z \in N(\mathcal{A}^*) \\
&\Leftrightarrow \quad \langle b\,, z\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \quad A^t\, z = 0.
\end{aligned}$$

Es decir, el sistema lineal es soluble si y sólo si el lado derecho b es ortogonal a todas las soluciones del sistema transpuesto homogéneo. Ahora, en el caso particular en que $n = m$, es decir $X = Y = \mathbb{R}^n$, se tiene que $|\,A\,| = |\,A^t\,|$, y por lo tanto

$$\begin{gathered}
R(\mathcal{A}) = Y \Leftrightarrow N(\mathcal{A}^*)^\perp = Y \Leftrightarrow N(\mathcal{A}^*) = \{\theta\} \\
\Leftrightarrow |\,A^t\,| \neq 0 \Leftrightarrow |\,A\,| \neq 0 \Leftrightarrow N(\mathcal{A}) = \{\theta\},
\end{gathered}$$

lo cual prueba que $\mathcal{A}$ es sobreyectivo si y sólo si $\mathcal{A}$ es inyectivo. Este resultado se conoce como la ALTERNATIVA DE FREDHOLM en dimensión finita, y puede deducirse también a partir del Teorema de las Dimensiones, el cual establece que

$$n = dim\, N(\mathcal{A}) + dim\, R(\mathcal{A}).$$

3.6. El operador inverso

Sean X e Y espacios vectoriales normados y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Es claro que la ecuación fundamental $A(x) = y$ tiene solución para todo $y \in R(A)$, y esta solución es única si $N(A) = \{\theta\}$. Estos hechos inducen la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.11 *Sea* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *tal que* $R(A) = Y$ *y* $N(A) = \{\theta\}$. *Entonces, se denota* $A^{-1} : Y \to X$, *y se llama* INVERSO *de* A, *al operador que a cada* $y \in Y$ *le asigna el único* $x \in X$ *tal que* $A(x) = y$. *En tal caso, se escribe* $x = A^{-1}(y) \quad \forall\, y \in Y$.

El objetivo principal de esta sección es discutir el Teorema de la Inversa Acotada, el cual da condiciones suficientes para el acotamiento de un operador inverso. Para ello se prueba primero que este resultado es equivalente al Teorema del Grafo Cerrado. Ambos teoremas y la equivalencia mencionada se enuncian y demuestran, respectivamente, más adelante. Previo a ello se necesita introducir el concepto de operador cerrado.

En lo que sigue, $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es un operador lineal, no necesariamente acotado, cuyo dominio $\mathcal{D}(A)$ es un subespacio de X.

Definición 3.12 *Sea* $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ *lineal. Se dice que* A *es* CERRADO *si para toda sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ *tal que* $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X \quad y \quad A(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in Y$*, se tiene necesariamente que* $x \in \mathcal{D}(A) \quad y \quad A(x) = y$.

A continuación damos una definición equivalente de operador cerrado. En efecto, recordemos primero que el espacio producto $X \times Y := \{(x,y) : x \in X\,, y \in Y\}$, provisto de las operaciones:

$$\begin{array}{rlcl} + : & (X \times Y) \times (X \times Y) & \longrightarrow & X \times Y \\ & ((x_1\,, y_1), (x_2\,, y_2)) & \longrightarrow & (x_1\,, y_1) + (x_2\,, y_2) := (x_1 + x_2\,, y_1 + y_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} \cdot : & \mathbb{R} \times (X \times Y) & \longrightarrow & X \times Y \\ & (\alpha\,, (x\,, y)) & \longrightarrow & \alpha \cdot (x\,, y) := (\alpha\, x\,, \alpha\, y) \end{array}$$

es un espacio vectorial. Además, provisto de la norma producto (u otra equivalente):

$$\|\,(x\,, y)\,\| := \|\,x\,\| + \|\,y\,\| \quad \forall\,(x\,, y) \in X \times Y,$$

$X \times Y$ es un espacio vectorial normado. Más aún, si $X\,e\,Y$ son espacios de Banach, el producto $X \times Y$ también lo es.

Por otro lado, se define el grafo del operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$, y se denota $G(A)$, al subespacio de $X \times Y$ dado por:

$$G(A) := \{(x\,, A(x)) : \quad x \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Notar que el elemento nulo de $X \times Y$ es $(\theta_X\,, \theta_Y)$, y puesto que A es lineal se tiene $\theta_X \in \mathcal{D}(A)$ y $A(\theta_X) = \theta_Y$, lo cual muestra que $(\theta_X\,, \theta_Y) \in G(A)$.

En virtud de lo anterior y la Definición 3.12 es fácil ver que el operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ es cerrado si y sólo si $G(A)$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$. En particular, notar que si A es acotado, es decir $A \in \mathcal{L}(X\,, Y)$, entonces claramente A es cerrado. El siguiente ejemplo, en el cual se explicita un operador cerrado que no es acotado, confirma que el recíproco no es necesariamente verdadero.

Ejemplo 3.5 Sea $X = C([0,1])$ provisto de la norma uniforme

$$\|\,u\,\| := \max_{t\,\in\,[0,1]} |\,u(t)| \quad \forall u \in X,$$

con la cual sabemos que X es Banach. Definamos el operador dado por la derivada clásica

$$\begin{aligned} A \,:\, \mathcal{D}(A) \subseteq X \quad &\to X \\ u \quad &\to A(u) \,=\, u'. \end{aligned}$$

Notemos que $\mathcal{D}(A) \,=\, C^1([0,1])$. A continuación probamos que A no es acotado y que, sin embargo, A es cerrado. En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$, sea $p_n \in X$ el polinomio definido por $p_n(t) \,:=\, t^n \quad \forall\, t \,\in\, [0,1]$. Se sigue que $A(p_n) \,=\, q_n$, donde $q_n\,(t) \,:=\, n\,t^{n-1} \quad \forall\, t \,\in\, [0,1]$, y luego:

$$\sup_{\substack{x\,\in\,\mathcal{D}(A)\\ x\neq\,\theta}} \frac{\|\, A(x)\,\|}{\|\, x\,\|} \,\geq\, \frac{\|\, A(p_n)\,\|}{\|\, p_n\,\|} \,=\, \frac{\|\, q_n\,\|}{\|\, p_n\,\|} \,=\, n \qquad \forall\, n\,\in\,\mathbb{N},$$

de lo cual se deduce que A no es acotado. Ahora, para ver que A sí es cerrado, consideremos una sucesión $\{x_n\}_{n\,\in\,\mathbb{N}} \,\subseteq\, \mathcal{D}(A)$ tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \,\in\, X$ y $A(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \,\in\, X$, esto es $\|\, x_n \,-\, x\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $\|\, x_n' \,-\, y\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Luego, para cada $t \,\in\, [0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t x_n'(s)\,ds - \int_0^t y(s)\,ds \right| \,&=\, \left| \int_0^t \{x_n'(s) \,-\, y(s)\}\,ds \right| \\ &\leq\, \int_0^t |x_n'(s) \,-\, y(s)\,|\,ds \,\leq\, \|\, x_n' \,-\, y\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

lo cual prueba que

$$\int_0^t y(s)\,ds \,=\, \lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n'(s)\,ds.$$

Se sigue así, usando la convergencia puntual de x_n, que

$$\int_0^t y(s)\,ds \,=\, \lim_{n\to\infty} \{x_n\,(t) \,-\, x_n\,(0)\} \,=\, x(t) \,-\, x(0),$$

de donde

$$x(t) \,=\, x(0) \,+\, \int_0^t y(s)\,ds \qquad \forall\, t \,\in\, [0,1].$$

Esta identidad prueba que $x \,\in\, \mathcal{D}(A)$ y $A(x) \,:=\, x' \,=\, y$.

A continuación presentamos el Teorema de la Inversa Acotado (T.I.A.) y el Teorema del Grafo Cerrado (T.G.C.), y probamos que ellos son equivalentes.

TEOREMA 3.4 (TEOREMA DE LA INVERSA ACOTADA) *Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \,\in\, \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $R(A) \,=\, Y$ y $N(A) \,=\, \{\theta_X\}$. Entonces $A^{-1} \,\in\, \mathcal{L}(Y,X)$.*

TEOREMA 3.5 (TEOREMA DEL GRAFO CERRADO) *Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \,:\, \mathcal{D}(A) \subseteq X \,\to\, Y$ un operador lineal cerrado tal que $\mathcal{D}(A) \,=\, X$. Entonces $A \,\in\, \mathcal{L}(X,Y)$.*

TEOREMA 3.6 *T.I.A.* $\Leftrightarrow$ *T.G.C.*

DEMOSTRACIÓN.

($\Leftarrow$) Supongamos válido el T.G.C., y sean X e Y espacios de Banach, y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $R(A) = Y$ y $N(A) = \{\theta_X\}$. Entonces, existe el operador inverso $A^{-1} : Y \to X$ el cual es lineal y satisface obviamente que $\mathcal{D}(A^{-1}) = Y$. Con el objeto de aplicar el T.G.C. y concluir así que $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, sólo resta mostrar que A^{-1} es cerrado. Para ello, sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ tal que

$$y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in Y \quad y \quad A^{-1}(y_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X.$$

Como A es acotado, se sigue que $y_n = A(A^{-1}(y_n)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} A(x)$, y por la unicidad del límite se deduce que $y = A(x)$, o bien $x = A^{-1}(y)$, lo cual prueba que A^{-1} es cerrado.

($\Rightarrow$) Supongamos válido el T.I.A., y sean X e Y espacios de Banach, y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ lineal, cerrado, tal que $\mathcal{D}(A) = X$. Definamos el operador $E : G(A) \to X$ por

$$E(x, A(x)) = x \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A) = X.$$

Puesto que A es cerrado, $G(A)$ es un subespacio cerrado del Banach $X \times Y$, y por lo tanto $G(A)$ también es Banach. Además, es claro que $R(E) = X$ y

$$N(E) = \{(x, A(x)) \,:\, x = \theta_X\} = \{(\theta_X, \theta_Y)\}.$$

A su vez,

$$\|\, E(x, A(x)) \,\| = \|x\| \leq \|\, x \,\| + \|\, A(x) \,\| = \|\, (x, A(x)) \,\| \quad \forall\, (x, A(x)) \in G(A),$$

lo cual muestra que E es acotado y $\|\, E \,\| \leq 1$. Resumiendo, $E \in \mathcal{L}(G(A), X)$ y E es biyectivo, con lo cual el T.I.A. implica que $E^{-1} \in \mathcal{L}(X, G(A))$. Esto significa que existe $C > 0$ tal que

$$\|\, E^{-1}(x) \,\| \leq C \,\|\, x \,\| \qquad \forall\, x \in X,$$

es decir

$$\|\, (x, A(x)) \,\| = \|\, x \,\| + \|\, A(x) \,\| \leq C \,\|\, x \,\| \qquad \forall\, x \in X,$$

de donde $\|\, A(x) \,\| \leq C \,\|\, x \,\| \quad \forall\, x \in X$, probando así que $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. $\square$

Antes de demostrar uno de los dos teoremas (T.I.A. o T.G.C.), ahora establecemos una versión más general del Teorema de la Inversa Acotada.

Teorema 3.7 (versión mejorada del T.I.A.) *Sean X e Y espacios de Banach y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ lineal cerrado tal que $N(A) = \{\theta_X\}$ y $R(A) = Y$. Entonces $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Demostración. Definamos primero $\| \cdot \|_A : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{R}$ por

$$\| x \|_A := \| x \| + \| A(x) \| \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\,,$$

la cual, es fácil verlo, constituye una norma sobre $\mathcal{D}(A)$. Probemos que $(\mathcal{D}(A) \| \cdot \|_A)$ es completo. En efecto, sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $\| x_n - x_m\|_A \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Se sigue que $\| x_n - x_m\| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $\| A(x_n) - A(x_m)\| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, y puesto que X e Y son Banach se deduce que existe $x \in X$ e $y \in Y$ tales que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y $A(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Luego, como $\mathcal{A}$ es cerrado, se concluye de aquí que $x \in \mathcal{D}(A)$ y $A(x) = y$, lo cual implica que

$$\| x_n - x \|_A = \| x_n - x \| + \| A(x_n) - A(x) \| = \| x_n - x \| + \| A(x_n) - y \| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Entonces, sabiendo ahora que $(\mathcal{D}(A), \| \cdot \|_A)$ es un espacio de Banach, se define el operador $\widetilde{A} : (\mathcal{D}(A), \| \cdot \|_A) \to Y$ por $\widetilde{A}(x) = A(x) \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$. Es claro que $\widetilde{A}$ es lineal, y además

$$\| \widetilde{A}(x) \| = \| A(x) \| \leq \| x \| + \| A(x) \| = \| x \|_A \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A),$$

lo cual muestra que $\widetilde{A}$ es acotado y $\| \widetilde{A} \| \leq 1$. Notemos también que $N(\widetilde{A}) = N(A) = \{\theta_X\}$ y $R(\widetilde{A}) = R(A) = Y$. Por lo tanto, aplicando el T.I.A. se deduce que $\widetilde{A}^{-1} \in \mathcal{L}(Y, (\mathcal{D}(A), \| \cdot \|_A))$, lo cual significa que existe $C > 0$ tal que

$$\| \widetilde{A}^{-1}(y) \|_A \leq C \| y \| \quad \forall\, y \in Y,$$

es decir

$$\| A^{-1}(y) \| + \| y \| \leq C \| y \| \quad \forall\, y \in Y,$$

de donde $\| A^{-1}(y) \| \leq C \| y \| \quad \forall\, y \in Y$, probando así que $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y\,, X\,)$. □

Es importante observar, de acuerdo a la demostración anterior, que la versión mejorada del T.I.A. (de ahora en adelante T.I.A.M.) es consecuencia del T.I.A. original (ver Teorema 3.4). Puesto que claramente T.I.A.M. implica T.I.A., se deduce que ambos teoremas son equivalentes entre sí, y por lo tanto equivalentes también al T.G.C.. De hecho, es fácil ver que en la primera implicación del Teorema 3.6 basta suponer que

$A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es lineal y cerrado, tal que $R(A) = Y$ y $N(A) = \{\theta_X\}$. En efecto, dada la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ tal que

$$y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in Y \quad \text{y} \quad A^{-1}(y_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X,$$

se deduce en tal caso que $x \in \mathcal{D}(A)$ y $A(x) = y$, de donde $x = A^{-1}(y)$, probando así que A^{-1} es cerrado. En otras palabras, A lineal cerrado y biyectivo implica que A^{-1} también es cerrado. De este modo, la primera implicación del Teorema 3.6, modificada según se indica aquí, constituye una demostración alternativa del T.I.A.M., ahora a partir del T.G.C..

