UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREAS, MAT 525401

Análisis Funcional y Aplicaciones I

Primer Semestre de 2004 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea $\Omega := (a,b)$ un intervalo acotado de $\mathbf{R}$ y dado $m \in \mathbf{N}$ considere el espacio de Sobolev $H^m(\Omega) := \{ v \in L^2(\Omega) : \quad v^{(j)} \in L^2(\Omega) \quad \forall j \in \{1,...,m\} \}$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también lo es.

2. Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados y sean $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Z,X)$. Demuestre que $(AB)' = B'\,A'$. Suponga que A es invertible y demuestre que A' tambien lo es, con $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

3. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y considere un operador NOLINEAL $T : H \to H$, FUERTEMENTE MONÓTONO y LIPSCHITZ-CONTINUO. Esto significa, respectivamente, que existen constantes $\alpha, M > 0$ tales que

$$\langle Tv - Tw, v-w\rangle \,\geq\, \alpha\,||v-w||_H^2 \quad \text{y} \quad ||Tv-Tw||_H \,\leq\, M\,||v-w||_H \quad \forall\, v,\, w\,\in H\,.$$

   a) Dada $f \in H$, demuestre que existe un único $u \in H$ tal que $Tu \,=\, f$.

   b) Sea H_n un subespacio de dimensión finita de H y considere el esquema de Galerkin asociado: *Hallar* $u_n \in H_n$ *tal que* $\langle Tu_n, v_n\rangle \,=\, \langle f, v_n\rangle\ \forall\ v_n \in H_n$. Pruebe que

$$||u - u_n||_H \,\leq\, \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in H_n} ||u - v_n||_H\,.$$

   Ind.: Para **a)**, aplicar el Teorema del Punto Fijo de Banach al operador $P : H \to H$, con $Pv := v - \rho\,(Tv - f)$, donde ρ es un parámetro a elegir de manera conveniente.

4. Sean X, Y espacios de Banach, y sea $A : X \to Y$ un operador lineal cerrado tal que $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$. Demuestre que $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

   Ind.: Considere $\mathcal{D}(A)$ provisto de la norma $||x||_A := ||x|| + ||Ax||$.

5. Sea X un espacio vectorial normado.

   a) Demuestre que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces la sucesión completa converge.

   b) Sea $S := \{x \in X : \quad ||x|| = 1\}$. Pruebe que S es completo sí y sólo sí X es Banach.

6. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{div};\Omega) \ := \ \Big\{ \, v \in [L^2(\Omega)]^n \ : \quad \mathrm{div}\, v \ := \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \ \in \ L^2(\Omega) \, \Big\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w \rangle_{H(\mathrm{div};\Omega)} \ := \ \int_\Omega v \cdot w \, dx \ + \ \int_\Omega \mathrm{div}\, v \ \mathrm{div}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

a) Demuestre que $(H(\mathrm{div};\Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\mathrm{div};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que para todo $g \in [L^2(\Omega)]^n$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w \, dx \ + \ \int_\Omega \mathrm{div}\, v_g \ \mathrm{div}\, w \, dx \ = \ \int_\Omega g \cdot w \, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

Ind.: Dada $v \in [L^2(\Omega)]^n$, se dice que $\mathrm{div}\, v := z \in L^2(\Omega)$ si

$$- \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega z \, \varphi \, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

7. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{rot};\Omega) \ := \ \{ \, v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \ : \quad \mathrm{rot}\, v \ := \ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \ - \ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \ \in \ L^2(\Omega) \, \}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w \rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)} \ := \ \int_\Omega v \cdot w \, dx \ + \ \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \ \mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

a) Demuestre que $(H(\mathrm{rot};\Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que para todo $g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w \, dx \ + \ \int_\Omega \mathrm{rot}\, v_g \ \mathrm{rot}\, w \, dx \ = \ \int_\Omega \mathrm{rot}\, g \, \mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

Ind.: Notar que $v \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ sí y sólo sí $(v_2, -\, v_1) \in H(\mathrm{div};\Omega)$. También, dada $v \in [L^2(\Omega)]^2$, se dice que $\mathrm{rot}\, v := z \in L^2(\Omega)$ si

$$- \int_\Omega v_2 \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \, dx + \int_\Omega v_1 \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \, dx = \int_\Omega z \, \varphi \, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

8. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y defina el espacio $V := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, es decir

$$V = \left\{ v \in H^2(\Omega) : \quad v = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \right\} .$$

Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$||v||_{H^1(\Omega)} \le C \, ||\Delta \, v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall \, v \in V .$$

Ind.: Dada $v \in V$, defina $f = -\Delta \, v \in L^2(\Omega)$ y aplique el Lema de Lax-Milgram al problema de valores de contorno: $-\Delta \, u = f$ en Ω, $u = 0$ en Γ.

9. Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dados los polinomios $p_j \in X$, $j \in \{0,1,...,n\}$, con $p_j(t) = t^j \; \forall \, t \in [0,1]$, se define el operador $A : X \to X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t) \, p_j(t) \, dt \right\} p_j \qquad \forall \, u \in X .$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X,X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

Ind.: Para todo $j \in \{0,1,...,n\}$ defina $F_j : X \to \mathbf{R}$ por $F_j(u) := \displaystyle\int_0^1 u(t) \, p_j(t) \, dt$ $\forall \, u \in X$, y observe que $F_j \in X'$.

10. Sea X un espacio vectorial normado y $f : X \to \mathbf{R}$ un funcional lineal. Pruebe que $f \in X'$ sí y sólo sí $N(f)$ es un subespacio cerrado de X.

11. Considere dos espacios vectoriales normados X e Y.

   a) Sea $A_0 \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. Demuestre que existe un operador $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X,Y), \mathcal{L}(Y,X))$ tal que $\mathcal{T}_0 A_0 = A_0^{-1}$ y $||\mathcal{T}_0|| = ||A_0^{-1}|| / ||A_0||$.

   b) Pruebe que si Y es Banach y $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X,Y), \mathcal{L}(Y',X'))$ es un operador biyectivo, entonces $\mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(Y',X'), \mathcal{L}(X,Y))$.

12. Sea $\Omega := (0,1)$ y considere el problema de valores de contorno

$$\begin{array}{rll} -(au')' + bu & = f & \text{en} \quad \Omega \\ u'(0) = u'(1) & = 0 & , \end{array} \tag{1}$$

donde $a(x) = x^2 + 2, b(x) = 2 + sen(x)$ y $f(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$. Puede probarse que la formulación débil de (1) consiste en hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_0^1 (au'v' + buv)dx = \int_0^1 fvdx \quad \forall v \in H^1(\Omega) . \tag{2}$$

Demuestre que existe un único $u \in H^1(\Omega)$ solución de (2).

