UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREAS, MAT 525441

Análisis Numérico II: Algebra Lineal Numérica.

Primer Semestre de 2003. *Gabriel N. Gatica y Abner Poza Díaz.*

1. Sea $B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ una matriz a la cual se le aplica las siguientes operaciones:

   a) se multiplica por dos la columna 1,
   b) se divide por tres la fila 3,
   c) se suma la fila 1 a la fila 3,
   d) se intercambian las columnas 1 y 4,
   e) se resta la fila 2 a todas las demás filas,
   f) se sustituye la columna 4 por la columna 3,
   g) se cancela la columna 1 (reduciendo el número de columnas en 1).

   Escriba el resultado como un producto de ocho matrices. También escriba como producto ABC de tres matrices con la misma matriz B.

2. Sea $R \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una *matriz triangular superior* con entradas r_{ij}, es decir $r_{ij} = 0$, para $i > j$. Muestre que si R es invertible, entonces R^{-1} también es triangular superior.

3. Sea $f_1, \ldots, f_8$ un conjunto de funciones definidas en el intervalo $[1, 8]$ con la propiedad que para cualquiera que sean los números $d_1, \ldots, d_8$, existe un conjunto de coeficientes $c_1, \ldots, c_8$ tal que

$$\sum_{j=1}^{8} c_j f_j(i) = d_i, \quad i = 1, \ldots, 8.$$

   a) Muestre aplicando los resultados vistos en clases que los números $d_1, \ldots, d_8$ determinan en forma única a los coeficientes $c_1, \ldots, c_8$.
   b) Sea A una matriz de 8×8 que representa la aplicación lineal a partir de los datos $d_1, \ldots, d_8$ a los coeficientes $c_1, \ldots, c_8$. ¿Cual es la entrada (i, j) de A^{-1}?.

4. Muestre que si A es una matriz triangular y unitaria, entonces es diagonal.

5. ¿Que puede decir acerca de los autovalores de una matriz unitaria?.

6. Pruebe que si W es una matriz invertible, entonces la función $\|\cdot\|_W$ definida por

$$\|x\|_W := \|Wx\|,$$

es una norma vectorial.

7. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$ una matriz hermitiana.

   a) Muestre que todos los autovalores de A son reales.

   b) Muestre que si x y y son autovectores correspondientes a autovalores distintos, entonces x y y son ortogonales.

8. Sea $L \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz triangular inferior con entradas diagonales estrictamente positivas y entradas fuera de la diagonal no positivas. Demostrar que L^{-1} es una matriz triangular inferior con entradas no negativas. Para ello considerar la descomposición $L = D - C$, con D la matriz diagonal de L, y seguir los siguientes pasos:

   a) demostrar que $(D^{-1}C)^n = 0$;

   b) a partir de lo anterior, demostrar que

   $$L^{-1} = \left[I + D^{-1}C + \cdots + (D^{-1}C)^{n-1}\right]\, D^{-1};$$

   c) concluir que L^{-1} es una matriz triangular inferior con entradas no negativas.

   Sugerencias: Utilizar que el producto de dos matrices triangulares inferiores es triangular inferior y, para demostrar (a), verificar que si X es una matriz triangular inferior con ceros en su diagonal principal, entonces X^k tiene ceros en las k primeras diagonales del triángulo inferior contadas a partir de la diagonal principal.

9. Sea $S \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$ una matriz *anti–hermitiana*, es decir, $S^* = -S$.

   a) Muestre que los autovalores de S son imaginario puro.

   b) Muestre que $I - S$ es invertible.

   c) Muestre que la matriz $Q = (I-S)^{-1}(I+S)$, conocida como la *Transformación de Cayley de* S, es unitaria.

10. Si u y v son vectores en $\mathbb{C}^m$, la matriz $A = I + uv^*$ es conocida como una *perturbación de la identidad de rango uno.* Muestre que si A es invertible, entonces esta inversa tiene la forma $A^{-1} = I + \alpha\, uv^*$ para algún escalar α, y de una expresión para α. ¿ Para que vectores u y v A no es invertible ?. ¿ Si A no es invertible, cual es su espacio nulo ?.

11. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{\mu\times\nu}(\mathbb{C})$ una submatriz de A ($\mu \le m,\ \nu \le n$) la cual es obtenida eligiendo ciertas filas y columnas de A. Muestre que

    $$\|B\| \le \|A\|,$$

    donde $\|\cdot\|$ es una norma inducida.

12. Sea $u \in \mathbb{C}^m$ y $v \in \mathbb{C}^n$. Muestre que si $E = uv^*$, entonces

$$\|E\|_F = \|E\|_2 = \|u\|_2\,\|v\|_2 \quad \text{y} \quad \|E\|_\infty \leq \|u\|_\infty \|v\|_1.$$

13. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$. Se define el *radio espectral de* A como

$$\rho(A) := \max_{1\leq i\leq m} |\lambda_i|.$$

   a) Sea $\|\cdot\|$ una norma inducida o no. Muestre que $\rho(A) \leq \|A\|$.
   b) Dado un $\epsilon > 0$ muestre que existe al menos una norma inducida tal que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon.$$

14. Sea B una matriz invertible. Muestre que

$$B^{-1} = A^{-1} - B^{-1}(B - A)A^{-1},$$

para toda matriz A invertible.

15. Sea A una matriz cuadrada tal que la sucesión $\{A^k\}_{k\geq 1}$ converge a una matriz invertible. Encuentre A.

16. Sea $\|\cdot\|$ una norma inducida y B una matriz tal que $\|B\| < 1$. Pruebe que:
   a) $I + B,\ I - B$ son invertibles.
   b) $\dfrac{1}{1+\|B\|} \leq \|(I+B)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\|B\|}$.
   c) $B^n \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$.
   d) $(I - B)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B^n$.
   e) $\dfrac{1}{1+\|B\|} \leq \|(I-B)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\|B\|}$.

17. Si una matriz de la forma $I + B$ no es invertible, entonces necesariamente

$$\|B\| \geq 1,$$

para toda norma matricial, inducida o no.

18. Sea $\|\cdot\|$ una norma inducida y sean A y E dos matrices (A invertible) que satisfacen

$$r = \|A^{-1}E\| < 1.$$

Entonces $A + E$ es invertible y $\|(A+E)^{-1} - A^{-1}\| \leq \dfrac{\|E\|\,\|A^{-1}\|^2}{1-r}$.

19. Sea $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Si A es invertible y $A+B$ no es invertible, muestre que

$$\|B\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

para toda norma matricial $\|\cdot\|$.

20. Sea A una *matriz estrictamente diagonal dominante,* es decir

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

a) Pruebe que A es invertible.

b) Si definimos $\delta := \min_i \left\{ |a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right\} > 0$. Pruebe que $\|A^{-1}\|_\infty \leq \delta^{-1}$.

21. Sea A y B dos matrices (A invertible) tal que

$$AB = I + E.$$

Asumiendo que la norma de $\|E\|$ es lo suficientemente pequeña, obtenga una cota para $\|A^{-1} - B\|$ en términos de $\|B\|$ y $\|E\|$.

22. a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ y suponga que al menos una de ellas es invertible. Muestre que AB es similar a BA. Concluya que AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

b) Considere las matrices no invertibles $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Muestre que AB y BA no son similares, pero tienen los mismo autovalores.

c) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Muestre que AB y BA tienen los mismo autovalores contando su multiplicidad.

d) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, muestre que BA tienen los mismos autovalores de AB, contando su multiplicidad, y que BA además tiene $n-m$ autovalores iguales a cero (asumiendo $n > m$); esto es $P_{BA}(\lambda) = \lambda^{n-m} P_{AB}(\lambda)$.

23. a) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Muestre que A^t tiene los mismo autovalores que A, contando su multiplicidad.

b) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Muestre que los autovalores de A^* son los conjugados de los autovalores de la matriz A, contando su multiplicidad.

c) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Determine los espacios propios, correspondientes a los autovalores de A y A^t respectivamente.

d) Verifique que $e = (1, 1, 1)^t$ es un autovector de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $D = diag(1, 2, 3)$ determine un autovector de $D^{-1}AD$.

