UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREAS, MAT 525401

Análisis Funcional y Aplicaciones I

Primer Semestre 2002
Prof. Gabriel N. Gatica

Problema 1. Sea $\Omega := (a,b)$ un intervalo acotado de $\mathbf{R}$ y dado $m \in \mathbf{N}$ considere el espacio de Sobolev $H^m(\Omega) := \{\, v \in L^2(\Omega) : \quad v^{(j)} \in L^2(\Omega) \quad \forall j \in \{1, ..., m\}\,\}$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también es compacta.

Problema 2. Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados y sean $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Z,X)$. Demuestre que $(AB)' = B'\,A'$. Suponga que A es invertible y demuestre que A' tambien lo es, con $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

Problema 3. Sea $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espacio de Hilbert y considere un operador **nolineal** $T : H \to H$, **fuertemente monótono** y **Lipschitz-continuo**. Esto significa, respectivamente, que existen constantes $\alpha, M > 0$ tales que

$$< Tv - Tw, v - w > \geq \alpha \, ||v-w||_H^2 \quad \text{y} \quad ||Tv - Tw||_H \leq M \, ||v-w||_H \quad \forall \, v, \, w \in H \, .$$

a) Dada $f \in H$, demuestre que existe un único $u \in H$ tal que $Tu = f$.

b) Sea H_n un subespacio de dimensión finita de H y considere el esquema de Galerkin asociado: *Hallar* $u_n \in H_n$ *tal que* $< Tu_n, v_n > = < f, v_n > \ \forall \ v_n \in H_n$. Pruebe que

$$||u - u_n||_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in H_n} ||u - v_n||_H \, .$$

Ind.: Para **a)**, aplicar el Teorema del Punto Fijo de Banach al operador $P : H \to H$, con $Pv := v - \rho(Tv - f)$, donde ρ es un parámetro a elegir de manera conveniente.

Problema 4. Sean X, Y espacios de Banach, y sea $A : X \to Y$ un operador lineal cerrado tal que $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$. Demuestre que $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.
Ind.: Considere $\mathcal{D}(A)$ provisto de la norma $||x||_A := ||x|| + ||Ax||$.

Problema 5. Sea X un espacio vectorial normado.

a) Demuestre que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces la sucesión completa converge.

b) Sea $S := \{x \in X / ||x|| = 1\}$. Pruebe que S es completo sí y sólo sí X es Banach.

Problema 6. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{div};\Omega) := \{ v \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\, v := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \}$$

provisto del producto escalar

$$< v, w >_{H(\mathrm{div};\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\, v \; \mathrm{div}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

a) Demuestre que $(H(\mathrm{div};\Omega); < \cdot, \cdot >_{H(\mathrm{div};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que para todo $g \in [L^2(\Omega)]^n$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\, v_g \; \mathrm{div}\, w \, dx = \int_\Omega g \cdot w \, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

Ind.: Dada $v \in [L^2(\Omega)]^n$, se dice que $\mathrm{div}\, v := z \in L^2(\Omega)$ si: $-\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega z \, \varphi \, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$

Problema 7. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{rot};\Omega) := \{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}\, v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \}$$

provisto del producto escalar

$$< v, w >_{H(\mathrm{rot};\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \; \mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

a) Demuestre que $(H(\mathrm{rot};\Omega); < \cdot, \cdot >_{H(\mathrm{rot};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que para todo $g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v_g \; \mathrm{rot}\, w \, dx = \int_\Omega \mathrm{rot}\, g \, \mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

Ind.: Notar que $v \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ sí y sólo sí $(v_2, -v_1) \in H(\mathrm{div};\Omega)$. También, dada $v \in [L^2(\Omega)]^2$, se dice que $\mathrm{rot}\, v := z \in L^2(\Omega)$ si: $-\int_\Omega v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx + \int_\Omega v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\, dx = \int_\Omega z\, \varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Problema 8. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y defina el espacio $V := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, es decir

$$V \,=\, \left\{ v \in H^2(\Omega) : \quad v \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \right\} .$$

Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$||v||_{H^1(\Omega)} \;\leq\; C\, ||\Delta\, v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in V .$$

Ind.: Dada $v \in V$, defina $f \,=\, -\Delta\, v \in L^2(\Omega)$ y aplique el Lema de Lax-Milgram al problema de valores de contorno: $-\Delta\, u \,=\, f$ en Ω, $u = 0$ en Γ.

Problema 9. Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dados los polinomios $p_j \in X$, $j \in \{0, 1, ..., n\}$, con $p_j(t) = t^j$ $\forall\, t \in [0,1]$, se define el operador $A : X \to X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in X .$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

Ind.: Para todo $j \in \{0, 1, ..., n\}$ defina $F_j : X \to \mathbf{R}$ por $F_j(u) := \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt$ $\forall\, u \in X$, y observe que $F_j \in X'$.

Problema 10. Sea X un espacio vectorial normado y $f : X \to \mathbf{R}$ un funcional lineal. Pruebe que $f \in X'$ sí y sólo sí $N(f)$ es un subespacio cerrado de X.

Problema 11. Considere dos espacios vectoriales normados X e Y.

a) Sea $A_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Demuestre que existe un operador $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y, X))$ tal que $\mathcal{T}_0 A_0 = A_0^{-1}$ y $||\mathcal{T}_0|| = ||A_0^{-1}|| / ||A_0||$.

b) Pruebe que si Y es Banach y $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y', X'))$ es un operador biyectivo, entonces $\mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(Y', X'), \mathcal{L}(X, Y))$.

Problema 12. Sea $\Omega := (0,1)$ y considere el problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} &-(au')' + bu = f \quad \text{en} \quad \Omega \\ &u'(0) = u'(1) = 0 \quad , \end{aligned} \tag{1}$$

donde $a(x) = x^2 + 2, b(x) = 2 + sen(x)$ y $f(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$. Puede probarse que la formulación débil de (1) consiste en hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_0^1 (au'v' + buv)dx = \int_0^1 fvdx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2}$$

Demuestre que existe un único $u \in H^1(\Omega)$ solución de (2).

