UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

LISTADO DE EJERCICIOS 525539

Métodos de Elementos Finitos Mixtos

Segundo Semestre de 2012 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H, \|\cdot\|_H)$ un espacio de Hilbert real y $A : H\times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada con operador inducido $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H,H)$. Suponga que existen operadores $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2 \in \mathcal{L}(H,H)$ y constantes α_1, $\alpha_2 > 0$ tales que

$$\langle \mathbf{S}_1^*\mathbf{A}(\tau),\tau\rangle_H \,\ge\, \alpha_1\,\|\tau\|_H^2 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{A}\mathbf{S}_2(\tau),\tau\rangle_H \,\ge\, \alpha_2\,\|\tau\|_H^2 \quad \forall\,\tau\in H\,.$$

   a) Pruebe que para todo $F \in H'$ existe un único $\boldsymbol{\sigma} \in H$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma},\tau) \,=\, F(\tau) \qquad \forall\,\tau\in H\,, \tag{1}$$

   y deduzca la existencia de $C > 0$, independiente de F, tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_H \,\le\, C\,\|F\|_{H'}\,.$$

   b) Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de H tal que $\lim\limits_{h\to 0}\operatorname{dist}(\boldsymbol{\tau},H_h) \,=\, 0\ \forall\,\boldsymbol{\tau}\in H$, y, dado $F\in H'$, considere el esquema de Galerkin: Hallar $\boldsymbol{\sigma}_h \in H_h$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma}_h,\tau_h) \,=\, F(\tau_h) \qquad \forall\,\tau_h\in H_h\,. \tag{2}$$

   Suponga que para $i = 1$ o para $i = 2$ (pero no para ambos), existen operadores inyectivos $\mathbf{S}_{i,h} \in \mathcal{L}(H_h,H_h)$ para todo $h > 0$, y constantes C_i, $\delta > 0$, independientes de h, tales que

$$\|\mathbf{S}_i(\tau_h) \,-\, \mathbf{S}_{i,h}(\tau_h)\|_H \,\le\, C_i\,h^\delta\,\|\mathbf{S}_i(\tau_h)\|_H \quad \forall\,\tau_h\in H_h\,.$$

   Demuestre que existe $h_0 > 0$ tal que para todo $h \le h_0$ el problema (2) tiene solución única, es estable, y se verifica la estimación de Cea.

   c) Qué puede decir sobre las hipótesis para a) y b) si A es simétrica ?

2. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ Lipschitz-continua, y considere la aplicación $|||\cdot||| : H^1(\Omega)\to\mathbf{R}$ definida por

$$|||v||| \,:=\, \Big\{\,|v|_{1,\Omega}^2 \,+\, \|\gamma_0(v)\|_{0,\Gamma}^2\Big\}^{1/2} \qquad \forall\,v\in H^1(\Omega)\,,$$

   donde $\gamma_0 : H^1(\Omega)\to H^{1/2}(\Gamma)$ es el operador de trazas usual. Utilice un argumento análogo al de la demostración de la desigualdad de Poincaré generalizada para probar que $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes en $H^1(\Omega)$.

3. Sea Ω^- un abierto conexo y acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ, y sea Ω^+ la region anular acotada por Γ y una curva cerrada Σ cuyo interior contiene a Γ. Además, sean $\gamma_0^- : H^1(\Omega^-) \to H^{1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_0^+ : H^1(\Omega^+) \to H^{1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Sigma)$ los operadores de trazas respectivos, y denote $\Omega := \Omega^- \cup \Gamma \cup \Omega^+$.

   a) Demuestre que $v \in H^1(\Omega)$ si y sólo si:
   $$v \in L^2(\Omega)\,, \; v|_{\Omega^-} \in H^1(\Omega^-)\,, \; v|_{\Omega^+} \in H^1(\Omega^+)\,, \; \text{y} \; \gamma_0^-(v|_{\Omega^-}) = \gamma_0^+(v|_{\Omega^+}) \text{ en } \Gamma\,.$$

   Dados $f^- \in L^2(\Omega^-)$, $f^+ \in L^2(\Omega^+)$, $g_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y $g_\Sigma \in H^{-1/2}(\Sigma)$, considere el problema de transmisión: Hallar $(u^-, u^+) \in H^1(\Omega^-) \times H^1(\Omega^+)$ tales que
   $$\begin{gathered} -\Delta u^- = f^- \quad \text{en} \quad \Omega^-\,, \quad -\Delta u^+ = f^+ \quad \text{en} \quad \Omega^+\,, \\ \gamma_0^-(u^-) = \gamma_0^+(u^+) \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^-(\nabla u^-) - \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) = g_\Gamma \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \\ \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) = g_\Sigma \quad \text{en} \quad \Sigma\,, \quad \text{y} \quad \int_{\Omega^-} u^- + \int_{\Omega^+} u^+ = 0\,, \end{gathered} \tag{3}$$
   donde $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^- : H(\mathrm{div}\,;\Omega^-) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+ : H(\mathrm{div}\,;\Omega^+) \to H^{-1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Sigma)$ son los operadores de trazas normales respectivos ($\boldsymbol{\nu}$ apunta hacia Ω^+ en Γ y hacia el exterior de Ω^+ en Σ).

   b) Utilice identidades de Green en espacios de Sobolev convenientes y deduzca una formulación variacional de (3) con incógnita en un subespacio cerrado V de $H^1(\Omega)$.
   c) Identifique una condición de compatibilidad sobre los datos, y demuestre en tal caso que la formulación obtenida en b) posee una única solución, la cual depende continuamente de f^-, f^+, g_Γ, y g_Σ.
   d) Pruebe que el esquema de Galerkin asociado es convergente para cualquier familia numerable $\{V_h\}_{h>0}$ de subespacios de dimensión finita de V tales que $\lim\limits_{h\to 0} \mathrm{dist}(v, V_h) = 0 \;\; \forall\, v \in V$.
   e) Demuestre que la formulación obtenida en b) es equivalente a una formulación variacional mixta con incógnita en $H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$, y verifique que ella satisface las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi.

4. Sea $\Omega :=]a, b[$ y para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca una partición
   $$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$
   Además, denote $h := \max\Big\{ x_j - x_{j-1} : \quad j \in \{1, 2, ..., n\} \Big\}$, defina el espacio
   $$V_h := \Big\{ v \in L^2(\Omega) : \quad v|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \mathbf{P}_0([x_{j-1}, x_j]) \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., n\} \Big\}\,,$$
   y considere el operador $\Pi_h : L^2(\Omega) \to V_h$ que a cada $v \in L^2(\Omega)$ le asigna su mejor aproximación $\Pi_h(v) \in V_h$ con respecto al producto escalar de $L^2(\Omega)$. Demuestre que existe una constante $C > 0$, independiente de n y de h, tal que
   $$\|\, v - \Pi_h(v) \,\|_{L^2(\Omega)} \;\leq\; C\, h\, |v|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

5. Sean Ω un abierto acotado y convexo de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ, $f \in L^2(\Omega)$, y $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ la única solución de: $-\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma$. Dada una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de $\bar{\Omega}$ hecha de triángulos K y lados e, se definen los espacios de LAGRANGE y de CROUZEIX-RAVIART, respectivamente, como sigue:

$$X_h := \Big\{ v \in C(\bar{\Omega}) : \quad v|_K \in \mathbf{P}_1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,, \quad v = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \Big\}\,,$$

$$V_h := \Big\{ v \in L^2(\Omega) : \; v|_K \in \mathbf{P}_1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,, \; v \text{ es continua en los puntos medios de los lados } e \in \mathcal{T}_h\,, \; v = 0 \text{ en los puntos medios de los lados } e \subseteq \Gamma \Big\}\,.$$

a) Defina $\|v_h\|_h := \left\{ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v_h|_{1,K}^2 \right\}^{1/2} \quad \forall\, v_h \in V_h$, pruebe que $\|\cdot\|_h$ es una norma sobre V_h, y concluya que existe un único $u_h \in V_h$ tal que

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h = F(v_h) := \int_\Omega f\, v_h \quad \forall\, v_h \in V_h\,.$$

b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|u - u_h\|_h \le C \left\{ \inf_{v_h\in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h\in V_h\backslash 0} \frac{|a_h(u, w_h) - F(w_h)|}{\|w_h\|_h} \right\}. \tag{4}$$

c) Integre por partes en cada $K \in \mathcal{T}_h$ y pruebe que

$$\begin{aligned} a_h(u, w_h) - F(w_h) &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}\, w_h = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{e\subseteq\partial K} \int_e \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}\, (w_h - \mathcal{P}_{0,e}(w_h)) \\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{e\subseteq\partial K} \int_e (\nabla u - \nabla \Pi_h(u)) \cdot \boldsymbol{\nu}\, (w_h - \mathcal{P}_{0,e}(w_h)) \qquad \forall\, w_h \in V_h\,, \end{aligned} \tag{5}$$

donde $\Pi_h : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to X_h$ es el operador de interpolación global de Lagrange y $\mathcal{P}_{0,e} : L^2(e) \to \mathbf{P}_0(e)$ es el proyector ortogonal.

d) Deduzca a partir de (4) y (5) que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|u - u_h\|_h \le C\, h\, |u|_{2,\Omega}\,.$$