13. Sean X, Y espacios vectoriales normados y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

    a) Demuestre que $R(A)^0 = N(A')$ y que

    $$N(A') = \{0\} \quad \text{si y solo si} \quad \overline{R(A)} = Y.$$

    b) Pruebe que si $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$, entonces $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

14. Sea M un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado X.

    a) Demuestre que $M =^0 (M^0)$.

    b) Pruebe que el aniquilador de $(\frac{X}{M})'$ coincide con M.

15. Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea $T : X' \to Y'$ un operador lineal cerrado y biyectivo. Demuestre que $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y', X')$.

16. Sean $I := [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, $f_j : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, j = 1, \cdots, n$, funciones continuas, y considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Hallar $u := (u_1, \cdots, u_n)$ tal que

    $$\begin{cases} \dfrac{du_j}{dt} = f_j(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)) \qquad y \\ \\ u_j(t_0) = \eta_j \qquad \forall j = 1, \cdots, n, \end{cases} \tag{3}$$

    donde t_0, τ, η_j, $j = 1, \cdots, n$ son constantes reales dadas y τ es positivo. Suponga además que existe $M > 0$ tal que

    $$|f_j(t, z) - f_j(t, w)| \leq M||z - w||_\infty \quad \forall\, z, w \in \mathbf{R}^n, \quad \forall t \in I.$$

    Demuestre que (3) tiene una única solución $u(t)$ para todo $t \in I$.

    Ind.: Transforme (3) en una ecuación integral de Volterra y luego aplique algún resultado apropiado sobre puntos fijos.

17. Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall\, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

18. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y considere una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de H tal que $\langle x_n, x_m \rangle = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$. Pruebe que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq ||x||^2 \quad \forall x \in H$. Además, dada una sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, demuestre que son equivalentes,

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge en H.

    b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$.

19. Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$, se define

$$L^2(\Omega) := \left\{ f:\Omega \to \mathbf{R} : \quad f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^2\,dx < +\infty \right\}.$$

Dado un multíndice $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, y una función diferenciable u, se denota

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \text{y} \quad \partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Con estas notaciones, para cada $m \in \mathbf{N}$ se define el **espacio de Sobolev** de orden m, como

$$H^m(\Omega) := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad \forall\, \alpha,\, |\alpha| \le m \quad \text{existe } g_\alpha \in L^2(\Omega)\,, \text{ tal que}$$

$$\int_\Omega u\,\partial^\alpha \varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha\,\varphi\,dx \qquad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Big\}$$

En tal caso se escribe $\partial^\alpha u = g_\alpha$, y se define la norma

$$||u||_{H^m(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \le m} ||\partial^\alpha u||^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2}.$$

Asuma que $L^2(\Omega)$ provisto del producto escalar $\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega uv\,dx$, es un espacio de Hilbert, y demuestre que $H^m(\Omega)$ es también un espacio de Hilbert. Muestre además que para todo $f \in (H^m(\Omega))'$ existen funciones $f_\alpha \in L^2(\Omega)$, $|\alpha| \le m$, tales que $f(v) = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega f_\alpha\,\partial^\alpha v\,dx \quad \forall\, v \in H^m(\Omega)$.

20. Se dice que un espacio de Banach X es **uniformemente convexo** si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$(\,x, y \in X\,,\ ||x|| \le 1\,,\ ||y|| \le 1 \quad \text{y} \quad ||x-y|| > \epsilon\,) \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta\,.$$

Demuestre que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

21. Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

   a) Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.

   b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que

   $$\inf_{z \in N(A)} ||x - z|| \le \beta\,||Ax|| \quad \forall\, x \in X\,.$$

   Demuestre que $R(A) = N(A^*)^\perp$.

   c) Pruebe que $A^* = R_X\,A'\,R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \to X$ y $R_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^oN(A') = N(A^*)^\perp$.

22. Sea X un espacio de Banach e Y un espacio vectorial normado. Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ existe $\forall x \in X$. Pruebe que existe $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $T_n(x) \to T(x) \quad \forall x \in X$.

    Ind.: Aplicar Teorema de Banach-Steinhauss.

23. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{ H_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1} \subset H_n \ \forall\, n \in \mathbf{N}$, y $\cup_{n\in\mathbf{N}} H_n$ es denso en H. Sea $B : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f \in H'$ existe una única sucesión $\{ u_n(f) \}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq H$ tal que

    $$u_n(f) \in H_n \quad , \quad B(u_n(f), v_n) = f(v_n) \quad \forall\, v_n \in H_n \,,$$

    y $||u_n(f)|| \le C_0 \, ||f|| \ \forall\, n \in \mathbf{N}$, donde C_0 es una constante positiva independiente de n y de f. Suponga además que para todo $f \in H'$ existe un único $u(f) \in H$ tal que

    $$B(u(f), v) = f(v) \quad \forall\, v \in H \,.$$

    Demuestre que

    $$\lim_{n\to+\infty} ||u(f) - u_n(f)|| = 0 \quad \forall\, f \in H' \,.$$

    Ind.: Defina la proyección de Galerkin $P_n : H \to H_n$, donde $\forall\, v \in H$, $P_n v$ denota la única solución de $B(P_n v, w_n) = B(v, w_n) \quad \forall\, w_n \in H_n$ y observe que $P_n u(f) = u_n(f)$.

24. Sea H un espacio vectorial normado real. Pruebe que si la norma de H satisface

    $$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2 \left\{ ||x||^2 + ||y||^2 \right\} \quad \forall\, x, y \in H,$$

    entonces ella proviene de un producto escalar.

25. Sean V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada simétrica y coerciva, y $A : V \to V'$ el operador lineal y acotado inducido por a. Dado $f \in V'$ y U un subconjunto de V no vacío convexo y cerrado, es sabido (por Teorema de Stampacchia) que existe un único $u \in U$ tal que

    $$a(u, v-u) \ge f(v-u) \quad \forall\, v \in U.$$

    Ahora, sean V_h un subespacio de V de dimensión finita, U_h un subconjunto de V_h no vacío convexo y cerrado, y denote por $u_h \in U_h$ a la única solución del problema discreto:

    $$a(u_h, v_h - u_h) \ge f(v_h - u_h) \quad \forall\, v_h \in U_h.$$

    Además, sea H un Hilbert tal que $V \subseteq H$, y la inyección canónica $i : V \to H$ es continua y densa. Demuestre que si $Au - f \in H$, entonces existe una constante C independiente de V_h y U_h, tal que

    $$||u - u_h||_V \le C \left\{ \inf_{v_h \in U_h} \left(||u - v_h||_V^2 + ||Au - f||_H \, ||u - v_h||_H \right) \right.$$
    $$\left. + ||Au - f||_H \inf_{v \in U} ||u_h - v||_H \right\}^{1/2} .$$

26. Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,X)$, con $||A|| < 1$. Demuestre que $(I + A)$ es invertible y que

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X,X)$. Muestre también que

$$||(I + A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||A||}.$$

27. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. El grafo de T se denota por G_T y se define como

$$G_T := \{(x,y) \in X \times Y : \quad x \in D(T),\ y = Tx\}$$

Suponga que $D(T)$ y G_T son subespacios cerrados de X y $X \times Y$, respectivamente. Demuestre que T es acotado sobre $D(T)$.