Los teoremas y observaciones anteriores se resumen en el siguiente resultado.

Teorema 3.8 *T.I.A.M. $\Leftrightarrow$ T.I.A. $\Leftrightarrow$ T.G.C.*

3.7. Otros dos teoremas clásicos

En esta sección demostramos otros dos resultados clásicos del Análisis Funcional, el Teorema de la Aplicación Abierta (T.A.A.), el cual, entre otras consecuencias, implica el T.I.A., y el Teorema de Banach-Steinhauss, también conocido como el Teorema del Acotamiento Uniforme. El enunciado respectivo del primero de ellos es como sigue.

Teorema 3.9 (teorema de la aplicación abierta) *Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $R(A) = Y$. Entonces, existe $r > 0$ tal que*

$$B_Y(\theta, r) \subseteq A(B_X(\theta, 1)). \tag{3.17}$$

Comenzamos el análisis probando que la inclusión (3.17) implica que A transforma abiertos de X en abiertos de Y, lo cual justifica el nombre del teorema anterior. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.13 *Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Supongamos, además, que existe $r > 0$ tal que $B_Y(\theta, r) \subseteq A(B_X(\theta, 1))$. Entonces, para todo abierto U de X se tiene que $A(U)$ es abierto de Y.*

Demostración. Sea U un abierto de X, y sea $y_0 = A(x_0) \in A(U)$ con $x_0 \in U$. Se sigue que existe $\delta > 0$ tal que $B_X(x_0, \delta) \subseteq U$, o bien $x_0 + B_X(\theta, \delta) \subseteq U$, de donde, aplicando el operador A, resulta

$$y_0 + A(B_X(\theta, \delta)) \subseteq A(U).$$

Ahora, de la hipótesis se tiene que $B_Y(\theta, \delta r) \subseteq A(B_X(\theta, \delta))$. En efecto,

$$\|\, y \,\| < \delta r \;\Rightarrow\; \frac{y}{\delta} \in B_Y(\theta, r) \Rightarrow \frac{y}{\delta} \in A(B_X(\theta, 1)) \Rightarrow y \in A(B_X(\theta, \delta)).$$

Luego, se deduce que $y \in B_Y(y_0, \delta r) \Rightarrow y - y_0 \in B_Y(\theta, \delta r) \Rightarrow y - y_0 \in A(B_X(\theta, \delta)) \Rightarrow y \in y_0 + A(B_X(\theta, \delta)) \Rightarrow y \in A(U)$, lo cual muestra que $B_Y(y_0, \delta r) \subseteq A(U)$, y en consecuencia $A(U)$ es abierto de Y. $\square$

A continuación se demuestra el T.I.A. usando precisamente el T.A.A.

Teorema 3.10 (T.I.A. con demostración) . *Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $R(A) = Y$ y $N(A) = \{\theta_X\}$. Entonces $A^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

Demostración. Puesto que A es sobreyectivo podemos aplicar el T.A.A., deduciendo así que existe $r > 0$ tal que $B_Y(\theta, r) \subseteq A(B_X(\theta, 1))$. Luego, dado $x \in X$ tal que $\|\, A(x) \,\| < r$, se tiene que $A(x) \in A(B_X(\theta, 1))$, lo cual significa que existe $z \in X, \|\, z \,\| < 1$, tal que $A(x) = A(z)$. Puesto que A es inyectivo se sigue que $x = z$ y por lo tanto $\|\, x \,\| < 1$. Ahora, dado $x \in X$ tal que $x \neq \theta$, se tiene obviamente que

$$\left\| A\left(\frac{\varepsilon\, r}{\|\, A(x) \,\|}\, x \right) \right\| = \varepsilon r < r \quad \forall \varepsilon \in (0, 1),$$

y por lo tanto, gracias al análisis anterior, se obtiene que

$$\left\| \frac{\varepsilon\, r}{\|\, A(x) \,\|}\, x \right\| < 1 \quad \forall \varepsilon \in (0, 1),$$

o bien

$$\|\, x \,\| < \frac{1}{\varepsilon\, r} \|\, A(x) \,\| \quad \forall \varepsilon \in (0, 1).$$

Así, tomando $\lim\limits_{\varepsilon \to 1^+}$ se concluye que

$$\|\, x \,\| \leq \frac{1}{r} \,\|\, A(x) \,\| \quad \forall x \in X,$$

lo cual prueba que A^{-1} es acotado y $\|\, A^{-1} \,\| \leq \frac{1}{r}$. $\square$

El siguiente ejemplo constituye una aplicación interesante del T.I.A.

Ejemplo 3.6 Sea X un espacio vectorial y sean $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normas sobre X tales que $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(X, \|\cdot\|_2)$ son espacios de Banach. Suponga además que existe $C > 0$ tal que

$\|x\|_1 \leq C\,\|x\|_2 \quad \forall\, x \in X$. Entonces $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes, es decir existe otra constante $c > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leq c\,\|x\|_1 \quad \forall\, x \in X.$$

Para ver esto, consideremos el operador identidad $I : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$, el cual es claramente lineal, biyectivo y acotado, ya que

$$\|\, I(x)\,\|_1 = \|x\|_1 \leq C\,\|x\|_2 \quad \forall\, x \in X.$$

Aplicando el T.I.A. se deduce que I^{-1} también es acotado, lo cual significa que existe $c > 0$ tal que

$$\|\, I^{-1}(x)\,\|_2 = \|x\|_2 \leq c\,\|x\|_1 \quad \forall\, x \in X.$$

El siguiente objetivo es la demostración del T.A.A., la cual separamos en los lemas 3.15 y 3.16 que probamos a continuación. El clásico Lema de Baire, que recordamos ahora, se utiliza para el primero de ellos.

Lema 3.14 (lema de baire) . *Sea X un espacio métrico completo y sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos cerrados en X tal que $\overset{\circ}{X}_n = \emptyset \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n}} = \emptyset$.*

Es importante notar aquí que este resultado se usa habitualmente en el sentido contrarecíproco. En otras palabras, si X es un espacio métrico completo y $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cerrados de X tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$, entonces necesariamente existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\overset{\circ}{X}_k \neq \emptyset$.

Ahora procedemos a enunciar y demostrar los lemas que implican el T.A.A.. Cuando no haya lugar a confusión se omiten los subíndices de las bolas abiertas.

Lema 3.15 *Sean X e Y espacios de Banach y sea $A : X \to Y$ lineal tal que $R(A) = Y$. Entonces, existe $r > 0$ tal que $\quad B(\theta, 2r) \subseteq \overline{A(B(\theta,1))}$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $X_n = n\,\overline{A(B(\theta,1))}$. Puesto que A es sobreyectivo, dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $A(x) = y$. Si $N \in \mathbb{N}$ es tal que $\|x\| < N$, entonces $y = N\,A(\frac{x}{N}) = N\,A(z)$ con $\|z\| < 1$, lo cual prueba que $y \in X_N$ y por lo tanto $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Así, aplicando el Lema de Baire se deduce que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$\overset{\circ}{X}_k \neq \emptyset$, o bien, equivalentemente, $\overset{\circ}{\overline{A(B(\theta,1))}} \neq \emptyset$. Se sigue que existen $y_0 \in Y$ y $r > 0$ tales que

$$B(y_0, 4r) \subseteq \overline{A(B(\theta,1))}. \tag{3.18}$$

En particular, puesto que claramente $y_0 \in \overline{A(B(\theta,1))}$, existe una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(\theta,1)$ tal que $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} A(z_n)$, y por lo tanto $(-y_0) = \lim\limits_{n\to\infty} A(-z_n)$, lo cual indica que $(-y_0)$ también pertenece a $\overline{A(B(\theta,1))}$. A partir de este hecho y de la inclusión (3.18) se obtiene que

$$B(\theta, 4r) \subseteq \overline{A(B(\theta,1))} + \overline{A(B(\theta,1))} = 2\,\overline{A(B(\theta,1))}. \tag{3.19}$$

En efecto, $z \in B(\theta,4r) \Rightarrow z = z + y_0 + (-y_0)$ con $(z + y_0) \in B(y_0, 4r) \subseteq \overline{A(B(\theta,1))}$ y $(-y_0) \in \overline{A(B(\theta,1))}$. Además, es fácil ver que la igualdad en (3.19) se sigue de la convexidad de $\overline{A(B(\theta,1))}$. Finalmente, de (3.19) se deduce que $B(\theta,2r) \subseteq \overline{A(B(\theta,1))}$, lo cual completa la demostración. □

LEMA 3.16 *Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Suponga que existe $r > 0$ tal que $B(\theta,2r) \subseteq \overline{A(B(\theta,1))}$. Entonces,* $B(\theta,r) \subseteq A(B(\theta,1))$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $y \in Y$ tal que $\|y\| < r$. Debemos probar que existe $x \in X$ tal que $\|x\| < 1$ y $A(x) = y$. Sea $\delta > 0$ tal que $y_\delta := (1+\delta)y \in B(\theta,r)$. Puesto que $2y_\delta \in B(\theta,2r) \subseteq \overline{A(B(\theta,1))}$, se sigue que existe $\widetilde{z} \in X$, $\|\widetilde{z}\| < 1$, tal que $\|2y_\delta - A(\widetilde{z})\| < r$, o bien, definiendo $z_1 = \frac{1}{2}\widetilde{z}$, se tiene que $\|z_1\| < 1/2$ y $\|y_\delta - A(z_1\|) < r/2$. Análogamente, puesto que $4(y_\delta - A(z_1)) \in B(\theta,2r)$, existe otro $\widetilde{z} \in X$, $\|\widetilde{z}\| < 1$, tal que

$$\|4(y_\delta - A(z_1)) - A(\widetilde{z})\| < r,$$

de donde, definiendo $z_2 = \frac{1}{4}\widetilde{z}$, se obtiene que $\|z_2\| < 1/4$ y $\|y_\delta - A(z_1) - A(z_2)\| < r/4$. Siguiendo de esta forma se construye por recurrencia una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $\|z_n\| < \dfrac{1}{2^n}$ y $\|y_\delta - A(x_n)\| < \dfrac{r}{2^n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, donde $x_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_j$. Dado que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente, se deduce que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X, y por lo tanto existe $x_\delta \in X$ tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x_\delta$. Además,

$$\|x_\delta\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} z_j \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \|z_j\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = 1,$$

esto es $\|x_\delta\| \leq 1$, y de la relación $\|y_\delta - A(x_n)\| < r/2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ se concluye que $y_\delta = A(x_\delta)$, esto es $y = A\left(\dfrac{x_\delta}{1+\delta}\right)$, o bien $y = A(x)$ con $x = \dfrac{x_\delta}{1+\delta}$ tal que $\|x\| = \dfrac{1}{1+\delta}\|x_\delta\| \leq \dfrac{1}{1+\delta} < 1$. □

Finalizamos esta sección con el Teorema de Banach-Steinhauss (T.B.S.), el cual también es consecuencia del Lema de Baire.

