UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

LISTADO DE EJERCICIOS 525539

Métodos de Elementos Finitos Mixtos

Primer Semestre de 2008 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea $\Omega :=]a, b[$ y para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca una partición

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Además, denote $h := \max\Big\{ x_j - x_{j-1} : \quad j \in \{1, 2, ..., n\} \Big\}$, defina el espacio

$$V_h := \Big\{ v \in L^2(\Omega) : \quad v\,|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \mathbf{P}_0([x_{j-1}, x_j]) \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., n\} \Big\}\,,$$

y considere el operador $\Pi_h : L^2(\Omega) \to V_h$ que a cada $v \in L^2(\Omega)$ le asigna su mejor aproximación $\Pi_h(v) \in V_h$ con respecto al producto escalar de $L^2(\Omega)$. Demuestre que existe una constante $C > 0$, independiente de n y de h, tal que

$$\|\, v - \Pi_h(v)\,\|_{L^2(\Omega)} \le C\, h\, |v|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

2. Sean $\hat{K} = [0, 1]$, $K = [x_{j-1}, x_j]$, $h_j := x_j - x_{j-1} > 0$, y considere la aplicación afín $F : \hat{K} \to K$ definida por

$$F(\hat{x}) = h_j\, \hat{x} + x_{j-1} \qquad \forall\, \hat{x} \in \hat{K}\,.$$

(a) Dado un entero $r \ge 0$, demuestre que $v \in H^r(K)$ sí y sólo sí $\hat{v} := v \circ F \in H^r(\hat{K})$, y en tal caso pruebe que

$$|\hat{v}|_{H^r(\hat{K})} = h_j^{r-1/2}\, |v|_{H^r(K)}\,.$$

(b) Sean m, k enteros tal que $0 \le m \le k+1$, y sea $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^m(\hat{K}))$ tal que $\hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p} \quad \forall\, \hat{p} \in \mathbf{P}_k$, donde $\mathbf{P}_k$ es el espacio de polinomios de grado $\le k$. Además, sea Π el operador definido por

$$\Pi v = (\hat{\Pi}\hat{v}) \circ F^{-1} \qquad \forall\, v \in H^{k+1}(K)\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\hat{K}$ y $\hat{\Pi}$, tal que

$$\|v - \Pi v\|_{H^m(K)} \le C\, h_j^{k+1-m}\, |v|_{H^{k+1}(K)}\,.$$

3. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ y sea $\mathcal{T} := \{T_1, T_2, ..., T_N\}$ una triangularización de Ω, es decir:

   i) $\bar{T}_j$ es un triángulo con interior no-vacío $\quad \forall\, j \in \{1, ..., N\}$,

   ii) $T_i \cap T_j = \phi \quad \forall\, i \neq j$, y

   iii) $\bar{\Omega} = \cup \{ \bar{T}_j : \quad j \in \{1, ..., N\} \}$.

   a) Defina el subespacio de $[L^2(\Omega)]^2$

   $$H := \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j) \quad \forall\, j \in \{1, ..., N\} \},$$

   provisto de la norma

   $$\|\boldsymbol{\tau}\| := \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} + \sum_{j=1}^{N} \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{L^2(T_j)} \right\}^{1/2} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H,$$

   y demuestre que $(H, \|\cdot\|)$ es un espacio de Hilbert real.
   Indicación: note que la pertenencia local $\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j)$ está dada en el sentido distribucional, lo cual significa que existe $z_j \in L^2(T_j)$ tal que

   $$- \int_{T_j} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx = \int_{T_j} z_j\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(T_j).$$

   En este caso se escribe $z_j = \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})$ en T_j (distribucionalmente).

   b) Pruebe que existe un único $\boldsymbol{\sigma} \in H$ tal que $\|\boldsymbol{\sigma}\| \leq |\Omega|^{1/2}$ y

   $$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \sum_{j=1}^{N} \int_{T_j} (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) - 1) \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H.$$

4. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

   $$H(\operatorname{div}; \Omega) := \left\{ v \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \operatorname{div}\, v := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

   provisto del producto escalar

   $$\langle v, w \rangle_{H(\operatorname{div};\Omega)} := \int_{\Omega} v \cdot w\, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}\, v\, \operatorname{div}\, w\, dx \quad \forall\, v, w \in H(\operatorname{div}; \Omega).$$

   a) Demuestre que $(H(\operatorname{div}; \Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\operatorname{div};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

   b) Utilice el hecho que $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$ es denso en $H(\operatorname{div}; \Omega)$ para probar que existe un operador lineal y continuo $\gamma : H(\operatorname{div}; \Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que $\gamma(u) = u \cdot \nu$ $\forall$ $u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$, donde ν es el vector normal unitario exterior a Γ.

5. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{rot};\Omega) \;:=\; \{\, v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \;:\quad \mathrm{rot}\, v \;:=\; \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \,\}$$

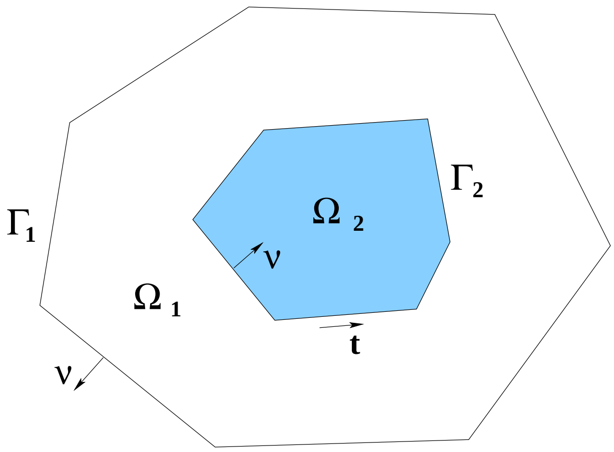
provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)} \;:=\; \int_\Omega v\cdot w\, dx \;+\; \int_\Omega \mathrm{rot}\, v\ \mathrm{rot}\, w\, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

a) Demuestre que $(H(\mathrm{rot};\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que existe un operador lineal y continuo $\gamma \,:\, H(\mathrm{rot};\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que $\gamma(u) \,=\, u\cdot\tau\ \forall\, u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde τ es el vector **tangencial** unitario de Γ.