28. (Lema de Lax-Milgram generalizado). Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $B : H_1 \times H_2 \to \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

   a) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

   $$|B(u,v)| \leq C_1 ||u||_{H_1} ||v||_{H_2} \quad \forall\, (u,v) \in H_1 \times H_2.$$

   b) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

   $$\underset{\substack{v \in H_2 \\ v \neq 0}}{sup} \frac{|B(u,v)|}{||v||_{H_2}} \geq C_2 ||u||_{H_1} \quad \forall\, u \in H_1,$$

   y para cada $v \in H_2$, $v \neq 0$, se tiene $\sup_{u \in H_1} |B(u,v)| > 0$.

   Demuestre que, dado $F \in H_2'$, existe un único $u \in H_1$ tal que $B(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H_2$, y además $||u||_{H_1} \leq \frac{1}{C_2} ||F||_{H_2'}$.

29. Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Un operador lineal $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ se dice una *extensión* de T si $D(T) \subseteq D(\tilde{T})$ y $Tx = \tilde{T}x \quad \forall\, x \in D(T)$.

   Definición. *Se dice que* $\overline{T} : D(\overline{T}) \subseteq X \to Y$ *es la* **clausura** *de* T*, si*:

   i) $\overline{T}$ *es un operador lineal cerrado*

   ii) $\overline{T}$ *es una extensión de* T

   iii) Si $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ *es cualquier operador con las propiedades* i) y ii), *entonces* $\tilde{T}$ *es una extensión de* $\overline{T}$.

Sean X, Y espacios de Banach, y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que T tiene una clausura $\overline{T}$ sí y sólo si la siguiente condición se satisface

$$\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq D(T),\ x_n \to 0\ ,\ T x_n \to y \qquad \Rightarrow \qquad y = 0.$$

30. Sea X el espacio vectorial de las funciones continuas sobre $\bar{\Omega} := [0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dados $u_1,\, u_2,\, y \in X$, considere la ecuación integral: *Hallar* $u \in X$ *tal que*

$$u(t) - \int_0^1 u_1(t)\, s^2\, u(s)\, ds - \int_0^1 u_2(t)\, (1 - \frac{3}{2} s)\, u(s)\, ds = y(t) \quad \forall\, t \in \bar{\Omega}\,. \quad (4)$$

i) Si $u_1(t) = 4t$ y $u_2(t) = 1\ \forall\, t \in \Omega$, deduzca una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (4) tenga al menos una solución.

ii) Pruebe que si $u_1(t) = t$ y $u_2(t) = 1$, entonces para cada $y \in X$ la ecuación integral (4) tiene una única solución.

31. Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados.

i) Pruebe que si $K \in \mathcal{L}\,(X,Y)$ es de rango finito, entonces K es compacto.

ii) Demuestre que si $A \in \mathcal{L}\,(X,Y)$ y $K \in K\,(Y,Z)$, entonces KA también es compacto.

32. Sea X un espacio vectorial normado de dimensión **infinita** y sea $K \in K(X,X)$ un operador inyectivo. Demuestre que $K^{-1} \notin \mathcal{L}(X,X)$.

33. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Suponga que existen sucesiones $\{\, F_n \,\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X'$, $\{\, y_n \,\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq Y$, $\{\, \lambda_n \,\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathbf{R}$ tales que

$$\underset{n \in \mathbf{N}}{sup}\, ||F_n||_{X'} < +\infty \quad , \quad \underset{n \in \mathbf{N}}{sup}\, ||y_n||_Y < +\infty \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty\,,$$

y además

$$A\,x = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n\, F_n(x)\, y_n \qquad \forall\, x \in X\,.$$

Demuestre que A es compacto.

34. **i)** Sea $p > 1$ y considere el operador $K : l_p \to l_p$ definido por

$$K\,(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_k}{k}, ...) \qquad \forall\, (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in l_p\,.$$

Demuestre que K es compacto.

ii) Sean X, Y espacios vectoriales normados y considere el conjunto

$$\mathcal{H} := \{\, F \in (\, \mathcal{L}(X,Y)\,)' : \quad F(K) = 0 \quad \forall\, K \in K(X,Y)\,\}\,.$$

Pruebe que $\mathcal{H} = (\frac{\mathcal{L}(X,Y)}{K(X,Y)})'$.

35. Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0,\pi]$ provisto de la norma uniforme. Dadas las funciones trigonométricas $p_j,\, q_j \in X$, $j \in \{0,1,...,n\}$, con $p_j(t) = \mathrm{sen}\,(jt)$ y $q_j(t) = \cos\,(jt)$, $\forall\, t \in [0,\pi]$, se define el operador $A : X \to X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^{\pi} u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \; + \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^{\pi} u(t)\, q_j(t)\, dt \right\} q_j \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X,X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

36. Sean H y V dos espacios de Hilbert tales que $H \subseteq V$ y la inyección $i : H \to V$ es compacta.

a) Se dice que una forma bilineal acotada A definida sobre $H \times H$ satisface la DESIGUALDAD DE GÅRDING si existen $\alpha > 0$ y una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbf{R}$ tales que

$$A(v,v) \;\geq\; \alpha\, ||v||_H^2 \;-\; K(v,v) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,.$$

Dado $F \in H'$, considere el siguiente problema variacional: *Hallar* $u \in H$ *tal que*

$$A(u,v) \;=\; F(v) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,. \tag{5}$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding, entonces (5) tiene solución para cada $F \in H'$ **si y solo si** $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

b) Se dice que A satisface la DESIGUALDAD DE GÅRDING GENERALIZADA si existen $\alpha > 0$, una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbf{R}$, y un isomorfismo $S : H \to H$ tales que

$$A(v,Sv) \;\geq\; \alpha\, ||v||_H^2 \;-\; K(v,Sv) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,.$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding generalizada, entonces (5) tiene solución para cada $F \in H'$ **si y solo si** $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

37. Sean X e Y espacios de Banach tal que X es reflexivo. Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ es compacto **si y sólo si** A transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones fuertemente convergentes de Y.