Problema 13. Sean X, Y espacios vectoriales normados y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.
a) Demuestre que $R(A)^0 = N(A')$ y que

$$N(A') = \{0\} \quad \text{si y solo si} \quad \overline{R(A)} = Y.$$

b) Pruebe que si $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$, entonces $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

Problema 14. Sea M un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado X.

i) Demuestre que $M =^0 (M^0)$.

ii) Pruebe que el aniquilador de $(\frac{X}{M})'$ coincide con M.

Problema 15. Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea $T : X' \to Y'$ un operador lineal cerrado y biyectivo. Demuestre que $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y', X')$.

Problema 16. Sean $I := [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, $f_j : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, j = 1, \cdots, n$, funciones continuas, y considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Hallar $u := (u_1, \cdots, u_n)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{du_j}{dt} = f_j(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)) & y \\ \\ u_j(t_0) = \eta_j & \forall j = 1, \cdots, n, \end{cases} \tag{3}$$

donde t_0, τ, η_j, $j = 1, \cdots, n$ son constantes reales dadas y τ es positivo. Suponga además que existe $M > 0$ tal que

$$|f_j(t, z) - f_j(t, w)| \leq M||z - w||_\infty \quad \forall\, z, w \in \mathbf{R}^n, \quad \forall\, t \in I.$$

Demuestre que (3) tiene una única solución $u(t)$ para todo $t \in I$.

Ind.: Transforme (3) en una ecuación integral de Volterra y luego aplique algún resultado apropiado sobre puntos fijos.

Problema 17. Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall\, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Problema 18. Sea H un espacio de Hilbert y $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de H tal que

$$< x_n, x_m > = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |< x, x_n >|^2 \leq ||x||^2 \quad \forall\, x \in H\,.$$

Además, dada una sucesión de escalares $\{\,\alpha_n\,\}_{n \in \mathbf{N}}$, demuestre que son equivalentes,

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, x_n$ converge en H.
b) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$.

Problema 19. Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$, se define

$$L^2(\Omega) := \{\, f : \Omega \to \mathbf{R} \,/\, f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^2\, dx < +\infty \,\}\,.$$

Dado un multíndice $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, y una función diferenciable u, se denota

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \text{y} \quad \partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

Con estas notaciones, para cada $m \in \mathbf{N}$ se define el **espacio de Sobolev** de orden m, como

$$H^m(\Omega) := \{\, u \in L^2(\Omega) \,/\, \forall\, \alpha,\, |\alpha| \leq m \quad \text{existe } g_\alpha \in L^2(\Omega)\,, \text{ tal que}$$

$$\int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha\, \varphi\, dx \;\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,\}$$

En tal caso se escribe $\partial^\alpha u = g_\alpha$, y se define la norma

$$||u||_{H^m(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha u||^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{2}}\,.$$

Asuma que $L^2(\Omega)$ provisto del producto escalar $< u, v >_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega uv\, dx$, es un espacio de Hilbert, y demuestre que $H^m(\Omega)$ es también un espacio de Hilbert.

Muestre además que para todo $f \in (H^m(\Omega))'$ existen funciones $f_\alpha \in L^2(\Omega)$, $|\alpha| \le m$, tales que $f(v) = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega f_\alpha \, \partial^\alpha v \, dx \quad \forall \, v \in H^m(\Omega)\,.$

Problema 20. Se dice que un espacio de Banach X es **uniformemente convexo** si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$(x, y \in X\,,\ ||x|| \le 1\,,\ ||y|| \le 1 \quad \text{y} \quad ||x - y|| > \epsilon\,) \Rightarrow ||\frac{x+y}{2}|| < 1 - \delta\,.$$

Demuestre que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

Problema 21. Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

a) Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.

b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{z \,\in\, N(A)} ||x - z|| \le \beta\, ||Ax|| \quad \forall \, x \in X\,.$$

Demuestre que $R(A) = N(A^*)^\perp$.

c) Pruebe que $A^* = R_X\, A'\, R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \to X$ y $R_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^oN(A') = N(A^*)^\perp$.

Problema 22. Sea X un espacio de Banach e Y un espacio vectorial normado. Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ existe $\forall x \in X$. Pruebe que existe $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $T_n(x) \to T(x) \quad \forall x \in X$.
Ind.: Aplicar Teorema de Banach-Steinhauss.

Problema 23. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{\, H_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1} \subset H_n \ \forall \, n \in \mathbf{N}$, y $\cup_{n\in\mathbf{N}} H_n$ es denso en H. Sea $B : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f \in H'$ existe una única sucesión $\{\, u_n(f) \,\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq H$ tal que

$$u_n(f) \in H_n \quad , \quad B(u_n(f), v_n) = f(v_n) \quad \forall \, v_n \in H_n\,,$$

y $||u_n(f)|| \le C_0\, ||f|| \ \forall \, n \in \mathbf{N}$, donde C_0 es una constante positiva independiente de n y de f. Suponga además que para todo $f \in H'$ existe un único $u(f) \in H$ tal que

$$B(u(f), v) = f(v) \quad \forall \, v \in H\,.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to+\infty} ||u(f) - u_n(f)|| = 0 \quad \forall \, f \in H'\,.$$

Ind.: Defina la proyección de Galerkin $P_n : H \to H_n$, donde $\forall \, v \in H$, $P_n v$ denota la única solución de $B(P_n v, w_n) = B(v, w_n) \quad \forall \, w_n \in H_n$ y observe que $P_n u(f) = u_n(f)$.

Problema 24. Sea H un espacio vectorial normado real. Pruebe que si la norma de H satisface

$$||x+y||^2 \,+\, ||x-y||^2 \;=\; 2\,(||x||^2 + ||y||^2) \quad \forall\, x, y \,\in\, H,$$

entonces ella proviene de un producto escalar.

