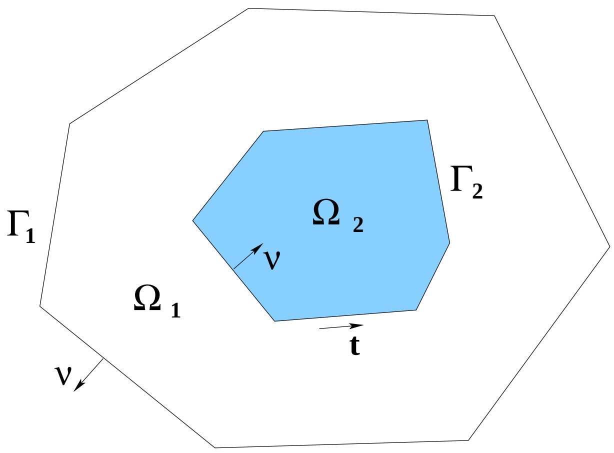
UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

# LISTADO DE EJERCICIOS 525440

## Métodos de Elementos Finitos Mixtos en Elasticidad

Segundo Semestre de 2005 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea $\Omega_2$ un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera $\Gamma_2$, y sea $\Omega_1$ la region anular acotada por $\Gamma_2$ y por una curva cerrada $\Gamma_1$ cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_2$, como se muestra en la siguiente figura:




El propósito de este ejercicio es analizar el acoplamiento de un fluido viscoso que ocupa la region $\Omega_1$ con un material poroso que vive en $\Omega_2$. Si $\mu > 0$ es la viscosidad y $\mathbf{K}$ es una matriz simétrica y uniformemente definida positiva que representa la permeabilidad del medio poroso, entonces las ecuaciones constitutivas están dadas por las leyes de Stokes y de Darcy, respectivamente, esto es:

$$\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) \,=\, -\,p_1\,\mathbf{I} \,+\, 2\,\mu\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_1) \quad \text{en} \quad \Omega_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 \,=\, -\,\mathbf{K}\,\nabla\,p_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,,$$

donde $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ y $(p_1, p_2)$ denotan las velocidades y presiones en los dominios correspondientes, $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, $\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)$ es el tensor de esfuerzos y $\mathbf{e}(\mathbf{u}_1) := \frac{1}{2}\Big(\nabla\mathbf{u}_1 + (\nabla\mathbf{u}_1)^{\mathtt{t}}\Big)$ es el tensor de deformaciones. Así, dados $\mathbf{f}_1 \in [L^2(\Omega_1)]^2$ y $f_2 \in L^2(\Omega_2)$ tal que $\int_{\Omega_2} f_2 = 0$, nos interesa: Hallar $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ y $p := (p_1, p_2)$ tales que

$$\left\{\begin{array}{rcllll}
-\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) & = & \mathbf{f}_1 & \text{en} & \Omega_1 & (\text{conservación de momentum})\,,\\
\mathrm{div}\mathbf{u}_1 & = & 0 & \text{en} & \Omega_1 & (\text{conservación de masa})\,,\\
\mathbf{u}_1 & = & 0 & \text{en} & \Gamma_1 & (\text{deslizamiento nulo})\,,\\
\mathrm{div}\mathbf{u}_2 & = & f_2 & \text{en} & \Omega_2 & (\text{conservación de masa})\,,\\
\mathbf{u}_1\cdot\boldsymbol{\nu} & = & \mathbf{u}_2\cdot\boldsymbol{\nu} & \text{en} & \Gamma_2 & (\text{conservación de masa})\,,\\
(\,\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)\boldsymbol{\nu}\,)\cdot\boldsymbol{\nu} & = & -\,p_2 & \text{en} & \Gamma_2 & (\text{balance de fuerzas normales})\,,\\
-\,\dfrac{\kappa}{\mu}\,(\,\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)\,\boldsymbol{\nu})\cdot\mathbf{t} & = & \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{t} & \text{en} & \Gamma_2 & (\text{ley de Beavers-Joseph-Saffman})\,,
\end{array}\right.$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal unitario exterior a $\Omega_1$, $\mathbf{t}$ es el vector tangencial a $\Gamma_2$, $\kappa > 0$ es la constante de fricción, y la ley de Beavers-Joseph-Saffman establece que el esfuerzo de corte es proporcional a la velocidad de deslizamiento (bajo el supuesto experimental que $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{t}$ es despreciable).