TEOREMA 3.11 (TEOREMA DE BANACH-STEINHAUSS) *Sean X e Y espacios normados tal que X es Banach y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia, no necesariamente numerable, en $\mathcal{L}(X,Y)$. Suponga que*

$$\sup_{i\in I}\|A_i(x)\| < \infty \qquad \forall x \in X.$$

Entonces, existe $M > 0$ tal que

$$\|A_i(x)\| \leq M\,\|x\| \quad \forall x \in X\,,\ \forall i \in I.$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos el conjunto

$$X_n = \{x \in X :\ \|A_i(x)\| \leq n\ \forall i \in I\}.$$

Es fácil ver que X_n es cerrado. En efecto, sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X_n$ tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x \in X$. Entonces, $\forall i \in I$ se tiene que:

$$\|A_i(x)\| = \lim_{k\to\infty}\|A_i(x_k)\| \leq \lim_{k\to\infty} n = n,$$

lo cual prueba que $x \in X_n$. Alternativamente, el hecho que X_n es cerrado se sigue de la identidad $X_n = \bigcap_{i\in I} A_i^{-1}(\bar{B}(\theta,n))$. Ahora, puesto que $\sup_{i\in I}\|A_i(x)\| < \infty \quad \forall x \in X$, se deduce que cada $x \in X$ pertenece a algún conjunto X_n, y por lo tanto $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Se sigue del Lema de Baire que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\overset{\circ}{X}_N \neq \emptyset$, lo cual significa que existe $x_0 \in X$ y $r > 0$ tales que $B(x_0,r) \subseteq X_N$. Así, dado $x \in X, x \neq \theta$, definimos $z = x_0 + \dfrac{r}{2\|x\|}x$, el cual pertenece a la bola $B(x_0,r)$, y por lo tanto a X_N, ya que $\|z - x_0\| = r/2 < r$. De acuerdo a lo anterior y al hecho que, obviamente, $x_0 \in X_N$, se tiene que $\|A_i(z)\| \leq N$ y $\|A_i(x_0)\| \leq N \quad \forall i \in I$, lo cual implica que

$$\begin{aligned}\|A_i(x)\| &= \left\|A_i\left(\frac{2\|x\|}{r}(z - x_0)\right)\right\| = \frac{2\|x\|}{r}\,\|A_i(z - x_0)\| \\ &\leq \frac{2\|x\|}{r}\Big\{\|A_i(z)\| + \|A_i(x_0)\|\Big\} \leq M\,\|x\| \quad \forall x \in X,\ \forall i \in I\,,\end{aligned}$$

con la constante $M = \dfrac{4N}{r}$. □

Dos corolarios interesantes del T.B.S. están dados por los siguientes lemas.

Lema 3.17 *Sean X e Y espacios normados tal que X es Banach y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ tal que para cada $x \in X$ la sucesión $\{A_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y. Entonces:*

a) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$.

b) El operador $A : X \to$ Y definido por $A(x) := \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) \quad \forall\, x \in X$, pertenece a $\mathcal{L}(X,Y)$.

c) $\|A\| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \|A_n\|$.

Demostración. Puesto que para cada $x \in X$ la sucesión $\{A_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, ella es acotada en Y, esto es

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n(x)\| < +\infty \quad \forall\, x \in X,$$

y por lo tanto, una aplicación directa del T.B.S. implica a). Esto significa que existe $M > 0$ tal que

$$\|A_n(x)\| \leq M\|x\| \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

de donde, tomando $\lim\limits_{n\to\infty}$ se obtiene $\|A(x)\| \leq M\,\|x\| \quad \forall\, x \in X$. Dado que A es claramente lineal (por la linealidad de cada A_n), lo anterior prueba que $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, es decir b). Por último, a partir de la relación $\|A_n(x)\| \leq \|A_n\|\,\|x\|\,\| \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \|A(x)\| &= \lim_{n\to\infty} \|A_n(x)\| = \lim_{n\to\infty} \inf \|A_n(x)\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \inf \|A_n\|\,\|x\| = \left\{ \lim_{n\to\infty} \inf \|A_n\| \right\} \|x\| \qquad \forall\, x \in X\,, \end{aligned}$$

lo cual demuestra c). □

Lema 3.18 *Sea S un subconjunto de un espacio vectorial normado X sobre, $\mathbb{R}$, y suponga que para cada $F \in X'$ el conjunto $\{F(x) : x \in S\}$ es acotado en $\mathbb{R}$. Entonces S es acotado, es decir existe $C > 0$ tal que $\|x\| \leq C \quad \forall\, x \in S$.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicamos el T.B.S. al siguiente contexto de espacios:

$$X \leftarrow X', \quad Y \leftarrow \mathbb{R}, \quad I \leftarrow S,$$

y para cada $x \in S$ definimos el operador $A_x : X' \to \mathbb{R}$ por $A_x(F) := F(x) \quad \forall F \in X'$. De acuerdo a la hipótesis se tiene que

$$\sup_{x \in S} |A_x(F)| = \sup_{x \in S} |F(x)| < +\infty,$$

y por lo tanto, el T.B.S. implica que existe $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$|A_x(F)| = |F(x)| \leq \widetilde{C} \, \|F\| \qquad \forall F \in X', \, \forall x \in S.$$

De este modo, aplicando una consecuencia del T.H.B. (ver Lema 2.4), se deduce que para cada $x \in S$:

$$\|x\| = \sup_{\substack{F \in X' \\ F \neq \theta}} \frac{|F(x)|}{\|F\|} \leq \widetilde{C},$$

lo cual muestra el acotamiento de S. □

3.8. Acotamiento uniforme sin Lema de Baire

En esta sección proporcionamos los detalles de una demostración alternativa del Teorema de Banach-Steinhauss (cf. Teorema 3.11) que no hace uso del Lema de Baire y que, por lo tanto, es de carácter autocontenido. Este resultado fue publicado recientemente en el artículo:

ALAN D. SOBAL: *A really simple elementary proof of the uniform boundedness theorem.* The American Mathematical Monthly, vol. 118, 5, pp. 450-451, (2011).

Comenzamos con el siguiente lema preliminar.

LEMA 3.19 *Sean X e Y espacios vectoriales normados y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces, para todo $x \in X$ y para todo $r > 0$ se tiene*

$$\sup_{y \in B(x,r)} \|A(y)\| \geq \|A\| \, r.$$

Demostración. Sean $x \in X$ y $r > 0$. Entonces, para cada $z \in B(\theta, r)$ se tiene

$$\begin{aligned} \|A(z)\| &= \tfrac{1}{2}\|A(z) + A(z)\| = \tfrac{1}{2}\|A(x+z) - A(x-z)\| \\ &\leq \tfrac{1}{2}\Big\{\|A(x+z)\| + \|A(x-z)\|\Big\} \leq \sup_{y\in B(x,r)} \|A(y)\|, \end{aligned}$$

y tomando supremo sobre $z \in B(\theta, r)$, resulta

$$\sup_{z\in B(\theta,r)} \|A(z)\| \leq \sup_{y\in B(x,r)} \|A(y)\|$$

Luego, basta ver que

$$\sup_{z\in B(\theta,r)} \|A(z)\| = r \sup_{z\in B(\theta,r)} \frac{1}{r}\|A(z)\| = r \sup_{z\in B(\theta,1)} \|A(z)\| = r\|A\|.$$

□

A continuación enunciamos nuevamente y demostramos, usando sólo el Lema 3.19, el Teorema del Acotamiento Uniforme (o Teorema de Banach-Steinhauss).

Teorema 3.12 *Sean X e Y espacios vectoriales normados, con X Banach, y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia, no necesariamente numerable, en $\mathcal{L}(X,Y)$. Suponga que*

$$\sup_{i\in I} \|A_i(x)\| < \infty \quad \forall\, x \in X.$$

Entonces, existe $M > 0$ tal que

$$\|A_i(x)\| \leq M\|x\| \qquad \forall\, x \in X, \quad \forall\, i \in I.$$

Demostración. Supongamos, por contradicción, que $\sup\limits_{i\in I} \|A_i(x)\| = +\infty$. Entonces existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{A_i\}_{i\in I}$, tal que $\|A_n\| \geq 4^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Aplicando el lema anterior a $A = A_1$, $\quad x = \theta$ y $r = 3^{-1}$, se tiene que

$$\sup_{y\in B(\theta,3^{-1})} \|A_1(y)\| \geq 3^{-1}\|A_1\|,$$

y luego, por definición del supremo, dado $\epsilon > 0$, $\exists\, x_1 \in B(\theta, 3^{-1})$ tal que

$$\|A_1(x_1)\| + \epsilon \geq \sup_{y\in B(\theta,3^{-1})} \|A_1(y)\| \geq 3^{-1}\|A_1\|.$$

En particular, para $\epsilon = 3^{-2}\|A_1\|$, se tiene

$$\|A_1(x_1)\| \geq \frac{2}{3}3^{-1}\|A_1\| \qquad \text{y} \qquad \|x_1 - x_0\| < 3^{-1},$$

con $x_0 = \theta$. A su vez, aplicando nuevamente el lema a $A = A_2$, $x = x_1$ y $r = 3^{-2}$, se tiene que

$$\sup_{y\in B(x_1,3^{-2})} \|A_2(y)\| \geq 3^{-2}\|A_2\|,$$

de donde, dado $\epsilon = 3^{-3}\|A_2\|$, existe $x_2 \in B(x_1, 3^{-2})$ tal que

$$\|A_2(x_2)\| + 3^{-3}\|A_2\| \geq 3^{-2}\|A_2\|,$$

esto es

$$\|A_2(x_2)\| \geq \frac{2}{3}3^{-2}\|A_2\| \qquad \text{y} \qquad \|x_2 - x_1\| < 3^{-2}.$$

Siguiendo este razonamiento inductivo se construye una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que

$$\|A_n(x_n)\| \geq \frac{2}{3}3^{-n}\|A_n\| \quad \text{y} \quad \|x_n - x_{n-1}\| < 3^{-n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Veamos ahora que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. En efecto, dados $n, k \in \mathbb{N}$ con $n > k$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\|x_n - x_k\| \leq \|x_{k+1} - x_k\| + \|x_{k+2} - x_{k+1}\| + \cdots + \|x_n - x_{n-1}\| \\
&\leq 3^{-(k+1)} + 3^{-(k+2)} + \cdots + 3^{-(k+n-k)} \\
&= 3^{-k}\big(3^{-1} + 3^{-2} + \cdots + 3^{-(n-k)}\big) \\
&= 3^{-k}\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\right\} \leq \frac{1}{2}3^{-k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Luego, como X es Banach, existe $\overline{x} \in X$ tal que $\|x_n - \overline{x}\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Además, de la misma estimación anterior se deduce que para todo $n, k \in \mathbb{N}$

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leq \frac{1}{2}3^{-n},$$

de donde, dejando $n \in \mathbb{N}$ fijo y haciendo $k \to \infty$, resulta

$$\|\overline{x} - x_n\| \leq \frac{1}{2}3^{-n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, se concluye que

$$\begin{aligned}
&\|A_n(\overline{x})\| = \|A_n(x_n) - A_n(x_n - \overline{x})\| \\
&\geq \|A_n(x_n)\| - \|A_n\|\,\|x_n - \overline{x}\| \\
&\geq \frac{2}{3}3^{-n}\|A_n\| - \|A_n\|\frac{1}{2}3^{-n} \\
&= \frac{1}{6}3^{-n}\|A_n\| \geq \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,
\end{aligned}$$

lo cual contradice el hecho que $\sup\limits_{i\in I} \|A_i(\overline{x})\| < +\infty$. □

3.9. Operadores con rango cerrado

El objetivo de esta sección es caracterizar los operadores lineales que tienen rango cerrado. Al respecto, recordemos primero que si X e Y son espacios vectoriales normados y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces el Teorema 3.2 establece que $R(A)$ es cerrado si y sólo si $R(A) = {}^{\circ}N(A')$. A su vez, en el caso en que X e Y son espacios de Hilbert, se tiene que $R(A)$ es cerrado si y sólo si $R(A) = N(A^*)^{\perp}$ (ver Teorema 3.3). A continuación se deducen otras condiciones necesarias y suficientes, más fáciles de verificar, para que $R(A)$ sea un subespacio cerrado de Y.

Comenzamos nuestro análisis suponiendo que $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es un operador lineal cerrado e inyectivo, es decir tal que $N(A) = \{\theta_X\}$. Si Y es Banach y $R(A)$ es cerrado, entonces $(R(A), \|\cdot\|_Y)$ es claramente Banach. Supongamos además que X es Banach. Entonces, aplicando el T.I.A.M. (ver Teorema 3.7) se deduce que $A^{-1} \in \mathcal{L}(R(A), X)$, lo cual significa que existe $C > 0$ tal que

$$\| A^{-1}(y) \| \le C \| y \| \quad \forall\, y \in R(A),$$

o bien

$$\| x \| \le C \| A(x) \| \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A). \tag{3.20}$$

Hemos probado así que (3.20) es una condición necesaria para que $R(A)$ sea cerrado.