Problema 25. Sean V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \,\to\, \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada simétrica y coerciva, y $A : V \,\to\, V'$ el operador lineal y acotado inducido por a. Dado $f \,\in\, V'$ y U un subconjunto de V no vacío convexo y cerrado, es sabido (por Teorema de Stampacchia) que existe un único $u \in U$ tal que

$$a(u, v-u) \;\geq\; f(v-u) \quad \forall\, v \,\in\, U.$$

Ahora, sean V_h un subespacio de V de dimensión finita, U_h un subconjunto de V_h no vacío convexo y cerrado, y denote por $u_h \in U_h$ a la única solución del problema discreto:

$$a(u_h, v_h - u_h) \;\geq\; f(v_h - u_h) \quad \forall\, v_h \,\in\, U_h.$$

Además, sea H un Hilbert tal que $V \subseteq H$, y la inyección canónica $i : V \,\to\, H$ es continua y densa. Demuestre que si $Au - f \in H$, entonces existe una constante C independiente de V_h y U_h, tal que

$$||u-u_h||_V \;\leq\; C \left\{ \inf_{v_h \in U_h} \left(||u-v_h||_V^2 \,+\, ||Au-f||_H \, ||u-v_h||_H \right) \right.$$
$$\left. + \, ||Au-f||_H \, \inf_{v \in U} \, ||u_h - v||_H \right\}^{1/2} .$$

Problema 26. Sea $\Omega := (a, b)$ un intervalo acotado de $\mathbf{R}$ y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega) := \{\, v \,\in\, L^2(\Omega) : \quad v',\, v'' \,\in\, L^2(\Omega) \,\}$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^2(\Omega) \to H^1(\Omega)$ también es compacta.

Problema 27. Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, X)$, con $||A|| < 1$. Demuestre que $(I + A)$ es invertible y que

$$(I+A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X, X)$. Muestre también que

$$||(I+A)^{-1}|| \;\leq\; \frac{1}{1 - ||A||}.$$

Problema 28. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. El grafo de T se denota por G_T y se define como

$$G_T := \{(x, y) \in X \times Y / x \in D(T),\ y = Tx\}$$

Suponga que $D(T)$ y G_T son subespacios cerrados de X y $X \times Y$, respectivamente. Demuestre que T es acotado sobre $D(T)$.

Problema 29. (Lema de Lax-Milgram generalizado). Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $B : H_1 \times H_2 \to \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

i) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u, v)| \leq C_1 ||u||_{H_1} ||v||_{H_2} \quad \forall\, (u, v) \in H_1 \times H_2.$$

ii) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\underset{\substack{v \in H_2 \\ v \neq 0}}{sup} \frac{|B(u, v)|}{||v||_{H_2}} \geq C_2 ||u||_{H_1} \quad \forall\, u \in H_1,$$

y para cada $v \in H_2$, $v \neq 0$, se tiene $sup_{u \in H_1} |B(u, v)| > 0$.

Demuestre que, dado $F \in H_2'$, existe un único $u \in H_1$ tal que

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_2,$$

y además, $||u||_{H_1} \leq \frac{1}{C_2} ||F||_{H_2'}$.

Problema 30. Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Un operador lineal $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ se dice una *extensión* de T si $D(T) \subseteq D(\tilde{T})$ y $Tx = \tilde{T}x \quad \forall\, x \in D(T)$.

Def. Sea $\overline{T} : D(\overline{T}) \subseteq X \to Y$ *tal que*

i) $\overline{T}$ *es un operador lineal cerrado*

ii) $\overline{T}$ *es una extensión de* T

iii) Si $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ *es cualquier operador con las propiedades* i) y ii), *entonces* $\tilde{T}$ *es una extensión de* $\overline{T}$.

Entonces se dice que $\overline{T}$ *es la* **clausura** *de* T.

Sean X, Y espacios de Banach, y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que T tiene una clausura $\overline{T}$ sí y sólo si la siguiente condición se satisface

$$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq D(T),\ x_n \to 0\ ,\ Tx_n \to y \qquad \Rightarrow \qquad y = 0.$$

Problema 31. Sea X el espacio vectorial de las funciones continuas sobre $\bar{\Omega} := [0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dados $u_1,\ u_2,\ y \in X$, considere la ecuación integral: *Hallar* $u \in X$ *tal que*

$$u(t) - \int_0^1 u_1(t)\, s^2\, u(s)\, ds - \int_0^1 u_2(t)\,(1 - \frac{3}{2}s)\, u(s)\, ds \ = \ y(t) \quad \forall\, t \in \bar{\Omega}\,. \quad (1)$$

i) Si $u_1(t) = 4t$ y $u_2(t) = 1\ \forall\, t \in \Omega$, deduzca una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (1) tenga al menos una solución.

ii) Pruebe que si $u_1(t) = t$ y $u_2(t) = 1$, entonces para cada $y \in X$ la ecuación integral (1) tiene una única solución.

Problema 32. Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados.

i) Pruebe que si $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ es de rango finito, entonces K es compacto.

ii) Demuestre que si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $K \in K(Y, Z)$, entonces $K A \in K(X, Z)$.

Problema 33. Sea X un espacio vectorial normado de dimensión **infinita** y sea $K \in K(X, X)$ un operador inyectivo. Demuestre que $K^{-1} \notin \mathcal{L}(X, X)$.

Problema 34. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Suponga que existen sucesiones $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X'$, $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq Y$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathbf{R}$ tales que

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} ||F_n||_{X'} \ < \ +\infty \quad , \quad \sup_{n \in \mathbf{N}} ||y_n||_Y \ < \ +\infty \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \ < \ +\infty\,,$$

y además

$$A\,x \ = \ \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n\, F_n(x)\, y_n \qquad \forall\, x \in X\,.$$

Demuestre que A es compacto.

Problema 35.

i) Sea $p > 1$ y considere el operador $K : l_p \to l_p$ definido por

$$K\,(x_1, x_2, ..., x_k, ...) \ = \ (x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_k}{k}, ...) \qquad \forall\ (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in l_p\,.$$

Demuestre que K es compacto.

ii) Sean X, Y espacios vectoriales normados y considere el conjunto

$$\mathcal{H} := \{ F \in (\mathcal{L}(X,Y))' \,/\, F(K) = 0 \quad \forall K \in K(X,Y) \}.$$

Pruebe que $\mathcal{H} = \left(\frac{\mathcal{L}(X,Y)}{K(X,Y)}\right)'$.