a) Pruebe que dados $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ campos vectoriales suficientemente suaves en un dominio $\Omega$ de $\mathbf{R}^2$, se tiene la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\mathbf{e}(\mathbf{w}) = -\int_\Omega \mathbf{e}(\mathbf{w}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) + \int_{\partial\Omega} \Big\{ (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu})\,(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{w})\boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,(\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{w})\boldsymbol{\nu}) \Big\}.$$

b) Defina los espacios

$$[H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)]^2 := \{\, \mathbf{v}_1 \in [H^1(\Omega_1)]^2 : \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma_1 \}\,,$$

$$H(\mathrm{div};\Omega_2) := \{\, \mathbf{v}_2 \in [L^2(\Omega_2)]^2 : \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v}_2 \in L^2(\Omega_2)\,\}\,,$$

$$H := [H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)]^2 \times H(\mathrm{div};\Omega_2)\,,$$

$$Q := (L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)) \times H^{1/2}(\Gamma_2)\,,$$

y demuestre que una formulación variacional mixta del presente problema de transmisión se reduce a: Hallar $(\mathbf{u},(p,\lambda)) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v},(p,\lambda)) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \quad \forall\, \mathbf{v} := (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) \in H\,, \\ \mathbf{b}(\mathbf{u},(q,\xi)) &= -\int_{\Omega_2} f_2\, q_2 \quad \forall\,(q,\xi) := ((q_1,q_2),\xi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\mathbf{a} : H \times H \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{b} : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := 2\,\mu \int_{\Omega_1} \mathbf{e}(\mathbf{u}_1) : \mathbf{e}(\mathbf{v}_1) + \frac{\mu}{\kappa} \int_{\Gamma_2} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{t})\,(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{t}) + \int_{\Omega_2} \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2\,,$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{v},(q,\xi)) := -\int_{\Omega_1} q_1\,\mathrm{div}\mathbf{v}_1 - \int_{\Omega_2} q_2\,\mathrm{div}\mathbf{v}_2 + \int_{\Gamma_2} (\mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} + \mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\nu})\,\xi\,.$$

c) Demuestre que si $(\mathbf{u},(p,\lambda)) \in H \times Q$ es una solución de (1), entonces para todo $c \in \mathbf{R}$, $(\mathbf{u},(\tilde{p},\tilde{\lambda})) \in H \times Q$ también lo es, con $\tilde{p} := (p_1 + c, p_2 + c)$ y $\tilde{\lambda} := \lambda + c$. En tal caso, deduzca cómo debe modificarse la definición del espacio $Q$ para evitar estas soluciones adicionales.

d) Defina el funcional de la energía complementaria y el operador Lagrangiano asociado a las ecuaciones de punto silla (1), e identifique los multiplicadores de Lagrange correspondientes.

e) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que el problema (1) (con el espacio $Q$ modificado de acuerdo a c)) posee una única solución.

2. Considere un abierto acotado $\Omega$ de $\mathbf{R}^n$ con frontera $\Gamma$ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{div};\Omega) \;:=\; \left\{ v \in [L^2(\Omega)]^n \;: \quad \mathrm{div}\, v \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \;\in\; L^2(\Omega) \right\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{div};\Omega)} \;:=\; \int_\Omega v \cdot w \, dx \;+\; \int_\Omega \mathrm{div}\, v \;\mathrm{div}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

**a)** Demuestre que $(H(\mathrm{div};\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{div};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

**b)** Utilice el hecho que $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$ es denso en $H(\mathrm{div};\Omega)$ para probar que existe un operador lineal y continuo $\gamma \,:\, H(\mathrm{div};\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que $\gamma(u) \;=\; u \cdot \nu \;\forall\; u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$, donde $\nu$ es el vector normal unitario exterior a $\Gamma$.

3. Considere un abierto acotado $\Omega$ de $\mathbf{R}^2$ con frontera $\Gamma$ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{rot};\Omega) \;:=\; \{\, v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \;: \quad \mathrm{rot}\, v \;:=\; \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \;-\; \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \;\in\; L^2(\Omega)\,\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)} \;:=\; \int_\Omega v \cdot w \, dx \;+\; \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \;\mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

**a)** Demuestre que $(H(\mathrm{rot};\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

**b)** Pruebe que existe un operador lineal y continuo $\gamma \,:\, H(\mathrm{rot};\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que $\gamma(u) \;=\; u \cdot \tau \;\forall\; u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde $\tau$ es el vector **tangencial** unitario de $\Gamma$.