6. Sean $\hat{K} = [0, 1]$, $K = [x_{j-1}, x_j]$, $h_j := x_j - x_{j-1} > 0$, y considere la aplicación afín $F : \hat{K} \to K$ definida por

$$F(\hat{x}) = h_j\, \hat{x} + x_{j-1} \qquad \forall\, \hat{x} \in \hat{K}\,.$$

(a) Dado un entero $r \ge 0$, demuestre que $v \in H^r(K)$ sí y sólo sí $\hat{v} := v \circ F \in H^r(\hat{K})$, y en tal caso pruebe que

$$|\hat{v}|_{H^r(\hat{K})} = h_j^{r-1/2}\, |v|_{H^r(K)}\,.$$

(b) Sean m, k enteros tal que $0 \le m \le k+1$, y sea $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^m(\hat{K}))$ tal que $\hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p} \quad \forall\, \hat{p} \in \mathbf{P}_k$, donde $\mathbf{P}_k$ es el espacio de polinomios de grado $\le k$. Además, sea Π el operador definido por

$$\Pi v \,=\, (\hat{\Pi}\hat{v}) \circ F^{-1} \qquad \forall\, v \in H^{k+1}(K)\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\hat{K}$ y $\hat{\Pi}$, tal que

$$\|v - \Pi v\|_{H^m(K)} \;\le\; C\; h_j^{k+1-m}\; |v|_{H^{k+1}(K)}\,.$$

7. Sean $(X_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{X_1})$, $(X_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{X_2})$, e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_{Y})$ espacios de Hilbert, defina el producto $X := X_1 \times X_2$, y considere operadores lineales y acotados $\mathbf{P} : X \to X$, $\mathbf{Q} : X \to Y$, $A : X_1 \to X_1$, $B : X_1 \to X_2$, y $C : X_2 \to X_2$, tales que:

$$\mathbf{P} \,:=\, \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & -C \end{pmatrix}.$$

Sea $V := V_1 \times V_2$ el kernel de $\mathbf{Q}$, donde $V_1 \subseteq X_1$ y $V_2 \subseteq X_2$, y suponga que:

i) existe $\alpha > 0$ tal que

$$\langle A(x_1), x_1\rangle_{X_1} \,\ge\, \alpha\, \|x_1\|_{X_1}^2 \qquad \forall\, x_1 \in V_1\,.$$

ii) existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{x_1 \in V_1 \backslash \mathbf{0}} \frac{\langle B(x_1), x_2\rangle_{X_2}}{\|x_1\|_{X_1}} \,\ge\, \beta\, \|x_2\|_{X_2} \qquad \forall\, x_2 \in V_2\,.$$

iii) $\langle C(x_2), x_2\rangle_{X_2} \,\ge\, 0 \qquad \forall\, x_2 \in V_2$.

iv) existe $\tilde{\beta} > 0$ tal que $\|\mathbf{Q}^*(y)\|_X \,\ge\, \tilde{\beta}\, \|y\|_Y \qquad \forall\, y \in Y$.

a) Pruebe que para todo $(f, g) \in X \times Y$ existe un único $(x, y) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x) \,+\, \mathbf{Q}^*(y) \;&=\; f\,, \\ \mathbf{Q}(x) \;&=\; g\,, \end{aligned} \tag{6}$$

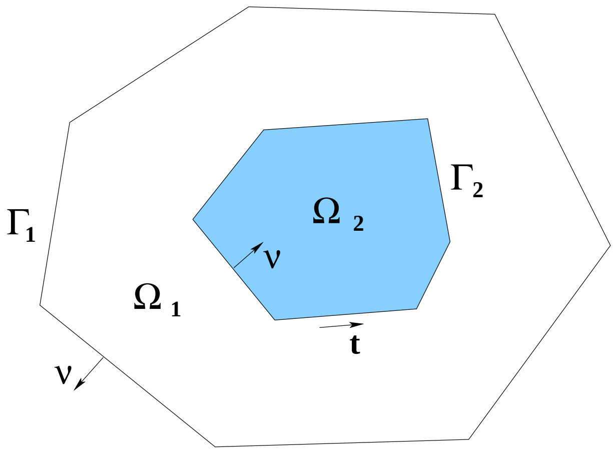
y encuentre explícitamente una constante $C > 0$ tal que

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} \,\le\, C \Big\{ \|f\|_X \,+\, \|g\|_Y \Big\}.$$

b) Defina un esquema de Galerkin para (6) y establezca condiciones suficientes que aseguren su solubilidad única y estabilidad.

c) Demuestre la estimación de Cea para el esquema definido en b).

8. Sea Ω_2 un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ_2, y sea Ω_1 la region anular acotada por Γ_2 y por una curva cerrada Γ_1 cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_2$, como se muestra en la siguiente figura:



El propósito de este ejercicio es analizar el acoplamiento de un fluido viscoso que ocupa la region Ω_1 con un material poroso que vive en Ω_2. Si $\mu > 0$ es la viscosidad y $\mathbf{K}$ es una matriz simétrica y uniformemente definida positiva que representa la permeabilidad del medio poroso, entonces las ecuaciones constitutivas están dadas por las leyes de Stokes y de Darcy, respectivamente, esto es:

$$\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) \;=\; -\,p_1\,\mathbf{I} \,+\, 2\,\mu\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_1) \quad \text{en} \quad \Omega_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 \;=\; -\,\mathbf{K}\,\nabla\,p_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,,$$

donde $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ y (p_1, p_2) denotan las velocidades y presiones en los dominios correspondientes, $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, $\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)$ es el tensor de esfuerzos y $\mathbf{e}(\mathbf{u}_1) := \frac{1}{2}\Big(\nabla\mathbf{u}_1 + (\nabla\mathbf{u}_1)^{\mathtt{t}}\Big)$ es el tensor de deformaciones. Así, dados $\mathbf{f}_1 \in [L^2(\Omega_1)]^2$ y $f_2 \in L^2(\Omega_2)$ tal que $\int_{\Omega_2} f_2 = 0$, nos interesa: Hallar $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ y $p := (p_1, p_2)$ tales que

$$\left\{\begin{array}{rclll}
-\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) & = & \mathbf{f}_1 & \text{en} \quad \Omega_1 & \text{(conservación de momentum)}\,, \\
\operatorname{div}\mathbf{u}_1 & = & 0 & \text{en} \quad \Omega_1 & \text{(conservación de masa)}\,, \\
\mathbf{u}_1 & = & 0 & \text{en} \quad \Gamma_1 & \text{(deslizamiento nulo)}\,, \\
\operatorname{div}\mathbf{u}_2 & = & f_2 & \text{en} \quad \Omega_2 & \text{(conservación de masa)}\,, \\
\mathbf{u}_1\cdot\boldsymbol{\nu} & = & \mathbf{u}_2\cdot\boldsymbol{\nu} & \text{en} \quad \Gamma_2 & \text{(conservación de masa)}\,, \\
(\,\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)\boldsymbol{\nu}\,)\cdot\boldsymbol{\nu} & = & -\,p_2 & \text{en} \quad \Gamma_2 & \text{(balance de fuerzas normales)}\,, \\
-\,\dfrac{\kappa}{\mu}\,(\,\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)\,\boldsymbol{\nu})\cdot\mathbf{t} & = & \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{t} & \text{en} \quad \Gamma_2 & \text{(ley de Beavers-Joseph-Saffman)}\,,
\end{array}\right.$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal unitario exterior a Ω_1, $\mathbf{t}$ es el vector tangencial a Γ_2, $\kappa > 0$ es la constante de fricción, y la ley de Beavers-Joseph-Saffman establece que el esfuerzo de corte es proporcional a la velocidad de deslizamiento (bajo el supuesto experimental que $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{t}$ es despreciable).

a) Pruebe que el balance de fuerzas normales y la ley de Beavers-Joseph-Saffman pueden re-escribirse formalmente como la siguiente ecuación en $H^{-1/2}(\Gamma_2)$:

$$\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)\,\boldsymbol{\nu} \,+\, p_2\,\boldsymbol{\nu} \,=\, -\,\frac{\mu}{\kappa}\,(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{t})\,\mathbf{t} \quad \text{en} \quad \Gamma_2\,.$$

b) Defina los espacios

$$[H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)]^2 := \{\,\mathbf{v}_1 \,\in\, [H^1(\Omega_1)]^2 : \quad \mathbf{v}_1 \,=\, \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma_1\}\,,$$

$$H(\mathrm{div}\,;\Omega_2) \,:=\, \{\,\mathbf{v}_2 \,\in\, [L^2(\Omega_2)]^2 : \quad \mathrm{div}\;\mathbf{v}_2 \,\in\, L^2(\Omega_2)\,\}\,,$$

$$H \,:=\, [H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)]^2 \times H(\mathrm{div}\,;\Omega_2)\,,$$

$$Q \,:=\, (L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2))\times H^{1/2}(\Gamma_2)\,,$$

y demuestre que una formulación variacional mixta del presente problema de transmisión se reduce a: Hallar $(\mathbf{u},(p,\lambda)) \,\in\, H\times Q$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \,+\, \mathbf{b}(\mathbf{v},(p,\lambda)) \;&=\; \int_{\Omega_1} \mathbf{f}_1\cdot\mathbf{v}_1 \qquad \forall\,\mathbf{v} := (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) \,\in\, H\,,\\
\mathbf{b}(\mathbf{u},(q,\xi)) \;&=\; -\int_{\Omega_2} f_2\,q_2 \quad \forall\,(q,\xi) \,:=\, ((q_1,q_2),\xi) \,\in\, Q\,,
\end{aligned} \tag{7}$$

donde $\mathbf{a} : H\times H \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{b} : H\times Q\to\mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \,:=\, 2\,\mu\int_{\Omega_1}\mathbf{e}(\mathbf{u}_1):\mathbf{e}(\mathbf{v}_1) \,+\, \frac{\mu}{\kappa}\int_{\Gamma_2}(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{t})\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{t}) \,+\, \int_{\Omega_2}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}_2\,,$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{v},(q,\xi)) \,:=\, -\int_{\Omega_1} q_1\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_1 \,-\, \int_{\Omega_2} q_2\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_2 \,+\, \int_{\Gamma_2}(\mathbf{v}_1\cdot\boldsymbol{\nu}+\mathbf{v}_2\cdot\boldsymbol{\nu})\,\xi\,.$$

c) Demuestre que si $(\mathbf{u},(p,\lambda)) \,\in\, H\times Q$ es una solución de (7), entonces para todo $c\,\in\,\mathbf{R}$, $(\mathbf{u},(\tilde{p},\tilde{\lambda})) \,\in\, H\times Q$ también lo es, con $\tilde{p} \,:=\, (p_1+c, p_2+c)$ y $\tilde{\lambda} \,:=\, \lambda + c$. En tal caso, deduzca cómo debe modificarse la definición del espacio Q para evitar estas soluciones adicionales.

d) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que el problema (7) (con el espacio Q modificado de acuerdo a c)) posee una única solución.

9. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{div}\,;\Omega) \,:=\, \left\{\, v\in[L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\;v \,:=\, \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \,\in\, L^2(\Omega)\,\right\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v,w\rangle_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} \,:=\, \int_\Omega v\cdot w\,dx \,+\, \int_\Omega \mathrm{div}\;v\;\mathrm{div}\;w\,dx \quad \forall\,v,\,w\in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\,.$$

a) Demuestre que $(H(\text{div}\,;\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\text{div}\,;\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

b) Utilice el hecho que $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$ es denso en $H(\text{div}\,;\Omega)$ para probar que existe un operador lineal y continuo $\gamma\,:\,H(\text{div}\,;\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que $\gamma(u) \,=\, u\cdot\nu\ \forall\ u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$, donde ν es el vector normal unitario exterior a Γ.

10. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\text{rot};\Omega) \,:=\, \{\, v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \,:\quad \text{rot}\, v \,:=\, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \,\in\, L^2(\Omega)\,\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H(\text{rot};\Omega)} \,:=\, \int_\Omega v\cdot w\,dx \,+\, \int_\Omega \text{rot}\, v\ \text{rot}\, w\,dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\text{rot};\Omega)\,.$$

a) Demuestre que $(H(\text{rot};\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\text{rot};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que existe un operador lineal y continuo $\gamma\,:\,H(\text{rot};\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que $\gamma(u) \,=\, u\cdot\tau\ \forall\ u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde τ es el vector **tangencial** unitario de Γ.

11. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,.$$

a) Demuestre que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \,\in\, H(\text{div};\Omega)\times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dx \,+\, \int_\Omega u\,\text{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx \,-\, \int_\Omega v\,\text{div}(\boldsymbol{\sigma})\,dx \,=\, \int_\Omega f\,v\,dx \tag{8}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v) \,\in\, H(\text{div};\Omega)\times L^2(\Omega)$.

b) Dados $\delta_1\,,\ \delta_2 \,>\, 0$, fundamente la introducción de las ecuaciones

$$\delta_1 \int_\Omega (\nabla u - \boldsymbol{\sigma})\cdot(\nabla v + \boldsymbol{\tau})\,dx = 0 \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\text{div};\Omega)\times H_0^1(\Omega), \tag{9}$$

$$\delta_2 \int_\Omega \text{div}(\boldsymbol{\sigma})\,\text{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx \,=\, -\,\delta_2 \int_\Omega f\,\text{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \,\in\, H(\text{div};\Omega)\,, \tag{10}$$

luego sume (8), (9) y (10), y obtenga una formulación variacional mixta modificada: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \,\in\, \mathbf{H}$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) \,=\, F(\boldsymbol{\tau}, v) \qquad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, v) \,\in\, \mathbf{H}\,, \tag{11}$$

donde $A : \mathbf{H}\times\mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es una forma bilineal y $F\,:\,\mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es un funcional lineal. Entonces, demuestre que, eligiendo δ_1 y δ_2 convenientemente, el problema (11) posee una única solución, la cual depende continuamente del dato f.

12. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Dada $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento* $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ *y el tensor de esfuerzos* $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ *tal que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \,\mathrm{tr}\, \mathbf{e}(\mathbf{u})\, \mathbf{I}_2 + 2\mu\, \mathbf{e}(\mathbf{u}) \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

donde λ, $\mu > 0$ son las constantes de Lamé, $\mathbf{I}_2$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathbf{T}})$ es el tensor de deformaciones. Es fácil verificar que $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ puede re-escribirse como $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} - \gamma \quad \text{en} \quad \Omega$, donde $\gamma := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^{\mathbf{T}})$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio

$$\mathcal{R} := \{\, \eta \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \quad \eta + \eta^{\mathbf{T}} = 0 \,\}\,.$$

a) Demuestre que una formulación variacional **mixta** de este problema se reduce a: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \gamma)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \gamma)) &= \;\; 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{v}, \eta)) &= -\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx \quad \forall\, (\mathbf{v}, \eta) \in Q\,, \end{aligned} \tag{12}$$

donde $H := H(\mathrm{div};\Omega)$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{2\mu} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}\, dx - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\, \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,$$

$$b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) := \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta\, dx \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) \in H \times Q\,.$$

b) Demuestre que a y b satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi.

13. Sean X y M espacios de Hilbert y sean $a : X \times X \to \mathbf{R}$, $b : X \times M \to \mathbf{R}$ dos formas bilineales acotadas. Suponga además que a es simétrica y semi-definida positiva sobre X. Dados $F \in X'$, $G \in M'$ se define el operador $\mathcal{J} : X \times M \to \mathbf{R}$,

$$\mathcal{J}(v, \mu) := \frac{1}{2}\, a(v, v) + b(v, \mu) - F(v) - G(\mu)\,.$$

Considere entonces los siguientes problemas variacionales:

Hallar $(u, \lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= F(v) \quad \forall\, v \in X\,, \\ b(u, \mu) &= G(\mu) \quad \forall\, \mu \in M\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Hallar $(u, \lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\mathcal{J}(u, \mu) \le \mathcal{J}(u, \lambda) \le \mathcal{J}(v, \lambda) \qquad \forall\, (v, \mu) \in X \times M\,. \tag{14}$$

Demuestre que (u, λ) es solución de (13) si y sólo si (u, λ) es solución de (14).

14. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ.

a) Considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ con norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y semi-norma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$. Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|^2_{H^1(\Omega)} + \left(\int_\Omega v \right)^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\, |||v||| \,\leq\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, C_2\, |||v||| \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

b) Considere el problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \int_\Omega u \,=\, 0\,,$$

donde $f \in L^2(\Omega)$ es tal que $\displaystyle\int_\Omega f = 0$, y demuestre que su formulación débil se reduce a: Hallar $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,+\, \lambda \int_\Omega v \,=\, \int_\Omega f v \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

$$\mu \int_\Omega u \,=\, 0 \qquad \forall\, \mu \in \mathbf{R}\,.$$

Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que este problema tiene solución única, la cual depende continuamente de f.

c) Extienda el análisis en b) al caso discreto y deduzca espacios de elementos finitos que garanticen la solubilidad y estabilidad del esquema de Galerkin asociado. Indique la razón de convergencia correspondiente.

15. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X, X)$, $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$

y que existen constantes positivas α, β tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x \rangle_X \;\geq\; \alpha\, ||x||^2_X \qquad \forall\, x \in X$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle Q(x), y \rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\, ||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ & \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $||\mathbf{P}||$, α, β y $||Q||$, tal que $||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \,\leq\, C\, \{\, ||f|| + ||g||\,\}$.

16. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. Se dice que un material que ocupa la region Ω es **casi-incompresible** si se necesitan cantidades muy altas de energía para producir cambios pequeños en su densidad, lo cual genera una gran diferencia entre los tamaños de las constantes de Lamé. En tal caso, la formulación en desplazamiento del problema de elasticidad lineal consiste en: Hallar $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ tal que

$$-2\,\mu\,\mathbf{div}\,\mathbf{e}(\mathbf{u}) \,-\, \lambda\,\nabla(\mathrm{div}\,\mathbf{u}) \,=\, \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \mathbf{u} \,=\, \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{15}$$

donde $\lambda >> \mu > 0$ son las constantes de Lamé y

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\,(\nabla\,\mathbf{u} + (\nabla\,\mathbf{u})^{\mathtt{t}})$$

es el tensor de deformaciones.

a) Defina la incógnita auxiliar $p \,:=\, \lambda\,\mathrm{div}\,\,\mathbf{u}$ en Ω y demuestre que una formulación variacional de (15) se reduce a: Hallar $(\mathbf{u}, p) \,\in\, [H_0^1(\Omega)]^2 \,\times\, L_0^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} 2\,\mu \int_\Omega \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \,+\, \int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\,\mathbf{v} \,&=\, \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \qquad \forall\,\mathbf{v} \,\in\, [H_0^1(\Omega)]^2\,, \\ \int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\,\mathbf{u} \,-\, \frac{1}{\lambda}\int_\Omega pq \,&=\, 0 \qquad\qquad \forall\,q \,\in\, L_0^2(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{16}$$

b) Aplique el teorema abstracto del problema anterior para probar que (16) tiene una única solución que depende continuamente del dato $\mathbf{f}$.

17. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \,:\, X \to X$, $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \,\geq\, 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$

que $\mathbf{P}$ es **nolineal**, y que existen constantes M, α, $\beta > 0$ tales que

$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \,\leq\, M\,||x - \bar{x}||_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x - \bar{x}\rangle_X \,\geq\, \alpha\,||x - \bar{x}||_X^2 \quad \forall\, x,\, \bar{x} \,\in X\,,$$

y

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle Q(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \,\geq\, \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de M, α, β y $||Q||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \,\leq\, C\,\{\,||f|| + ||g|| + ||\mathbf{P}(0)||\,\}\,.$$

18. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. El Problema de Stokes consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$\begin{aligned} -\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\,dx = 0\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Defina los espacios

$$H := [H_0^1(\Omega)]^2 \quad \text{y} \quad Q := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\,dx = 0 \right\}.$$

a) Demuestre que la formulación débil de (17) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, p) &= F(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H\,, \\ B(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned} \tag{18}$$

donde $A : H \times H \to \mathbf{R}$, $B : H \times Q \to \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\,dx\,,$$

$$B(\mathbf{v}, p) := -\int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v}\,dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\,dx\,.$$

b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que el problema (18) posee una única solución, la cual depende continuamente del dato $\mathbf{f}$.

19. Sean $\Omega =]a, b[$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno

$$u^{(4)} = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0\,. \tag{19}$$

i) Defina la incógnita auxiliar $\sigma := u''$ en Ω y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (19) se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx + \int_\Omega u'\,\tau'\,dx &= 0 \qquad \forall\, \tau \in H^1(\Omega)\,, \\ \int_\Omega v'\,\sigma'\,dx &= -\int_\Omega f\,v\,dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{20}$$

ii) Aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (20) tiene una única solución que depende continuamente del dato f.

20. Dados $\Omega := (0,1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$- u'' = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) = 0\,, \quad u'(1) = 1\,. \tag{21}$$

a) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (21) se reduce a: *Hallar* $(\sigma, (u, \varphi)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, (u, \varphi)) &= F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma, (v, \psi)) &= G((v, \psi)) \quad \forall\, (v, \psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{22}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) &:= \int_\Omega \sigma\, \tau\, dx \qquad \forall\, \sigma,\, \tau \in H\,, \\ b(\tau, (v, \psi)) &:= \int_\Omega v\, \tau'\, dx \,+\, \psi\, \tau(1) \quad \forall\, (\tau, (v, \psi)) \in H \times Q\,. \end{aligned}$$

b) Defina los funcionales F y G, y aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (22) tiene una única solución.

21. (Lema de Fortin). Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_H} \,\geq\, \beta\, \|q\|_Q \qquad \forall\, q \in Q\,. \tag{23}$$

Sean $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ tal que

$$b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) \,=\, 0 \qquad \forall\, v \in H\,, \quad \forall\, q_n \in Q_n\,.$$

Suponga que la familia de operadores $\{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H, H_n)} \,\leq\, C$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de n, tal que

$$\sup_{\substack{v_n \in H_n \\ v_n \neq 0}} \frac{b(v_n, q_n)}{\|v_n\|_H} \,\geq\, \beta^*\, \|q_n\|_Q \qquad \forall\, q_n \in Q_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}\,.$$

22. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

a) Demuestre que $\displaystyle\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \,=\, \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \,\geq\, \beta\, \|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$, y pruebe que $\quad H \,=\, R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

23. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\| \cdot \|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $| \cdot |_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i \; \forall\, i \in \{1, ..., n\}$, $\forall\, x := (x_1, ..., x_n)^{\mathbf{T}} \in \Omega$.

   a) (Desigualdad de Poincaré generalizada). Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|^2_{H^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{n} |\, \langle v, p_i \rangle_{H^2(\Omega)} \,|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,,$$

   y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \,|||v||| \,\leq\, \|v\|_{H^2(\Omega)} \,\leq\, C_2 \,|||v||| \quad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,.$$

   Ind.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción: suponga, en particular, que $\forall\, n \in \mathbf{N}$ existe $v_n \in H^2(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} > n\,|||v_n|||$. Luego, defina $w_n := \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}}$, observe que $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$ y que $|||w_n||| < \frac{1}{n}$, y aplique el hecho que la inclusión de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ es compacta.

   b) (Lema de Deny-Lions). Considere el espacio cuociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma $\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \inf\limits_{p \in P_1(\Omega)} \|v - p\|_{H^2(\Omega)}$, y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \,:=\, |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

   Demuestre que $| \cdot |_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \,\leq\, \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$$

$$\leq\, C\,|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \,\in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

   Ind.: Note que para todo $p \in P_1(\Omega)$ y para todo α con $|\alpha| = 2$ se tiene $\partial^\alpha p = 0$. Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.

   c) (Lema de Bramble-Hilbert). Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p$ $\forall\, p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, C\,|v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \,\in\, H^2(\Omega)\,.$$

   Ind.: Note que $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v - p)$ $\forall\, p \in P_1(\Omega)$, y luego aplique el Lema de Deny-Lions.

24. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal y sea $\mathcal{T}_h$ una triangularización de $\bar{\Omega}$. Dado $K \in \mathcal{T}_h$, sea $\boldsymbol{\nu}_K$ el vector normal a ∂K y denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial K}$ la paridad dual entre $H^{-1/2}(\partial K)$ y $H^{1/2}(\partial K)$.

(a) Defina los espacios

$$X := \Big\{ v \in L^2(\Omega) : \quad v|_K \in H^1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

$$Z := \Big\{ \boldsymbol{\lambda} := (\lambda_K)_{K\in\mathcal{T}_h} \in \Pi_{K\in\mathcal{T}_h} H^{-1/2}(\partial K) : \quad \exists\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \\ \text{tal que} \quad \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K = \lambda_K \quad \text{en} \quad \partial K \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

y demuestre que

$$H_0^1(\Omega) := \Big\{ v \in X : \quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle \lambda_K, v|_K \rangle_{\partial K} = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\lambda} \in Z \Big\}.$$

(b) Defina los espacios

$$\tilde{X} := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \boldsymbol{\tau}|_K \in H(\mathrm{div}\,;K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

$$\tilde{Z} := \Big\{ \boldsymbol{\xi} := (\xi_K)_{K\in\mathcal{T}_h} \in \Pi_{K\in\mathcal{T}_h} H^{1/2}(\partial K) : \quad \exists\, v \in H_0^1(\Omega) \\ \text{tal que} \quad v = \xi_K \quad \text{en} \quad \partial K \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

y demuestre que

$$H(\mathrm{div}\,;\Omega) := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in \tilde{X} : \quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K, \xi_K \rangle_{\partial K} = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \tilde{Z} \Big\}.$$

25. Sean $\Omega :=]0,1[$, $f \in L^2(\Omega)$, $\kappa \in]0,2[$, y considere el problema de valores de contorno:

$$u'' + \kappa\, u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) = u(1) = 0\,. \tag{24}$$

Además, para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca la partición uniforme

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1\,,$$

con $x_j - x_{j-1} = \dfrac{1}{n+1}$ $\forall\, j \in \{1, 2, ..., n+1\}$, y defina el espacio

$$H_n := \Big\{ v \in C(\bar{\Omega}) : \quad v\,|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathbf{P}_1([x_{j-1}, x_j]) \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., n+1\} \\ y \quad v(0) = v(1) = 0 \Big\}.$$

a) Establezca la formulación variacional de (24) y demuestre que ella posee una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$.

b) Denote por $u_n \in H_n$ la solución (cuando ella existe) del esquema de Galerkin asociado y pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} = 0$.

26. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ. Dado $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, el Problema de Stokes con condiciones de contorno de Dirichlet consiste en hallar un campo tensorial $\boldsymbol{\sigma}$ (esfuerzo), un campo vectorial $\mathbf{u}$ (velocidad) y un campo escalar p (presión) tal que:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\sigma} = 2\,\mu\,\nabla\mathbf{u} - p\,\mathbf{I} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} = -\,\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \end{gathered} \tag{25}$$

donde μ es la viscosidad cinemática del fluido, $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{div}$ es el operador divergencia div actuando sobre cada fila del tensor.

a) Demuestre que, al eliminar la incógnita p, el problema (25) se transforma en:

$$\frac{1}{2\,\mu}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} = \nabla\mathbf{u} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} = -\,\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{26}$$

b) Pruebe que la formulación variacional de (26) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\,\mu}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} + \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} &= 0 \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H \\ \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} &= -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \quad \forall\,\mathbf{v} \in Q\,, \end{aligned} \tag{27}$$

donde

$$H := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div};\Omega) : \quad \int_\Omega \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau} = 0 \right\} \quad \text{y} \quad Q = [L^2(\Omega)]^2\,.$$

c) Defina subespacios de elementos finitos apropiados $H_h \subseteq H$ y $Q_h \subseteq Q$, y pruebe que el esquema de Galerkin asociado a (27) es únicamente soluble, estable y convergente.

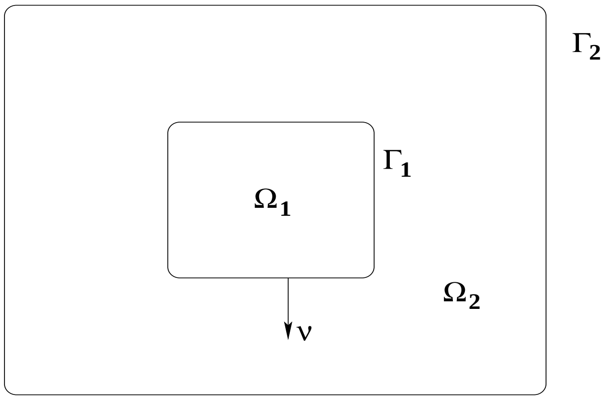
d) Aplique un método similar al empleado con el problema de elasticidad y defina una formulación aumentada de (27) cuya forma bilineal resulte fuertemente coerciva.