6. Sea Ω_2 un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ_2, y sea Ω_1 la region anular acotada por Γ_2 y por una curva cerrada Γ_1 cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_2$, como se muestra en la siguiente figura:



El propósito de este ejercicio es analizar el acoplamiento de un fluido viscoso que ocupa la region Ω_1 con un material poroso que vive en Ω_2. Si $\mu > 0$ es la viscosidad y $\mathbf{K}$ es una matriz simétrica y uniformemente definida positiva que representa la permeabilidad del medio poroso, entonces las ecuaciones constitutivas están dadas por las leyes de Stokes y de Darcy, respectivamente, esto es:

$$\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) \;=\; -\,p_1\,\mathbf{I} \,+\, 2\,\mu\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_1) \quad \text{en} \quad \Omega_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 \;=\; -\,\mathbf{K}\,\nabla\, p_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,,$$

donde $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ y (p_1, p_2) denotan las velocidades y presiones en los dominios correspondientes, $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, $\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)$ es el tensor de esfuerzos y $\mathbf{e}(\mathbf{u}_1) \,:=\, \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u}_1 + (\nabla\mathbf{u}_1)^{\mathtt{t}}\right)$ es el tensor de deformaciones. Así, dados $\mathbf{f}_1 \in [L^2(\Omega_1)]^2$ y $f_2 \in L^2(\Omega_2)$ tal que $\int_{\Omega_2} f_2 = 0$, nos interesa: Hallar $\mathbf{u} \,:=\, (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ y $p \,:=\, (p_1, p_2)$ tales que

$$
\left\{
\begin{array}{rcllll}
-\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1,p_1) & = & \mathbf{f}_1 & \text{en} & \Omega_1 & \text{(conservación de momentum)}\,,\\
\operatorname{div}\mathbf{u}_1 & = & 0 & \text{en} & \Omega_1 & \text{(conservación de masa)}\,,\\
\mathbf{u}_1 & = & 0 & \text{en} & \Gamma_1 & \text{(deslizamiento nulo)}\,,\\
\operatorname{div}\mathbf{u}_2 & = & f_2 & \text{en} & \Omega_2 & \text{(conservación de masa)}\,,\\
\mathbf{u}_1\cdot\boldsymbol{\nu} & = & \mathbf{u}_2\cdot\boldsymbol{\nu} & \text{en} & \Gamma_2 & \text{(conservación de masa)}\,,\\
(\,\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1,p_1)\boldsymbol{\nu}\,)\cdot\boldsymbol{\nu} & = & -\,p_2 & \text{en} & \Gamma_2 & \text{(balance de fuerzas normales)}\,,\\
-\,\dfrac{\kappa}{\mu}\,(\,\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1,p_1)\,\boldsymbol{\nu})\cdot\mathbf{t} & = & \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{t} & \text{en} & \Gamma_2 & \text{(ley de Beavers-Joseph-Saffman)}\,,
\end{array}
\right.
$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal unitario exterior a Ω_1, $\mathbf{t}$ es el vector tangencial a Γ_2, $\kappa > 0$ es la constante de fricción, y la ley de Beavers-Joseph-Saffman establece que el esfuerzo de corte es proporcional a la velocidad de deslizamiento (bajo el supuesto experimental que $\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{t}$ es despreciable).

a) Pruebe que el balance de fuerzas normales y la ley de Beavers-Joseph-Saffman son equivalentes a la condición

$$
\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1,p_1)\,\boldsymbol{\nu} \,+\, p_2\,\boldsymbol{\nu} \,=\, -\,\frac{\mu}{\kappa}\,(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{t})\,\mathbf{t} \quad \text{en} \quad \Gamma_2\,.
$$

b) Defina los espacios

$$
[H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)]^2 := \{\,\mathbf{v}_1 \,\in\, [H^1(\Omega_1)]^2 : \quad \mathbf{v}_1 \,=\, \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma_1\}\,,
$$

$$
H(\operatorname{div};\Omega_2) \,:=\, \{\,\mathbf{v}_2 \,\in\, [L^2(\Omega_2)]^2 : \quad \operatorname{div}\,\mathbf{v}_2 \,\in\, L^2(\Omega_2)\,\}\,,
$$

$$
H \,:=\, [H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)]^2 \times H(\operatorname{div};\Omega_2)\,,
$$

$$
Q \,:=\, (L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)) \times H^{1/2}(\Gamma_2)\,,
$$

y demuestre que una formulación variacional mixta del presente problema de transmisión se reduce a: Hallar $(\mathbf{u},(p,\lambda)) \,\in\, H\times Q$ tal que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \,+\, \mathbf{b}(\mathbf{v},(p,\lambda)) \quad &= \quad \int_{\Omega_1} \mathbf{f}_1\cdot\mathbf{v}_1 \qquad \forall\,\mathbf{v} := (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) \,\in\, H\,,\\
\mathbf{b}(\mathbf{u},(q,\xi)) \quad &= \quad -\int_{\Omega_2} f_2\,q_2 \quad \forall\,(q,\xi) \,:=\, ((q_1,q_2),\xi) \,\in\, Q\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