38. **a)** Sea $\Omega = (0,1)$ y $X = L^2(\Omega)$. Puede probarse que X provisto del producto escalar

$$\langle f, g \rangle \;:=\; \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx \quad \forall\, f,\, g \,\in\, X$$

es un espacio de Hilbert, y que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Considere la sucesión $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$ definida por $x_n(t) = \sqrt{2}\, sin(n\pi t)$ $\forall\, t \in \Omega$. Demuestre que

$$||x_n|| \;=\; 1 \quad \forall\, n \,\in\, \mathbf{N} \quad , \quad \text{y que} \quad \lim_{n\to\infty} \langle \varphi, x_n \rangle \;=\; 0 \quad \forall\, \varphi \,\in\, C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Concluya además que $x_n \xrightarrow{w} 0$, y que x_n **no converge fuertemente** a la función nula.

b) A propósito de lo anterior, demuestre que en un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita, la convergencia débil no es equivalente a la convergencia fuerte.

39. DEFINICIÓN. *Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X'$ un operador* **nolineal**. *Se dice que T satisface la propiedad (S) si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$ tal que*

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad y \quad (T(x_n))(x_n - x) \; - \; (T(x))(x_n - x) \longrightarrow 0 \ ,$$

se tiene $x_n \longrightarrow x$.

Sean H, Q, V espacios de Banach tales que $H \subseteq V$ y $\mathbf{i} : H \to V$ es compacta. Sea $X := H \times Q$, y considere una forma bilineal acotada $B : X \times X \to \mathbf{R}$ y un operador nolineal $A : H \to H'$ que satisfacen las siguientes propiedades

i) existe $C_0 > 0$ tal que

$$B((u,\lambda),(u,\lambda)) \;\geq\; C_0 \,||\lambda|_Q^2 \quad \forall\, (u,\lambda) \in X \,.$$

ii) existen C_1, $C_2 > 0$ tal que para todo $u, v \in H$

$$(A(u))\,(u-v) \; - \; (A(v))\,(u-v) \;\geq\; C_1\,||u-v||_H^2 \; + \; R(u,v)\,,$$

donde

$$|R(u,v)| \;\leq\; C_2 \,\{\, 1 \, + \, ||u||_H \, + \, ||v||_H \,\}\, ||u-v||_V \ .$$

Demuestre que el operador nolineal $T : X \to X'$ definido por

$$(T(u,\lambda))\,(v,\mu) \;:=\; (A(u))\,(v) \; + \; B((u,\lambda),(v,\mu)) \ ,$$

satisface la propiedad (S).

40. **a)** Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $N(T) = \{\,0\,\}$ y $R(T) = Y$. Demuestre que X es reflexivo (separable) si y sólo si Y es reflexivo (separable).

b) Sean X, Y espacios de Banach separables. Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también es separable.

c) Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^N$ y $p \in \mathbf{R}$, $2 \leq p < \infty$, se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R} : \; f \text{ medible y } ||f||_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_\Omega |f|^p \, dx \right\}^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Puede probarse que $(L^p(\Omega), ||\cdot||_{L^p(\Omega)})$ es un espacio de Banach separable. Por otra parte, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está dado por

$$W^{1,p}(\Omega) \;:=\; \Big\{\, u \in L^p(\Omega) : \quad \text{existe } g_i \in L^p(\Omega) \ , i = \overline{1,N} \text{ tal que}$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx \;=\; - \int_\Omega g_i \phi \, dx \qquad \forall\, \phi \,\in\, C_0^\infty(\Omega) \Big\}$$

En tal caso se escribe $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, y se define la norma

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \;:=\; ||u||_{L^p(\Omega)} \,+\, \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} .$$

Puede probarse que $(\, W^{1,p}(\Omega), ||\cdot||_{W^{1,p}(\Omega)}\,)$ también es Banach. Demuestre que $W^{1,p}(\Omega)$ es separable.

41. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se dice que T es **débilmente compacto** si para toda sucesión acotada $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ de X existe una subsucesión $\{\, x_n^{(1)} \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ tal que $\{\, T x_n^{(1)} \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge débilmente en Y. Pruebe que si X o Y es *reflexivo*, entonces todo operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es débilmente compacto.

42. Sean $a,\, b \in \mathbf{R}$ tal que $-\infty < a < b < +\infty$. Asuma que $C[a,b]$ es separable, y demuestre que para todo entero no negativo k, $C^k[a,b]$ también es separable.

43. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ. Considere el problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} \,=\, g \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega u\, dx \,=\, a_1\,, \tag{6}$$

donde $a_1 \in \mathbf{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, y $g \in L^2(\Gamma)$ satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_\Omega f\, dx \,+\, \int_\Gamma g\, ds \;=\; 0\,.$$

Demuestre que una formulación débil de (6) consiste en: *Hallar* $(u,\lambda) \in H^1(\Omega)\times \mathbf{R}$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx \,+\, \lambda \int_\Omega v\, dx \;=\; \int_\Omega f v\, dx \,+\, \int_\Gamma g v\, ds\ ,$$

$$\mu \int_\Omega u\, dx \;=\; \mu a_1\,,$$

para todo $(v,\mu) \in H^1(\Omega)\times\mathbf{R}$. Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene única solución, la cual depende continuamente de los datos.

44. **a)** Sea X un espacio de Banach, y considere una sucesión $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Demuestre que $||x|| \le \liminf ||x_n||$.

    b) Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, y sea $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\limsup ||x_n|| \le ||x||$. Pruebe que $x_n \to x$.

45. Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : X \to Y$ un operador compacto. Demuestre que $\mathcal{R}(T)$ es separable.

Ind: Escriba $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in X : \quad ||x|| \leq n \}$, y luego use que todo subconjunto relativamente compacto de un espacio métrico es separable.

46. Un importante resultado establece que *todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.* En lo que sigue suponga que Ω es un abierto de $\mathbf{R}^n$ y que $p \in \mathbf{R}$ es tal que $p \geq 2$.

   a) A partir del hecho que $\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2}\ \forall\, \alpha, \beta \geq 0$, demuestre la desigualdad de *Clarkson*:

$$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} + \left|\left|\frac{f-g}{2}\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\left\{||f||^p_{L^p(\Omega)} + ||g||^p_{L^p(\Omega)}\right\} \quad \forall\, f, g \in L^p(\Omega).$$

   b) Utilice la desigualdad anterior para probar que $L^p(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$, es uniformemente convexo y por lo tanto reflexivo. Además, deduzca que $W^{1,p}(\Omega)$ también es reflexivo.