27. Sean H_h y Q_h subespacios de dimensión finita de espacios de Hilbert H y Q, respectivamente, y sean $\mathbf{a} : H \times H \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{b} : H \times Q \to \mathbf{R}$ formas bilineales acotadas que satisfacen las hipótesis de las versiones continua y discreta del Teorema de Babuška-Brezzi, con constantes independientes de h. Sean $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H \times Q$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in H_h \times Q_h$ las únicas soluciones de los problemas de punto-silla continuo y discreto, respectivamente, asociados a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Suponga que el kernel discreto de $\mathbf{b}$ está contenido en su kernel continuo y demuestre que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_H \;\le\; C \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_H\,.$$

28. Sea Ω_1 un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ_1, y sea Ω_2 la region anular acotada por Γ_1 y por una curva cerrada Γ_2 cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_1$ (ver figura). Entonces, dados $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, $g_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, y $g_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, interesa el siguiente PROBLEMA DE TRANSMISIÓN: Hallar $(u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ tales que

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= f_1 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \quad -\Delta u_2 = f_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \\ u_1 - u_2 &= g_1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1\,, \quad u_2 = g_2 \quad \text{en} \quad \Gamma_2\,. \end{aligned} \tag{28}$$



a) Demuestre que una FORMULACIÓN VARIACIONAL MIXTA-DUAL de (28) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega_1) \times H(\mathrm{div}\,;\Omega_2)$, $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\xi \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_{\Omega_i} \sigma_i \cdot \tau_i + \int_{\Omega_i} u_i \,\mathrm{div}\, \tau_i \right\} + \langle \tau_1 \cdot \nu - \tau_2 \cdot \nu, \xi \rangle_1 &= F(\boldsymbol{\tau})\,, \\ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} v_i \,\mathrm{div}\, \sigma_i + \langle \sigma_1 \cdot \nu - \sigma_2 \cdot \nu, \lambda \rangle_1 &= G(\mathbf{v}, \lambda)\,, \end{aligned} \tag{29}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega_1) \times H(\mathrm{div}\,;\Omega_2)$, $\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, donde

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \langle \tau_1 \cdot \nu, g_1 \rangle_1 + \langle \tau_2 \cdot \nu, g_2 \rangle_2\,, \quad G(\mathbf{v}, \lambda) := -\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} f_i\, v_i\,,$$

y $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ denota la paridad dual entre $[H^{-1/2}(\Gamma_i)]^2$ y $[H^{1/2}(\Gamma_i)]^2 \quad \forall\, i \in \{1, 2\}$.

b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que el problema (29) posee una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \xi)$ en los espacios indicados.

c) Defina subespacios de elementos finitos explícitos y pruebe que el esquema de Galerkin resultante tiene solución única, es estable y convergente.

29. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ Lipschitz continua, y sean $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$ tal que $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{g}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ. El Problema de Stokes Generalizado consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{aligned} \alpha\,\mathbf{u} - \nu\,\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \end{aligned} \tag{30}$$

donde $\nu > 0$ es la viscosidad del fluido y α es un parámetro positivo.

a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\mathbf{t} := \nabla\mathbf{u}$ y $\boldsymbol{\sigma} := \nu\,\nabla\mathbf{u} - p\,\mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y pruebe que una formulación variacional mixta de (30) se reduce a: Hallar $(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \xi) \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^2 \times H(\operatorname{div};\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \nu\int_\Omega \mathbf{t}:\mathbf{s} + \alpha\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{s} - \int_\Omega \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{v} - \int_\Omega p\,\mathrm{tr}\,\mathbf{s} &= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,, \\ -\int_\Omega \boldsymbol{\tau}:\mathbf{t} - \int_\Omega \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{u} \qquad\qquad + \quad \xi\int_\Omega \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau} &= -\langle\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}, \mathbf{g}\rangle\,, \\ -\int_\Omega q\,\mathrm{tr}\,\mathbf{t} + \eta\int_\Omega \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma} &= 0\,, \end{aligned} \tag{31}$$

para todo $(\mathbf{s}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, q, \eta) \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^2 \times H(\operatorname{div};\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$.

b) Defina espacios de Hilbert y operadores (formas bilineales) convenientes y pruebe que (31) puede reformularse en base a una estructura dual-dual.

c) Utilice lo indicado en b) para demostrar que (31) tiene una única solución y que existe una constante $C(\alpha,\nu) > 0$ tal que

$$\|(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \xi)\| \;\le\; C(\alpha,\nu)\;\{\,\|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|\,\}\,.$$

d) Extienda el análisis en c) al caso discreto y **deduzca** espacios de elementos finitos que garanticen que el esquema de Galerkin asociado a (31) tiene una única solución.

30. Sea Ω un dominio poligonal convexo de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ, y dado $f \in L^2(\Omega)$, considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:

$$\Delta u + u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{32}$$

i) Introduzca la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω y pruebe que una formulación variacional mixta de (32) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\operatorname{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} - \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma})\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) = -\int_\Omega f\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div};\Omega)\,. \tag{33}$$

ii) Defina el operador $P : H(\mathrm{div};\Omega) \to [L^2(\Omega)]^2$ que a cada $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ le asigna $P(\boldsymbol{\tau}) := \nabla z$, donde $z \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución del problema de valores de contorno: $\Delta z = \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})$ en Ω, $z = 0$ en Γ. Pruebe que P es compacto y que $H(\mathrm{div};\Omega) = P(H(\mathrm{div};\Omega)) \oplus (I - P)(H(\mathrm{div};\Omega))$.

iii) Utilice la descomposición anterior de $H(\mathrm{div};\Omega)$ para demostrar que (33) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) + K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) = F(\boldsymbol{\tau}) \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,, \tag{34}$$

donde A y B son formas bilineales acotadas cuyos operadores inducidos $\mathbf{A} : H(\mathrm{div};\Omega) \to H(\mathrm{div};\Omega)$ y $\mathbf{K} : H(\mathrm{div};\Omega) \to H(\mathrm{div};\Omega)$ son biyectivo y compacto, respectivamente, y F es el funcional dado a la derecha de (33).

IND. Defina el operador $S(\boldsymbol{\tau}) := (I - 2\,P)(\boldsymbol{\tau})$ y considere la expresión $A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau}))$ para probar que A satisface las condiciones inf-sup continuas.

iv) Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia de subespacios de dimensión finita de $H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que $\lim\limits_{h\to 0} \mathrm{dist}\,(\boldsymbol{\tau}, H_h) = 0$ para todo $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$, y considere el esquema de Galerkin perturbado: Hallar $\boldsymbol{\sigma}_h \in H_h$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = F(\boldsymbol{\tau}_h) \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau}_h \in H_h\,. \tag{35}$$

Suponga que existen operadores lineales $\mathcal{E}_h : [H^1(\Omega)]^2 \to H_h$ tales que

$$\mathrm{div}\,(\mathcal{E}_h\, P(\boldsymbol{\tau}_h)) = \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}_h) \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau}_h \in H_h\,,$$

y

$$\|\boldsymbol{\tau} - \mathcal{E}_h(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2} \le C\,h\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in [H^1(\Omega)]^2\,.$$

Demuestre que existe $h_0 > 0$ tal que $\forall\, h \le h_0$ el problema (35) tiene solución única, la cual es estable y convergente con constantes independientes de h.

v) Qué se puede decir del esquema de Galerkin respectivo para (34)?.

31. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. El objetivo de este problema es demostrar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \ge \frac{1}{2}\,|\mathbf{v}|^2_{[H^1(\Omega)]^2} \qquad \forall\, \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2\,, \tag{36}$$

donde $\mathbf{e}(\mathbf{v}) := \dfrac{1}{2}\left\{\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\mathrm{t}}\right\}$. Para tal efecto, proceda como sigue.

i) Dados $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_{ij})$ y $\boldsymbol{\tau} := (\tau_{ij})$ en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, se define el producto tensorial $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} := \sum\limits_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}\,\tau_{ij}$ y se introducen los subespacios

$$\mathbf{R}^{2\times 2}_{sim} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^{2\times 2} : \quad \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{\tau}\} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}^{2\times 2}_{asim} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^{2\times 2} : \quad \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{t}} = -\boldsymbol{\tau}\}\,.$$

Pruebe que $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{R}^{2\times 2}_{sim}, \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^{2\times 2}_{asim}$.

ii) Note que $\nabla \mathbf{v} \,=\, \mathbf{e}(\mathbf{v}) + \mathbf{w}(\mathbf{v})\,, \quad$ con $\quad \mathbf{w}(\mathbf{v}) \,:=\, \dfrac{1}{2}\left\{\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^{\mathtt{t}}\right\}$, y recuerde que $\|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,=\, \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \,\in\, [L^2(\Omega)]^{2\times 2}$, para probar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,-\, \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,=\, \int_\Omega \nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{v})^{\mathtt{t}}$$

y

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,+\, \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,=\, \int_\Omega \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}\,.$$

iii) Deduzca la identidad $\nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{v})^{\mathtt{t}} \,=\, \mathrm{div}\,\left\{\nabla \mathbf{v}\, \mathbf{v} \,-\, \mathrm{div}\,(\mathbf{v})\, \mathbf{v}\right\} \,+\, (\mathrm{div}\,(\mathbf{v}))^2$ y concluya la desigualdad (36).