4. Sean $\Omega$ un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno: $\quad -\,\Delta\, u \;=\; f \quad$ en $\quad \Omega\,, \quad u \;=\; 0 \quad$ en $\quad \partial\Omega$. Se puede demostrar que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx \;+\; \int_\Omega u \,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \;-\; \int_\Omega v \,\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\, dx \;=\; \int_\Omega f\, v \, dx \tag{2}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en $\Omega$ representa una incógnita adicional. Además, a partir de esta relación, y dado $\delta \in \mathbf{R}$, se deduce que

$$\delta \int_\Omega (\nabla u - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla v + \boldsymbol{\tau})\, dx = 0 \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega), \qquad (3)$$

y también

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \;=\; - \int_\Omega f\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,. \qquad (4)$$

De este modo, sumando (2), (3) y (4), se obtiene una formulación variacional mixta modificada, la cual tiene la forma: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) \;=\; F(\boldsymbol{\tau}, v) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H}\,, \qquad (5)$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es una forma bilineal y $F : \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es un funcional lineal.

Demuestre que, eligiendo $\delta$ convenientemente, el problema (5) tiene una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

**Indicación:** La norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$, es decir existe $c > 0$ tal que

$$c\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \;\leq\; |v|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

5. Sea $\Omega$ un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera $\Gamma$ de clase $C^{0,1}$. Dada $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento* $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ *y el tensor de esfuerzos* $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ *tal que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda\,\mathrm{tr}\,(\,)\mathbf{e}(\mathbf{u})\,\mathbf{I}_2 + 2\mu\,\mathbf{e}(\mathbf{u}) \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$
$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \qquad \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

donde $\lambda$, $\mu > 0$ son las constantes de Lamé, $\mathbf{I}_2$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla\,\mathbf{u} + (\nabla\,\mathbf{u})^{\mathbf{T}})$ es el tensor de deformaciones. Es fácil verificar que $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ puede re-escribirse como $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \nabla\,\mathbf{u} - \gamma$ en $\Omega$, donde $\gamma := \frac{1}{2}(\nabla\,\mathbf{u} - (\nabla\,\mathbf{u})^{\mathbf{T}})$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio

$$\mathcal{R} := \{\, \eta \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \quad \eta + \eta^{\mathbf{T}} = 0\,\}\,.$$

**a)** Demuestre que una formulación variacional **mixta** de este problema se reduce a: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \gamma)) \in H \times Q$ *tal que*

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \gamma)) \;=\; 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,$$
$$b(\boldsymbol{\sigma}, (v, \eta)) \;=\; - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot v\, dx \quad \forall\, (v, \eta) \in Q\,,$$

donde $H := H(\mathrm{div};\Omega)$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{2\mu} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}\, dx - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \int_\Omega \mathrm{tr}\,(()\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{tr}\,(()\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,$$

$$b(\boldsymbol{\tau}, (v, \eta)) := \int_\Omega v \cdot \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta\, dx \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, (v, \eta)) \in H \times Q\,.$$

**b)** Demuestre que $a$ y $b$ satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi.

6. Sea $\Omega$ un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera $\Gamma$.

   a) Considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ con norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y semi-norma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$. Defina la aplicación

   $$|||v||| := \left\{ |v|^2_{H^1(\Omega)} + \left( \int_\Omega v \right)^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

   y demuestre que existen $C_1$, $C_2 > 0$ tales que

   $$C_1\, |||v||| \,\leq\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, C_2\, |||v||| \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

   b) Considere el problema de valores de contorno:

   $$-\,\Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \int_\Omega u \,=\, 0\,,$$

   donde $f \,\in\, L^2(\Omega)$ es tal que $\displaystyle\int_\Omega f \,=\, 0$, y demuestre que su formulación débil se reduce a: Hallar $(u, \lambda) \,\in\, H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ tal que

   $$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,+\, \lambda \int_\Omega v \,=\, \int_\Omega f v \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

   $$\mu \int_\Omega u \,=\, 0 \qquad \forall\, \mu \in \mathbf{R}\,.$$

   Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que este problema tiene solución única, la cual depende continuamente de $f$.

   c) Extienda el análisis en b) al caso discreto y deduzca espacios de elementos finitos que garanticen la solubilidad y estabilidad del esquema de Galerkin asociado. Indique la razón de convergencia correspondiente.