Recíprocamente, supongamos que $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es un operador lineal, cerrado e inyectivo, y que existe $C > 0$ tal que (3.20) ocurre. A su vez, sea $\{A(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $R(A)$, con $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$, tal que $A(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in Y$. Aplicando la desigualdad (3.20) y la linealidad de A se sigue que

$$\| x_n - x_m \| \le C \| A(x_n) - A(x_m) \| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

lo cual prueba que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X, y por lo tanto existe $x \in X$ tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Finalmente, como A es cerrado se deduce que $x \in \mathcal{D}(A)$ y $A(x) = y \in R(A)$, gracias a lo cual se concluye que $R(A)$ es cerrado.

Resumiendo, hemos demostrado así el siguiente resultado de caracterización.

TEOREMA 3.13 *Sean X e Y espacios de Banach, y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado tal que $N(A) = \{\theta_X\}$. Entonces $R(A)$ es un subespacio cerrado de Y si y sólo si existe $C > 0$ tal que*

$$\| x \| \leq C \, \|A(x)\| \quad \forall \, x \in \mathcal{D}(A) \,.$$

Ahora extendemos el resultado de caracterización anterior al caso no inyectivo. Así, en lo que sigue consideramos X e Y espacios de Banach, y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado tal que $N(A) \neq \{\theta_X\}$. El análisis respectivo requiere de algunos resultados y conceptos previos.

LEMA 3.20 *Sean X e Y espacios vectoriales normados, y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado. Entonces $N(A)$ es un subespacio cerrado de X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq N(A)$ tal que $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X$. Es claro que

$$A(x_n) = \theta_Y \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta_Y \in Y \,.$$

Luego, como A es cerrado, se deduce que $x \in \mathcal{D}(A)$ y $A(x) = \theta_Y$, lo cual prueba que $x \in N(A)$. $\square$

El concepto de espacio cuociente es clave en lo que viene. Más precisamente, sea X un espacio vectorial normado, y sea M un subespacio cerrado de X. Entonces se define la relación de equivalencia.

$$\sim: \quad u, v \in X \,, \quad u \sim v \quad \text{si y sólo si} \quad u - v \in M.$$

Así, dado $u \in X$, su clase de equivalencia está dada por:

$$[u] := \{v \in X : \quad u - v \in M\} \,,$$

y se dice que u es el representante (no único) de [u]. Notar que $[\theta] = M$. Además, es claro que $[u] = [v]$ si y sólo si $u \sim v$. También, $[u] \cap [v] = \phi$ si y sólo si $u \not\sim v$. Al conjunto de todas las clases de equivalencia se le llama ESPACIO CUOCIENTE y se denota X/M, es decir:

$$X/M := \left\{ \, [u] : \quad u \in X \, \right\} .$$

A su vez, al espacio X/M se le provee de una estructura de espacio vectorial con las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{rlcl} + : & X/M \times X/M & \longrightarrow & X/M \\ & ([u],[v]) & \longrightarrow & [u]+[v] := [u+v] \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} \cdot : & \mathbb{R} \times X/M & \longrightarrow & X/M \\ & (\lambda,[u]) & \longrightarrow & \lambda \cdot [u] := [\lambda\, u] \end{array}$$

Veamos que $+$ y $\cdot$ están bien definidos en el sentido que no dependen de los representantes de cada clase de equivalencia. En efecto, sean u, $\widetilde{u}$, v, $\widetilde{v} \in X$ tales que $[u] = [\widetilde{u}]$ y $[v] = [\widetilde{v}]$. Se sigue que $u - \widetilde{u} \in M$ y $v - \widetilde{v} \in M$, con lo cual $(u - \widetilde{u}) + (v - \widetilde{v}) = (u + v) - (\widetilde{u} + \widetilde{v}) \in M$, de donde $(u + v) \sim (\widetilde{u} + \widetilde{v})$, o bien $[u + v] = [\widetilde{u} + \widetilde{v}]$. A su vez, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u, \widetilde{u} \in X$ son tales que $[u] = [\widetilde{u}]$, entonces $u - \widetilde{u} \in M$, y por lo tanto $\lambda\,(u - \widetilde{u}) = \lambda\, u - \lambda\, \widetilde{u} \in M$, lo cual prueba que $[\lambda\, u] = [\lambda\, \widetilde{u}]$.

De acuerdo a lo anterior, es fácil probar que $(X/M, +, \cdot)$ constituye un espacio vectorial real con elemento neutro dado por $[\theta] = M$. Más aún, con la aplicación $\|\cdot\| : X/M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|\,[u]\,\| := \operatorname{dist}(u, M) = \inf_{v\in M} \|u - v\| \quad \forall\,[u] \in X/M\,, \tag{3.21}$$

X/M es un espacio vectorial normado. En efecto veamos que (3.21) esta bien definida y constituye una norma sobre X/M.

Sean u, $\widetilde{u} \in X$ tales que $[u] = [\widetilde{u}]$. Se sigue que $u - \widetilde{u} \in M$, y luego

$$\operatorname{dist}(u, M) = \inf_{v\in M} \|u - v\| = \inf_{v\in M} \|\,\widetilde{u} - (v + \widetilde{u} - u)\,\| = \inf_{w\in M} \|\,\widetilde{u} - w\,\| = \operatorname{dist}(\widetilde{u}, M),$$

lo cual prueba que no hay ambigüedad, con respecto al representante empleado, en la definición de $\|\,[u]\,\|$. Veamos ahora que se satisfacen las propiedades de norma. En primer lugar, es claro que $\|\,[u]\,\| \geq 0 \quad \forall\,[u] \in X/M$ ya que el conjunto $\{\|u - v\| : v \in M\}$ está acotado inferiormente por 0. Además

$$\|\,[u]\,\| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{dist}(u, M) = 0 \Leftrightarrow u \in M \Leftrightarrow [u] = [\theta].$$

Ahora, dadas $[u], [z] \in X/M$ se tiene

$$\|\,[u] + [z]\,\| = \|\,[u + z]\,\| = \inf_{v\in M} \|\,u + z - v\,\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \| u + z - (v + w) \| \quad \forall\, v, w \in M \\ &\leq \| u - v \| + \| z - w \| \quad \forall\, v, w \in M, \end{aligned}$$

de donde, tomando ínfimo sobre $v \in M$ y luego sobre $w \in M$, se deduce que

$$\| [u] + [z] \| \leq \inf_{v \in M} \| u - v \| + \inf_{w \in M} \| z - w \| = \| [u] \| + \| [z] \|,$$

lo cual prueba la desigualdad triangular. Por último, sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $[u] \in X/M$. Si $\lambda = 0$ es claro que

$$\| \lambda [u] \| = \| [\lambda u] \| = \| [\theta] \| = 0 = \lambda \cdot \| [u] \|,$$

y si $\lambda \neq 0$ se tiene

$$\| \lambda [u] \| = \| [\lambda u] \| = \inf_{v \in M} \| \lambda u - v \| = \inf_{v \in M} \| \lambda (u - v/\lambda) \|$$

$$= \inf_{v \in M} |\lambda| \, \| u - v/\lambda \| = |\lambda| \inf_{w \in M} \| u - w \| = |\lambda| \, \| [u] \|.$$

Hemos probado así que $(X/M, \| [\cdot] \|)$ es un espacio vectorial normado. Más aún, se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 3.14 *Sea X un espacio de Banach y sea M un subespacio cerrado de X. Entonces $(X/M, \| [\cdot] \|)$ también es Banach.*

Habiendo establecido lo anterior, ahora estamos en condiciones de volver a nuestro interés original de caracterizar los operadores, no necesariamente inyectivos, con rango cerrado. Para este efecto, recordemos que tenemos dos espacios de Banach X e Y y un operador $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ lineal y cerrado. Además, puesto que $N(A)$ es un subespacio cerrado de X (ver Lema 3.20), se tiene por Teorema 3.14 que $X/N(A)$ es Banach. Luego, definimos el operador

$$\hat{A} : \mathcal{D}(\hat{A}) \subseteq X/N(A) \to Y$$

por

$$\hat{A}([u]) = A(u) \quad \forall\, [u] \in \mathcal{D}(\hat{A}),$$

donde $\mathcal{D}(\hat{A}) := \{[u] : \quad u \in \mathcal{D}(A)\}$. Notar que si $[u] = [z]$ se tiene que $A(u) = A(z)$ ya que $u - z \in N(A)$, lo cual muestra que $\hat{A}$ esta bien definido. Observemos también que $\mathcal{D}(\hat{A})$ es un subespacio de $X/N(A)$ (ya que $\mathcal{D}(A)$ es un subespacio de X) y que por lo tanto $\hat{A}$ es lineal (ya que A también lo es). A su vez, es claro que $R(\hat{A}) = R(A)$.

Por otro lado, veamos que $\hat{A}$ es inyectivo y cerrado. En efecto, sea $[u] \in \mathcal{D}(\hat{A})$ tal que $\hat{A}([u]) = \theta_Y$. Se sigue que $\theta_Y = A(u)$, lo cual indica que $u \in N(A)$, de donde $[u] = [\theta]$, y luego $N(\hat{A}) = \{[\theta]\}$. Para ver que A es cerrado consideremos una sucesión $\{[u_n]\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\hat{A})$ tal que $[u_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} [u] \in X/M$ y $\hat{A}([u_n]) = A(u_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in Y$. Se sigue que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\,[u_n - u]\,\| := \operatorname{dist}(u_n - u, N(A)) < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N,$$

lo cual implica que para cada $n \geq N$ existe $z_n \in N(A)$ tal que $\|\,u_n - u - z_n\,\| < \varepsilon$, de donde se deduce que $(u_n - z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$. A su vez, como $A(u_n - z_n) = A(u_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in Y$ y A es cerrado, se concluye que $u \in \mathcal{D}(A)$ y $A(u) = y$, esto es $[u] \in \mathcal{D}(\hat{A})$ y $\hat{A}([u]) = y$. Resumiendo, tenemos $X/N(A)$ e Y espacios de Banach y $\hat{A} : X/N(A) \to Y$ un operador lineal cerrado con $N(\hat{A}) = \{[\theta]\}$ y $R(\hat{A}) = R(A)$. En consecuencia, aplicando el Teorema 3.13 a la presente situación se deduce que $R(A)$ es un subespacio cerrado de Y si y sólo si existe $C > 0$ tal que

$$\|\,[u]\,\| \leq C\,\|\,\hat{A}([u])\,\| \quad \forall\,[u] \in \mathcal{D}(\hat{A}),$$

esto es

$$\operatorname{dist}(u, N(A)) \leq C\,\|\,A(u)\,\| \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A).$$

Hemos probado así el siguiente resultado.

Teorema 3.15 *Sean X e Y Banach, y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado. Entonces $R(A)$ es cerrado en Y si y sólo si existe $C > 0$ tal que:*

$$\operatorname{dist}(u, N(A)) \leq C\,\|\,A(u)\,\| \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A). \tag{3.22}$$

Notar que si $N(A) = \{\theta\}$ entonces $\operatorname{dist}(u, N(A)) = \|\,u\,\|$, y en tal caso (3.22) se convierte en la caracterización particular dada por el Teorema 3.13.

Dentro del contexto de operadores con rango cerrado es importante establecer también que esta propiedad se traspasa al adjunto de un operador. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.16 *Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $R(A)$ es cerrado en Y. Entonces $R(A') = N(A)^\circ$ y por lo tanto $R(A')$ es un subespacio cerrado de X'.*

Demostración. Demostremos por doble inclusión. En primer lugar, dado $F \in R(A')$, existe $G \in Y'$ tal que $F = A'(G)$. Luego, para cada $x \in N(A)$ se tiene que

$$F(x) = A'(G)(x) = G(A(x)) = G(\theta) = 0,$$

lo cual prueba que $F \in N(A)^{\circ}$. Recíprocamente, sea $F \in N(A)^{\circ}$, es decir $F \in X'$ y $F(x) = 0 \quad \forall\, x \in N(A)$. Queremos probar que existe $G \in Y'$ tal que $F = A'(G)$. Para este efecto comenzamos primero definiendo el funcional $g : R(A) \to \mathbb{R}$ por

$$g(y) = F(x) \quad \forall\, y \in R(A),$$

donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$. Dada otra pre-imagen por A de y, esto es $\widetilde{x} \in X$ tal que $A(\widetilde{x}) = y$, se sigue que $x - \widetilde{x} \in N(A)$ y por lo tanto $F(x) = F(\widetilde{x})$, lo cual muestra que g está bien definido. Veamos a continuación que g es lineal. En efecto, dados $\alpha, \widetilde{\alpha} \in \mathbb{R}$, $y, \widetilde{y} \in R(A)$ y $x, \widetilde{x} \in X$ tales que $y = A(x)$ y $\widetilde{y} = A(\widetilde{x})$, la linealidad de A establece que $\alpha\, y + \widetilde{\alpha}\, \widetilde{y} = A(\alpha\, x + \widetilde{\alpha}\, \widetilde{x})$. Se tiene así que

$$g(\alpha\, y + \widetilde{\alpha}\, \widetilde{y}) = F(\alpha\, x + \widetilde{\alpha}\, \widetilde{x}) = \alpha\, F(x) + \widetilde{\alpha}\, F(\widetilde{x}) = \alpha\, g(y) \; + \; \widetilde{\alpha}\, g(\widetilde{y}).$$

Por otro lado, dado $y = A(x) \in R(A)$ y $z \in N(A)$, se obtiene que

$$|g(y)| = |F(x)| = |F(x - z)| \leq \|\, F \,\| \, \|\, x - z \,\|,$$

de donde

$$|g(y)| \;\leq\; \|\, F \,\| \inf_{z \in N(A)} \|\, x - z \,\| \;=\; \|\, F \,\| \operatorname{dist}(x, N(A)),$$

lo cual, usando que $R(A)$ es cerrado y el Teorema 3.15, implica que

$$|g(y)| \;\leq\; C \,\|\, F \,\| \, \|\, A(x) \,\| \;=\; C \|\, F \,\| \, \|\, y \,\| \quad \forall\, y \in R(A).$$

Así, $g \in R(A)'$, y por lo tanto, aplicando el Teorema de Hahn-Banach (versión análitica) se deduce que existe $G \in Y'$ tal que $\|\, G \,\|_{Y'} = \|\, g \,\|_{R(A)'}$ y $G|_{R(A)} = g$. Esto significa que $G(y) = g(y) \quad \forall\, y \in R(A)$, o bien para cada $x \in X$:

$$F(x) \;=\; g(A(x)) \;=\; G(A(x)) \;=\; A'(G)(x)\,,$$

lo cual prueba que $F = A'(G)$. □

La versión Hilbert del teorema anterior está dada como sigue.