24. Sean A y B dos matrices del mismo orden.

a) ¿Es posible tener $AB - BA = \lambda\, I$, con $\lambda \neq 0$?.

b) ¿Es posible tener $AB + BA = 0$?.

25. Sea $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ una matriz particionada en bloques. Asumiendo que la submatriz A_{11} es invertible, muestre que

$$\det A = \det A_{11}\ \det(\, A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}\,).$$

26. Sea A una matriz simétrica con autovalores λ_i y cuyos correspondientes autovectores p_i, $1 \leq i \leq n$, forman un conjunto ortonormal. Muestre que

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, p_i p_i^t.$$

27. Sea B una matriz cuadrada. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$,

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} B^k\, v = 0$, para todo vector v,

(3) $\rho(B) < 1$,

(4) $\|B\| < 1$ para al menos una norma inducida $\|\cdot\|$.

28. Sea B una matriz cuadrada y $\|\cdot\|$ una norma matricial. Pruebe que

$$\lim_{k\to\infty} \|B^k\|^{1/k} = \rho(B).$$

29. Si la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ es similar a una matriz diagonal, entonces se dice que A *es diagonalizable.*

a) Pruebe que toda matriz hermitiana es diagonalizable.

b) Pruebe que A es diagonalizable si y sólo si existe un conjunto de n vectores linealmente independiente, cada uno de los cuales corresponde a un autovector de la matriz A.

c) Pruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

d) Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ y $\lambda \in \sigma(A)$ es un autovalor de A con multiplicidad m, muestre que A no es diagonalizable si $r(A - \lambda I) > n - m$.

e) Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ autovalores de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, distintos entre ellos, y suponga que x_i es un autovector asociado al autovalor λ_i, $i = 1, \ldots, k$. Pruebe que $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es un conjunto linealmente independiente.

f) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriz con n autovalores distintos. Pruebe que A es diagonalizable.

g) De un ejemplo de una matriz diagonalizable $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ que no tenga autovalores distintos.

h) Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$ dos matrices y sea

$$C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Pruebe C es diagonalizable si y sólo si las matrices A y B son diagonalizables.

30. Dos matrices diagonalizables $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ se dice que son *simultaneamente diagonalizables* si existe una matriz similar $S \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonal, esto es, si existe una base en la cual la representación de ambas transformaciones lineales son diagonal.

a) Muestre que si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ es diagonalizable y si λI es una matriz escalar en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, entonces A y λI son simultaneamente diagonalizables.

b) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ diagonalizables. Pruebe que A y B conmutan si y sólo si ellas son simultaneamente diagonalizables.

c) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ dos matrices hermitiana. Muestre que ellas poseen una base común de autovectores si y sólo si $AB = BA$.

31. Una matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ se dice *unitariamente equivalente a* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, si existe una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $B = U^*AU$. Si U es ortogonal, entonces B se dice *ortogonalmente equivalente a* A.

a) Muestre que $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ son similares, pero no unitariamente equivalentes.

b) Muestre que la equivalencia unitaria es una relación de equivalencia.

c) Muestre que si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ son unitariamente equivalentes, entonces $A + A^*$ y $B + B^*$ también lo son.

d) Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, con elementos a_{ij} y b_{ij} respectivamente son unitariamente equivalente, pruebe que

$$\sum_{i,j}^{n} |a_{ij}|^2 = \sum_{i,j}^{n} |b_{ij}|^2.$$

e) Muestre que en general, el recíproco de c) no es cierto. *Indicación:* Utilice las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

f) Muestre que las matrices

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

son unitariamente equivalente a través de la matriz unitaria

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

g) Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ es unitariamente equivalente a una matriz triangular superior $T \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, entonces las entradas t_{ij} de la matriz T, no son determinadas en forma única, sin embargo la cantidad $\sum\limits_{i<j} |t_{ij}|^2$ es determinada en forma única. Determine el valor de $\sum\limits_{i<j} |t_{ij}|^2$ en términos de las entradas y autovalores de A.

h) Utilice el teorema de Schur para probar que si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tiene autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, contando su multiplicidad, entonces

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{y} \quad tr\, A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

32. Sea $\{U_k\}$ una sucesión de matrices unitarias. Pruebe que existe una subsucesión que converge a una matriz unitaria.

33. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$. ¿Cuales de las siguientes condiciones son equivalentes a la invertibilidad de A, o son necesarias o suficientes o no tienen relación?. Marque una respuesta en cada linea.

	equiv.	neces.	sufic.	no relac.
$\det(A) \neq 0$	☐	☐	☐	☐
0 no es un valor singular de A	☐	☐	☐	☐
0 no es un autovalor de A	☐	☐	☐	☐
$Ker\,(A) = \{0\}$	☐	☐	☐	☐
$Im\,(A) = \mathbb{R}^m$	☐	☐	☐	☐
$r\,(A) = m$	☐	☐	☐	☐
$a_{jj} \neq 0, \quad j = 1, \dots, m.$	☐	☐	☐	☐
A es inyectiva	☐	☐	☐	☐
A es sobreyectiva	☐	☐	☐	☐
A es definida positiva	☐	☐	☐	☐

34. Para cada una de las siguientes matrices encuentre una SVD.

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

35. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Usando una SVD de la matriz A, calcule $\sigma_{min}(A)$ (valor singular mínimo) y $\sigma_{max}(A)$ (valor singular máximo). Con estos valores, determine las normas $\|A\|_2$ y $\|A\|_F$.

36. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ una matriz rectangular.

   a) Pruebe que los valores singulares de A^*, A^t y $\bar{A}$ son los mismos de A.

   b) Sean $U \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$ y $V \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ dos matrices unitarias. Pruebe que los valores singulares de UAV son los mismo de A.

   c) Si $c \in \mathbb{C}$, pruebe que los valores singulares de cA son $|c|$ veces los valores singulares de A.

37. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz ortogonal. Encuentre los valores singulares de A.

38. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ invertible. ¿Cual es la relación entre los valores singulares de A y A^{-1}?.

39. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, recordemos que los autovalores de AB y BA son siempre iguales.

   a) Utilice las matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, para mostrar que los valores singulares de AB y BA no son necesariamente iguales.

   b) Pruebe que los valores singulares de AB y B^*A^* son siempre iguales.

40. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

   a) ¿Los valores singulares de A^2 son los cuadrados de los valores singulares de A?.

   b) ¿Si los valores singulares de A son todos 1, entonces A es necesariamente unitaria?.

41. a) ¿Matrices similares tienen los mismos valores singulares?.

   b) ¿Matrices unitariamente equivalentes tienen los mismos valores singulares?.

42. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $q = \text{mín}\{m, n\}$. Definamos la matriz $\widetilde{A} \in \mathcal{M}_{(m+n)\times(m+n)}(\mathbb{C})$ por

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}.$$

   Sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$ números reales no negativos. Pruebe que los valores singulares de A son $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$ si y sólo, si los $m+n$ autovalores de $\widetilde{A}$ son $\sigma_1, \ldots, \sigma_q, -\sigma_1, \ldots, -\sigma_q$, y los $|m-n|$ restantes son cero.

43. Considere la matriz

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Verifique que P es un proyector ortogonal.

b) Determine $Im\,(P)$ y $Ker\,(P)$.

c) Si P es un proyector ortogonal, se define la *matriz de reflexión* por $H = I - 2P$. Determine Hv, donde $v = (1, 2)$.

d) Muestre geométricamente y algebraicamente porque H es unitaria.

44. Pruebe que si P_1 y P_2 son proyectores ortogonales sobre los subespacios S_1 y S_2, y si $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$, entonces $P = P_1 + P_2$ también es un proyector ortogonal. Construir un ejemplo de 2 por 2.

45. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, con $m \geq n$. Muestre que A^*A es invertible si y sólo si A tiene rango completo.