7. Sean $X$ y $M$ espacios de Hilbert y sean $a \,:\, X \times X \,\to\, \mathbf{R}$, $b \,:\, X \times M \,\to\, \mathbf{R}$ dos formas bilineales acotadas. Suponga además que $a$ es simétrica y semi-definida positiva sobre $X$. Dados $F \,\in\, X'$, $G \,\in\, M'$ se define el operador $\mathcal{J} \,:\, X \times M \to \mathbf{R}$,

   $$\mathcal{J}(v, \mu) \,:=\, \frac{1}{2}\, a(v, v) \,+\, b(v, \mu) \,-\, F(v) \,-\, G(\mu)\,.$$

   Considere entonces los siguientes problemas variacionales:

   *Hallar* $(u, \lambda) \,\in\, X \times M$ *tal que*

   $$\begin{aligned} a(u, v) \,+\, b(v, \lambda) \,&=\, F(v) \quad \forall\, v \,\in\, X\,, \\ b(u, \mu) \,&=\, G(\mu) \quad \forall\, \mu \,\in\, M\,. \end{aligned} \tag{6}$$

   *Hallar* $(u, \lambda) \,\in\, X \times M$ *tal que*

   $$\mathcal{J}(u, \mu) \,\leq\, \mathcal{J}(u, \lambda) \,\leq\, \mathcal{J}(v, \lambda) \qquad \forall\, (v, \mu) \,\in\, X \times M\,. \tag{7}$$

   Demuestre que $(u, \lambda)$ es solución de (6) si y sólo si $(u, \lambda)$ es solución de (7).

8. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X,X)$, $Q \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$

y que existen constantes positivas $\alpha$, $\beta$ tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x\rangle_X \;\geq\; \alpha\,||x||_X^2 \qquad \forall\, x \in X$$

y

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle Q(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $||\mathbf{P}||$, $\alpha$, $\beta$ y $||Q||$, tal que $||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \;\leq\; C\;\{\,||f|| + ||g||\,\}$ .

9. Sea $\Omega$ un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera $\Gamma$ de clase $C^{0,1}$ y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. Se dice que un material que ocupa la region $\Omega$ es **casi-incompresible** si se necesitan cantidades muy altas de energía para producir cambios pequeños en su densidad, lo cual genera una gran diferencia entre los tamaños de las constantes de Lamé. En tal caso, la formulación en desplazamiento del problema de elasticidad lineal consiste en: Hallar $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ tal que

$$-2\,\mu\,\mathbf{div}\,\mathbf{e}(\mathbf{u}) \;-\; \lambda\,\nabla(\mathrm{div}\,\mathbf{u}) \;=\; \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \mathbf{u} \;=\; \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{8}$$

donde $\lambda >> \mu > 0$ son las constantes de Lamé y

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\,(\nabla\,\mathbf{u} + (\nabla\,\mathbf{u})^{\mathtt{t}})$$

es el tensor de deformaciones.

a) Defina la incógnita auxiliar $p \;:=\; \lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ en $\Omega$ y demuestre que una formulación variacional de (8) se reduce a: Hallar $(\mathbf{u}, p) \;\in\; [H_0^1(\Omega)]^2 \;\times\; L_0^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} 2\,\mu \int_\Omega \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \,+\, \int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} \;&=\; \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \qquad \forall\,\mathbf{v} \;\in\; [H_0^1(\Omega)]^2\,, \\ \int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} \,-\, \frac{1}{\lambda}\int_\Omega pq \;&=\; 0 \qquad\qquad \forall\, q \;\in\; L_0^2(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

b) Aplique el teorema abstracto del problema anterior para probar que (9) tiene una única solución que depende continuamente del dato $\mathbf{f}$.

10. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \to X$, $Q \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$

que $\mathbf{P}$ es **nolineal**, y que existen constantes $M$, $\alpha$, $\beta > 0$ tales que

$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \;\leq\; M\,||x-\bar{x}||_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x-\bar{x}\rangle_X \;\geq\; \alpha\,||x-\bar{x}||_X^2 \quad \forall\, x,\, \bar{x} \,\in X\,,$$

y

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle Q(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x},\tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ & \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $M$, $\alpha$, $\beta$ y $||Q||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \;\leq\; C\,\{\,||f|| + ||g|| + ||\mathbf{P}(0)||\,\}\,.$$

11. Sea $\Omega$ un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave $\Gamma$, y sea $\mathbf{f} \,\in\, [L^2(\Omega)]^2$. El Problema de Stokes consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión $p$ de un fluído, tales que

$$\begin{aligned} -\Delta\,\mathbf{u} \,+\, \nabla p \,=\, \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} \,=\, \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\,dx \,=\, 0\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Defina los espacios

$$H \,:=\, [H_0^1(\Omega)]^2 \quad \text{y} \quad Q \,:=\, \left\{ q \,\in\, L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\,dx \,=\, 0 \right\}.$$