32. Sean H_1, H_2, Q_1, Q_2 espacios de Hilbert sobre $\mathbf{R}$, y sean $a : H_1 \times H_2 \to \mathbf{R}$ y $b_j : H_j \times Q_j \to \mathbf{R}$, $j \in \{1,2\}$, formas bilineales acotadas con operadores inducidos $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ y $\mathbf{B}_j \in \mathcal{L}(H_j, Q_j)$, $j \in \{1,2\}$, respectivamente. También, sea K_j el espacio nulo de $\mathbf{B}_j$, $j \in \{1,2\}$, y sea Π_2 el proyector ortogonal de H_2 en K_2. Suponga que:

i) $\Pi_2\,\mathbf{A} : K_1 \to K_2$ es un isomorfismo.

ii) existen β_1, $\beta_2 \,>\, 0$ tales que

$$\|\mathbf{B}_j^*(q)\|_{H_j} \,:=\, \sup_{\substack{v\in H_j\\ v\neq 0}} \frac{b_j(v,q)}{\|v\|_{H_j}} \,\geq\, \beta_j\,\|q\|_{Q_j} \quad \forall\, q \in Q_j, \quad \forall\, j \in \{1,2\}\,.$$

Pruebe que, dados $F \in H_2'$ y $G \in Q_1'$, existe un único $(u,p) \in H_1 \times Q_2$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) \,+\, b_2(v,p) &= F(v) \quad \forall\, v \in H_2\,,\\ b_1(u,q) &= G(q) \quad \forall\, q \in Q_1\,. \end{aligned}$$

Además, pruebe que la hipótesis i) es equivalente a cada una de las siguientes:

a) existe $\alpha_1 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{v\in K_2\\ v\neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|v\|_{H_2}} \,\geq\, \alpha_1\,\|u\|_{H_1} \qquad \forall\, u \in K_1$$

y $\displaystyle\sup_{u\in K_1} a(u,v) \,>\, 0 \qquad \forall\, v \in K_2,\; v \neq 0.$

b) existe $\alpha_2 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{u\in K_1\\ u\neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|u\|_{H_1}} \,\geq\, \alpha_2\,\|v\|_{H_2} \qquad \forall\, v \in K_2$$

y $\displaystyle\sup_{v\in K_2} a(u,v) \,>\, 0 \qquad \forall\, u \in K_1,\; u \neq 0.$

33. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave. Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, considere el problema de Neumann:

$$- \Delta u + u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = g \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{37}$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal exterior a Γ.

a) Defina incógnitas auxiliares convenientes y demuestre que una formulación mixta de (37) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\mathrm{div},\Omega} + \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}, \varphi \rangle_\Gamma &= - \int_\Omega f \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,, \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu}, \psi \rangle_\Gamma &= \langle g, \psi \rangle_\Gamma \quad \forall\, \psi \in H^{1/2}(\Gamma)\,, \end{aligned} \tag{38}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{div},\Omega}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ denotan el producto interior de $H(\mathrm{div};\Omega)$ y la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ con $H^{1/2}(\Gamma)$, respectivamente.

b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que (38) posee una única solución, la cual depende contínuamente de los datos f y g.

c) Defina subespacios de elementos finitos $H_h \subseteq H(\mathrm{div};\Omega)$ y $Q_h \subseteq H^{1/2}(\Gamma)$, y pruebe que el esquema de Galerkin resultante tiene solución única, es estable y convergente.

34. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ Lipschitz continua, y considere datos $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$. El Problema de Stokes con condiciones de contorno de Neumann consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathsf{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{aligned} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathrm{div}\, \mathbf{u} &= 0 && \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p\, \mathbf{n} &= \mathbf{g} && \text{en} \quad \Gamma\,, \end{aligned} \tag{39}$$

donde $\mu > 0$ es la viscosidad del fluido y $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ.

a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\varphi := -\mathbf{u}$ en Γ y $\boldsymbol{\sigma} := \mu \nabla \mathbf{u} - p\,\mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y pruebe que, eliminando p, se obtiene una formulación variacional mixta de la forma siguiente: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \varphi)) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \varphi)) &= 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{v}, \psi)) &= - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \langle \mathbf{g}, \psi \rangle \quad \forall\, (\mathbf{v}, \psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{40}$$

donde $H := H(\mathbf{div};\Omega)$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times [H^{1/2}(\Gamma)]^2$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la paridad dual entre $[H^{-1/2}(\Gamma)]^2$ y $[H^{1/2}(\Gamma)]^2$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales acotadas definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{\mu} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} \quad \text{y} \quad b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \psi)) := \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{\tau} + \langle \boldsymbol{\tau}\, \mathbf{n}, \psi \rangle\,.$$

b) Asuma condiciones de compatibilidad adecuadas sobre $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$, y luego aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que una modificación conveniente de (40) posee una única solución, la cual depende continuamente de los datos.

c) Defina subespacios de elementos finitos explícitos y pruebe que el esquema de Galerkin resultante del análisis en b) tiene solución única, es estable y convergente.

35. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ. Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, considere el problema de Dirichlet:

$$-\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = g \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{41}$$

a) Defina $\varphi := \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$ en Γ, donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal exterior a Γ, y demuestre que una formulación mixta de (41) se reduce a: Hallar $(u,\varphi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\varphi) &= \int_\Omega f\, v \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,, \\ b(u,\psi) &= \langle \psi, g\rangle_\Gamma \quad \forall\, \psi \in H^{-1/2}(\Gamma)\,, \end{aligned} \tag{42}$$

donde $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbf{R}$ y $b : H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \qquad \forall\, u,\, v \in H^1(\Omega),$$

$$b(v,\psi) = \langle \psi, v\rangle_\Gamma \qquad \forall\, (v,\psi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)\,,$$

y $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ con $H^{1/2}(\Gamma)$.

b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que (42) posee una única solución, la cual depende contínuamente de los datos f y g.

c) Utilice la desigualdad de Poincaré generalizada para probar que $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y $|\cdot|_{1,\Omega}$ son equivalentes en el espacio

$$\tilde{H}^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \quad \langle 1, v\rangle_\Gamma = 0 \right\}\,.$$

d) Sean H_h y Q_h subespacios de elementos finitos de $H^1(\Omega)$ y $H^{-1/2}(\Gamma)$, respectivamente, tal que

$$Q_h := \{\psi_h \in L^2(\Gamma) : \quad \psi_h|_{\Gamma_j} \in \mathbf{P}_0(\Gamma_j) \quad \forall\, j \in \{1,2,...,m\}\}\,,$$

donde $\{\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m\}$ es una partición de Γ y $\mathbf{P}_0(\Gamma_j)$ denota el espacio de constantes sobre Γ_j. Aplique la equivalencia de c) para demostrar que a es fuertemente coerciva en el espacio nulo discreto de b. Además, indique las condiciones adicionales que deben satisfacer H_h y Q_h para que el esquema de Galerkin asociado a (42) tenga solución única, sea estable y convergente.

36. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ Lipschitz continua, y considere datos $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$. El MODELO DE BRINKMAN para flujos en medios porosos con condiciones de contorno de Neumann, consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{aligned} \alpha\,\mathbf{u} - \mu\,\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{en } \Omega\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 && \text{en } \Omega\,, \\ \mu\,\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - p\,\mathbf{n} &= \mathbf{g} && \text{en } \Gamma\,, \end{aligned} \tag{43}$$

donde $\mu > 0$ es la viscosidad del fluido, α es un parámetro positivo dado por el cuociente entre la viscosidad y la permeabilidad, y $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ.

a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\varphi := -\mathbf{u}$ en Γ y $\boldsymbol{\sigma} := \mu\,\nabla\mathbf{u} - p\,\mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y pruebe que, eliminando p y $\mathbf{u}$, se obtiene una formulación variacional mixta de la forma siguiente: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \varphi) &= F(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, \psi) &= G(\psi) \quad \forall\,\psi \in Q\,, \end{aligned} \tag{44}$$

donde $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son formas bilineales acotadas.

b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que (44) posee una única solución, la cual depende continuamente de los datos $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$.

c) Establezca condiciones suficientes mínimas sobre subespacios de elementos finitos $H_h \subseteq H$ y $Q_h \subseteq Q$ para que el esquema de Galerkin asociado a (44) tenga solución única, sea estable y convergente.

d) Defina una formulación aumentada de (44) que incorpore nuevamente a p y $\mathbf{u}$, de modo tal que la nueva forma bilineal a siga siendo elíptica en el kernel de b.