47. Sea V un espacio de Hilbert y $a : V \times V \times V \to \mathbf{R}$ una forma trilineal tal que para todo $w \in V$, la forma bilineal $a(w; \cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbf{R}$ es acotada. Dado $F \in V'$, considere el problema: *Hallar $u \in V$ tal que*

$$a(u; u, v) = F(v) \qquad \forall\, v \in V. \tag{7}$$

Suponga que existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(w; v, v) \geq \alpha\, ||v||^2_V \qquad \forall\, v, w \in V.$$

Asuma además que existe una constante $C_0 > 0$ tal que para todo w_1, w_2, u, $v \in V$,

$$|a(w_1; u, v) - a(w_2; u, v)| \leq C_0\, ||w_1 + w_2||_V\, ||u||_V\, ||v||_V\, ||w_1 - w_2||_V.$$

Encuentre una constante positiva C_1 tal que para todo $F \in V'$, $||\, F\, ||_{V'} \leq C_1$, el problema (7) admite una única solución.

48. **a)** El Teorema del Punto Fijo de Brouwer establece que: *Dado un subconjunto S compacto, convexo, y no vacío de un espacio vectorial de dimensión finita, y una aplicación continua T de S en S, entonces T tiene al menos un punto fijo.* Use este resultado de Brouwer para demostrar que si X es un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $|| \cdot ||$, y si F es una aplicación continua de X en X tal que, para algún $\mu > 0$, $\langle F(u), u \rangle \geq 0 \quad \forall\, u \in X$ con $||u|| = \mu$, entonces existe $u_0 \in X$, $||u_0|| \leq \mu$, tal que $F(u_0) = 0$.

b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. El problema de Navier-Stokes, un problema de suma importancia en mecánica de fluídos, consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$-\Delta\,\mathbf{u} + \sum_{j=1}^{2} u_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \tag{8}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\,dx = 0\,.$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$, y

$$Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\,dx = 0 \right\}.$$

Demuestre que la formulación débil de (8) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned} \tag{9}$$

donde $a : H \times H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$, y $f \in H'$, están definidas por

$$a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\,dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i\,dx\,,$$

$$b(\mathbf{v}, p) := -\int_\Omega p\,\nabla \cdot \mathbf{v}\,dx \quad , \quad f(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\,dx\,.$$

c) En lo que sigue considere un problema del tipo (9), no necesariamente proveniente de (8), y asuma que las siguientes hipótesis se cumplen: b es una forma bilineal acotada, b satisface la condición de Babuska-Brezzi continua, y para cada $\mathbf{w} \in H$ la aplicación $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es también una forma bilineal acotada. Sea $V := \{\mathbf{v} \in H : \quad b(\mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall\, q \in Q\}$. Demuestre que (9) puede reducirse, equivalentemente, al siguiente problema no-lineal: *hallar* $\mathbf{u} \in V$ *tal que*

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in V\,. \tag{10}$$

d) Además de lo dicho en **c)**, suponga ahora que: existe una constante $\alpha > 0$ tal que $a(\mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha\,||\mathbf{v}||^2$ para todo $\mathbf{v} \in V$; V es separable y para cada $\mathbf{v} \in V$, la aplicación $\mathbf{u} \to a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es *secuencialmente débilmente continua*, es decir

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u} \in V \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} a(\mathbf{u}_n; \mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v})\,.$$

Demuestre que el problema (10) tiene al menos una solución $\mathbf{u} \in V$.

Ind.: Muestre primero que existe una sucesión $\{\, \mathbf{v}_n \,\}_{n\in \mathbf{N}}$ en V tal que para todo $m \geq 1$ el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m\}$ es linealmente independiente, y las combinaciones lineales finitas de los $\mathbf{v}_n$ constituyen un conjunto denso en V. Luego, denote por V_m al subespacio de V generado por $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m\}$, y aplique el método de Galerkin en conjunto con lo probado en parte **a)** para construir una sucesión de soluciones aproximantes.

49. Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$ y $p \in [1, +\infty)$, se define

$$L^p(\Omega) \,:=\, \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R} : \quad f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^p \, dx \,<\, +\infty \right\} .$$

Puede probarse que $L^p(\Omega)$, provisto de la norma $||f||_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_\Omega |f|^p \, dx \right\}^{1/p}$ es un espacio de Banach. Además, dados $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega |f\, g| \, dx \,\leq\, ||f||_{L^p(\Omega)} \, ||g||_{L^q(\Omega)} \,.$$

Ahora, para un multíndice $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, y una función diferenciable u, se denota $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ y $\partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Con estas notaciones, dado $m \in \mathbf{N}$ se define el Espacio de Sobolev de orden (m, p), como

$$W^{m,p}(\Omega) \,:=\, \Big\{ u \,\in\, L^p(\Omega) : \quad \forall\, \alpha,\, |\alpha| \,\leq\, m \quad \text{existe } g_\alpha \,\in\, L^p(\Omega) \text{ , tal que}$$

$$\int_\Omega u \, \partial^\alpha \varphi \, dx \,=\, (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \, \varphi \, dx \qquad \forall\, \varphi \,\in\, C_0^\infty(\Omega) \Big\}$$

En tal caso se escribe $\partial^\alpha u \,=\, g_\alpha$, y se define la norma

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} \,:=\, \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right\}^{1/p} .$$

Demuestre que $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

50. Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se define el operador adjunto de Hilbert de A, y se denota A^*, como $A^* : Y \to X$, donde para cada $y \in Y$, $A^* y \in X$ es el único elemento (dado por Teorema de Representación de Riesz) tal que

$$\langle Ax, y \rangle_Y \;=\; \langle x, A^* y \rangle_X \quad \forall\, x \,\in\, X \,.$$

a) Pruebe que $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$, $||A^*|| \,=\, ||A||$ y que $(A^*)^* \,=\, A$.

b) Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.

c) Suponga que existe $\beta \,>\, 0$ tal que

$$\inf_{z \,\in\, N(A)} ||x - z|| \,\leq\, \beta \, ||Ax|| \quad \forall\, x \,\in\, X \,,$$

y demuestre que $R(A) \,=\, N(A^*)^\perp$.

d) Pruebe que $A^* = R_X \, A' \, R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \to X$ y $R_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^{o}N(A') = N(A^*)^{\perp}$.