donde $\mathbf{a} : H\times H \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{b} : H\times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$
\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \,:=\, 2\,\mu\int_{\Omega_1} \mathbf{e}(\mathbf{u}_1) : \mathbf{e}(\mathbf{v}_1) \,+\, \frac{\mu}{\kappa}\int_{\Gamma_2} (\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{t})\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{t}) \,+\, \int_{\Omega_2} \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}_2\,,
$$

$$
\mathbf{b}(\mathbf{v},(q,\xi)) \,:=\, -\int_{\Omega_1} q_1\operatorname{div}\mathbf{v}_1 \,-\, \int_{\Omega_2} q_2\operatorname{div}\mathbf{v}_2 \,+\, \int_{\Gamma_2} (\mathbf{v}_1\cdot\boldsymbol{\nu} + \mathbf{v}_2\cdot\boldsymbol{\nu})\,\xi\,.
$$

c) Demuestre que si $(\mathbf{u},(p,\lambda)) \in H \times Q$ es una solución de (1), entonces para todo $c \in \mathbf{R}$, $(\mathbf{u},(\tilde{p},\tilde{\lambda})) \in H \times Q$ también lo es, con $\tilde{p} := (p_1 + c, p_2 + c)$ y $\tilde{\lambda} := \lambda + c$. En tal caso, deduzca cómo debe modificarse la definición del espacio Q para evitar estas soluciones adicionales.

d) Defina el funcional de la energía complementaria y el operador Lagrangiano asociado a las ecuaciones de punto silla (1), e identifique los multiplicadores de Lagrange correspondientes.

e) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que el problema (1) (con el espacio Q modificado de acuerdo a c)) posee una única solución.

7. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno:

$$-\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,.$$

a) Demuestre que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega u \,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx - \int_\Omega v \,\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx \tag{2}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$.

b) Dados $\delta_1\,,\ \delta_2 > 0$, fundamente la introducción de las ecuaciones

$$\delta_1 \int_\Omega (\nabla u - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla v + \boldsymbol{\tau})\, dx = 0 \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega), \tag{3}$$

$$\delta_2 \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx = -\,\delta_2 \int_\Omega f \,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,, \tag{4}$$

luego sume (2), (3) y (4), y obtenga una formulación variacional mixta modificada: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) = F(\boldsymbol{\tau}, v) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H}\,, \tag{5}$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es una forma bilineal y $F : \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es un funcional lineal. Entonces, demuestre que, eligiendo δ_1 y δ_2 convenientemente, el problema (5) posee una única solución, la cual depende continuamente del dato f.

8. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Dada $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento* $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ *y el tensor de esfuerzos* $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ *tal que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \,\mathrm{tr}\, \mathbf{e}(\mathbf{u})\, \mathbf{I}_2 + 2\mu\, \mathbf{e}(\mathbf{u}) \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

donde λ, $\mu > 0$ son las constantes de Lamé, $\mathbf{I}_2$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\,(\nabla\, \mathbf{u} + (\nabla\, \mathbf{u})^{\mathbf{T}})$ es el tensor de deformaciones. Es fácil verificar que $\mathbf{e}(\mathbf{u})$

puede re-escribirse como $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \nabla\,\mathbf{u} - \gamma \quad \text{en} \quad \Omega$, donde $\gamma := \frac{1}{2}\,(\nabla\,\mathbf{u} - (\nabla\,\mathbf{u})^{\mathbf{T}})$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio

$$\mathcal{R} := \{\, \eta \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \quad \eta + \eta^{\mathbf{T}} = 0 \,\} \,.$$

a) Demuestre que una formulación variacional **mixta** de este problema se reduce a: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \gamma)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \gamma)) \;&=\; 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{v}, \eta)) \;&=\; -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\, dx \quad \forall\,(\mathbf{v}, \eta) \in Q\,, \end{aligned} \tag{6}$$

donde $H := H(\mathrm{div};\Omega)$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{2\mu}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}\, dx - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}\int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,$$

$$b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) := \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathrm{div}\;\boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta\, dx \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) \in H \times Q\,.$$

b) Demuestre que a y b satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi.

9. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ.

a) Considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ con norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y semi-norma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$. Defina la aplicación

$$|||v||| \;:=\; \left\{ |v|^2_{H^1(\Omega)} \;+\; \left(\int_\Omega v\right)^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\,|||v||| \;\le\; \|v\|_{H^1(\Omega)} \;\le\; C_2\,|||v||| \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

b) Considere el problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\, u \;=\; f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \;=\; 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \int_\Omega u \;=\; 0\,,$$

donde $f \in L^2(\Omega)$ es tal que $\displaystyle\int_\Omega f \;=\; 0$, y demuestre que su formulación débil se reduce a: Hallar $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v \;+\; \lambda\int_\Omega v \;=\; \int_\Omega f v \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

$$\mu\int_\Omega u \;=\; 0 \qquad \forall\, \mu \in \mathbf{R}\,.$$

Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que este problema tiene solución única, la cual depende continuamente de f.

c) Extienda el análisis en b) al caso discreto y deduzca espacios de elementos finitos que garanticen la solubilidad y estabilidad del esquema de Galerkin asociado. Indique la razón de convergencia correspondiente.