Problema 36. Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0,\pi]$ provisto de la norma uniforme. Dadas las funciones trigonométricas p_j, $q_j \in X$, $j \in \{0,1,...,n\}$, con $p_j(t) = \operatorname{sen}(jt)$ y $q_j(t) = \cos(jt)$, $\forall t \in [0,\pi]$, se define el operador $A : X \to X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^{\pi} u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j + \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^{\pi} u(t)\, q_j(t)\, dt \right\} q_j \qquad \forall u \in X .$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X,X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

Problema 37. Sean H y V dos espacios de Hilbert tales que $H \subseteq V$ y la inyección $i : H \to V$ es compacta.

a) Se dice que una forma bilineal acotada A definida sobre $H \times H$ satisface la **desigualdad de Gårding** si existen $\alpha > 0$ y una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbf{R}$ tales que

$$A(v,v) \geq \alpha \,||v||_H^2 - K(v,v) \qquad \forall v \in H .$$

Dado $F \in H'$, considere el siguiente problema variacional: *Hallar $u \in H$ tal que*

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H . \tag{2}$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding, entonces (2) tiene solución para cada $F \in H'$ **si y solo si** $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

b) Se dice que A satisface la **desigualdad de Gårding generalizada** si existen $\alpha > 0$, una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbf{R}$, y un isomorfismo $S : H \to H$ tales que

$$A(v,Sv) \geq \alpha \,||v||_H^2 - K(v,Sv) \qquad \forall v \in H .$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding generalizada, entonces (2) tiene solución para cada $F \in H'$ **si y solo si** $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

Problema 38. Sean X e Y espacios de Banach tal que X es reflexivo. Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ es compacto **si y sólo si** A transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones fuertemente convergentes de Y.

Problema 39.

a) Sea $\Omega = (0,1)$ y $X = L^2(\Omega)$. Puede probarse que X provisto del producto escalar

$$< f, g > := \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx \quad \forall\, f,\, g \in X$$

es un espacio de Hilbert, y que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $(X, < \cdot, \cdot >)$. Considere la sucesión $\{\, x_n \,\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X$ definida por $x_n(t) = \sqrt{2}\, sin(n\pi t)\ \forall\, t \in \Omega$. Demuestre que

$$||x_n|| = 1 \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad , \quad \text{y que} \quad \lim_{n\to\infty} < \varphi, x_n > = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Concluya además que $x_n \xrightarrow{w} 0$, y que x_n **no converge fuertemente** a la función nula.

b) A propósito de lo anterior, demuestre que en un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita, la convergencia débil no es equivalente a la convergencia fuerte.

Problema 40. Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X'$ un operador **nolineal**. Se dice que T satisface la propiedad (S) si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$ tal que

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad \text{y} \quad (T(x_n))\,(x_n - x) \;-\; (T(x))\,(x_n - x) \longrightarrow 0\ ,$$

se tiene $x_n \longrightarrow x$.

Sean H, Q, V espacios de Banach tales que $H \subseteq V$ y $\mathbf{i} : H \to V$ es compacta. Sea $X := H \times Q$, y considere una forma bilineal acotada $B : X \times X \to \mathbf{R}$ y un operador nolineal $A : H \to H'$ que satisfacen las siguientes propiedades

i) existe $C_0 > 0$ tal que

$$B((u,\lambda),(u,\lambda)) \;\geq\; C_0\, ||\lambda|_Q^2 \quad \forall\, (u,\lambda) \in X\,.$$

ii) existen C_1, $C_2 > 0$ tal que para todo $u, v \in H$

$$(A(u))\,(u-v) \;-\; (A(v))\,(u-v) \;\geq\; C_1\, ||u-v||_H^2 \;+\; R(u,v)\,,$$

donde

$$|R(u,v)| \;\leq\; C_2\,\{\, 1 \,+\, ||u||_H \,+\, ||v||_H \,\}\, ||u-v||_V\ .$$

Demuestre que el operador nolineal $T : X \to X'$ definido por

$$(T(u,\lambda))\,(v,\mu) \;:=\; (A(u))\,(v) \;+\; B((u,\lambda),(v,\mu)) \;,$$

satisface la propiedad (S).

Problema 41.

a) Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $N(T) = \{0\}$ y $R(T) = Y$. Demuestre que X es reflexivo (separable) si y sólo si Y es reflexivo (separable).

b) Sean X, Y espacios de Banach separables. Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también es separable.

c) Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^N$ y $p \in \mathbf{R}$, $2 \le p < \infty$, se define

$$L^p(\Omega) \;:=\; \{\, f : \Omega \to \mathbf{R} \,/\, f \text{ medible y } ||f||_{L^p(\Omega)} \;:=\; \left\{ \int_\Omega |f|^p\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \;<\; +\infty \,\} \;.$$

Puede probarse que $(L^p(\Omega), ||\cdot||_{L^p(\Omega)})$ es un espacio de Banach separable. Por otra parte, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está dado por

$$W^{1,p}(\Omega) \;:=\; \{\, u \,\in\, L^p(\Omega) \,/\, \text{existe } g_i \,\in\, L^p(\Omega) \;, i = \overline{1,N} \text{ tal que}$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,dx \;=\; -\int_\Omega g_i \phi\,dx \;\forall\, \phi \,\in\, C_0^\infty(\Omega) \,\}$$

En tal caso se escribe $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, y se define la norma

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \;:=\; ||u||_{L^p(\Omega)} \;+\; \sum_{i=1}^{N} ||\frac{\partial u}{\partial x_i}||_{L^p(\Omega)} \;.$$

Puede probarse que $(\, W^{1,p}(\Omega), ||\cdot||_{W^{1,p}(\Omega)}\,)$ también es Banach. Demuestre que $W^{1,p}(\Omega)$ es separable.