51. Sea X un espacio vectorial normado.

a) Sea Y un subespacio no denso de X. Demuestre que existe un funcional no nulo $F \in X'$ tal que $F(x) = 0$ para todo $x \in Y$.

b) Sean $x_0, x_1 \in X$ tal que $x_0 \neq x_1$. Pruebe que existe una sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X'$ tal que $||F_n|| = ||x_0 - x_1||^n$ y $F_n(x_1) = F_n(x_0) + ||x_1 - x_0||^{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

52. Sea X un espacio de Hilbert con aplicación de Riesz $R_X : X' \to X$, y sean S, T, subconjuntos de X y X', respectivamente. Establezca qué relaciones existen entre S^o y $S^{\perp}$, y entre ${}^{o}T$ y $R_X(T)$.

53. Sean U un espacio vectorial normado y V un espacio de Banach. Además, sea $P : U' \to \mathcal{L}(U, V)$ un operador lineal cerrado tal que $N(P)$ es el funcional nulo sobre U y $R(P) = \mathcal{L}(U, V)$. Demuestre que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha \, ||F||_{U'} \;\leq\; ||P(F)||_{\mathcal{L}(U,V)} \quad \forall \, F \, \in \, \mathcal{D}(P)\,.$$

54. Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall \, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Ind.: Hacer una demostración alternativa utilizando el Teorema del Grafo Cerrado en vez del Teorema de Banach-Steinhaus.

55. Sean H, Q, V y W espacios de Hilbert tales que $H \overset{c}{\hookrightarrow} V$ and $Q \overset{c}{\hookrightarrow} W$. Sean $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ formas bilineales acotadas y defina

$$B : (H \times Q) \times (H \times Q) \to \mathbf{R}$$

$$B((u, \lambda), (v, \mu)) := a(u, v) + b(v, \lambda) + b(u, \mu) \quad \forall \, (u, \lambda), \, (v, \mu) \in H \times Q\,.$$

Suponga que existe una forma bilineal acotada $a_0 : H \times V \to \mathbf{R}$ tal que $\tilde{a} := a + a_0$ es $H-$elíptica; es decir, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\tilde{a}(v, v) \;\geq\; \alpha \, ||v||_H^2 \quad \forall \, v \in H\,.$$

También, asuma que existen una forma bilineal acotada $b_0 : V \times W \to \mathbf{R}$ y una constante $\beta > 0$ tales que $\tilde{b} := b + b_0$ verifica

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\tilde{b}(v, \lambda)}{||v||_H} \geq \beta ||\lambda||_Q \quad \forall \, \lambda \in Q\,.$$

Demuestre que B satisface la Desigualdad de Gårding Generalizada.

56. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sea $J : V \to \mathbf{R}$ un funcional nolineal. Se dice que J admite una derivada direccional en $v \in V$, en la dirección $\varphi \in V$, si la expresión $\frac{J(v+\epsilon\varphi)-J(v)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $DJ(v, \varphi)$. Entonces, J se dice diferenciable en el sentido de GATEAUX (o G-diferenciable) en $v \in V$, si $DJ(v, \varphi)$ existe para todo $\varphi \in V$. Ahora, si J es G-diferenciable en $v \in V$ y si $DJ(v, \cdot) \in V'$, se concluye, por el Teorema de Representación de Riesz, que existe un único elemento $z \in V$ tal que $DJ(v, \varphi) = \langle z, \varphi \rangle \;\forall\, \varphi \in V$. En tal caso, se denota $z := J'(v)$ y se llama el GRADIENTE de J en v.

Se dice que J tiene segunda diferencial en el sentido de Gateaux en $v \in V$, en las direcciones φ y $\psi \in V$, si la expresión $\frac{DJ(v+\epsilon\psi,\varphi) - DJ(v,\varphi)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $D^2J(v, \varphi, \psi)$.

a) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ y considere $V := L^2(\Omega)$. Defina $J_0 : V \to \mathbf{R}$ por

$$J_0(v) := \int_\Omega (v^2 + v)\, dx \quad \forall\, v \in V$$

y calcule $J_0'(v)$ para todo $v \in V$. Qué puede decir de $J_0'(v)$ si J_0 se restringe al espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$?

b) Suponga que J es G-diferenciable en $(v + \alpha\varphi)$, en la dirección φ, para todo $\alpha \in [0, 1]$. Demuestre que existe $\beta \in (0, 1)$ tal que

$$J(v + \varphi) \;=\; J(v) \;+\; DJ(v + \beta\,\varphi, \varphi)\,.$$

c) Suponga que J es α-convexo, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que para todo u, $v \in V$ y para todo $\beta \in [0, 1]$:

$$J((1-\beta)\,u + \beta\, v) \;\leq\; (1-\beta)\,J(u) \;+\; \beta\, J(v) \;-\; \frac{\alpha}{2}\,\beta\,(1-\beta)\,||u-v||^2\,.$$

Además, asuma que J es G-diferenciable en todo $v \in V$. Demuestre que para todo u, $v \in V$ se tiene:

$$DJ(u, u-v) \;-\; DJ(v, u-v) \;\geq\; \alpha\,||u-v||^2$$

y

$$J(v) \;\geq\; J(u) \;+\; DJ(u, v-u) \;+\; \frac{\alpha}{2}\,||v-u||^2\,.$$

d) Suponga que J es G-diferenciable en $v \in V$ y que, dada una dirección $\varphi \in V$, $D^2J(v + \alpha\varphi, \varphi, \varphi)$ existe $\forall\, \alpha \in [0, 1]$. Demuestre que hay una constante $\beta \in (0, 1)$ tal que

$$J(v + \varphi) \;=\; J(v) + DJ(v, \varphi) + \frac{1}{2}\,D^2J(v + \beta\varphi, \varphi, \varphi)\,.$$

57. Sea X un espacio vectorial normado y sea $x_0 \in X$ tal que $|\,F(x_0)\,| \leq C_0$ para todo $F \in X'$ con $||F||_{X'} = 1$. Demuestre que $||x_0|| \leq C_0$.

58. Sea H un espacio de Hilbert y sea $B : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

i) B es simétrica, es decir

$$B(u,v) \;=\; B(v,u) \quad \forall\, (u,v) \in H \times H\,.$$

ii) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u,v)| \le C_1 ||u||_H ||v||_H \quad \forall\, (u,v) \in H \times H.$$

iii) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\underset{\substack{v \in H \\ v \neq 0}}{sup} \frac{|B(u,v)|}{||v||_H} \ge C_2\, ||u||_H \quad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que, dado $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que $B(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H$, y además, $||u||_H \le \frac{1}{C_2} ||F||_{H'}$.