TEOREMA 3.17 *Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $R(A)$ es cerrado en Y. Entonces $R(A^*) = N(A)^\perp$ y por lo tanto $R(A)^*$ es un subespacio cerrado de X.*

DEMOSTRACIÓN. Hacemos uso del Teorema 3.12, de la identidad $A^* = R_X \circ A' \circ R_Y^{-1}$, donde R_X y R_Y son las aplicaciones del Riesz respectivas, y del Lema 3.8, el cual establece que $R_X(S^\circ) = S^\perp \ \forall\, S \subseteq X$. En efecto, puesto que $R(A)$ es cerrado se tiene que $R(A') = N(A)^\circ$. Luego $x \in R(A^*)$ si y sólo si:

$$
\begin{array}{rl}
 & \exists\, y \in Y \quad \text{tal que} \quad x = R_X(A'(R_Y^{-1}(y))) \\
\Leftrightarrow & \exists\, y \in Y \quad \text{tal que} \quad R_X^{-1}(x) = A'(R_Y^{-1}(y)) \\
\Leftrightarrow & \exists\, G := R_Y^{-1}(y) \in Y' \quad \text{tal que} \quad R_X^{-1}(x) = A'(G) \\
\Leftrightarrow & R_X^{-1}(x) \in R(A') = N(A)^\circ \\
\Leftrightarrow & x \in R_X(N(A)^\circ) = N(A)^\perp.
\end{array}
$$

□

3.10. Un problema de teoría de aproximaciones

En esta sección aplicamos algunos de los resultados anteriores de este capítulo al problema de teoría de aproximaciones dado por la caracterización de las FUNCIONES SPLINE DE INTERPOLACIÓN. Más precisamente, sean $\Omega :=]a,b[, n \in \mathbb{N}$, y $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\} \subseteq \Omega$ tal que $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$. Entonces, dado $m \in \mathbb{N}$, se consideran los espacios reales:

$$X = H^m(\Omega), \quad Y = L^2(\Omega), \quad Z = \mathbb{R}^n,$$

y se definen los operadores $T : X \to Y$ y $A : X \to Z$, respectivamente, por

$$T(u) = u^{(m)} \quad \forall\, u \in X, \tag{3.23}$$

y

$$A(u) = \begin{bmatrix} u(t_1) \\ u(t_2) \\ \vdots \\ u(t_n) \end{bmatrix} \quad \forall\, u \in X. \tag{3.24}$$

Es fácil ver que T y A son lineales y acotados. En particular, para el acotamiento de T se tiene:

$$\|T(u)\|_{L^2(\Omega)} = \|u^{(m)}\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\{ \sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2} = \|u\|_{H^m(\Omega)} \qquad \forall\, u \in X.$$

A su vez, aplicando el Teorema de Trazas en abiertos acotados de $\mathbb{R}$, se deduce que:

$$|u(t_j)| \leq c\,\|u\|_{H^1(]a,t_j[)} \leq c\,\|u\|_{H^m(\Omega)} \quad \forall\, u \in X,\ \forall\, j \in \{1, \cdots, n\},$$

lo cual muestra que cada uno de los operadores componentes de A, y por lo tanto A, es acotado. Por otro lado, se puede probar también que T y A son sobreyectivos, es decir $R(T) = Y$ y $R(A) = Z$. Por ejemplo, para la sobreyectividad de A observamos primero, de acuerdo al T.R.R., que existe un conjunto $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \subseteq X = H^m(\Omega)$ tal que

$$u(t_j) \,=\, \langle u, u_j \rangle_{H^m(\Omega)} \quad \forall\, u \in X\,, \quad \forall\, j \in \{1, \cdots, n\}\,, \tag{3.25}$$

esto es:

$$A(u) = \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j \rangle_{H^m(\Omega)}\, e_j \quad \forall\, u \in X,$$

donde $\{e_1, e_2 \cdots, e_n\}$ es la base canónica de $Z = \mathbb{R}^n$. A continuación notamos que $\{u_1, u_2 \cdots, u_n\}$ es linealmente independiente. En efecto, sean $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\, u_i = \theta \in H^m(\Omega)$. Para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ podemos construir una función $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega) \subseteq H^m(\Omega)$ tal que $\varphi_j(t_j) = 1$ y $\operatorname{sop} \varphi_j = \overline{B}(t_j, r_j) \subseteq \,]t_{j-1}, t_{j+1}[$, donde denotamos $t_0 = a$ y $t_{n+1} = b$. De este modo se obtiene para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$:

$$0 = \langle \varphi_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, u_i \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \langle \varphi_j, u_i \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \varphi_j(t_i) \,=\, \alpha_j\,,$$

lo cual confirma dicha independencia lineal. En consecuencia, dado que se demuestra fácilmente que:

$$A^*(z) = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, z \rangle_{\mathbb{R}^n}\, u_j \,=\, \sum_{j=1}^{n} z_j\, u_j \quad \forall\, z \in Z = \mathbb{R}^n, \tag{3.26}$$

se concluye que A^* es inyectivo y por lo tanto $R(A) = N(A^*)^\perp = \mathbb{R}^n$.

Habiendo establecido lo anterior, definimos ahora la FUNCIÓN SPLINE DE INTERPOLACIÓN CON RESPECTO A T Y A como la solución, si es que existe, del problema siguiente. Dado $z \in \mathbb{R}^n$, hallar $u \in X$ tal que:

$$\|T(u)\| = \text{mín}\Big\{\|T(v)\| : \quad v \in X, \quad A(v) = z\Big\}, \tag{3.27}$$

o bien, equivalentemente, hallar $u \in X$ tal que:

$$\begin{aligned} &\int_a^b \{u^{(m)}(t)\}^2\, dt \\ = \text{mín} &\left\{\int_a^b \{v^{(m)}(t)\}^2\, dt : \quad v \in H^m(\Omega)\,,\ v(t_i) = z_i \quad \forall\, i \in \{1, 2, \cdots, n\}\right\}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

En lo que sigue analizamos en detalle el problema (3.27). En particular, deducimos condiciones necesarias y suficientes para la existencia y unicidad de tal $u \in X$, y obtenemos también una caracterización de esta solución, gracias a la cual élla puede calcularse explícitamente.

Comencemos nuestro análisis observando, gracias a la sobreyectividad de A, que existe $v_0 \in X$ tal que $A(v_0) = z$, y por lo tanto

$$A^{-1}(\{z\}) := \Big\{v \in X : A(v) = z\Big\} = \{v_0\} + N(A).$$

Se sigue que $A^{-1}(\{z\})$ es un subespacio cerrado de X (porque $N(A)$ lo es) , y además es fácil ver que $T\left(A^{-1}(\{z\})\right)$ es convexo. De este modo, el problema (3.27) puede reformularse, equivalentemente, como:

$$\min_{v \in A^{-1}(\{z\})} \|T(v)\| = \min_{y \in T(A^{-1}(\{z\}))} \|y\|, \tag{3.29}$$

donde:

$$T(A^{-1}(\{z\})) = \{T(v_0)\} + T(N(A)).$$

En virtud de lo anterior, podemos establecer el siguiente resultado preliminar.

LEMA 3.21 *El problema* (3.27) *(ver también* (3.29)*) tiene solución para todo* $z \in Z$ *si y sólo si* $T(N(A))$ *es cerrado en* Y.

DEMOSTRACIÓN.

($\Leftarrow$) Supongamos que $T(N(A))$ es cerrado. Se sigue que $T(A^{-1}(\{z\}))$ también lo es $\forall\, z \in Z$, y dado que ya observamos que este conjunto es convexo, el resultado de mejor aproximación respectivo (ver Teorema 2.2), implica que existe un único $\widetilde{y} \in T(A^{-1}(\{z\}))$ tal que

$$\|\widetilde{y}\| = \min_{y \in T(A^{-1}(\{z\}))} \|y\|.$$

Luego, todo elemento $v \in A^{-1}(\{z\})$ tal que $T(v) = \widetilde{y}$ constituye una solución de (3.27).

($\Rightarrow$) Supongamos ahora que el problema (3.27) tiene solución para cada $z \in Z$, y asumamos, por contradicción, que $T(N(A))$ no es cerrado. Entonces, existe $y_0 \in \overline{T(N(A))}$ tal que $y_0 \notin T(N(A))$, lo cual implica que el problema

$$\min_{y \in T(N(A))} \|y - y_0\| = \min_{y \in T(N(A))} \|y + y_0\| \tag{3.30}$$

no tiene solución. Ahora, como T es sobreyectivo, existe $u_0 \in X$ tal que $T(u_0) = y_0$. Se sigue que $y_0 \in T(A^{-1}\{z_0\})$, donde $z_0 = A(u_0) \in Z$. Luego, en virtud de la hipótesis de la presente implicación, existe $\widetilde{u_0} \in A^{-1}(\{z_0\})$ tal que

$$\|T(\widetilde{u_0})\| = \min_{v \in A^{-1}(\{z_0\})} \|T(v)\|\,,$$

o bien, denotando $\widetilde{y_0} := T(\widetilde{u_0})$, se tiene

$$\|\widetilde{y_0}\| = \min_{y \in T(A^{-1}(\{z_0\}))} \|y\| = \min_{y \in T(N(A))} \|y + y_0\|\,, \tag{3.31}$$

donde hemos usado que

$$T(A^{-1}(\{z_0\})) = \{T(u_0)\} + T(N(A)) = \{y_0\} + T(N(A))\,.$$

Puesto que $\widetilde{y_0} - y_0 = T(\widetilde{u_0} - u_0) \in T(N(A))$, ya que $A(\widetilde{u_0}) = A(u_0) = z_0$, se deduce que el mínimo en (3.31) se alcanza en $y = \widetilde{y_0} - y_0$, lo cual contradice la no existencia de solución del problema (3.30). □

Por otro lado, con el objeto de establecer otra condición necesaria y suficiente para que $T(N(A))$ sea cerrado, necesitamos introducir el operador lineal y acotado $\widetilde{T} := T|_{N(T)^\perp} : N(T)^\perp \to Y$. Es sabido, gracias a la sobreyectividad de T, que $\widetilde{T}$ es biyectivo, y por lo tanto, el T.I.A. asegura que $\widetilde{T}^{-1} \in \mathcal{L}(Y, N(T)^\perp)$. Además, se tiene el siguiente resultado técnico.

Lema 3.22

$$T(N(A)) = \widetilde{T}((N(A) + N(T)) \cap N(T)^\perp).$$

Demostración. Sea $y = T(v)$ con $v \in N(A)$, y sean P y $P^{\perp}$ los proyectores ortogonales de X sobre $N(T)$ y $N(T)^{\perp}$, respectivamente. Se sigue que $v = P(v) + P^{\perp}(v)$, y luego $y = T(v) = T(P^{\perp}(v)) = \widetilde{T}(P^{\perp}(v))$, donde $P^{\perp}(v) = v - P(v) \in (N(A) + N(T)) \cap N(T)^{\perp}$. Recíprocamente, sea $y = \widetilde{T}(v)$ con $v \in (N(A) + N(T)) \cap N(T)^{\perp}$, y sean $w \in N(A)$ y $z \in N(T)$ tal que $v = w + z$. Entonces se obtiene:

$$y = \widetilde{T}(v) = T(w + z) = T(w) \in T(N(A)).$$

□

Ahora podemos probar el siguiente resultado de caracterización.