10. Sean X y M espacios de Hilbert y sean $a : X \times X \to \mathbf{R}$, $b : X \times M \to \mathbf{R}$ dos formas bilineales acotadas. Suponga además que a es simétrica y semi-definida positiva sobre X. Dados $F \in X'$, $G \in M'$ se define el operador $\mathcal{J} : X \times M \to \mathbf{R}$,

$$\mathcal{J}(v,\mu) := \frac{1}{2}\, a(v,v) + b(v,\mu) - F(v) - G(\mu) .$$

Considere entonces los siguientes problemas variacionales:

Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= F(v) \quad \forall\, v \in X , \\ b(u,\mu) &= G(\mu) \quad \forall\, \mu \in M . \end{aligned} \tag{7}$$

Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\mathcal{J}(u,\mu) \le \mathcal{J}(u,\lambda) \le \mathcal{J}(v,\lambda) \qquad \forall\, (v,\mu) \in X \times M . \tag{8}$$

Demuestre que (u,λ) es solución de (7) si y sólo si (u,λ) es solución de (8).

11. Sean $(X, \langle \cdot,\cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot,\cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X,X)$, $Q \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \ge 0 \quad \forall\, y \in Y ,$$

y que existen constantes positivas α, β tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x \rangle_X \ge \alpha\, ||x||_X^2 \qquad \forall\, x \in X$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle Q(x), y \rangle_Y}{||x||_X} \ge \beta\, ||y||_Y \quad \forall\, y \in Y .$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} .$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $||\mathbf{P}||$, α, β y $||Q||$, tal que $||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \le C \, \{ \, ||f|| + ||g|| \, \}$.

12. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. Se dice que un material que ocupa la region Ω es **casi-incompresible** si se necesitan cantidades muy altas de energía para producir cambios pequeños en su densidad, lo cual genera una gran diferencia entre los tamaños de las constantes de Lamé. En tal

caso, la formulación en desplazamiento del problema de elasticidad lineal consiste en: Hallar $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ tal que

$$-2\,\mu\,\mathbf{div}\,\mathbf{e}(\mathbf{u}) \,-\, \lambda\,\nabla(\mathrm{div}\,\mathbf{u}) \,=\, \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \mathbf{u} \,=\, \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{9}$$

donde $\lambda >> \mu > 0$ son las constantes de Lamé y

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\,(\nabla\,\mathbf{u} + (\nabla\,\mathbf{u})^{\mathtt{t}})$$

es el tensor de deformaciones.

a) Defina la incógnita auxiliar $p \,:=\, \lambda\,\mathrm{div}\;\mathbf{u}$ en Ω y demuestre que una formulación variacional de (9) se reduce a: Hallar $(\mathbf{u}, p) \,\in\, [H^1_0(\Omega)]^2 \,\times\, L^2_0(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} 2\,\mu \int_\Omega \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \,+\, \int_\Omega p\,\mathrm{div}\;\mathbf{v} \,&=\, \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \qquad \forall\,\mathbf{v} \,\in\, [H^1_0(\Omega)]^2\,, \\ \int_\Omega q\,\mathrm{div}\;\mathbf{u} \,-\, \frac{1}{\lambda}\int_\Omega pq \,&=\, 0 \qquad\qquad \forall\,q \,\in\, L^2_0(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

b) Aplique el teorema abstracto del problema anterior para probar que (10) tiene una única solución que depende continuamente del dato $\mathbf{f}$.

13. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \,:\, X \to X$, $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \,\geq\, 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$

que $\mathbf{P}$ es **nolineal**, y que existen constantes M, α, $\beta > 0$ tales que

$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \,\leq\, M\,||x - \bar{x}||_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x - \bar{x}\rangle_X \,\geq\, \alpha\,||x - \bar{x}||^2_X \quad \forall\, x,\, \bar{x} \,\in X\,,$$

y

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle Q(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \,\geq\, \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de M, α, β y $||Q||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \,\leq\, C\,\{\,||f|| + ||g|| + ||\mathbf{P}(0)||\,\}\,.$$

14. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. El Problema de Stokes consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$\begin{aligned} -\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad & \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad & \int_\Omega p\,dx = 0\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Defina los espacios

$$H := [H_0^1(\Omega)]^2 \quad \text{y} \quad Q := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\,dx = 0 \right\}.$$

Demuestre que la formulación débil de (11) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, p) &= F(\mathbf{v}) \quad \forall\,\mathbf{v} \in H\,, \\ B(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall\,q \in Q\,, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \to \mathbf{R}$, $B : H \times Q \to \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\,dx\,,$$

$$B(\mathbf{v}, p) := -\int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v}\,dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\,dx\,.$$

15. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

    a) Demuestre que $\displaystyle \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

    b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \beta\,\|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$, y pruebe que $\quad H = R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

16. Dados $\Omega := (0, 1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$-\,u'' = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) = 0\,, \quad u'(1) = 1\,. \tag{12}$$

    a) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (12) se reduce a: *Hallar* $(\sigma, (u, \varphi)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, (u, \varphi)) &= F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma, (v, \psi)) &= G((v, \psi)) \quad \forall\,(v, \psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{13}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$
\begin{aligned}
a(\sigma,\tau) &:= \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx \qquad \forall\,\sigma,\,\tau \in H\,,\\
b(\tau,(v,\psi)) &:= \int_\Omega v\,\tau'\,dx \,+\, \psi\,\tau(1) \quad \forall\,(\tau,(v,\psi)) \in H \times Q\,.
\end{aligned}
$$

b) Defina los funcionales F y G, y aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (13) tiene una única solución.

17. Sean $\Omega =]a,b[$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno

$$
u^{(4)} \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) \,=\, 0\,. \tag{14}
$$

i) Defina la incógnita auxiliar $\sigma := u''$ en Ω y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (14) se reduce a: Hallar $(\sigma,u) \in H^1(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ tal que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \sigma\,\tau\,dx + \int_\Omega u'\,\tau'\,dx &= 0 \qquad \forall\,\tau \in H^1(\Omega)\,,\\
\int_\Omega v'\,\sigma'\,dx &= -\int_\Omega f\,v\,dx \qquad \forall\,v \in H^1_0(\Omega)\,.
\end{aligned} \tag{15}
$$

ii) Aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (15) tiene una única solución que depende continuamente del dato f.