Problema 42. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se dice que T es **débilmente compacto** si para toda sucesión acotada $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ de X existe una subsucesión $\{\, x_n^{(1)} \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ tal que $\{\, T x_n^{(1)} \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge débilmente en Y. Pruebe que si X o Y es *reflexivo*, entonces todo operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es débilmente compacto.

Problema 43. Sean a, $b \in \mathbf{R}$ tal que $-\infty < a < b < +\infty$. Asuma que $C[a,b]$ es separable, y demuestre que para todo entero no negativo k, $C^k[a,b]$ también es separable.

Problema 44. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ. Considere el problema de valores de contorno:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g \quad \text{en} \quad \Gamma \\ \int_\Omega u\,dx &= a_1\,, \end{aligned} \tag{3}$$

donde $a_1 \in \mathbf{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, y $g \in L^2(\Gamma)$ satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_\Omega f\,dx + \int_\Gamma g\,ds = 0\,.$$

Demuestre que una formulación débil de (3) consiste en: *Hallar* $(u,\lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \lambda \int_\Omega v\,dx = \int_\Omega f v\,dx + \int_\Gamma g v\,ds\,,$$

$$\mu \int_\Omega u\,dx = \mu a_1\,,$$

para todo $(v,\mu) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$. Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene única solución, la cual depende continuamente de los datos.

Problema 45.

a) Sea X un espacio de Banach, y considere una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Demuestre que $||x|| \le \liminf ||x_n||$.

b) Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\limsup ||x_n|| \le ||x||$. Pruebe que $x_n \to x$.

Problema 46. Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : X \to Y$ un operador compacto. Demuestre que $\mathcal{R}(T)$ es separable.
Ind: Escriba $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \,/\, ||x|| \le n\}$, y luego use que todo subconjunto relativamente compacto de un espacio métrico es separable.

Problema 47. Se dice que un espacio de Banach es **uniformemente convexo** si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$(x,y \in X\,,\ ||x|| \le 1\,,\ ||y|| \le 1 \quad \text{y} \quad ||x-y|| > \epsilon) \Rightarrow ||\frac{x+y}{2}|| < 1-\delta\,.$$

Un importante resultado establece que *todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.*
En lo que sigue suponga que Ω es un abierto de $\mathbf{R}^n$ y que $p \in \mathbf{R}$ es tal que $p \geq 2$.

a) A partir del hecho que $\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}} \; \forall \alpha, \beta \geq 0$, demuestre la desigualdad de *Clarkson*:

$$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} + \left|\left|\frac{f-g}{2}\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\{||f||^p_{L^p(\Omega)} + ||g||^p_{L^p(\Omega)}\} \quad \forall f, g \in L^p(\Omega).$$

b) Utilice la desigualdad anterior para probar que $L^p(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$, es uniformemente convexo y por lo tanto reflexivo. Además, deduzca que $W^{1,p}(\Omega)$ también es reflexivo.

Problema 48. Sea V un espacio de Hilbert y $a : V \times V \times V \to \mathbf{R}$ una forma trilineal tal que para todo $w \in V$, la forma bilineal $a(w; \cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbf{R}$ es acotada. Dado $F \in V'$, considere el problema: *Hallar* $u \in V$ *tal que*

$$a(u; u, v) = F(v) \qquad \forall v \in V. \tag{P}$$

Suponga que existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(w; v, v) \geq \alpha ||v||^2_V \qquad \forall v, w \in V.$$

Asuma además que existe una constante $C_0 > 0$ tal que para todo w_1, w_2, u, $v \in V$,

$$|a(w_1; u, v) - a(w_2; u, v)| \leq C_0 ||w_1 + w_2||_V ||u||_V ||v||_V ||w_1 - w_2||_V .$$

Encuentre una constante positiva C_1 tal que para todo $F \in V'$, $|| F ||_{V'} \leq C_1$, el problema (P) admite una única solución.

Problema 49.

a) El **Teorema del Punto Fijo de Brouwer** establece que: *Dado un subconjunto S compacto, convexo, y no vacío de un espacio vectorial de dimensión finita, y una aplicación continua T de S en S, entonces T tiene al menos un punto fijo.* Use este resultado de Brouwer para demostrar que si X es un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $< \cdot, \cdot >$ y norma $|| \cdot ||$, y si F es una aplicación continua de X en X tal que, para algún $\mu > 0$, $< F(u), u > \geq 0 \quad \forall u \in X$ con $||u|| = \mu$, entonces existe $u_0 \in X$, $||u_0|| \leq \mu$, tal que $F(u_0) = 0$.

b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. **El problema de Navier-Stokes**, un problema de suma importancia en mecánica de fluídos, consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$
\begin{gathered}
-\Delta\,\mathbf{u} + \sum_{j=1}^{2} u_j \, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\
\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\
\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\, dx = 0\,.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$, y

$$
Q := L_0^2(\Omega) := \{\, q \in L^2(\Omega) \,/\, \int_\Omega q\, dx = 0 \,\}\,.
$$

Demuestre que la formulación débil de (4) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$
\begin{aligned}
a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H \\
b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall\, q \in Q\,,
\end{aligned}
\tag{P}
$$

donde $a : H \times H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$, y $f \in H'$, están definidas por

$$
a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega w_j \, \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, v_i \, dx\,,
$$

$$
b(\mathbf{v}, p) := -\int_\Omega p \, \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx \quad , \quad f(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx\,.
$$

c) En lo que sigue considere un problema del tipo (P), no necesariamente proveniente de (4), y asuma que las siguientes hipótesis se cumplen: b es una forma bilineal acotada, b satisface la condición de Babuska-Brezzi continua (cf. Tareas 1 y 2), y para cada $\mathbf{w} \in H$ la aplicación $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es también una forma bilineal acotada. Sea $V := \{\, \mathbf{v} \in H \,/\, b(\mathbf{v}, q) = 0 \,\forall\, q \in Q \,\}$. Demuestre que (P) puede reducirse, equivalentemente, al siguiente problema no-lineal: *hallar* $\mathbf{u} \in V$ *tal que*

$$
a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in V\,.
\tag{$\tilde{P}$}
$$

d) Además de lo dicho en **c)**, suponga ahora que: existe una constante $\alpha > 0$ tal que $a(\mathbf{v};\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq \alpha\,||\mathbf{v}||^2$ para todo $\mathbf{v} \in V$; V es separable y para cada $\mathbf{v} \in V$, la aplicación $\mathbf{u} \to a(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v})$ es *secuencialmente débilmente continua*, es decir