Demuestre que la formulación débil de (10) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \,\in\, H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u},\mathbf{v}) \,+\, B(\mathbf{v},p) \,=\, &\; F(\mathbf{v}) \quad \forall\,\mathbf{v} \,\in\, H\,, \\ B(\mathbf{u},q) \,=\, &\; 0 \quad \forall\, q \,\in\, Q\,, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \to \mathbf{R}$, $B : H \times Q \to \mathbf{R}$ y $F \,\in\, H'$, están definidos por

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}) \,:=\, \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\,dx\,,$$

$$B(\mathbf{v},p) \,:=\, -\int_\Omega p\,\operatorname{div}\mathbf{v}\,dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) \,=\, \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,dx\,.$$

12. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

   **a)** Demuestre que $\displaystyle \sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v\in V^\perp\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

   **b)** Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle \sup_{\substack{v\in V^\perp\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \beta\, \|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$, y pruebe que $H = R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

13. Dados $\Omega := (0,1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$-\,u'' = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) = 0\,, \quad u'(1) = 1\,. \tag{11}$$

   **a)** Defina $\sigma := u'$ en $\Omega$ y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (11) se reduce a: *Hallar* $(\sigma, (u, \varphi)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) + b(\tau,(u,\varphi)) &= F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H\,,\\ b(\sigma,(v,\psi)) &= G((v,\psi)) \quad \forall\, (v,\psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{12}$$

   donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) &:= \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx \qquad \forall\, \sigma,\,\tau \in H\,,\\ b(\tau,(v,\psi)) &:= \int_\Omega v\,\tau'\,dx \,+\, \psi\,\tau(1) \quad \forall\,(\tau,(v,\psi)) \in H \times Q\,. \end{aligned}$$

   **b)** Defina los funcionales $F$ y $G$, y aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (12) tiene una única solución.

14. Sean $\Omega = ]a,b[$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno

$$u^{(4)} = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0\,. \tag{13}$$

   **i)** Defina la incógnita auxiliar $\sigma := u''$ en $\Omega$ y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (13) se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx + \int_\Omega u'\,\tau'\,dx &= 0 \qquad \forall\, \tau \in H^1(\Omega)\,,\\ \int_\Omega v'\,\sigma'\,dx &= -\int_\Omega f\,v\,dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{14}$$

   **ii)** Aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (14) tiene una única solución que depende continuamente del dato $f$.

15. (Lema de Fortin). Sean $H$, $Q$ espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} \geq \beta \, \|q\|_Q \qquad \forall\, q \in Q\,. \tag{15}$$

Sean $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de $H$ y $Q$, respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ tal que

$$b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) \,=\, 0 \qquad \forall\, q_n \in Q_n\,.$$

Suponga que la familia de operadores $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H,H_n)} \,\leq\, C$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de $n$, tal que

$$\sup_{\substack{v_n \in H_n \\ v_n \neq 0}} \frac{b(v_n,q_n)}{\|v_n\|_H} \geq \beta^* \, \|q_n\|_Q \qquad \forall\, q_n \in Q_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}\,.$$

16. Sea $\Omega$ un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\| \cdot \|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $| \cdot |_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre $\Omega$ de grado $\leq 1$ con base $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i$ $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$, $\forall\, x := (x_1, ..., x_n)^{\mathbf{T}} \in \Omega$.

**a)** (Desigualdad de Poincaré generalizada). Defina la aplicación

$$|||v||| \,:=\, \left\{ |v|^2_{H^2(\Omega)} \,+\, \sum_{i=0}^{n} |\, \langle v, p_i \rangle_{H^2(\Omega)} \,|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen $C_1$, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \,|||v||| \,\leq\, \|v\|_{H^2(\Omega)} \,\leq\, C_2 \,|||v||| \quad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,.$$

**Ind.:** Para la segunda desigualdad proceda por contradicción: suponga, en particular, que $\forall\, n \in \mathbf{N}$ existe $v_n \in H^2(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} \,>\, n\, |||v_n|||$. Luego, defina $w_n := \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}}$, observe que $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$ y que $|||w_n||| < \frac{1}{n}$, y aplique el hecho que la inclusión de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ es compacta.

**b)** (Lema de Deny-Lions). Considere el espacio cuociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma $\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \,:=\, \inf_{p \in P_1(\Omega)} \|v - p\|_{H^2(\Omega)}$, y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \,:=\, |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

Demuestre que $| \cdot |_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \,\leq\, \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$$

$$\leq\, C \,|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \,\in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

**Ind.:** Note que para todo $p \in P_1(\Omega)$ y para todo $\alpha$ con $|\alpha| = 2$ se tiene $\partial^\alpha p = 0$. Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.

c) (Lema de Bramble-Hilbert). Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p$ $\forall\, p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, C\, |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \,\in\, H^2(\Omega)\,.$$

**Ind.:** Note que $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v - p)$ $\forall\, p \in P_1(\Omega)$, y luego aplique el Lema de Deny-Lions.