18. (Lema de Fortin). Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$
\sup_{\substack{v \in H\\ v \neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} \,\geq\, \beta\,\|q\|_Q \qquad \forall\,q \in Q\,. \tag{16}
$$

Sean $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H,H_n)$ tal que

$$
b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) \,=\, 0 \qquad \forall\,q_n \in Q_n\,.
$$

Suponga que la familia de operadores $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H,H_n)} \,\leq\, C$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de n, tal que

$$
\sup_{\substack{v_n \in H_n\\ v_n \neq 0}} \frac{b(v_n,q_n)}{\|v_n\|_H} \,\geq\, \beta^*\,\|q_n\|_Q \qquad \forall\,q_n \in Q_n\,, \quad \forall\,n \in \mathbf{N}\,.
$$

19. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i$ $\forall\,i \in \{1,...,n\}$, $\forall\,x := (x_1,...,x_n)^{\mathbf{T}} \in \Omega$.

a) (DESIGUALDAD DE POINCARÉ GENERALIZADA). Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|^2_{H^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{n} |\langle v, p_i\rangle_{H^2(\Omega)}|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\,|||v||| \,\le\, \|v\|_{H^2(\Omega)} \,\le\, C_2\,|||v||| \quad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,.$$

Ind.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción: suponga, en particular, que $\forall\, n \in \mathbf{N}$ existe $v_n \in H^2(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} > n\,|||v_n|||$. Luego, defina $w_n := \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}}$, observe que $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$ y que $|||w_n||| < \frac{1}{n}$, y aplique el hecho que la inclusión de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ es compacta.

b) (LEMA DE DENY-LIONS). Considere el espacio cuociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma $\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \inf\limits_{p\in P_1(\Omega)} \|v-p\|_{H^2(\Omega)}$, y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\,[v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

Demuestre que $|\cdot|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \,\le\, \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$$

$$\le\, C\,|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \qquad \forall\,[v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

Ind.: Note que para todo $p \in P_1(\Omega)$ y para todo α con $|\alpha| = 2$ se tiene $\partial^\alpha p = 0$. Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.

c) (LEMA DE BRAMBLE-HILBERT). Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p$ $\forall\, p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \,\le\, C\,|v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,.$$

Ind.: Note que $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v-p)$ $\forall\, p \in P_1(\Omega)$, y luego aplique el Lema de Deny-Lions.

20. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ. Una formulación variacional **mixta** para la ecuación de Poisson en Ω, con dato $f \in L^2(\Omega)$, y condición de Dirichlet dada por $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, consiste en: *Hallar* $(\sigma, u) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{array}{rcl} A(\sigma,\tau) \,+\, B(\tau,u) &=& \int_\Gamma g\,\tau\cdot\nu\,ds\,, \\ B(\sigma,v) &=& -\int_\Omega f\,v\,dx\,, \end{array} \qquad (1)$$

para todo $(\tau, v) \in X\times M$, donde $X := H(\mathrm{div};\Omega)$, $M := L^2(\Omega)$, ν es el vector normal unitario exterior a Γ, y las formas bilineales $A : X\times X \to \mathbf{R}$ y $B : X\times M \to \mathbf{R}$ están definidas por

$$A(\rho,\tau) := \int_\Omega \rho\cdot\tau\,dx \quad \forall \rho,\,\tau \in X\,,$$

$$B(\tau,v) := \int_\Omega v\,\mathrm{div}\,\tau\,dx \quad \forall(\tau,v) \in X\times M\,.$$

a) Demuestre que A y B satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi, y concluya que existe $C_0 > 0$ tal que

$$||(\rho, w)||_{X\times M} \,\leq\, C_0 \sup_{\substack{(\tau,v)\in X\times M\\ ||(\tau,v)||\,\leq\,1}} \{\, A(\rho,\tau) + B(\tau,w) + B(\rho,v)\,\} \tag{2}$$

para todo $(\rho, w) \in X \times M$.

b) El siguiente objetivo es deducir una **estimación de error a-posteriori** para (1). Para ello, sea $\{\mathcal{T}_h : \quad h \in \mathtt{I}\}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$, donde $\mathtt{I}$ es un conjunto finito de parámetros dado por $\{h_1, ..., h_m\}$, con $h_j \geq h_{j+1}\ \forall\, j \in \{1, ..., m\}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{\, h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h\,\}$, donde h_K es el diámetro de K. Sea $X_h \times M_h$ un subespacio de elementos finitos de $X \times M$, asociado a la triangulación $\mathcal{T}_h$, y sea $(\sigma_h, u_h) \in X_h \times M_h$ la solución del esquema de Galerkin correspondiente para la formulación (1).