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u} \in V \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a(\mathbf{u}_n;\mathbf{u}_n,\mathbf{v}) \,=\, a(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v})\,.$$

Demuestre que el problema $(\tilde{P})$ tiene al menos una solución $\mathbf{u} \in V$.
Ind.: Muestre primero que existe una sucesión $\{\,\mathbf{v}_n\,\}_{n\in\mathbf{N}}$ en V tal que para todo $m \geq 1$ el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m\}$ es linealmente independiente, y las combinaciones lineales finitas de los $\mathbf{v}_n$ constituyen un conjunto denso en V. Luego, denote por V_m al subespacio de V generado por $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m\}$, y aplique el método de Galerkin en conjunto con lo probado en parte **a)** para construir una sucesión de soluciones aproximantes.

Problema 50. Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$ y $p \in [1, +\infty)$, se define

$$L^p(\Omega) \,:=\, \{\, f : \Omega \to \mathbf{R}\,/\, f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^p\,dx \,<\, +\infty\,\}\,.$$

Puede probarse que $L^p(\Omega)$, provisto de la norma $||f||_{L^p(\Omega)} \,:=\, \left\{\int_\Omega |f|^p\,dx\,\right\}^{1/p}$ es un espacio de Banach. Además, dados $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega |f\,g|\,dx \,\leq\, ||f||_{L^p(\Omega)}\,||g||_{L^q(\Omega)}\,.$$

Ahora, para un multíndice $\alpha \,:=\, (\alpha_1, ..., \alpha_n) \,\in\, \mathbf{N}^n$, y una función diferenciable u, se denota $|\alpha| \,:=\, \sum_{i=1}^n \alpha_i$ y $\partial^\alpha u \,:=\, \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$. Con estas notaciones, dado $m \in \mathbf{N}$ se define el **espacio de Sobolev** de orden (m,p), como

$$W^{m,p}(\Omega) \,:=\, \{\, u \,\in\, L^p(\Omega)\,/\,\forall\,\alpha,\, |\alpha| \,\leq\, m \quad \text{existe } g_\alpha \,\in\, L^p(\Omega)\,,\ \text{tal que}$$

$$\int_\Omega u\,\partial^\alpha\varphi\,dx \,=\, (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_\alpha\,\varphi\,dx\ \forall\,\varphi \,\in\, C_0^\infty(\Omega)\,\}$$

En tal caso se escribe $\partial^\alpha u \,=\, g_\alpha$, y se define la norma

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} \,:=\, \left\{\sum_{|\alpha|\leq m} ||\partial^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)}\right\}^{\frac{1}{p}}\,.$$

Demuestre que $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Problema 51. Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se define el operador adjunto de Hilbert de A, y se denota A^*, como $A^* : Y \to X$, donde para cada $y \in Y$, $A^* y \in X$ es el único elemento (dado por Teorema de Representación de Riesz) tal que

$$< Ax, y >_Y = < x, A^* y >_X \quad \forall\, x \in X\,.$$

a) Pruebe que $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$, $||A^*|| = ||A||$ y que $(A^*)^* = A$.
b) Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.
c) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{z \in N(A)} ||x - z|| \le \beta \, ||Ax|| \quad \forall\, x \in X\,.$$

Demuestre que $R(A) = N(A^*)^{\perp}$.
d) Pruebe que $A^* = R_X \, A' \, R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \to X$ y $R_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^{o}N(A') = N(A^*)^{\perp}$.

Problema 52. Sea X un espacio vectorial normado.
a) Sea Y un subespacio no denso de X. Demuestre que existe un funcional no nulo $F \in X'$ tal que $F(x) = 0$ para todo $x \in Y$.
b) Sean $x_0, x_1 \in X$ tal que $x_0 \neq x_1$. Pruebe que existe una sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X'$ tal que $||F_n|| = ||x_0 - x_1||^n$ y $F_n(x_1) = F_n(x_0) + ||x_1 - x_0||^{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Problema 53. Sea X un espacio de Hilbert con aplicación de Riesz $R_X : X' \to X$, y sean S, T, subconjuntos de X y X', respectivamente. Establezca qué relaciones existen entre S^o y $S^{\perp}$, y entre ${}^{o}T$ y $R_X(T)$.

Problema 54. Sean U un espacio vectorial normado y V un espacio de Banach. Además, sea $P : U' \to \mathcal{L}(U, V)$ un operador lineal cerrado tal que $N(P)$ es el funcional nulo sobre U y $R(P) = \mathcal{L}(U, V)$. Demuestre que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha \, ||F||_{U'} \le ||P(F)||_{\mathcal{L}(U,V)} \quad \forall\, F \in \mathcal{D}(P)\,.$$

Problema 55. Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall\, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.
Indicación obligatoria: Hacer una demostración alternativa utilizando el **Teorema del Grafo Cerrado** en vez del Teorema de Banach-Steinhaus.

Problema 56. Sean H, Q, V y W espacios de Hilbert tales que $H \overset{c}{\hookrightarrow} V$ and $Q \overset{c}{\hookrightarrow} W$. Sean $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ formas bilineales acotadas y defina

$$B : (H \times Q) \times (H \times Q) \to \mathbf{R}$$

$$B((u,\lambda),(v,\mu)) := a(u,v) + b(v,\lambda) + b(u,\mu) \quad \forall\,(u,\lambda),\,(v,\mu) \in H \times Q\,.$$

Suponga que existe una forma bilineal acotada $a_0 : H \times V \to \mathbf{R}$ tal que $\tilde{a} := a + a_0$ es $H-$elíptica; es decir, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\tilde{a}(v,v) \;\geq\; \alpha\,||v||_H^2 \quad \forall\, v \in H\,.$$

También, asuma que existen una forma bilineal acotada $b_0 : V \times W \to \mathbf{R}$ y una constante $\beta > 0$ tales que $\tilde{b} := b + b_0$ verifica

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\tilde{b}(v,\lambda)}{||v||_H} \geq \beta ||\lambda||_Q \quad \forall\, \lambda \in Q\,.$$

Demuestre que B satisface la **desigualdad de Gårding generalizada**.