Lema 3.23 *El espacio $T(N(A))$ es cerrado si y sólo si $N(A) + N(T)$ es cerrado.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que $T(N(A))$ es cerrado, y sean $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N(A)$ y $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N(T)$ tales que $v_n := w_n + z_n \overset{n\to\infty}{\to} v \in X$. Por la continuidad de T se tiene que $T(v_n) = T(w_n) \to T(v) \in Y$, y dado que $\{T(w_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(N(A))$ se deduce que $T(v) \in T(N(A))$. Luego, existe $w \in N(A)$ tal que $T(v) = T(w)$, de donde resulta $v = w + (v - w) \in N(A) + N(T)$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $N(A) + N(T)$ es cerrado. Se sigue claramente que el espacio $(N(A) + N(T)) \cap N(T)^{\perp}$ también es cerrado, y por lo tanto la misma propiedad vale para

$$T(N(A)) = (\widetilde{T}^{-1})^{-1}\Big((N(A) + N(T)) \cap N(T)^{\perp}\Big).$$

□

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de los lemas anteriores.

Teorema 3.18 *Una condición necesaria y suficiente para que exista al menos una función spline de interpolación con respecto a los operadores T y A, para cada $z \in Z$, es que $N(A) + N(T)$ sea cerrado en X.*

Más aún, el siguiente teorema caracteriza la unicidad de dicha función spline.

Teorema 3.19 *La función spline de interpolación con respecto a los operadores T y A, cuya existencia para cada $z \in Z$ está garantizada si $N(A) + N(T)$ es cerrado en X, es única si y sólo si $N(A) \cap N(T) = \{\theta\}$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos la unicidad de la función spline de interpolación para cada $z \in Z$, y sea $\widetilde{v} \in N(A) \cap N(T)$, es decir $\widetilde{v} \in X$, $A(\widetilde{v}) = \theta \in Z$, y $T(\widetilde{v}) = \theta \in Y$. Se sigue que:

$$\min_{v \in A^{-1}(\{\theta\})} \|T(v)\| = \|T(\widetilde{v})\| = 0,$$

y por la unicidad de solución de este problema, necesariamente $\widetilde{v} = \theta$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $N(A) \cap N(T) = \{\theta\}$ y, dado $z \in Z$, sean $v_1, v_2 \in A^{-1}(\{z\})$ tales que $T(v_1) = T(v_2) = \widetilde{y}$, donde

$$\|\widetilde{y}\| = \min_{y \in T(A^{-1}(\{z\}))} \|y\|.$$

Entonces, es claro que $v_1 - v_2 \in N(A) \cap N(T)$, y por lo tanto $v_1 = v_2$. $\square$

Con el objeto de confirmar que los operadores T y A definidos en (3.23) y (3.24) satisfacen las hipótesis de los Teoremas 3.18 y 3.19, necesitamos establecer dos resultados preliminares. En primer lugar recordamos que la suma de dos subespacios cerrados de un Banach es cerrado si uno de los subespacios es de dimensión finita. Luego, tenemos el siguiente lema.

Lema 3.24 *Si alguno de los espacios $N(A)$ o $N(T)$ tiene dimensión o bien codimensión finita, entonces $N(A) + N(T)$ es cerrado de X.*

Demostración. Basta razonar con uno de estos espacios. Si $N(T)$ tiene dimensión finita entonces claramente $N(A) + N(T)$ es cerrado. Ahora, supongamos que $X/N(T)$ es de dimensión finita. Puesto que $R(T) = Y$, se tiene que el operador lineal $\widehat{T} : X/N(T) \to Y$ definido por $\widehat{T}([x]) = T(x) \quad \forall [x] \in X/N(T)$ es un isomorfismo, y por lo tanto Y también es de dimensión finita. Se sigue que $T(N(A))$ es cerrado, y aplicando Lema 3.23 se deduce que $N(A) + N(T)$ es cerrado. $\square$

En el caso particular de nuestros operadores T y A (cf. (3.23), (3.24)) tenemos que $R(T) = Y = L^2(\Omega), R(A) = Z = \mathbb{R}^n$, y $N(T) = \mathbb{P}_{m-1}(\Omega)$, el espacio de polinomios de grado $\leq m-1$ definidos sobre Ω. Notar además que $X/N(A)$ es isomorfo a $Z = \mathbb{R}^n$. Así, ya sea utilizando que dim $N(T) = m$ o bien que dim $X/N(A) = n$, se concluye por el Lema 3.24 que $N(A) + N(T)$ es cerrado de X. Por otro lado, sea $v \in N(A) \cap N(T)$. Se sigue que

$$v \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega) \quad \text{y} \quad v(t_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots n\}.$$

Luego, en virtud del Teorema Fundamental del Algebra, se deduce que una condición necesaria y suficiente para que v se anule en Ω, y por lo tanto concluyamos que $N(A) \cap N(T) = \{\theta\}$, es que $n \geq m$.

En lo que sigue suponemos entonces que $n \geq m$, lo cual, de acuerdo a los Teoremas 3.18 y 3.19, garantiza que para cada $z \in Z$ existe una única función spline de interpolación u con respecto a T y A. El objetivo siguiente es caracterizar y calcular explícitamente u.

Dado $z \in Z = \mathbb{R}^n$, sean $u \in A^{-1}(\{z\})$ y $\widetilde{y} = T(u) \in T(A^{-1}(\{z\}))$ tales que:

$$\|T(u)\| = \min_{v \in A^{-1}(\{z\})} \|T(v)\| = \min_{y \in T\,(A^{-1}(\{z\}))} \|y\| = \|\widetilde{y}\|.$$

Puesto que $T\,(A^{-1}(\{z\}))$ es cerrado y convexo, se puede demostrar que la proyección de θ sobre este conjunto, vale decir $\widetilde{y}$, está caracterizada por la desigualdad:

$$\langle\, \theta - \widetilde{y}\,,\, y - \widetilde{y} \rangle_Y \leq 0 \qquad \forall\, y \in T(A^{-1}(\{z\})),$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ denota el producto escalar de $Y = L^2(\Omega)$. Más aún, es fácil ver que la relación anterior se re-escribe como:

$$\langle\, T(u), T(v-u)\,\rangle_Y \geq 0 \qquad \forall\, v \in A^{-1}(\{z\}),$$

o bien, notando que $A(v) = A(u) = z$,

$$\langle\, T(u), T(w)\,\rangle_Y \geq 0 \qquad \forall\, w \in N(A),$$

lo cual, usando que $N(A)$ es subespacio, se reduce, equivalentemente, a

$$\langle\, T(u), T(w)\,\rangle_Y = 0 \qquad \forall\, w \in N(A). \tag{3.32}$$

Hemos demostrado así que, dado $z \in Z = \mathbb{R}^n$, $u \in A^{-1}(\{z\})$ es la función spline de interpolación con respecto a los operadores T y A si y sólo si ocurre (3.32), esto es:

$$\langle\, T^*(T(u)), w\,\rangle_X = 0 \qquad \forall\, w \in N(A),$$

lo cual es equivalente a requerir que:

$$T^*(T(u)) \in N(A)^\perp = R(A^*).$$

De este modo, utilizando la expresión para A^* dada en (3.26) se concluye que existe $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_n)^t \in Z = \mathbb{R}^n$ tal que:

$$T^*(T(u)) \,=\, A^*(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, u_j .$$

Ahora, como $R(T) = Y = L^2(\Omega)$ es obviamente cerrado, se tiene que $R(T^*)$ también lo es, de donde $R(T^*) = N(T)^{\perp}$, y por lo tanto

$$T^*(T(u)) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, u_j \, \in \, N(T)^{\perp}. \tag{3.33}$$

Así, dado que $N(T) = \mathbb{P}_{m-1}(\Omega)$, se tiene que

$$\langle\, T^*(T(u)), p \,\rangle_X \,=\, 0 \quad \forall \, p \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega). \tag{3.34}$$

Por otro lado, para cada $v \in X = H^m(\Omega)$ podemos utilizar el desarrollo en serie de Taylor con resto integral y escribir:

$$v(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{v^{(j)}\,(a)(t-a)^j}{j!} + \int_a^b \frac{(t-s)_+^{m-1}\, v^{(m)}(s)}{(m-1)!}\, ds \quad \forall \, t \in [a,b],$$

donde s_+ denota la parte no negativa de $s \in \mathbb{R}$. Notemos que la expresión dada por la sumatoria en la ecuación anterior constituye un elemento de $\mathbb{P}_{m-1}(\Omega)$, y definamos:

$$v_+\,(t) := \int_a^b \frac{(t-s)_+^{m-1}\, v^{(m)}(s)}{(m-1)!}\, ds \qquad \forall \, t \in [a,b].$$

Luego, utilizando (3.33), (3.34), y (3.25), se deduce que:

$$\begin{aligned}
&\langle\, T(u), T(v) \,\rangle_Y \,=\, \langle\, T^*(T(u)), v \,\rangle_X \,=\, \langle\, T^*(T(u)), v_+ \,\rangle_X \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \,\langle\, u_j, v_+ \,\rangle_X \,=\, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \,\langle\, v_+, u_j \,\rangle_X \,=\, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, v_+\,(t_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \int_a^b \frac{(t_j-s)_+^{m-1}\, v^{(m)}(s)}{(m-1)!}\, ds \,=\, \int_a^b \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \frac{(t_j-s)_+^{m-1}}{(m-1)!} \right\} v^{(m)}\,(s)\, ds \\
&= \Big\langle \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j (t_j \,-\, \cdot)_+^{m-1}}{(m-1)!}, \, T(v) \Big\rangle_Y \qquad \forall \, v \in X,
\end{aligned}$$

lo cual implica, dado que $R(T) = Y$, que:

$$T(u)(s) := u^{(m)}(s) \,=\, \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j\,(t_j-s)_+^{m-1}}{(m-1)!} \qquad \forall \, s \,\in\, [a,b].$$

La identidad anterior permite demostrar el siguiente resultado de caracterización de u.

Teorema 3.20 *La función spline de interpolación u verifica las siguientes propiedades:*

i) $u|_{[a\,,t_1]} \in \mathbb{P}_{m-1}([a,\, t_1])$ *y* $u|_{[t_n\,,b]} \in \mathbb{P}_{m-1}([t_n\,,\, b])$.

ii) $u|_{[t_{i-1}\,,t_i]} \in \mathbb{P}_{2m-1}([t_{i-1}\,,\, t_i]) \qquad \forall\, i \in \{2,3,\cdots,n\}$.

iii) $u \in C^{2m-2}(\Omega)$.

Demostración. Notamos primero, de acuerdo a (3.33) y (3.34), que:

$$0 = \langle T^*(T(u)), p \rangle_X = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, p(t_j) \qquad \forall\, p \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega). \tag{3.35}$$

Ahora, dado $s \in [a, t_1]$, se tiene:

$$u^{(m)}(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j (t_j - s)_+^{m-1}}{(m-1)!} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j (t_j - s)^{m-1}}{(m-1)!} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \widetilde{p}(t_j),$$

con

$$\widetilde{p}(t) := \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega),$$

y luego, de acuerdo a (3.35), $u^{(m)}(s) = 0$, lo cual muestra que $u|_{[a,t_1]} \in \mathbb{P}_{m-1}([a, t_1])$. A su vez, dado $s \in [t_n, b]$, se tiene:

$$u^{(m)}(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j (t_j - s)_+^{m-1}}{(m-1)!} = 0\,,$$

ya que $t_j \leq s \quad \forall\, j \in \{1,2,\cdots,n\}$, y luego $u|_{[t_n,b]} \in \mathbb{P}_{m-1}([t_n, b])$.

Por otro lado, para $s \in [t_{i-1}, t_i]$, con $i \in \{2,3,\cdots,n\}$, se tiene:

$$u^{(m)}(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j (t_j - s)_+^{m-1}}{(m-1)!} = \sum_{j=i}^{n} \frac{\lambda_j (t_j - s)^{m-1}}{(m-1)!} \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega),$$

y luego $u|_{[t_{i-1},t_i]} \in \mathbb{P}_{2m-1}([t_{i-1}, t_i])$.