37. Sea T un triángulo de $\mathbf{R}^2$ con diámetro h_T y sea $\widehat{T}$ el triángulo canónico con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. A su vez, sea $F_T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una aplicación afín invertible tal que $F_T(\widehat{T}) = T$, y defina $\psi_T := \widehat{\psi} \circ F_T^{-1}$, donde $\widehat{\psi}$ es la función burbuja de $\widehat{T}$. Además, sea $\mathcal{P}_0$ el proyector ortogonal de $L^2(T)$ en $\mathbb{P}_0(T)$, el espacio de polinomios constantes sobre T, con respecto al producto escalar

$$\langle f, g\rangle := \int_T \psi_T\, f\, g \qquad \forall\, f,\, g \in L^2(T)\,.$$

Aplique los lemas de Bramble-Hilbert y Deny-Lions para demostrar que existe $C > 0$, independiente de T, tal que:

$$\|v - \mathcal{P}_0(v)\|_{0,T} \le C\, h_T\, |v|_{1,T} \qquad \forall\, v \in H^1(T)\,.$$

Dado $s \in]0,1[$, utilice argumentos de interpolación de espacios normados y el hecho que $(L^2(T), H^1(T))_{s,2} = H^s(T)$, para probar que existe $C_s > 0$, independiente de T, tal que

$$\|v - \mathcal{P}_0(v)\|_{0,T} \leq C_s\, h_T^s\, \|v\|_{s,T} \qquad \forall\, v \in H^s(T)\,.$$

38. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y vector normal $\boldsymbol{\nu}$. Dados $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^n$ y $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^n$, la formulación en desplazamiento del problema de elasticidad lineal con condiciones de contorno de Dirichlet, consiste en: Hallar $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^n$ tal que

$$-\,\mu\,\Delta\mathbf{u} \,-\, (\lambda+\mu)\,\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{u} \,=\, \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{45}$$

donde $\lambda\,,\ \mu > 0$ son las constantes de Lamé del material respectivo.

a) Defina el pseudoesfuerzo $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} := \mu\,\nabla\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathbf{I}$ en Ω, y recuerde que $\mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega) \,=\, H_0 \,\oplus\, \mathbf{R}\,\mathbf{I}$, donde

$$H_0 := \left\{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega):\ \int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau}) \,=\, 0\right\}$$

e $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{n\times n}$. Luego, considere la descomposición $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + c\,\mathbf{I}$, con $\boldsymbol{\sigma} \in H_0$, $c \in \mathbf{R}$, denote por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la paridad dual entre $[H^{-1/2}(\Gamma)]^n$ y $[H^{1/2}(\Gamma)]^n$, y demuestre que (45) da origen a la siguiente formulación mixta: Hallar $(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) \in H_0 \times [L^2(\Omega)]^n$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} + \frac{1}{n(n\lambda + (n+1)\,\mu)}\int_\Omega \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} \;&=\; F(\boldsymbol{\tau})\,, \\ \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} \;&=\; G(\mathbf{v})\,, \end{aligned} \tag{46}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \in H_0 \times [L^2(\Omega)]^n$, donde

$$F(\boldsymbol{\tau}) \,:=\, \langle\boldsymbol{\tau}\,\boldsymbol{\nu}, \mathbf{g}\rangle \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau} \,\in\, \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega)\,,$$

y

$$G(\mathbf{v}) \,:=\, -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \qquad \forall\,\mathbf{v} \,\in\, [L^2(\Omega)]^n\,.$$

b) Use la teoría de Babuška-Brezzi para probar que (46) está bien propuesto.

c) Use la teoría de Babuška-Brezzi discreta para definir, explícitamente, un esquema de Galerkin estable para (46).

39. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Lipschitz continua Γ. Dados $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$, el Problema de Elasticidad con condiciones de contorno de tracción (Neumann) consiste en hallar un tensor simétrico $\boldsymbol{\sigma}$ (esfuerzos) y un vector $\mathbf{u}$ (desplazamientos), tales que

$$\boldsymbol{\sigma} \,=\, \mathcal{C}\,\mathbf{e}(\mathbf{u})\,, \quad \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\sigma}) \,=\, -\,\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \boldsymbol{\sigma\nu} = \mathbf{g} \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{47}$$

Aquí, $\mathcal{C}$ es el operador de elasticidad dado por la ley de Hooke (con constantes de Lamé λ, $\mu > 0$), $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\mathtt{t}})$ es el tensor de pequeñas deformaciones, $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal a Γ, y los datos satisfacen la condición de compatibilidad:

$$\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\chi} + \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\chi}\rangle = 0 \qquad \forall\,\boldsymbol{\chi} \in \mathbb{RM}(\Omega)\,, \tag{48}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la paridad dual de $[H^{-1/2}(\Gamma)]^2$ y $[H^{1/2}(\Gamma)]^2$ con respecto al producto escalar de $[L^2(\Gamma)]^2$, y $\mathbb{RM}(\Omega) := [\mathbb{P}_0(\Omega)]^2 \oplus \mathbb{P}_0(\Omega)\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1\end{pmatrix}$ es el espacio de movimientos rígidos en Ω. Puede probarse que (48) constituye una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución de (47).

a) Demuestre que, en primera instancia, la formulación variacional mixta de (47) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{u}}) := (\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \gamma)) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} + \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{u}}) &= 0 \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,, \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{v}}) &= -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}\rangle \quad \forall\,\vec{\mathbf{v}} := (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \eta) \in Q\,, \end{aligned} \tag{49}$$

donde $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times [H^{1/2}(\Gamma)]^2 \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{\mathtt{asym}}$, y

$$\mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{v}}) := \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \langle \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\psi}\rangle + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{v}}) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times Q\,.$$

b) Pruebe que el espacio de soluciones del problema homogéneo asociado a (49) está dado por $\Big\{(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{u}}) :\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}\,,\ \vec{\mathbf{u}} = (\boldsymbol{\chi}, -\boldsymbol{\chi}|_\Gamma, \nabla\boldsymbol{\chi})\,,\ \boldsymbol{\chi} \in \mathbb{RM}(\Omega)\Big\}$.

c) Agregue a (49) la condición de unicidad $\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\chi}\cdot\mathbf{u} = 0\ \forall\,\boldsymbol{\chi} \in \mathbb{RM}(\Omega)$, y pruebe que la formulación variacional resultante es equivalente a: Hallar $((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}), \vec{\mathbf{u}}) := ((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}), (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \gamma)) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\chi} + \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{u}}) + \int_\Omega \boldsymbol{\chi}\cdot\mathbf{u} = 0 \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\chi}) \in H\,, \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{v}}) + \int_\Omega \boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{v} = -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}\rangle \quad \forall\,\vec{\mathbf{v}} := (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \eta) \in Q\,, \end{aligned} \tag{50}$$

donde $H := H(\mathrm{div};\Omega) \times \mathbb{RM}(\Omega)$.

d) Use la teoría de Babuška-Brezzi para probar que (50) está bien propuesto.

40. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de triangulaciones regulares de $\bar{\Omega}$, cada una de ellas hecha de triángulos K con diámetro h_K y lados e con longitud h_e. Entonces, se definen los subespacios:

$$X_h := \Big\{ v_h \in C(\bar{\Omega}) : \quad v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall\,K \in \mathcal{T}_h \Big\}\,,$$

$$\Lambda_h := \left\{ \lambda_h \in C(\Gamma) : \quad \lambda_h|_e \in \mathbb{P}_1(e) \quad \forall\, e \in \Gamma_h \right\},$$

y

$$\Phi_{\tilde{h}} := \left\{ \phi_{\tilde{h}} \in L^2(\Gamma) : \quad \phi_{\tilde{h}}|_e \in \mathbb{P}_0(e) \quad \forall\, e \in \Gamma_{\tilde{h}} \right\},$$

donde Γ_h es la partición de Γ heredada de $\mathcal{T}_h$, y $\Gamma_{\tilde{h}}$ es otra partición de Γ, con $\tilde{h} := \max\{ |e| : \quad e \in \Gamma_{\tilde{h}} \}$. Además, sea $I_h : H^1(\Omega) \to X_h$ el interpolante de Clément, y recuerde que existen constantes positivas c_1, c_2, independientes de h, tales que, para cada $v \in H^1(\Omega)$ y $e \in \mathcal{T}_h$ se tiene:

$$\|I_h(v)\|_{1,\Omega} \leq c_1 \|v\|_{1,\Omega} \quad \text{y} \quad \|v - I_h(v)\|_{0,e} \leq c_2\, h_e^{1/2}\, |v|_{1,\omega_e},$$

donde $\omega_e := \cup\{ K \in \mathcal{T}_h : \quad K \cap e \neq \phi \}$.

a) Defina un problema auxiliar conveniente con dato $\lambda_h \in \Lambda_h$, y aplique I_h para probar que existen constantes C_1, $C_2 > 0$, independientes de h y $\tilde{h}$, tales que, para cada $\phi_{\tilde{h}} \in \Phi_{\tilde{h}}$ se tiene:

$$\sup_{v_h \in X_h \setminus 0} \frac{\langle \phi_{\tilde{h}}, v_h \rangle}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \geq C_1 \sup_{\lambda_h \in \Lambda_h \setminus 0} \frac{\langle \phi_{\tilde{h}}, \lambda_h \rangle}{\|\lambda_h\|_{1/2,\Gamma}} - C_2 \left(\frac{h_\Gamma}{\tilde{h}} \right)^{1/2} \|\phi_{\tilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la paridad dual entre los espacios $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$, y $h_\Gamma := \max\{|e| : \ e \in \Gamma_h\}$.

b) Defina un problema auxiliar conveniente con dato $\phi_{\tilde{h}} \in \Phi_{\tilde{h}}$, y aplique la propiedad de aproximación dada por:

$$\|\lambda - \mathcal{P}_h^{1/2}(\lambda)\|_{1/2,\Gamma} \leq C\, h_\Gamma^{1/2}\, \|\lambda\|_{1,\Gamma} \quad \forall\, \lambda \in H^1(\Gamma),$$

donde $\mathcal{P}_h^{1/2} : H^{1/2}(\Gamma) \to \Lambda_h$ es el proyector ortogonal, para probar que existen C_0, $\beta > 0$, independientes de h_Γ y $\tilde{h}$, tales que, para cada $h_\Gamma \leq C_0\, \tilde{h}$ se tiene:

$$\sup_{\lambda_h \in \Lambda_h \setminus 0} \frac{\langle \phi_{\tilde{h}}, \lambda_h \rangle}{\|\lambda_h\|_{1/2,\Gamma}} \geq \beta\, \|\phi_{\tilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma} \quad \forall\, \phi_{\tilde{h}} \in \Phi_{\tilde{h}}.$$

c) Como una alternativa al análisis sugerido por a) y b), demuestre directamente, sin pasar por a), usando sólo el operador I_h, que existen constantes C_3, $C_4 > 0$, independientes de h y $\tilde{h}$, tales que, para cada $\phi_{\tilde{h}} \in \Phi_{\tilde{h}}$ se tiene:

$$\sup_{v_h \in X_h \setminus 0} \frac{\langle \phi_{\tilde{h}}, v_h \rangle}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \geq \left\{ C_3 - C_4 \left(\frac{h_\Gamma}{\tilde{h}} \right)^{1/2} \right\} \|\phi_{\tilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma}$$