Obs.: El símbolo $\stackrel{c}{\hookrightarrow}$ significa inclusión compacta.

Problema 57. Sea $(V, <\cdot,\cdot>)$ un espacio de Hilbert y sea $J : V \to \mathbf{R}$ un funcional nolineal. Se dice que J admite una derivada direccional en $v \in V$, en la dirección $\varphi \in V$, si la expresión $\frac{J(v+\epsilon\varphi)-J(v)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $DJ(v,\varphi)$. Entonces, J se dice diferenciable en el sentido de **Gateaux** (o G-diferenciable) en $v \in V$, si $DJ(v,\varphi)$ existe para todo $\varphi \in V$. Ahora, si J es G-diferenciable en $v \in V$ y si $DJ(v,\cdot) \in V'$, se concluye, por el Teorema de Representación de Riesz, que existe un único elemento $z \in V$ tal que $DJ(v,\varphi) = <z,\varphi> \;\forall\, \varphi \in V$. En tal caso, se denota $z := J'(v)$ y se llama el **gradiente** de J en v.

Se dice que J tiene segunda diferencial en el sentido de Gateaux en $v \in V$, en las direcciones φ y $\psi \in V$, si la expresión $\frac{DJ(v+\epsilon\psi,\varphi)\,-\,DJ(v,\varphi)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $D^2J(v,\varphi,\psi)$.

a) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ y considere $V := L^2(\Omega)$. Defina $J_0 : V \to \mathbf{R}$ por

$$J_0(v) \;:=\; \int_\Omega (v^2 + v)\,dx \quad \forall\, v \in V$$

y calcule $J_0'(v)$ para todo $v \in V$. Qué puede decir de $J_0'(v)$ si J_0 se restringe al espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$?

b) Suponga que J es G-diferenciable en $(v + \alpha\varphi)$, en la dirección φ, para todo $\alpha \in [0,1]$. Demuestre que existe $\beta \in (0,1)$ tal que

$$J(v+\varphi) \;=\; J(v) \;+\; DJ(v + \beta\,\varphi, \varphi)\,.$$

c) Suponga que J es α-convexo, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que para todo $u,\, v \in V$ y para todo $\beta \in [0,1]$:

$$J((1-\beta)\, u + \beta\, v) \;\leq\; (1-\beta)\, J(u) \,+\, \beta\, J(v) \,-\, \frac{\alpha}{2}\, \beta\, (1-\beta)\, ||u-v||^2 \,.$$

Además, asuma que J es G-diferenciable en todo $v \in V$. Demuestre que para todo $u,\, v \in V$ se tiene:

$$DJ(u, u-v) \,-\, DJ(v, u-v) \,\geq\, \alpha\, ||u-v||^2$$

y

$$J(v) \,\geq\, J(u) \,+\, DJ(u, v-u) \,+\, \frac{\alpha}{2}\, ||v-u||^2 \,.$$

d) Suponga que J es G-diferenciable en $v \in V$ y que, dada una dirección $\varphi \in V$, $D^2 J(v + \alpha\varphi, \varphi, \varphi)$ existe $\forall\, \alpha \in [0,1]$. Demuestre que hay una constante $\beta \in (0,1)$ tal que

$$J(v+\varphi) \,=\, J(v) + DJ(v,\varphi) + \frac{1}{2}\, D^2 J(v + \beta\varphi, \varphi, \varphi) \,.$$

Problema 58. Sea X un espacio vectorial normado y sea $x_0 \in X$ tal que $|\, F(x_0)\, | \,\leq\, C_0$ para todo $F \in X'$ con $||F||_{X'} = 1$. Demuestre que $||x_0|| \leq C_0$.

Problema 59. Sea H un espacio de Hilbert y sea $B : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

i) B es simétrica, es decir

$$B(u,v) \,=\, B(v,u) \quad \forall\, (u,v) \in H \times H \,.$$

ii) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u,v)| \leq C_1 ||u||_H ||v||_H \quad \forall\, (u,v) \in H \times H.$$

iii) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|B(u,v)|}{||v||_H} \geq C_2\, ||u||_H \quad \forall\, u \in H \,.$$

Demuestre que, dado $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que $B(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H$, y además, $||u||_H \leq \frac{1}{C_2} ||F||_{H'}$.

Problema 60. Sea $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espacio de Hilbert y sea V un subespacio cerrado de H. El anulador (o aniquilador) de V se denota por V^o y se define como

$$V^o := \{ F \in H' : \quad F(x) = 0 \quad \forall x \in V \} .$$

Demuestre que

$$H = V \oplus \mathcal{R}(V^o) ,$$

donde $\mathcal{R} : H' \to H$ denota la aplicación de Riesz.

Problema 61. Sea V un subespacio de un Hilbert $(Y, < \cdot, \cdot >)$ y defina

$$V^{\perp} := \{ y \in Y : \quad < y, z >= 0 \quad \forall z \in V \} .$$

Si $\overline{V}$ denota la clausura de V, demuestre que $\overline{V}^{\perp} = V^{\perp}$. Concluya que V es denso en Y sí y sólo sí $V^{\perp} = \{0\}$.

Problema 62. Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}^n$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también es compacta, para todo entero $m \geq 2$.