17. Sea $\Omega$ un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal $\Gamma$. Una formulación variacional **mixta** para la ecuación de Poisson en $\Omega$, con dato $f \in L^2(\Omega)$, y condición de Dirichlet dada por $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, consiste en: *Hallar* $(\sigma, u) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} A(\sigma,\tau) \,+\, B(\tau,u) \;&=\; \int_\Gamma g\,\tau\cdot\nu\,ds\,,\\ B(\sigma,v) \;&=\; -\int_\Omega f\,v\,dx\,, \end{aligned} \tag{1}$$

para todo $(\tau, v) \in X \times M$, donde $X := H(\mathrm{div}; \Omega)$, $M := L^2(\Omega)$, $\nu$ es el vector normal unitario exterior a $\Gamma$, y las formas bilineales $A : X \times X \to \mathbf{R}$ y $B : X \times M \to \mathbf{R}$ están definidas por

$$A(\rho,\tau) := \int_\Omega \rho\cdot\tau\,dx \quad \forall \rho,\, \tau \in X\,,$$

$$B(\tau,v) := \int_\Omega v\,\mathrm{div}\,\tau\,dx \quad \forall (\tau,v) \in X \times M\,.$$

**a)** Demuestre que $A$ y $B$ satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi, y concluya que existe $C_0 > 0$ tal que

$$||(\rho,w)||_{X\times M} \,\leq\, C_0 \sup_{\substack{(\tau,v)\in X\times M\\ ||(\tau,v)||\,\leq\,1}} \{\, A(\rho,\tau) + B(\tau,w) + B(\rho,v)\,\} \tag{2}$$

para todo $(\rho, w) \in X \times M$.

**b)** El siguiente objetivo es deducir una **estimación de error a-posteriori** para (1). Para ello, sea $\{\mathcal{T}_h : \quad h \in \mathtt{I}\}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$, donde $\mathtt{I}$ es un conjunto finito de parámetros dado por $\{h_1, ..., h_m\}$, con $h_j \geq h_{j+1}$ $\forall\, j \in \{1, ..., m\}$. Como es usual, el parámetro $h$ está dado por $h := \max\{\, h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h\,\}$, donde $h_K$ es el diámetro de $K$. Sea $X_h \times M_h$ un subespacio de elementos finitos de $X \times M$, asociado a la triangulación $\mathcal{T}_h$, y sea $(\sigma_h, u_h) \in X_h \times M_h$ la solución del esquema de Galerkin correspondiente para la formulación (1).

**i)** Pruebe que existe un único $\bar{\sigma} \in X$ tal que

$$\langle\bar{\sigma},\tau\rangle_X \,=\, A(\sigma - \sigma_h, \tau) + B(\tau, u - u_h) \quad \forall\, \tau \in X\,.$$

**ii)** Defina $\mathbf{J}(\tau) := \frac{1}{2}\,||\tau||_X^2 \,-\, \langle\bar{\sigma},\tau\rangle_X \quad \forall\, \tau \in X$, y demuestre que

$$-\frac{1}{2}\,||\bar{\sigma}||_X^2 \,=\, \min_{\tau\in X} \mathbf{J}(\tau)\,.$$

**iii)** Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ defina $(\sigma_{h,K}, u_{h,K}) := (\sigma_h, u_h)\,|_K$, $X_K := H(\mathrm{div}; K)$, $M_K := L^2(K)$, y denote por $A_K : X_K \times X_K \to \mathbf{R}$ y $B_K : X_K \times M_K \to \mathbf{R}$, respectivamente, las restricciones de $A$ y $B$ al elemento $K$. Además, sea $\varphi_h \in H^{1/2}(\cup_{K\in\mathcal{T}_h} \partial K)$ una aproximación de $u$ sobre las fronteras de los elementos $K$ tal que $\varphi_h = g$ en $\Gamma$. Entonces, pruebe que existe un único $\hat{\sigma}_K \in X_K$ tal que

$$\langle \hat{\sigma}_K, \tau \rangle_{X_K} = -A_K(\sigma_{h,K}, \tau) - B_K(\tau, u_{h,K}) - \int_{\partial K} \varphi_h\, \tau \cdot \nu \, ds \quad \forall\, \tau \in X_K \,.$$