59. Sea $(H, \langle\, \cdot, \cdot\, \rangle)$ un espacio de Hilbert y sea V un subespacio cerrado de H. El anulador (o aniquilador) de V se denota por V^o y se define como

$$V^o := \{\, F \in H' : \quad F(x) = 0 \quad \forall\, x \in V\,\}\,.$$

Demuestre que

$$H \;=\; V \,\oplus \mathcal{R}(V^o)\,,$$

donde $\mathcal{R} : H' \to H$ denota la aplicación de Riesz.

60. Sea V un subespacio de un Hilbert $(Y, \langle\, \cdot, \cdot\, \rangle)$ y defina

$$V^{\perp} := \{ y \in Y : \quad \langle y, z \rangle = 0 \quad \forall\, z \in V \}\,.$$

Si $\overline{V}$ denota la clausura de V, demuestre que $\overline{V}^{\perp} = V^{\perp}$. Concluya que V es denso en Y sí y sólo sí $V^{\perp} = \{0\}$.

61. Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}^n$. Asuma que la inyección $i \,:\, H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i \,:\, H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también es compacta, para todo entero $m \ge 2$.

62. Sean X y M espacios de Hilbert y sean $a \,:\, X \times X \to \mathbf{R}$, $b \,:\, X \times M \to \mathbf{R}$ dos formas bilineales acotadas. Suponga además que a es simétrica y semi-definida positiva sobre X. Dados $F \in X'$, $G \in M'$ se define el operador $\mathcal{J} \,:\, X \times M \to \mathbf{R}$,

$$\mathcal{J}(v,\mu) \;:=\; \frac{1}{2}\, a(v,v) \;+\; b(v,\mu) \;-\; F(v) \;-\; G(\mu)\,.$$

Considere entonces los siguientes problemas variacionales:

Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(u,v) \;+\; b(v,\lambda) \;&=\; F(v) \quad \forall\, v \in X\,, \\ b(u,\mu) \;&=\; G(\mu) \quad \forall\, \mu \in M\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\mathcal{J}(u,\mu) \,\leq\, \mathcal{J}(u,\lambda) \,\leq\, \mathcal{J}(v,\lambda) \qquad \forall\,(v,\mu) \in X \times M\,. \tag{12}$$

Demuestre que (u,λ) es solución de (11) si y sólo si (u,λ) es solución de (12).

63. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X,X)$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es
$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$
y que existen constantes α, $\beta > 0$ tales que
$$\langle \mathbf{P}x, x\rangle_X \;\;\geq\;\; \alpha\, ||x||_X^2 \qquad \forall\, x \in X$$
y
$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \,\geq\, \beta\, ||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$
Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que
$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ & \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \\ g \end{bmatrix}.$$
También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $||\mathbf{P}||$, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que
$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \,\leq\, C\, \{\, ||f|| + ||g||\,\}\,.$$
Ind.: Transforme a una ecuación equivalente en Y y luego aplique el Lema de Lax-Milgram.

64. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \to X$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es
$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$
que $\mathbf{P}$ es **nolineal**, y que existen constantes M, α, $\beta > 0$ tales que
$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \,\leq\, M\, ||x - \bar{x}||_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x - \bar{x}\rangle_X \,\geq\, \alpha\, ||x - \bar{x}||_X^2 \quad \forall\, x,\, \bar{x} \in X\,,$$
y
$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \,\geq\, \beta\, ||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$
Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que
$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ & \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \\ g \end{bmatrix}.$$
También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de M, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que
$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \,\leq\, C\, \{\, ||f|| + ||g|| + ||\mathbf{P}(0)||\,\}\,.$$

65. Sea $\Omega := (0,3)$ y considere el problema de valores de contorno: $-u'' + (x+1)\,u = x$ en Ω, $u(0) = u(3) = 0$. Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio

$$H_2 := \{\, v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \quad \text{y} \quad v\,|_{[x_j, x_{j-1}]} \text{ es un polinomio de grado } \leq 1\,, \forall\, j \in \{1,2,3\}\,\}\,.$$

Ind.: Notar que $H_2 = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$, donde $e_j \in H_2$ es tal que $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo $i,\, j \in \{1,2\}$.

66. **a)** Sea S un subconjunto de un Hilbert H y sea M el subespacio cerrado generado por S. Pruebe que $S^\perp$ es un subespacio cerrado de H, $M^\perp = S^\perp$, y $M = (S^\perp)^\perp$.

b) Sea V un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $H = \overline{V} \oplus V^\perp$.

67. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. El Problema de Stokes consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$\begin{array}{ll} -\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, & \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, & \displaystyle\int_\Omega p\,dx = 0\,. \end{array} \tag{13}$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \displaystyle\int_\Omega q\,dx = 0 \right\}$. Demuestre que la formulación débil de (13) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, p) &= F(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H\,, \\ B(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \to \mathbf{R}$, $B : H \times Q \to \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\,dx\,,$$

$$B(\mathbf{v}, p) := -\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v}\,dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\,dx\,.$$

68. **a)** Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de **Hilbert**. Dados $n \in \mathbf{N}$, $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq H$ y $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subseteq H'$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} F_j(u)\,p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H, H)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A^* : H \to H$.

b) Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el espacio de **Hilbert** $L^2(0,1)$ provisto del producto escalar

$$\langle u, v\rangle := \int_0^1 u(t)\, v(t)\, dt \qquad \forall\, u\,,\ v \in H\,.$$

Dados los polinomios $p_j \in H$, $j \in \{1, ..., n\}$, con $p_j(t) = t^j\ \forall\, t \in (0,1)$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que A es lineal, acotado y AUTOADJUNTO, esto es $A \in \mathcal{L}(H, H)$ y $A = A^*$.

69. Sean X e Y espacios de Banach, y sea $A : X \to Y$ un operador lineal cerrado con dominio $D(A)$ e imagen $R(A)$. Demuestre que son equivalentes:

   a) El operador A es inyectivo, y A^{-1} es acotado sobre $R(A)$.

   b) Existe una constante positiva C tal que $\|Ax\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in D(A)$.

   c) $R(A)$ es cerrado en Y, y A es inyectivo.

70. Sea M un subespacio cerrado de un Hilbert H. Por el Teorema de Proyección, cada $x \in H$ puede escribirse únicamente en la forma $x = y + z$, con $y \in M$ y $z \in M^\perp$. El punto $y \in M$ se llama la PROYECCIÓN de x en M, y el operador $P := X \to M, \quad Px = y$, se llama la proyección sobre M. También se denota $P := P_M$ y se dice que P es una proyección.

   i) Pruebe que si P es una proyección, entonces P es autoadjunto, $P^2 = P$, y $\|P\| = 1$ si $P \neq 0$.

   ii) Pruebe que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es autoadjunto y $P^2 = P$, entonces P es una proyección sobre algún subespacio cerrado de H.