Problema 63. Sean X y M espacios de Hilbert y sean $a : X \times X \to \mathbf{R}$, $b : X \times M \to \mathbf{R}$ dos formas bilineales acotadas. Suponga además que a es simétrica y semi-definida positiva sobre X. Dados $F \in X'$, $G \in M'$ se define el operador $\mathcal{J} : X \times M \to \mathbf{R}$,

$$\mathcal{J}(v, \mu) := \frac{1}{2} a(v, v) + b(v, \mu) - F(v) - G(\mu) .$$

Considere entonces los siguientes problemas variacionales:
Hallar $(u, \lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= F(v) \quad \forall v \in X , \\ b(u, \mu) &= G(\mu) \quad \forall \mu \in M . \end{aligned} \tag{P}$$

Hallar $(u, \lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\mathcal{J}(u, \mu) \leq \mathcal{J}(u, \lambda) \leq \mathcal{J}(v, \lambda) \qquad \forall (v, \mu) \in X \times M . \tag{Q}$$

Demuestre que (u, λ) es solución de (P) si y sólo si (u, λ) es solución de (Q).

Problema 64. Sean $(X, < \cdot, \cdot >_X)$, $(Y, < \cdot, \cdot >_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X, X)$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$< \mathbf{S}(y), y >_Y \geq 0 \quad \forall y \in Y ,$$

y que existen constantes α, $\beta > 0$ tales que

$$< \mathbf{P}x, x >_X \ \geq \ \alpha \, ||x||_X^2 \qquad \forall \, x \in X$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{< \mathbf{Q}(x), y >_Y}{||x||_X} \ \geq \ \beta \, ||y||_Y \quad \forall \, y \in Y \, .$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ & \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \\ g \end{bmatrix} .$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $||\mathbf{P}||$, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \ \leq \ C \ \{ \, ||f|| + ||g|| \, \} \ .$$

Ind.: Transforme a una ecuación equivalente en Y y luego aplique el Lema de Lax-Milgram.

Problema 65. Sean $(X, < \cdot, \cdot >_X)$, $(Y, < \cdot, \cdot >_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \, : \, X \to X$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$< \mathbf{S}(y), y >_Y \ \geq \ 0 \quad \forall \, y \in Y \, ,$$

que $\mathbf{P}$ es **nolineal**, y que existen constantes M, α, $\beta > 0$ tales que

$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \ \leq \ M \, ||x - \bar{x}||_X \quad , \quad < \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x - \bar{x} >_X \geq \ \alpha \, ||x - \bar{x}||_X^2 \quad \forall \, x, \, \bar{x} \, \in X \, ,$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{< \mathbf{Q}(x), y >_Y}{||x||_X} \ \geq \ \beta \, ||y||_Y \quad \forall \, y \in Y \, .$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ & \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \\ g \end{bmatrix} .$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de M, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \ \leq \ C \ \{ \, ||f|| + ||g|| + ||\mathbf{P}(0)|| \, \} \ .$$

Problema 66. Sea $\Omega := (0, 3)$ y considere el problema de valores de contorno: $-u'' + (x + 1)\, u = x$ en Ω, $u(0) = u(3) = 0$. Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio

$$H_2 := \{ v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \quad \text{y} \quad v|_{[x_j, x_{j-1}]} \text{ es un polinomio}$$
$$\text{de grado } \leq 1, \forall j \in \{1, 2, 3\} \}.$$

Ind.: Notar que $H_2 =< \{e_1, e_2\} >$, donde $e_j \in H_2$ es tal que $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo i, $j \in \{1, 2\}$.

Problema 67.

a) Sea S un subconjunto de un Hilbert H y sea M el subespacio cerrado generado por S. Pruebe que: $S^\perp$ es un subespacio cerrado de H, $M^\perp = S^\perp$, y $M = (S^\perp)^\perp$.

b) Sea V un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $H = \overline{V} \oplus V^\perp$.

Problema 68. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. **El problema de Stokes** consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$\begin{aligned} -\Delta\, \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma, &\qquad \int_\Omega p\, dx = 0. \end{aligned} \qquad (P)$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \{ q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q\, dx = 0 \}$. Demuestre que la formulación débil de (P) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, p) &= F(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H, \\ B(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall\, q \in Q, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \to \mathbf{R}$, $B : H \times Q \to \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\, dx,$$

$$B(\mathbf{v}, p) := -\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx.$$

Problema 69.

a) Sea $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espacio de **Hilbert**. Dados $n \in \mathbf{N}$, $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq H$ y $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \subseteq H'$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} F_j(u)\, p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H, H)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A^* : H \to H$.

b) Sea $(H, < \cdot, \cdot >)$ el espacio de **Hilbert** $L^2(0,1)$ provisto del producto escalar

$$< u, v > := \int_0^1 u(t)\, v(t)\, dt \qquad \forall\, u\,,\ v \in H\,.$$

Dados los polinomios $p_j \in H$, $j \in \{1, ..., n\}$, con $p_j(t) = t^j \ \forall t \in (0,1)$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que A es lineal, acotado y **autoadjunto**, esto es $A \in \mathcal{L}(H, H)$ y $A = A^*$.

Problema 70. Sean X e Y espacios de Banach, y sea $A : X \to Y$ un operador lineal cerrado con dominio $D(A)$ e imagen $R(A)$. Demuestre que son equivalentes:

a) El operador A es inyectivo, y A^{-1} es acotado sobre $R(A)$.

b) Existe una constante positiva C tal que $\|Ax\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in D(A)$.

c) $R(A)$ es cerrado en Y, y A es inyectivo.

Problema 71. Sea M un subespacio cerrado de un Hilbert H. Por el Teorema de Proyección, cada $x \in H$ puede escribirse únicamente en la forma $x = y + z$, con $y \in M$ y $z \in M^{\perp}$. El punto $y \in M$ se llama la **proyección** de x en M, y el operador $P := X \to M, \quad Px = y$, se llama la proyección sobre M. También se denota $P := P_M$ y se dice que P es una proyección.

i) Pruebe que si P es una proyección, entonces P es un autoadjunto, $P^2 = P$, y $\|P\| = 1$ si $P \neq 0$.

ii) Pruebe que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es autoadjunto y $P^2 = P$, entonces P es una proyección sobre algún subespacio cerrado de H.