En lo que sigue suponemos primero que $m \geq 2$. Entonces, derivando $u^{(m)}$, $m-2$ veces, se obtiene:

$$\begin{aligned}
u^{(2m-2)}(s) &= 0 && \forall\, s \in [a, t_1],\\
u^{(2m-2)}(s) &= (-1)^{m-2} \sum_{j=i}^{n} \lambda_j (t_j - s) && \forall\, s \in [t_{i-1}, t_i], \quad \forall\, i \in \{2,3,\cdots,n\},\\
u^{(2m-2)}(s) &= (-1)^{m-2} \sum_{j=i+1}^{n} \lambda_j (t_j - s) && \forall\, s \in [t_i, t_{i+1}], \quad \forall\, i \in \{1,2,\cdots,n-1\},\\
u^{(2m-2)}(s) &= 0 && \forall\, s \in [t_n, b].
\end{aligned}$$

A partir de las identidades anteriores, y usando en la segunda ecuación la ortogonalidad dada por (3.35), se deducen los siguientes límites:

$$\lim_{s\in t_1^-} u^{(2m-2)}(s) = 0,$$

$$\lim_{s\to t_1^+} u^{(2m-2)}(s) = (-1)^{m-2}\sum_{j=2}^{n}\lambda_j(t_j-t_1) = (-1)^{m-2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t_j-t_1) = 0,$$

$$\lim_{s\to t_i^-} u^{(2m-2)}(s) = (-1)^{m-2}\sum_{j=i}^{n}\lambda_j(t_j-t_i) = (-1)^{m-2}\sum_{j=i+1}^{n}\lambda_j(t_j-t_i) \quad \forall\, i\in\{2,3,\cdots,n-1\},$$

$$\lim_{s\to t_i^+} u^{(2m-2)}(s) = (-1)^{m-2}\sum_{j=i+1}^{n}\lambda_j(t_j-t_i) \quad \forall\, i\in\{2,3,\cdots,n-1\},$$

$$\lim_{s\to t_n^-} u^{(2m-2)}(s) = (-1)^{m-2}\sum_{j=n}^{n}\lambda_j(t_j-t_n) = 0,$$

y

$$\lim_{s\to t_n^+} u^{(2m-2)}(s) = 0,$$

todos los cuales implican que $u^{(2m-2)}$ es continua en $t_i \quad \forall\, i\in\{1,2,\cdots,n\}$, y por lo tanto $u\in C^{2m-2}(\Omega)$. Sin embargo, derivando una vez más se obtiene:

$$u^{(2m-1)}(s) = (-1)^{m-1}\sum_{j=i}^{n}\lambda_j \quad \forall\, s\in[t_{i-1},t_i], \quad \forall\, i\in\{2,3,\cdots,n\},$$

y

$$u^{(2m-1)}(s) = (-1)^{m-1}\sum_{j=i+1}^{n}\lambda_j \quad \forall\, s\in[t_i,t_{i+1}], \quad \forall\, i\in\{1,2,\cdots,n-1\},$$

de donde:

$$\lim_{s\to t_i^-} u^{(2m-1)}(s) - \lim_{s\to t_i^+} u^{(2m-1)}(s) = (-1)^m\,\lambda_i \quad \forall\, i\in\{2,3,\cdots,n-1\},$$

lo cual prueba que $u^{(2m-1)}$ no es continua.

Por último, para $m = 1$ se obtiene $2m-2 = 0$, y en tal caso la continuidad de u en Ω se sigue del hecho que $u\in X = H^1(\Omega)$ y del Teorema de Inclusión de Sobolev que establece, precisamente para dominios $\Omega\subseteq\mathbb{R}$, que $H^1(\Omega)\subseteq C(\Omega)$. □

3.11. Ejercicios.

▶ **3.1** *Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados y sean $A\in\mathcal{L}(X,Y)$, $B\in\mathcal{L}(Z,X)$. Demuestre que $(AB)' = B'\,A'$. Suponga que A es invertible y demuestre que A' también lo* *es, con* $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

▶ **3.2** (Inverso a izquierda). *Sean* E, F *espacios de Banach y sea* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *tal que* $N(T) = \{0\}$. *Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *Existe* $S \in \mathcal{L}(F, E)$ *tal que* $S\,T = I : E \to E$.

b) $R(T)$ *es cerrado y posee un suplemento topológico en* F.

▶ **3.3** *Sea* X *el espacio de las funciones continuas sobre* $[0, 1]$ *provisto de la norma uniforme. Dados los polinomios* $p_j \in X$, $j \in \{0, 1, ..., n\}$, *con* $p_j(t) = t^j$ $\forall\, t \in [0, 1]$, *se define el operador* $A : X \to X$ *como*

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, X)$ *y encuentre explícitamente el operador adjunto* $A' : X' \to X'$.
Ind.: *Para todo* $j \in \{0, 1, ..., n\}$ *defina* $F_j : X \to \mathbb{R}$ *por* $F_j(u) := \displaystyle\int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt$ $\forall\, u \in X$, *y observe que* $F_j \in X'$.

▶ **3.4** *Considere dos espacios vectoriales normados* X *e* Y.

a) *Sea* $A_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ *tal que* $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. *Demuestre que existe un operador* $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y, X))$ *tal que* $\mathcal{T}_0 A_0 = A_0^{-1}$ *y* $||\mathcal{T}_0|| = ||A_0^{-1}||/||A_0||$.

b) *Pruebe que si* Y *es Banach y* $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y', X'))$ *es un operador biyectivo, entonces* $\mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(Y', X'), \mathcal{L}(X, Y))$.

▶ **3.5** *Sean* X, Y *espacios vectoriales normados y considere* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

a) *Demuestre que* $R(A)^0 = N(A')$ *y que*

$$N(A') = \{0\} \quad \text{si y solo si} \quad \overline{R(A)} = Y.$$

b) *Pruebe que si* $N(A) = \{0\}$ *y* $R(A) = Y$, *entonces* $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

▶ **3.6** *Sea* M *un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado* X. *Pruebe que el aniquilador de* $(\frac{X}{M})'$ *coincide con* M.

▶ **3.7** *Sean* X, Y *espacios vectoriales normados y sea* $T : X' \to Y'$ *un operador lineal cerrado y biyectivo. Demuestre que* $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y', X')$.

▶ **3.8** *Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall\, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.*
IND.: *Utilizar el* TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS.

▶ **3.9** *Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,X)$, con $||A|| < 1$. Demuestre que $(I + A)$ es invertible y que*

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X,X)$. Muestre también que

$$||(I + A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||A||}.$$

▶ **3.10** *Sean X, Y espacios de Banach y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. El grafo de T se denota por G_T y se define como*

$$G_T := \{(x, y) \in X \times Y : \quad x \in D(T),\ y = Tx\}$$

Suponga que $D(T)$ y G_T son subespacios cerrados de X y $X \times Y$, respectivamente. Demuestre que T es acotado sobre $D(T)$.

▶ **3.11** *Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Un operador lineal $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ se dice una extensión de T si $D(T) \subseteq D(\tilde{T})$ y $Tx = \tilde{T}x \quad \forall\, x \in D(T)$.*

DEFINICIÓN. *Se dice que $\overline{T} : D(\overline{T}) \subseteq X \to Y$ es la* CLAUSURA *de T, si:*

i) *$\overline{T}$ es un operador lineal cerrado*

ii) *$\overline{T}$ es una extensión de T*

iii) *Si $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ es cualquier operador con las propiedades* **i)** *y* **ii)**, *entonces $\tilde{T}$ es una extensión de $\overline{T}$.*

Sean X, Y espacios de Banach, y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que T tiene una clausura $\overline{T}$ sí y sólo si la siguiente condición se satisface

$$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq D(T),\ x_n \to 0\ ,\ Tx_n \to y \qquad \Rightarrow \qquad y = 0.$$

▶ **3.12** *Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0, \pi]$ provisto de la norma uniforme. Dadas las funciones trigonométricas $p_j,\ q_j \in X$, $j \in \{0, 1, ..., n\}$, con $p_j(t) = \operatorname{sen}(jt)$ y $q_j(t) = \cos(jt)$, $\forall\, t \in [0, \pi]$, se define el operador $A : X \to X$ como*

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^{\pi} u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j + \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^{\pi} u(t)\, q_j(t)\, dt \right\} q_j \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X,X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

▶ **3.13** *Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se define el operador adjunto de Hilbert de A, y se denota A^*, como $A^* : Y \to X$, donde para cada $y \in Y$, $A^* y \in X$ es el único elemento (dado por* Teorema de Representación de Riesz*) tal que $\langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, A^*y\rangle_X \quad \forall\, x \in X$.*

a) *Pruebe que $A^* \in \mathcal{L}(Y,X)$, $||A^*|| = ||A||$ y que $(A^*)^* = A$.*

b) *Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.*

c) *Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\inf\limits_{z \in N(A)} ||x - z|| \leq \beta\, ||Ax|| \quad \forall\, x \in X$, y demuestre que $R(A) = N(A^*)^{\perp}$.*

d) *Pruebe que $A^* = R_X\, A'\, R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \to X$ y $R_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^{o}N(A') = N(A^*)^{\perp}$.*

▶ **3.14** *Sean U un espacio vectorial normado y V un espacio de Banach. Además, sea $P : U' \to \mathcal{L}(U,V)$ un operador lineal cerrado tal que $N(P)$ es el funcional nulo sobre U y $R(P) = \mathcal{L}(U,V)$. Demuestre que existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$\alpha\, ||F||_{U'} \;\leq\; ||P(F)||_{\mathcal{L}(U,V)} \quad \forall\, F \in \mathcal{D}(P)\,.$$

▶ **3.15** *Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall\, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.*
Ind.: *Hacer una demostración alternativa utilizando el* Teorema del Grafo Cerrado *en vez del* Teorema de Banach-Steinhaus.

▶ **3.16**

a) *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de* Hilbert. *Dados $n \in \mathbb{N}$, $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq H$ y un conjunto de funcionales $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \subseteq H'$, se define el operador $A : H \to H$ como*

$$A(u) \;:=\; \sum_{j=1}^{n} F_j(u)\, p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H,H)$ y encuentre explícitamente el operador $A^* : H \to H$.

b) *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el espacio de* Hilbert *$L^2(0,1)$ provisto del producto escalar*

$$\langle u, v\rangle \;:=\; \int_0^1 u(t)\, v(t)\, dt \qquad \forall\, u\,,\ v \in H\,.$$

Dados los polinomios $p_j \in H$, $j \in \{1, ..., n\}$, con $p_j(t) = t^j \; \forall\, t \in (0,1)$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que A es lineal, acotado y AUTOADJUNTO, *esto es $A \in \mathcal{L}(H,H)$ y $A = A^*$.*

▶ **3.17** *Sea M un subespacio cerrado de un Hilbert H. Por el Teorema de Proyección, cada $x \in H$ puede escribirse únicamente en la forma $x = y + z$, con $y \in M$ y $z \in M^{\perp}$. El punto $y \in M$ se llama la* PROYECCIÓN *de x en M, y el operador $P := X \to M, \quad Px = y$, se llama la proyección sobre M. También se denota $P := P_M$ y se dice que P es una proyección.*

i) *Pruebe que si P es una proyección, entonces P es autoadjunto, $P^2 = P$, y $\|P\| = 1$ si $P \neq 0$.*

ii) *Pruebe que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es autoadjunto y $P^2 = P$, entonces P es una proyección sobre algún subespacio cerrado de H.*

▶ **3.18** *Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ y $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H,Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.*

a) *Demuestre que* $\displaystyle \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v \in V^{\perp} \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

b) *Suponga que existe $\beta > 0$ tal que* $\displaystyle \sup_{\substack{v \in V^{\perp} \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \beta \, \|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$, *y pruebe que $H = R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.*

▶ **3.19** *(*PSEUDO-INVERSA DE MOORE-PENROSE*). Sean X, Y espacios de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\mathcal{R}(A) = Y$, y sea $V = N(A)$. Dado el operador de proyección ortogonal $P : X \to V$, considere $B : Y \to X$ tal que $B(y) = x - P(x)$ para todo $y \in Y$, donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$.*

a) *Demuestre que B está bien definido y que B es una biyección lineal y acotada de Y en $V^{\perp}$. Pruebe, además, que B es un* inverso a derecha *de A, esto es $AB(y) = y$ para todo $y \in Y$.*

b) *Defina $A_0 : V^{\perp} \to Y$ como $A_0(x) = A(x)$ para todo $x \in V^{\perp}$, es decir $A_0 = A|_{V^{\perp}}$, y pruebe que $A_0^{-1} = B$.*

c) *Extienda los resultados anteriores al caso en que $\mathcal{R}(A)$ es un subespacio* CERRADO *propio de Y.*

► **3.20** *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $P \in \mathcal{L}(H,H)$, no trivial. Se dice que P es un* PROYECTOR *si satisface $P^2 = P$. En tal caso se dice que P es un* PROYECTOR ORTOGONAL *si además verifica que $\langle u, v\rangle = 0 \quad \forall\, u \in R(P), \quad \forall\, v \in N(P)$.*

a) *Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector entonces $H = N(P) \oplus R(P)$ y $\|P\| \geq 1$.*

b) *Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *P es un proyector ortogonal.*

ii) *$R(P) = N(P)^{\perp}$.*

iii) *P es autoadjunto*

c) *Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector ortogonal entonces $\|P\| = 1$.*

► **3.21** *(*CLAUSURA DE OPERADORES*). Sean X e Y Banach. Se dice que un operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ admite una clausura si existe un operador lineal $B : \mathcal{D}(B) \subseteq X \to Y$ tal que B es una extensión de A y $G(B) = \overline{G(A)}$. Demuestre que A admite una clausura si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $(x_n, A(x_n)) \overset{n\to\infty}{\to} (\mathbf{0}, y)$, con $y \in Y$, se tiene necesariamente que $y = \mathbf{0}$.*

► **3.22** *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H.*

a) *Sea $y \in H$ y suponga que existe $\tilde{y} \in H$ tal que*

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, \tilde{y}\rangle \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\,.$$

Demuestre que dicho $\tilde{y}$ es único.

b) *Considere el conjunto*

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) := \{y \in H : \text{ existe } \tilde{y} \in H \text{ tal que } \langle A(x), y\rangle = \langle x, \tilde{y}\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\}\,,$$

y defina el operador $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \to H$ dado por $\tilde{A}(y) := \tilde{y} \quad \forall\, y \in H$. Demuestre que $\tilde{A}$ es lineal y cerrado.