46. Dada las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

a) ¿Cuál es el proyector ortogonal P sobre la $Im\,(A)$?. ¿Cuál es la imagen de $(1, 2, 3)$ bajo la aplicación de P?.

b) Lo mismo para B.

47. Sea $P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ un proyector. Pruebe que $\|P\|_2 \geq 1$, con la igualdad si y sólo si P es un proyector ortogonal.

48. Considere las matrices (1).

a) Determine una factorización QR reducida y completa de A.

b) Lo mismo para B.

c) Considere la matriz C de rango 1

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine una factorización QR completa de C.

49. Sea A una matriz con la propiedad que las columnas $1, 3, 5, 7, \ldots$ son ortogonales a las columnas $2, 4, 6, 8, \ldots$. En una factorización QR reducida de $A = \widehat{Q}\widehat{R}$, ¿Cuál es la estructura especial que posee la matriz $\widehat{R}$?.

50. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ una matriz $(m \geq n)$, y sea $A = \widehat{Q}\widehat{R}$ una factorización QR reducida.

a) Muestre que A tiene rango n si y sólo si todas las entradas diagonales $\widehat{R}$ son no nulas.

b) Suponga que $\widehat{R}$ tiene las k entradas diagonales no nulas, con $0 \leq k < n$. ¿Que se puede decir acerca del rango de la matriz A?. ¿A tiene exactamente rango k?. ¿A tiene al menos rango k?. ¿A tiene a lo mas rango k?. De una respuesta precisa y pruebelo.

51. Cuando se dispone de la factorización QR de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ $(m > n)$ y se le añade una columna $b \in \mathbb{C}^m$,

$$\left[\, A' \,\right] := \left[\, A' \,\middle|\, b \,\right],$$

es posible obtener la factorización $A' = Q'R'$ sin repetir todo el procedimiento.

a) Deducir un algoritmo de costo mínimo para determinar Q' y R' a partir de Q,R y b mediante Gram–Schmidt.

b) Calcular el costo operacional de este algoritmo.

52. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & 1-i \\ -1 & i \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

A través de reflectores de Householder, determine la factorización QR de cada una de las matrices.

53. Sea $w \in \mathbb{R}^k$, con $\|w\|_2 = 1$ y considere el reflector de Householder

$$H(w) = I - 2\,ww^t.$$

a) Determine los autovalores y espacios propios del reflector H.

b) Calcule $\det(H(w))$.

c) Determine los valores singulares de H.

54. Pruebe que toda matriz ortogonal es el producto de n matrices de Householder.

55. Sean a y b dos vectores reales que satisfacen $a^ta = b^tb$ y $a \neq b$. Muestre que las únicas soluciones reales de la ecuación

$$(I - 2uu^t)\,a = b, \quad u^tu = 1,$$

son $u = \pm(c^tc)^{-1/2}c$, donde $c = b - a$.

56. Considere las matrices ortogonales

$$F = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

La primera matriz tiene $\det F = -1$ y corresponde a un caso especial de reflector de Householder en dimensión 2. La segunda matriz tiene $\det J = 1$ y efectúa una rotación en vez de una reflexión. Tal matriz es llamada *Rotación de Givens*.

a) Describa geométricamente que efecto tiene multiplicar un vector v por la matriz F y J en el plano $\mathbb{R}^2$.

b) Describa un algoritmo que realice una factorización QR de una matriz real, basado en las rotaciones de Givens. Calcule el costo computacional.

Referencias

[1] Lloyd N. Trefethen, David Bau III: *Numerical Linear Algebra.* SIAM, 1997.

[2] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan: *Matrix Computations.* John Hopkins U. Press, 1996.

[3] Roger A. Horn, Charles R. Johnson: *Matrix Analysis.* Cambridge U. Press, 1985.

[4] Philippe G. Ciarlet: *Introduction to Numerical Lineal Algebra and Optimisation.* Cambridge U. Press, 1989.

[5] Otto Bretscher: *Linear Algebra with Applications.* Prentice Hall, 1997.