71. **a)** Sea S un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $S^\perp = \bar{S}^\perp$.

   b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Encuentre y caracterice el subespacio V de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus V$.

72. Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbf{R}$ tal que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente elíptica. Esto significa que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha}\, \|v_n\|_H^2$ $\forall\, v_n \in H_n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u,v) \;=\; F(v) \qquad \forall\, v \in H$$

y

$$A_n(u_n,v_n) \;=\; F(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$\|u - u_n\|_H \;\le\; C \inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H \,+\, \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|A(v_n,w_n) - A_n(v_n,w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}.$$

73. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbf{R}$ una función continua para la cual existen constantes $M, \beta > 0$, tales que $\beta \le \kappa(x) \le M$ para todo $x \in \Omega$. Defina el conjunto $S := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1 \right\}$, y demuestre que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ existe un único $g \in S$ tal que

$$\int_\Omega \kappa(x)\, \|\nabla u(x) - \nabla g(x)\|_{\mathbf{R}^n}^2\, dx \;=\; \min_{v \in S} \int_\Omega \kappa(x)\, \|\nabla u(x) - \nabla v(x)\|_{\mathbf{R}^n}^2\, dx\,.$$

74. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H,Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

a) Demuestre que $\displaystyle \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \;=\; \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \;\ge\; \beta\, \|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$, y pruebe que $\quad H \;=\; R(\mathbf{B}^*) \,\oplus\, V.$

75. Sean X, Y espacios de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\mathcal{R}(A) = Y$, y sea $V = N(A)$. Dado el operador de proyección ortogonal $P : X \to V$, considere $B : Y \to X$ tal que $B(y) = x - P(x)$ para todo $y \in Y$, donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$.

a) Demuestre que B está bien definido y que B es una biyección lineal y acotada de Y en $V^\perp$. Pruebe, además, que B es un *inverso a derecha* de A, esto es $AB(y) = y$ para todo $y \in Y$.

b) Defina $A_0 : V^\perp \to Y$ como $A_0(x) = A(x)$ para todo $x \in V^\perp$, es decir $A_0 = A|_{V^\perp}$, y pruebe que $A_0^{-1} = B$.

c) Extienda los resultados anteriores al caso en que $\mathcal{R}(A)$ es un subespacio **cerrado** propio de Y.

76. (Lema de Aubin-Nitsche). Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y el operador identidad $\mathbf{i} : V \to H$ es continuo. Sea $A : V \times V \to \mathbf{R}$

una forma bilineal acotada y V-elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \to V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface

$$A(v, \mathbf{P}(g)) \,=\, \langle g, v \rangle_H \quad \forall\, v \in V\,.$$

Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V, denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in V\,,$$

y

$$A(u_h, v_h) \,=\, F(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$||u - u_h||_H \,\leq\, C\, ||u - u_h||_V \, \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{v_h \in V_h} ||\mathbf{P}(g) - v_h||_V \right\}.$$

77. Dados $\Omega := (0,1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$-\,u'' \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) \,=\, 0\,, \quad u'(1) \,=\, 1\,. \tag{14}$$

a) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (14) se reduce a: *Hallar* $(\sigma, (u, \varphi)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, (u, \varphi)) \,&=\, F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma, (v, \psi)) \,&=\, G((v, \psi)) \quad \forall\, (v, \psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{15}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) &:= \int_\Omega \sigma\, \tau\, dx \qquad \forall\, \sigma,\, \tau \in H\,, \\ b(\tau, (v, \psi)) &:= \int_\Omega v\, \tau'\, dx \,+\, \psi\, \tau(1) \quad \forall\, (\tau, (v, \psi)) \in H \times Q\,. \end{aligned}$$

b) Defina los funcionales F y G, y aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (15) tiene una única solución.

78. Sean $\Omega =]a, b[$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno

$$u^{(4)} \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) \,=\, 0\,. \tag{16}$$

i) Defina la incógnita auxiliar $\sigma := u''$ en Ω y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (16) se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\, \tau\, dx \,+\, \int_\Omega u'\, \tau'\, dx \,&=\, 0 \qquad \forall\, \tau \in H^1(\Omega)\,, \\ \int_\Omega v'\, \sigma'\, dx \,&=\, -\int_\Omega f\, v\, dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

ii) Aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (17) tiene una única solución que depende continuamente del dato f.

79. (Lema de Fortin). Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} \,\geq\, \beta\,\|q\|_Q \qquad \forall\, q \in Q\,. \tag{18}$$

Sean $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ tal que

$$b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) \,=\, 0 \qquad \forall\, q_n \in Q_n\,.$$

Suponga que la familia de operadores $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H,H_n)} \,\leq\, C$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de n, tal que

$$\sup_{\substack{v_n \in H_n \\ v_n \neq 0}} \frac{b(v_n,q_n)}{\|v_n\|_H} \,\geq\, \beta^*\,\|q_n\|_Q \qquad \forall\, q_n \in Q_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}\,.$$

80. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i\ \forall\, i \in \{1, ..., n\}$, $\forall\, x := (x_1, ..., x_n)^{\mathbf{T}} \in \Omega$.

a) (Desigualdad de Poincaré generalizada). Defina la aplicación

$$|||v||| \,:=\, \left\{ |v|^2_{H^2(\Omega)} \,+\, \sum_{i=0}^{n} |\,\langle v, p_i\rangle_{H^2(\Omega)}\,|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\,|||v||| \,\leq\, \|v\|_{H^2(\Omega)} \,\leq\, C_2\,|||v||| \quad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,.$$

Ind.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que $\forall\, n \in \mathbf{N}$ existe $v_n \in H^2(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} > n\,|||v_n|||$. Luego, defina $w_n := \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}}$, observe que $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$, note que $|||w_n||| < \frac{1}{n}$, y aplique el hecho que la inclusión de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ es compacta.

b) (LEMA DE DENY-LIONS). Considere el espacio cuociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma $\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \inf\limits_{p\in P_1(\Omega)} \|v-p\|_{H^2(\Omega)}$, y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

Demuestre que $|\cdot|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \;\le\; \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$$

$$\le\; C\; |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \;\in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

Ind.: Note que para todo $p \in P_1(\Omega)$ y para todo α con $|\alpha| = 2$ se tiene $\partial^\alpha p = 0$. Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.

c) (LEMA DE BRAMBLE-HILBERT). Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p\ \forall\, p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \;\le\; C\, |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \;\in\; H^2(\Omega)\,.$$

Ind.: Note que $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v-p)\ \forall\, p \in P_1(\Omega)$, y luego aplique el Lema de Deny-Lions.