▶ **3.23** *Sea* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un Hilbert y sea* $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(H,H)$*, no trivial, distinto del operador identidad* $\mathbf{I} : H \to H$*, y tal que* $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$*. El objetivo de este ejercicio es probar que* $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|\mathbb{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$*, para cuyo efecto proceda como se indica:*

a) *Sea* S *un subespacio de dimensión* 2 *de* H *y sea* $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S,S)$*, no trivial, distinto del operador identidad* $\mathbf{I} : S \to S$*, y tal que* $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}$*. Pruebe que* $S = R(\mathbf{Q}) \oplus R(\mathbb{I} - \mathbf{Q})$ *y concluya que existen vectores no nulos* p, q, r, $s \in S$ *que satisfacen* $\langle p,q\rangle = \langle r,s\rangle = 1$*, tales que*

$$\mathbf{Q}(v) = \langle q,v\rangle\, p \qquad y \qquad (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) = \langle s,v\rangle\, r \qquad \forall\, v \in S\,.$$

b) *A partir de la identidad* $v = \mathbf{Q}(v) + (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) \quad \forall\, v \in S$*, deduzca que* $\|p\|^2\,\|q\|^2 = \|r\|^2\,\|s\|^2 = 1 - \langle p,r\rangle\,\langle q,s\rangle$ *y concluya así que*

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S,S)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S,S)}.$$

c) *Dado* $x \in H$ *tal que* $\|x\| = 1$*, considere el subespacio* S *generado por los vectores* x *y* $\mathbf{P}(x)$ *y defina* $\mathbf{Q} := \mathbf{P}|_S$*. Demuestre que* $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S,S)$*, observe que la dimensión de* S *es* ≤ 2*, y luego pruebe, usando b), que* $\|(\mathbf{I} - \mathbf{P})(x)\| \leq \|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

d) *Concluya, a partir de c), que* $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

▶ **3.24** *Sea* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ *un espacio de Hilbert complejo y considere* $H \times H$ *provisto del producto escalar*

$$\langle (u,v),(z,w)\rangle_{H\times H} := \langle u,z\rangle_H + \langle v,w\rangle_H \qquad \forall\,(u,v)\,,\ (z,w) \in H \times H\,.$$

Además, dado $A \in \mathcal{L}(H,H)$*, defina el operador* $B : H \times H \to H \times H$ *por*

$$B((u,v)) := (\imath\, A(v), -\,\imath\, A^*(u)) \qquad \forall\,(u,v) \in H \times H\,.$$

Demuestre que $\|B\| = \|A\|$ *y que* B *es autoadjunto.*

▶ **3.25** *Sean* E *y* F *espacios de Banach, y sea* $T : E \to F$ *un operador lineal cerrado con dominio* $D(T)$ *e imagen* $R(T)$*. Demuestre que son equivalentes:*

a) *El operador* T *es inyectivo, y* T^{-1} *es acotado sobre* $R(T)$.

b) *Existe una constante positiva* C *tal que* $\|Tx\| \geq C\|x\|$ *para todo* $x \in D(T)$.

c) $R(T)$ *es cerrado en* F*, y* T *es inyectivo.*

▶ **3.26** *Sea* Ω *un dominio convexo y acotado de* $\mathbb{R}^2$ *con frontera poligonal* Γ, *y sean* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)}$ *y* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1(\Omega)}$ *los productos escalares de* $L^2(\Omega)$ *y* $H^1(\Omega)$, *respectivamente.*

a) Pruebe que para todo $r \in L^2(\Omega)$ *existe un único* $z \in H^1(\Omega)$ *tal que*

$$\langle z, w\rangle_{H^1(\Omega)} \;=\; \langle r, w\rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, w \,\in\, H^1(\Omega)\,.$$

b) Deduzca que z *es la única solución débil del problema de valores de contorno:*

$$-\,\Delta z \,+\, z \;=\; r \quad en \quad \Omega\,, \quad \nabla z \cdot \boldsymbol{\nu} \,=\, 0 \quad en \quad \Gamma\,,$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ *es el vector normal sobre* Γ, *y* **observe** *(no lo demuestre) que la convexidad de* Ω *garantiza que* $z \in H^2(\Omega)$.

c) Defina un operador lineal apropiado y demuestre, utilizando el Teorema del Grafo Cerrado, que existe $C > 0$ *tal que*

$$\|z\|_{H^2(\Omega)} \;\le\; C\,\|r\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, r \,\in\, L^2(\Omega)\,.$$

▶ **3.27** *Sea* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio de Hilbert real y sea* $A \in \mathcal{L}(H,H)$ *el operador inducido por una forma bilineal y acotada* $a : H\times H \to \mathbb{R}$. *Además, sea* Π *la proyección ortogonal de* H *sobre un subespacio cerrado* S, *y suponga que existe* $\alpha > 0$ *tal que* $\quad a(v,v) \,\ge\, \alpha\,\langle v, v\rangle \qquad \forall\, v \,\in\, S\,.$ *Demuestre que* $\Pi A \,:\, S \,\to\, S$ *es una biyección lineal.*

▶ **3.28** *Sea* $(H, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle)$ *un espacio de Hilbert y sean* $V_1, V_2, ..., V_N$ *subespacios cerrados mutuamente ortogonales de* H, *esto es* $v_i \perp v_j \;\forall\, v_i \in V_i,\; \forall\, v_j \in V_j,\; \forall\, i \ne j$. *Demuestre que* $\mathbb{I} - \mathbb{P} \,=\, \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \cdots + \mathbb{P}_N$, *donde* $\mathbb{P} : H \longrightarrow V_1^\perp \cap V_2^\perp \cap \cdots \cap V_N^\perp$ *y* $\mathbb{P}_j : H \longrightarrow V_j$ *son los proyectores ortogonales respectivos.*

▶ **3.29** *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *y considere el espacio de Hilbert* $V \,:=\, [L^2(\Omega)]^{n\times n}$ *sobre* $\mathbb{R}$ *con el producto escalar* $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}\rangle \,:=\, \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}$, *donde*

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \;:=\; \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}\,\tau_{ij} \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma} \,:=\, (\sigma_{ij})_{n\times n}\,, \quad \boldsymbol{\tau} \,:=\, (\tau_{ij})_{n\times n} \in V\,.$$

A su vez, defina el subespacio $U \,:=\, \{\,\alpha\,\mathbb{A} \,+\, \beta\,\mathbb{B} : \quad \alpha\,,\,\beta \in \mathbb{R}\,\} \,=\, \langle\,\{\mathbb{A},\mathbb{B}\}\,\rangle$, *donde* $\mathbb{A} \,:=\, (a_{ij})_{n\times n}$ *y* $\mathbb{B} \,:=\, (b_{ij})_{n\times n}$ *están definidos por*

$$a_{ij} \;:=\; \begin{cases} 1 & si\ j = i-1 \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \qquad y \qquad b_{ij} \;:=\; \begin{cases} 1 & si\ j = i+1 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}\,.$$

Encuentre $U^\perp$ *y defina explícitamente los proyectores ortogonales sobre* U *y* $U^\perp$. *Qué sucede con estos proyectores si* U *se reemplaza por* $\langle\,\{\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{I}\}\,\rangle$, *donde* $\mathbb{I}$ *es el tensor identidad de* V *?*

▶ **3.30** *Sean* $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ *y* $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)_2$ *espacios de Hilbert sobre* $\mathbb{C}$ *con normas inducidas* $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$*, respectivamente, y sea* $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *tal que* $\|T(x)\|_2 = \|x\|_1 \quad \forall\, x \in H_1$*. Demuestre que* $\langle T(x), T(y)\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1 \quad \forall\, x,\, y \in H_1$*.*
IND.: *Considere las expresiones nulas* $\|T(x+y)\|^2 - \|x+y\|^2$ *y* $\|T(x+iy)\|^2 - \|x+iy\|^2$*.*

▶ **3.31** *Dado* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$*, defina el operador* $A : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ *por*

$$A(u) := \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_j \right\} v_j \quad \forall\, u \in H^1(\Omega)\,,$$

donde $\{u_1, u_2, ..., u_N\} \subseteq H^1(\Omega)$ *y* $\{v_1, v_2, ..., v_N\} \subseteq L^2(\Omega)$*. Demuestre que* A *es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto* A^**.*

▶ **3.32** *Sea* $X := C[0,1]$ *provisto de la norma uniforme, y sean* $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$*,* $\{q_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq X$ *tales que la serie* $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} p_j(s)\, q_j(t)$ *converge uniformemente a una funcion continua* $K : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$*, es decir*

$$\lim_{N\to+\infty} \left\{ \max_{(s,t)\in[0,1]\times[0,1]} \left| K(s,t) - \sum_{j=1}^{N} p_j(s)\, q_j(t) \right| \right\} = 0\,.$$

A su vez, sea $F_j \in X'$ *definido por* $F_j(u) := \displaystyle\int_0^1 q_j(t)\, u(t)\, dt \quad \forall\, u \in X$*. Pruebe que para todo* $G \in X'$*, la serie* $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} G(p_j)\, F_j$ *es convergente en* X'*. Identifique el valor del límite respectivo en términos del adjunto de un operador conveniente.*

▶ **3.33** *(*LA CONDICIÓN INF-SUP CONTINUA*). Sean* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ *e* $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ *espacios de Hilbert y considere* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$*. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) A *es sobreyectivo.*

ii) $A^* : Y \to X$ *es inyectivo y de rango cerrado.*

iii) Existe $\alpha > 0$ *tal que* $\displaystyle \|A^*(y)\|_X := \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|\langle A(x), y\rangle_Y|}{\|x\|_X} \geq \alpha\, \|y\|_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$

iv) Existe un operador $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ *tal que* $A\,B = I$ *en* Y *y* $B\,A = I - P$ *en* X*, donde* $P : X \to N(A)$ *es el proyector ortogonal.*

▶ **3.34** *Dado* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$*, defina el operador* $A : H^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ *por*

$$A(u) := \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \Delta u \, \Delta u_j \right\} v_j \quad \forall\, u \in H^2(\Omega)\,,$$

donde $\{u_1, u_2, ..., u_N\} \subseteq H^2(\Omega)$ *y* $\{v_1, v_2, ..., v_N\} \subseteq H^1(\Omega)$*. Demuestre que* A *es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto* A^**.*

▶ **3.35** *Sean* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio de Hilbert sobre* $\mathbb{C}$ *y* $A : H \to H$ *un operador lineal tal que* $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle \quad \forall\, x,\, y \in H$*. Pruebe que* A *es acotado.*

▶ **3.36** *Sean* V *y* W *subespacios cerrados de un Hilbert* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$*, y sean* $P : H \to V$ *y* $Q : H \to W$ *los proyectores ortogonales respectivos. Demuestre que*

$$\langle (Q-P)(x), x\rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in H \quad \text{si y sólo si} \quad V \subseteq W\,.$$

▶ **3.37** *Dado* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$*, defina el operador* $A : H^1(\Omega) \longrightarrow H^2(\Omega)$ *por*

$$A(u) := \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_j \right\} v_j \quad \forall\, u \in H^1(\Omega)$$

donde $\{u_1, u_2, ..., u_N\} \subseteq H^1(\Omega)$ *y* $\{v_1, v_2, ..., v_N\} \subseteq H^2(\Omega)$*. Demuestre que* A *es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto* A^**.*

Bibliografía

[1] Aubin, J. P., Applied Functional Analysis. Wiley-Interscience, 1979.

[2] Brenner, S.C. and Scott, L.R., The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer-Verlag, 1994.

[3] Brezis, H., Analyse Fonctionnelle. Théorie at Applications. Masson, Paris, 1983.

[4] Ciarlet, P., The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, 1978.

[5] Dautray, R. and Lions, J. L., Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, vols. 2-4. Springer Verlag, 1990.

[6] Friedman, A., Foundations of Modern Analysis. Dover Publications, 1982.

[7] Girault, V. and Raviart, P.-A., Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms. Springer-Verlag, 1986.

[8] Kreiszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley, 1978.

[9] Lax, P., Functional Analysis. John Wiley & Sons, Inc.,2002.

[10] Hormander, L., The Analysis of Linear Partial Differential Equations I. Springer Verlag, 1983.

[11] Oden, J. T. and Demkowicz, L., Applied Functional Analysis. CRS Press, 1996.

[12] Quarteroni, A. and Valli, A., Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer-Verlag, 1994.

[13] Raviart, P.-A. and Thomas, J.-M., Introduction á L'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles. Masson, 1983.

[14] Schechter, M., Principles of Functional Analysis. Academic Press, 1971.

[15] Zeidler, E., Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics. Springer Verlag New York, Inc., 1995.