**iv)** Defina

$$\mathbf{J}_K(\tau) := \frac{1}{2}\, ||\tau||^2_{X_K} + A_K(\sigma_{h,K}, \tau) + B_K(\tau, u_{h,K}) + \int_{\partial K} \varphi_h\, \tau \cdot \nu \, ds$$

para todo $\tau \in X_K$, y pruebe que

$$-\frac{1}{2}\, ||\hat{\sigma}_K||^2_{X_K} \;=\; \min_{\tau\in X_K} \mathbf{J}_K(\tau)\,.$$

**v)** Use **i), ii), iii)** y **iv)** para demostrar que

$$||\bar{\sigma}||^2_X \;\le\; \sum_{K\in\mathcal{T}_h} ||\hat{\sigma}_K||^2_{X_K}\,.$$

**vi)** Aplique (2) y **v)** para concluir que existe $C > 0$, independiente de $h$, tal que

$$||(\sigma, u) - (\sigma_h, u_h)||_{X\times M} \;\le\; C \left\{ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2},$$

donde

$$\eta_K^2 := ||\hat{\sigma}_K||^2_{X_K} \,+\, ||f + \mathrm{div}\, \sigma_h||^2_{L^2(K)} \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,.$$

18. Sea $\Omega$ un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal y sea $\mathcal{T}_h$ una triangularización de $\bar{\Omega}$. Dado $K \in \mathcal{T}_h$, sea $\boldsymbol{\nu}_K$ el vector normal a $\partial K$ y denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial K}$ la paridad dual entre $H^{-1/2}(\partial K)$ y $H^{1/2}(\partial K)$.

    (a) Defina los espacios

$$X \;:=\; \Big\{ v \in L^2(\Omega): \quad v|_K \in H^1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

$$Z \;:=\; \Big\{ \boldsymbol{\lambda} \;:=\; (\lambda_K)_{K\in\mathcal{T}_h} \in \Pi_{K\in\mathcal{T}_h} H^{-1/2}(\partial K): \quad \exists\; \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div}; \Omega) \text{ tal que } \; \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_K \;=\; \lambda_K \quad \text{en} \quad \partial K \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

y demuestre que

$$H_0^1(\Omega) \;:=\; \Big\{ v \in X: \quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle \lambda_K, v|_K \rangle_{\partial K} \;=\; 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\lambda} \,\in\, Z \Big\}.$$

(b) Defina los espacios

$$\tilde{X} := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \boldsymbol{\tau}|_K \in H(\mathrm{div}; K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$\tilde{Z} := \Big\{ \boldsymbol{\xi} := (\xi_K)_{K\in\mathcal{T}_h} \in \Pi_{K\in\mathcal{T}_h} H^{1/2}(\partial K) : \quad \exists\, v \in H_0^1(\Omega) \\ \text{tal que} \quad v = \xi_K \quad \text{en} \quad \partial K \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

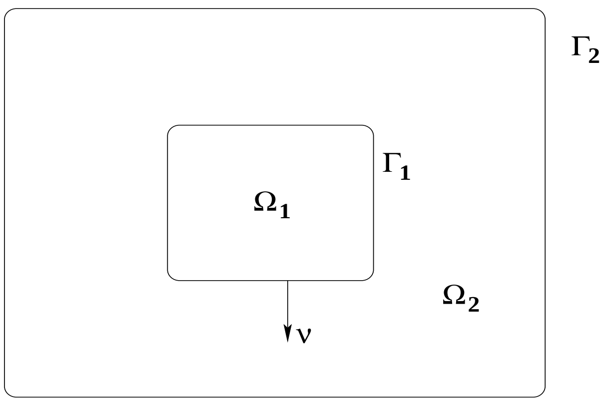
y demuestre que

$$H(\mathrm{div};\Omega) := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \tilde{X} : \quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K, \xi_K \rangle_{\partial K} = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \tilde{Z} \right\}.$$

19. Sean $H_h$ y $Q_h$ subespacios de dimensión finita de espacios de Hilbert $H$ y $Q$, respectivamente, y sean $\mathbf{a} : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ y $\mathbf{b} : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ formas bilineales acotadas que satisfacen las hipótesis de las versiones continua y discreta del Teorema de Babuška-Brezzi, con constantes independientes de $h$. Sean $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H \times Q$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in H_h \times Q_h$ las únicas soluciones de los problemas de punto-silla continuo y discreto, respectivamente, asociados a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Suponga que el kernel discreto de $\mathbf{b}$ está contenido en su kernel continuo y demuestre que existe $C > 0$, independiente de $h$, tal que
$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_H \;\le\; C \inf_{\boldsymbol{\tau}_h\in H_h} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_H\,.$$