41. Sea Ω_1 un abierto conexo y acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ, y sea Ω_2 la region anular acotada por Γ y una curva cerrada Σ cuyo interior contiene a Γ. Además, sean $\gamma_0^1 : H^1(\Omega_1) \to H^{1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_0^2 : H^1(\Omega_2) \to H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Sigma)$ los operadores de trazas respectivos, y denote $\Omega := \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$. Dados $\mathbf{f}_1 \in \mathbf{L}^2(\Omega_1)$, $\mathbf{f}_2 \in \mathbf{L}^2(\Omega_2)$, $\mathbf{g}_\Gamma \in$

$H^{1/2}(\Gamma)$, y $\mathbf{g}_\Sigma \in H^{1/2}(\Sigma)$, considere el problema de transmisión en ELASTICIDAD LINEAL

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_1 &= \mathcal{C}_1\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_1) \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{f}_1 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,,\\
\boldsymbol{\sigma}_2 &= \mathcal{C}_2\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_2) \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{f}_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,,\\
\gamma_0^1(\mathbf{u}_1) - \gamma_0^2(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{g}_\Gamma \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^1(\boldsymbol{\sigma}_1) = \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^2(\boldsymbol{\sigma}_2) \quad \text{en} \quad \Gamma\,,\\
\gamma_0^2(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{g}_\Sigma \quad \text{en} \quad \Sigma\,,
\end{aligned}
\tag{51}
$$

donde $\mathcal{C}_i : \mathbb{L}^2(\Omega_i) \to \mathbb{L}^2(\Omega_i)$, $i \in \{1,2\}$, son los operadores lineales de Hooke en los dominios Ω_1 y Ω_2 con constantes de Lamé (μ_1,λ_1) y (μ_2,λ_2), respectivamente, y $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^1 : \mathbb{H}(\mathrm{div}\,;\Omega_1) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^2 : \mathbb{H}(\mathrm{div}\,;\Omega_2) \to H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Sigma)$ son los operadores de trazas normales correspondientes ($\boldsymbol{\nu}$ apunta hacia Ω_2 en Γ y hacia el exterior de Ω_2 en Σ).

a) Demuestre que una FORMULACIÓN VARIACIONAL MIXTA-DUAL de (51) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2) \in \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega_1) \times \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega_2)$, $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega_1) \times \mathbf{L}^2(\Omega_2)$, $\boldsymbol{\rho} := (\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2) \in \mathbb{L}^2_{\mathtt{asim}}(\Omega_1) \times \mathbb{L}^2_{\mathtt{asim}}(\Omega_2)$, y $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, tales que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \mathcal{C}_i^{-1}\,\boldsymbol{\sigma}_i : \boldsymbol{\tau}_i + \widetilde{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\tau},(\mathbf{u},\boldsymbol{\rho})) + \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^1(\boldsymbol{\tau}_1) - \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^2(\boldsymbol{\tau}_2), \boldsymbol{\xi}\rangle_\Gamma &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\tau})\,,\\
\widetilde{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\sigma},(\mathbf{v},\eta)) + \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^1(\boldsymbol{\sigma}_1) - \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^2(\boldsymbol{\sigma}_2), \boldsymbol{\lambda}\rangle_\Gamma &= \mathbf{G}(\mathbf{v},\eta,\boldsymbol{\lambda}),
\end{aligned}
\tag{52}
$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2) \in \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega_1) \times \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega_2)$, $\mathbf{v} := (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega_1) \times \mathbf{L}^2(\Omega_2)$, $\eta := (\eta_1,\eta_2) \in \mathbb{L}^2_{\mathtt{asim}}(\Omega_1) \times \mathbb{L}^2_{\mathtt{asim}}(\Omega_2)$, y $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, donde $\widetilde{\mathbf{b}}$ es una forma bilineal, $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ denota la paridad dual entre $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ y $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, y $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son funcionales lineales y acotados que dependen de $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{g}_\Gamma$ y $\mathbf{g}_\Sigma$.

b) Escriba (52) en la forma requerida por el Teorema de Babuška-Brezzi, identificando claramente los espacios H y Q involucrados, las formas bilineales $\mathbf{a} : H \times H \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{b} : H \times Q \to \mathbf{R}$ resultantes, y los operadores lineales inducidos por ellas. Concluya luego que este problema posee una única solución $(\boldsymbol{\sigma},(\mathbf{u},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\xi})) \in H \times Q$, la cual depende continuamente de los datos.

42. Sean X_1, M_1, X_2, M_2 y Q espacios de Hilbert reales, y defina el espacio producto $H := X_1 \times M_1 \times X_2 \times M_2$. A su vez, considere operadores $A_1 \in \mathcal{L}(X_1,X_1)$, $B_1 \in \mathcal{L}(X_1,M_1)$, $A_2 \in \mathcal{L}(X_2,X_2)$, $B_2 \in \mathcal{L}(X_2,M_2)$, y $B \in \mathcal{L}(H,Q)$, y defina los operadores matriciales $A : H \to H$ y $T : H \times Q \to H \times Q$ como:

$$
A := \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & B_1^* & & \\ B_1 & 0 & & \\ \hline & & A_2 & B_2^* \\ & & B_2 & 0 \end{array}\right)
$$

y

$$
T := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix}.
$$

a) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen la biyectividad de T.

b) Establezca un esquema de Galerkin asociado al operador T y demuestre la estimación de Cea correspondiente.

43. En la formulación mixta del problema de elasticidad lineal en $\mathbf{R}^2$ con condiciones de contorno de Dirichlet aparece la forma bilineal $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ dada por

$$b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) := \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) \in H \times Q\,,$$

donde $H := H(\mathbf{div}; \Omega)$ y $Q := Q_1 \times Q_2$, con $Q_1 := [L^2(\Omega)]^2$ y $Q_2 := [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{\mathtt{asim}}$. Notar que b puede descomponerse como $b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) = b_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) + b_2(\boldsymbol{\tau}, \eta)$, donde $b_1 : H \times Q_1 \to \mathbf{R}$ y $b_2 : H \times Q_2 \to \mathbf{R}$ están dadas por

$$b_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{\tau} \qquad \text{y} \qquad b_2(\boldsymbol{\tau}, \eta) := \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta\,.$$

a) Sean H_h, $Q_{1,h}$ y $Q_{2,h}$ subespacios de elementos finitos de H, Q_1 y Q_2, respectivamente, y suponga que existen operadores $\Pi_{i,h} : H \to H_h$, $i \in \{1, 2\}$, uniformemente acotados (con respecto a h), tales que para todo $\boldsymbol{\tau} \in H$:

i) $b_1(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{v}_h) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{v}_h \in Q_{1,h}$,

ii) $b_1(\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{v}_h) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{v}_h \in Q_{1,h}$,

iii) $b_2(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \eta_h) = 0 \qquad \forall\, \eta_h \in Q_{2,h}$.

Demuestre que existe $\beta > 0$, independiente de h, tal que

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}_h, (\mathbf{v}_h, \eta_h))}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_H} \ge \beta\, \|(\mathbf{v}_h, \eta_h)\|_Q \qquad \forall\, (\mathbf{v}_h, \eta_h) \in Q_h := Q_{1,h} \times Q_{2,h}\,.$$

b) Sean H_h y $Q_{1,h}$ subespacios dados, y $\Pi_{1,h} : H \to H_h$ un operador específico, uniformemente acotado, tales que la parte i) de a) se verifica. A su vez, sean X_h y M_h subespacios de elementos finitos de $[H^1(\Omega)]^2$ y $L^2_0(\Omega)$, respectivamente, y suponga que para cada par $(F_h, G_h) \in X'_h \times M'_h$, el siguiente esquema verifica, uniformemente con respecto a h, las hipótesis de la teoría de Babuška-Brezzi discreta: Hallar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{w}_h + \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{w}_h &= F_h(\mathbf{w}_h) \quad \forall\, \mathbf{w}_h \in X_h\,, \\ \int_\Omega q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h &= G_h(q_h) \quad \forall\, q_h \in M_h\,. \end{aligned} \tag{53}$$

En particular, dado $\boldsymbol{\tau} \in H$, considere $F_h \equiv 0$ y

$$G_h(q_h) := \int_\Omega (\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau})) : S(q_h)\,, \quad \text{con} \quad S(q_h) := \begin{pmatrix} 0 & q_h \\ -q_h & 0 \end{pmatrix} \in Q_2\,,$$

y, bajo el supuesto que H_h contiene a $\operatorname{curl} X_h$, defina $\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}) := \operatorname{curl} \mathbf{u}_h$. Demuestre entonces que $\Pi_{2,h} : H \to H_h$ es uniformemente acotado y satisface ii) de la parte a). Además, suponga que $Q_{2,h}$ está contenido en $S(M_h)$, y demuestre, integrando por partes en la segunda ecuación de (53), que la parte iii) de a) también se verifica.