i) Pruebe que existe un único $\bar{\sigma} \in X$ tal que

$$\langle \bar{\sigma}, \tau\rangle_X \,=\, A(\sigma - \sigma_h, \tau) + B(\tau, u - u_h) \quad \forall\, \tau \in X\,.$$

ii) Defina $\mathbf{J}(\tau) := \frac{1}{2}\,||\tau||_X^2 \,-\, \langle\bar{\sigma},\tau\rangle_X \quad \forall\, \tau \in X$, y demuestre que

$$-\frac{1}{2}\,||\bar{\sigma}||_X^2 \,=\, \min_{\tau\in X}\, \mathbf{J}(\tau)\,.$$

iii) Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ defina $(\sigma_{h,K}, u_{h,K}) := (\sigma_h, u_h)\,|_K$, $X_K := H(\mathrm{div}\,; K)$, $M_K := L^2(K)$, y denote por $A_K : X_K \times X_K \to \mathbf{R}$ y $B_K : X_K \times M_K \to \mathbf{R}$, respectivamente, las restricciones de A y B al elemento K. Además, sea $\varphi_h \in H^{1/2}(\cup_{K\in\mathcal{T}_h} \partial K)$ una aproximación de u sobre las fronteras de los elementos K tal que $\varphi_h = g$ en Γ. Entonces, pruebe que existe un único $\hat{\sigma}_K \in X_K$ tal que

$$\langle\hat{\sigma}_K, \tau\rangle_{X_K} = -A_K(\sigma_{h,K}, \tau) - B_K(\tau, u_{h,K}) - \int_{\partial K} \varphi_h\, \tau\cdot\nu\, ds \quad \forall\, \tau \in X_K\,.$$

iv) Defina

$$\mathbf{J}_K(\tau) := \frac{1}{2}\,||\tau||_{X_K}^2 + A_K(\sigma_{h,K}, \tau) + B_K(\tau, u_{h,K}) + \int_{\partial K} \varphi_h\, \tau\cdot\nu\, ds$$

para todo $\tau \in X_K$, y pruebe que

$$-\frac{1}{2}\,||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \,=\, \min_{\tau\in X_K}\, \mathbf{J}_K(\tau)\,.$$

v) Use **i)**, **ii)**, **iii)** y **iv)** para demostrar que

$$||\bar{\sigma}||_X^2 \,\leq\, \sum_{K\in\mathcal{T}_h} ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2\,.$$

vi) Aplique (2) y **v)** para concluir que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$||(\sigma, u) - (\sigma_h, u_h)||_{X\times M} \;\leq\; C \left\{ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2},$$

donde

$$\eta_K^2 := ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \;+\; ||f + \operatorname{div}\,\sigma_h||_{L^2(K)}^2 \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,.$$

21. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal y sea $\mathcal{T}_h$ una triangularización de $\bar{\Omega}$. Dado $K \in \mathcal{T}_h$, sea $\boldsymbol{\nu}_K$ el vector normal a ∂K y denote por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial K}$ la paridad dual entre $H^{-1/2}(\partial K)$ y $H^{1/2}(\partial K)$.

   (a) Defina los espacios

$$X \;:=\; \Big\{ v \in L^2(\Omega): \quad v|_K \in H^1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

$$Z \;:=\; \Big\{ \boldsymbol{\lambda} \;:=\; (\lambda_K)_{K\in\mathcal{T}_h} \in \Pi_{K\in\mathcal{T}_h} H^{-1/2}(\partial K): \quad \exists\; \boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div};\Omega) \\ \text{tal que} \quad \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K \;=\; \lambda_K \quad \text{en} \quad \partial K \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

   y demuestre que

$$H_0^1(\Omega) \;:=\; \Big\{ v \in X: \quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle \lambda_K, v|_K\rangle_{\partial K} \;=\; 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\lambda} \,\in\, Z \Big\}.$$

   (b) Defina los espacios

$$\tilde{X} \;:=\; \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2: \quad \boldsymbol{\tau}|_K \in H(\operatorname{div};K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

$$\tilde{Z} \;:=\; \Big\{ \boldsymbol{\xi} \;:=\; (\xi_K)_{K\in\mathcal{T}_h} \in \Pi_{K\in\mathcal{T}_h} H^{1/2}(\partial K): \quad \exists\; v \in H_0^1(\Omega) \\ \text{tal que} \quad v \;=\; \xi_K \quad \text{en} \quad \partial K \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

   y demuestre que

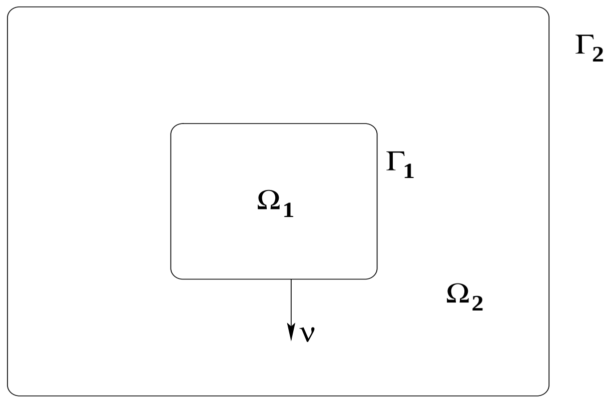
$$H(\operatorname{div};\Omega) \;:=\; \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in \tilde{X}: \quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K, \xi_K\rangle_{\partial K} \;=\; 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\xi} \,\in\, \tilde{Z} \Big\}.$$

22. Sean H_h y Q_h subespacios de dimensión finita de espacios de Hilbert H y Q, respectivamente, y sean $\mathbf{a} : H \times H \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{b} : H \times Q \to \mathbf{R}$ formas bilineales acotadas que satisfacen las hipótesis de las versiones continua y discreta del Teorema de Babuška-Brezzi, con constantes independientes de h. Sean $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H \times Q$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in H_h \times Q_h$ las únicas soluciones de los problemas de punto-silla continuo y discreto, respectivamente, asociados a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Suponga que el kernel discreto de $\mathbf{b}$ está contenido en su kernel continuo y demuestre que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_H \;\leq\; C \inf_{\boldsymbol{\tau}_h\in H_h} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_H\,.$$