20. Sea $\Omega_1$ un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera $\Gamma_1$, y sea $\Omega_2$ la region anular acotada por $\Gamma_1$ y por una curva cerrada $\Gamma_2$ cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_1$ (ver figura). Entonces, dados $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, $g_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, y $g_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, interesa el siguiente PROBLEMA DE TRANSMISIÓN: Hallar $(u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ tales que

$$\begin{gathered} -\Delta u_1 = f_1 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \quad -\Delta u_2 = f_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \\ u_1 - u_2 = g_1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1\,, \quad u_2 = g_2 \quad \text{en} \quad \Gamma_2\,. \end{gathered} \tag{16}$$



(a) Demuestre que una FORMULACIÓN VARIACIONAL MIXTA-DUAL de (16) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2) \in H(\mathrm{div};\Omega_1) \times H(\mathrm{div};\Omega_2)$, $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\xi \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_{\Omega_i} \sigma_i \cdot \tau_i \, dx + \int_{\Omega_i} u_i \, \mathrm{div}\tau_i \, dx \right\} + \langle \tau_1 \cdot \nu - \tau_2 \cdot \nu, \xi \rangle_{\Gamma_1} &= F(\boldsymbol{\tau}) \,, \\ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} v_i \, \mathrm{div}\sigma_i \, dx + \langle \sigma_1 \cdot \nu - \sigma_2 \cdot \nu, \lambda \rangle_{\Gamma_1} &= G(\mathbf{v}, \lambda) \,, \end{aligned} \tag{17}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2) \in H(\mathrm{div};\Omega_1) \times H(\mathrm{div};\Omega_2)$, $\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, donde

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \langle \tau_1 \cdot \nu, g_1 \rangle_{\Gamma_1} + \langle \tau_2 \cdot \nu, g_2 \rangle_{\Gamma_2} \quad \text{y} \quad G(\mathbf{v}, \lambda) := - \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} f_i \, v_i \, dx \,.$$

(b) Defina el funcional de la energía complementaria y el operador Lagrangiano asociado a las ecuaciones de punto silla (17), e identifique los multiplicadores de Lagrange correspondientes.

(c) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que el problema (17) posee una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \xi)$ en los espacios indicados.

21. Sea $\Omega$ un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera $\Gamma$ Lipschitz continua, y sean $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$ tal que $\int_\Gamma \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a $\Gamma$. El **problema de Stokes generalizado** consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathbf{t}}$ y la presión $p$ de un fluido que ocupa la region $\Omega$, tal que

$$\begin{aligned} \alpha \, \mathbf{u} - \nu \, \Delta \, \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega \,, \\ \mathrm{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega \,, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \text{en} \quad \Gamma \,, \end{aligned} \tag{18}$$

donde $\nu > 0$ es la viscosidad del fluido y $\alpha$ es un parámetro positivo.

(a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\mathbf{t} := \nabla \mathbf{u}$ y $\boldsymbol{\sigma} := \nu \, \nabla \mathbf{u} - p \, \mathbf{I}$ en $\Omega$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y pruebe que una formulación variacional mixta de (18) se reduce a: Hallar $(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \xi) \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^2 \times H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \nu \int_\Omega \mathbf{t} : \mathbf{s} + \alpha \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{s} - \int_\Omega \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} - \int_\Omega p \, \mathrm{tr}\,(\mathbf{s}) &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \,, \\ - \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \mathbf{t} - \int_\Omega \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{u} \qquad + \quad \xi \int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau}) &= - \langle \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}, \mathbf{g} \rangle \,, \\ - \int_\Omega q \, \mathrm{tr}\,(\mathbf{t}) + \eta \int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\sigma}) &= 0 \,, \end{aligned} \tag{19}$$

para todo $(\mathbf{s}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, q, \eta) \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^2 \times H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$.

(b) Defina espacios de Hilbert y operadores (formas bilineales) convenientes y pruebe que (19) puede reformularse en base a una estructura dual-dual.

(c) Utilice lo indicado en (b) para demostrar que (19) tiene una única solución y que existe una constante $C(\alpha, \nu) > 0$ tal que

$$\|(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \xi)\| \;\leq\; C(\alpha, \nu)\; \{\, \|\mathbf{f}\| \,+\, \|\mathbf{g}\|\, \}\,.$$

(d) Extienda el análisis en (c) al caso discreto y **deduzca** espacios de elementos finitos que garanticen que el esquema de Galerkin asociado a (19) tiene una única solución.

(e) Asuma la regularidad necesaria de la solución exacta y demuestre la estimación de error a-priori correspondiente (razón de convergencia).