23. Sea Ω_1 un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ_1, y sea Ω_2 la region anular acotada por Γ_1 y por una curva cerrada Γ_2 cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_1$ (ver figura). Entonces, dados $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, $g_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, y $g_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, interesa el siguiente PROBLEMA DE TRANSMISIÓN: Hallar $(u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ tales que

$$\begin{gathered} -\Delta u_1 = f_1 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \quad -\Delta u_2 = f_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \\ u_1 - u_2 = g_1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1\,, \quad u_2 = g_2 \quad \text{en} \quad \Gamma_2\,. \end{gathered} \tag{17}$$



(a) Demuestre que una FORMULACIÓN VARIACIONAL MIXTA-DUAL de (17) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2) \in H(\mathrm{div}\,; \Omega_1) \times H(\mathrm{div}\,; \Omega_2)$, $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\xi \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_{\Omega_i} \sigma_i \cdot \tau_i \, dx + \int_{\Omega_i} u_i \, \mathrm{div}\, \tau_i \, dx \right\} + \langle \tau_1 \cdot \nu - \tau_2 \cdot \nu, \xi \rangle_{\Gamma_1} &= F(\boldsymbol{\tau})\,, \\ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} v_i \, \mathrm{div}\, \sigma_i \, dx + \langle \sigma_1 \cdot \nu - \sigma_2 \cdot \nu, \lambda \rangle_{\Gamma_1} &= G(\mathbf{v}, \lambda)\,, \end{aligned} \tag{18}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2) \in H(\mathrm{div}\,; \Omega_1) \times H(\mathrm{div}\,; \Omega_2)$, $\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, donde

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \langle \tau_1 \cdot \nu, g_1 \rangle_{\Gamma_1} + \langle \tau_2 \cdot \nu, g_2 \rangle_{\Gamma_2} \quad \text{y} \quad G(\mathbf{v}, \lambda) := -\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} f_i \, v_i \, dx\,.$$

(b) Defina el funcional de la energía complementaria y el operador Lagrangiano asociado a las ecuaciones de punto silla (18), e identifique los multiplicadores de Lagrange correspondientes.

(c) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que el problema (18) posee una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \xi)$ en los espacios indicados.

(d) Considere el análisis y los resultados de (I. Babuška and G.N. Gatica: *On the mixed finite element method with Lagrange multipliers.* Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 19, 2, pp. 192-210, (2003)) y establezca un esquema de Galerkin estable para (18).

24. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ Lipschitz continua, y sean $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$ tal que $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{g}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ. El **problema de Stokes generalizado** consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{aligned} \alpha\,\mathbf{u} - \nu\,\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{en } \Omega\,, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \text{en } \Gamma\,, \end{aligned} \tag{19}$$

donde $\nu > 0$ es la viscosidad del fluido y α es un parámetro positivo.

(a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\mathbf{t} := \nabla\mathbf{u}$ y $\boldsymbol{\sigma} := \nu\,\nabla\mathbf{u} - p\,\mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y pruebe que una formulación variacional mixta de (19) se reduce a: Hallar $(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \xi) \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^2 \times H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \nu\int_\Omega \mathbf{t}:\mathbf{s} + \alpha\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{s} - \int_\Omega \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{v} - \int_\Omega p\operatorname{tr}\mathbf{s} &= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,, \\ -\int_\Omega \boldsymbol{\tau}:\mathbf{t} - \int_\Omega \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{u} \qquad\qquad + \quad \xi\int_\Omega \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau} &= -\,\langle \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}, \mathbf{g}\rangle\,, \\ -\int_\Omega q\operatorname{tr}\mathbf{t} + \eta\int_\Omega \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} &= 0\,, \end{aligned} \tag{20}$$

para todo $(\mathbf{s}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, q, \eta) \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^2 \times H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$.

(b) Defina espacios de Hilbert y operadores (formas bilineales) convenientes y pruebe que (20) puede reformularse en base a una estructura dual-dual.

(c) Utilice lo indicado en (b) para demostrar que (20) tiene una única solución y que existe una constante $C(\alpha,\nu) > 0$ tal que

$$\|(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \xi)\| \;\leq\; C(\alpha,\nu)\;\{\,\|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|\,\}\,.$$

(d) Extienda el análisis en (c) al caso discreto y **deduzca** espacios de elementos finitos que garanticen que el esquema de Galerkin asociado a (20) tiene una única solución.

(e) Asuma la regularidad necesaria de la solución exacta y demuestre la estimación de error a-priori correspondiente (razón de convergencia).

25. Extienda el método utilizado en el problema 20 para deducir un **estimador de error a-posteriori** del esquema de Galerkin asociado a (6).

26. Sean $\Omega \; :=]0,1[$, $f \in L^2(\Omega)$, $\kappa \in]0,2[$, y considere el problema de valores de contorno:

$$u'' + \kappa\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) \,=\, u(1) \,=\, 0\,. \tag{21}$$

Además, para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca la partición uniforme

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1\,,$$

con $x_j - x_{j-1} \,=\, \dfrac{1}{n+1}$ $\forall\, j \in \{1, 2, ..., n+1\}$, y defina el espacio

$$H_n \,:=\, \Big\{ v \,\in\, C(\bar\Omega): \quad v\,|_{[x_{j-1},x_j]} \,\in\, \mathbf{P}_1([x_{j-1}, x_j]) \quad \forall\, j \,\in\, \{1, 2, ..., n+1\} \quad y \quad v(0) \,=\, v(1) \,=\, 0 \Big\}.$$

a) Establezca la formulación variacional de (21) y demuestre que ella posee una única solución $u \,\in\, H^1_0(\Omega)$.

b) Denote por $u_n \in H_n$ la solución (cuando ella existe) del esquema de Galerkin asociado y pruebe que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|u \,-\, u_n\|_{H^1(\Omega)} \,=\, 0$.

27. Sea Ω un dominio poligonal convexo de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ, y dado $f \,\in\, L^2(\Omega)$, considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:

$$\Delta u \,+\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{22}$$

i) Introduzca la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} \,:=\, \nabla u$ en Ω y pruebe que una formulación variacional mixta de (22) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} \,-\, \int_\Omega \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \,=\, -\int_\Omega f\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)\,. \tag{23}$$

ii) Defina el operador $P \,:\, H(\mathrm{div};\Omega) \,\to\, [L^2(\Omega)]^2$ que a cada $\boldsymbol{\tau} \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)$ le asigna $P(\boldsymbol{\tau}) \,:=\, \nabla\, z$, donde $z \in H^1_0(\Omega)$ es la única solución del problema de valores de contorno: $\Delta\, z \,=\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau})$ en Ω, $z \,=\, 0$ en Γ. Pruebe que P es compacto y que $H(\mathrm{div};\Omega) = P(H(\mathrm{div};\Omega)) \oplus (I - P)(H(\mathrm{div};\Omega))$.

iii) Utilice la descomposición anterior de $H(\mathrm{div};\Omega)$ para demostrar que (23) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) \,+\, K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) \,=\, F(\boldsymbol{\tau}) \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,, \tag{24}$$

donde A y B son formas bilineales acotadas cuyos operadores inducidos $\mathbf{A} : H(\mathrm{div};\Omega) \to H(\mathrm{div};\Omega)$ y $\mathbf{K} : H(\mathrm{div};\Omega) \to H(\mathrm{div};\Omega)$ son biyectivo y compacto, respectivamente, y F es el funcional dado a la derecha de (23).

IND. Defina el operador $S(\boldsymbol{\tau}) \,:=\, (I \,-\, 2\,P)(\boldsymbol{\tau})$ y considere la expresión $A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau}))$ para probar que A satisface las condiciones inf-sup continuas.

iv) Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia de subespacios de dimensión finita de $H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que $\lim\limits_{h\to 0} \mathrm{dist}\,(\boldsymbol{\tau}, H_h) \,=\, 0$ para todo $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$, y considere el esquema de Galerkin perturbado: Hallar $\boldsymbol{\sigma}_h \in H_h$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) \,=\, F(\boldsymbol{\tau}_h) \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau}_h \in H_h\,. \tag{25}$$

Suponga que existen operadores lineales $\mathcal{E}_h : [H^1(\Omega)]^2 \to H_h$ tales que

$$\mathrm{div}\,(\mathcal{E}_h\, P(\boldsymbol{\tau}_h)) \,=\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}_h) \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau}_h \,\in\, H_h\,,$$

y

$$\|\boldsymbol{\tau} - \mathcal{E}_h(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2} \,\le\, C\, h\, \|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \,\in\, [H^1(\Omega)]^2\,.$$

Demuestre que existe $h_0 > 0$ tal que $\forall\, h \le h_0$ el problema (25) tiene solución única, la cual es estable y convergente con constantes independientes de h.

Ind. Defina el operador $S_h(\boldsymbol{\tau}) := (I \,-\, 2\,\mathcal{E}_h\, P)(\boldsymbol{\tau}_h)$ y considere la expresión $A(\boldsymbol{\tau}, S_h(\boldsymbol{\tau})) = A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau})) - A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau}) - S_h(\boldsymbol{\tau}))$ para probar que A satisface las condiciones inf-sup discretas.

v) Qué se puede decir del esquema de Galerkin respectivo para (24)?.

28. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. El objetivo de este problema es demostrar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,\ge\, \frac{1}{2}\,|\mathbf{v}|^2_{[H^1(\Omega)]^2} \qquad \forall\, \mathbf{v} \,\in\, [H^1_0(\Omega)]^2\,, \tag{26}$$

donde $\mathbf{e}(\mathbf{v}) \,:=\, \dfrac{1}{2}\Big\{\nabla\mathbf{v} \,+\, (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}\Big\}$. Para tal efecto, proceda como sigue.

i) Dados $\boldsymbol{\sigma} \,:=\, (\sigma_{ij})$ y $\boldsymbol{\tau} \,:=\, (\tau_{ij})$ en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, se define el producto tensorial $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \,:=\, \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}\,\tau_{ij}$ y se introducen los subespacios

$$\mathbf{R}^{2\times 2}_{sim} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^{2\times 2} : \quad \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{t}} = \boldsymbol{\tau}\} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}^{2\times 2}_{asim} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^{2\times 2} : \quad \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{t}} = -\boldsymbol{\tau}\}\,.$$

Pruebe que $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \,=\, 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma} \,\in\, \mathbf{R}^{2\times 2}_{sim}, \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \,\in\, \mathbf{R}^{2\times 2}_{asim}$.

ii) Note que $\nabla\mathbf{v} \,=\, \mathbf{e}(\mathbf{v}) + \mathbf{w}(\mathbf{v})\,,$ con $\mathbf{w}(\mathbf{v}) \,:=\, \dfrac{1}{2}\Big\{\nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}\Big\}$, y recuerde que $\|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,=\, \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \,\in\, [L^2(\Omega)]^{2\times 2}$, para probar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,-\, \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,=\, \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}$$

y

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,+\, \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,=\, \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{v}\,.$$

iii) Deduzca la identidad $\nabla\mathbf{v} : (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}} \,=\, \mathrm{div}\,\Big\{\nabla\mathbf{v}\,\mathbf{v} \,-\, \mathrm{div}\,(\mathbf{v})\,\mathbf{v}\Big\} \,+\, (\mathrm{div}\,(\mathbf{v}))^2$ y concluya la desigualdad (26).