

LISTADO DE EJERCICIOS, 525402

Análisis Funcional y Aplicaciones II

Segundo Semestre de 2011

Prof. Gabriel N. Gatica.

1. Sea X un espacio vectorial normado de dimensión INFINITA y sea $K \in K(X, X)$ un operador inyectivo. Demuestre que $K^{-1} \notin \mathcal{L}(X, X)$.
2. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Suponga que existen sucesiones $\{F_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X'$, $\{y_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq Y$, $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|F_n\|_{X'} < +\infty, \quad \sup_{n \in \mathbf{N}} \|y_n\|_Y < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty,$$

y además

$$Ax = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \lambda_n F_n(x) y_n \quad \forall x \in X.$$

Demuestre que A es compacto.

3. Sea $p > 1$ y considere el operador $K : l_p \rightarrow l_p$ definido por

$$K(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_k}{k}, \dots) \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_p.$$

Demuestre que K es compacto.

4. Sean H y V dos espacios de Hilbert tales que $H \subseteq V$ y la inyección $i : H \rightarrow V$ es compacta.

- a) Se dice que una forma bilineal acotada A definida sobre $H \times H$ satisface la DESIGUALDAD DE GÅRDING si existen $\alpha > 0$ y una forma bilineal acotada $K : H \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$A(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 - K(v, v) \quad \forall v \in H.$$

Dado $F \in H'$, considere el siguiente problema variacional: *Hallar $u \in H$ tal que*

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H. \quad (1)$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding, entonces (1) tiene solución para cada $F \in H'$ SI Y SOLO SI $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

- b) Se dice que A satisface la DESIGUALDAD DE GÅRDING GENERALIZADA si existen $\alpha > 0$, una forma bilineal acotada $K : H \times V \rightarrow \mathbb{R}$, y un isomorfismo $S : H \rightarrow H$ tales que

$$A(v, Sv) \geq \alpha \|v\|_H^2 - K(v, Sv) \quad \forall v \in H.$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding generalizada, entonces (1) tiene solución para cada $F \in H'$ SI Y SOLO SI $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

5. Sean E y F espacios de Banach y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E \rightarrow F$ lineal cerrado tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en E . Pruebe que si E es reflexivo entonces

$$N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}.$$

6. Sean X e Y espacios de Banach tal que X es reflexivo. Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ es compacto SI Y SÓLO SI A transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones fuertemente convergentes de Y .

7. DEFINICIÓN. Sea X un espacio de Banach y $T : X \rightarrow X'$ un operador NOLINEAL. Se dice que T satisface la propiedad (S) si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X$ tal que

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad y \quad (T(x_n))(x_n - x) - (T(x))(x_n - x) \longrightarrow 0,$$

se tiene $x_n \rightarrow x$.

Sean H, Q, V espacios de Banach tales que $H \subseteq V$ y $\mathbf{i} : H \rightarrow V$ es compacta. Sea $X := H \times Q$, y considere una forma bilineal acotada $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ y un operador no lineal $A : H \rightarrow H'$ que satisfacen las siguientes propiedades

- i) existe $C_0 > 0$ tal que

$$B((u, \lambda), (u, \lambda)) \geq C_0 \|\lambda\|_Q^2 \quad \forall (u, \lambda) \in X.$$

- ii) existen $C_1, C_2 > 0$ tal que para todo $u, v \in H$

$$(A(u))(u - v) - (A(v))(u - v) \geq C_1 \|u - v\|_H^2 + R(u, v),$$

donde

$$|R(u, v)| \leq C_2 \{1 + \|u\|_H + \|v\|_H\} \|u - v\|_V.$$

Demuestre que el operador no lineal $T : X \rightarrow X'$ definido por

$$(T(u, \lambda))(v, \mu) := (A(u))(v) + B((u, \lambda), (v, \mu)),$$

satisface la propiedad (S).

8. Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\| \cdot \|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $| \cdot |_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall x := (x_1, \dots, x_n)^T \in \Omega$.

a) (DESIGUALDAD DE POINCARÉ GENERALIZADA). Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|_{H^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^n |\langle v, p_i \rangle_{H^2(\Omega)}|^2 \right\}^{1/2} \quad \forall v \in H^2(\Omega),$$

y demuestre que existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 |||v||| \leq \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C_2 |||v||| \quad \forall v \in H^2(\Omega).$$

IND.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que $\forall n \in \mathbf{N}$ existe $v_n \in H^2(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} > n |||v_n|||$. Luego, defina $w_n := \frac{v_n}{|||v_n|||}$, observe que $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$, note que $|||w_n||| < \frac{1}{n}$, y aplique el hecho que la inclusión de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ es compacta.

b) (LEMA DE DENY-LIONS). Considere el espacio cociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma $||[v]||_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \inf_{p \in P_1(\Omega)} \|v - p\|_{H^2(\Omega)}$, y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega).$$

Demuestre que $| \cdot |_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} &\leq ||[v]||_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \\ &\leq C ||[v]||_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \quad \forall [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega). \end{aligned}$$

IND.: Note que para todo $p \in P_1(\Omega)$ y para todo α con $|\alpha| = 2$ se tiene $\partial^\alpha p = 0$. Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.

c) (LEMA DE BRAMBLE-HILBERT). Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p \forall p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq C |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega).$$

IND.: Note que $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v - p) \forall p \in P_1(\Omega)$, y luego aplique el Lema de Deny-Lions.

9. Sea $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y defina el operador integral $\mathbf{K} : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ por

$$\mathbf{K}(u)(t) := \int_0^1 K(t, s) u(s) ds \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall u \in C[0, 1].$$

Aplique el Teorema de Arzelá - Ascoli para probar que \mathbf{K} es compacto.

10. Sea Ω un dominio poligonal convexo de \mathbb{R}^2 con frontera Γ , y dado $f \in L^2(\Omega)$, considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:

$$\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (2)$$

- i) Introduzca la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω y pruebe que una formulación variacional mixta de (2) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} - \int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \text{div}(\boldsymbol{\tau}) = - \int_{\Omega} f \text{div}(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega). \quad (3)$$

- ii) Defina el operador $P : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$ que a cada $\boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega)$ le asigna $P(\boldsymbol{\tau}) := \nabla z$, donde $z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ es la única solución del problema: $\Delta z = \text{div}(\boldsymbol{\tau})$ en Ω , $z = 0$ en Γ . Pruebe que P es un proyector compacto, y concluya que

$$H(\text{div}; \Omega) = P(H(\text{div}; \Omega)) \oplus (I - P)(H(\text{div}; \Omega)).$$

- iii) Utilice la descomposición anterior de $H(\text{div}; \Omega)$ para demostrar que (3) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + K(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = F(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega), \quad (4)$$

donde

$$A(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := - \int_{\Omega} P(\boldsymbol{\sigma}) \cdot P(\boldsymbol{\tau}) - \int_{\Omega} \text{div} P(\boldsymbol{\sigma}) \text{div} P(\boldsymbol{\tau}) + \int_{\Omega} (I - P)(\boldsymbol{\sigma}) \cdot (I - P)(\boldsymbol{\tau}),$$

$$K(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := 2 \int_{\Omega} P(\boldsymbol{\sigma}) \cdot P(\boldsymbol{\tau}) + \int_{\Omega} P(\boldsymbol{\sigma}) \cdot (I - P)(\boldsymbol{\tau}) + \int_{\Omega} (I - P)(\boldsymbol{\sigma}) \cdot P(\boldsymbol{\tau}),$$

y F es el funcional definido por el lado derecho de (3).

- iv) Sean $\mathbf{A} : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow H(\text{div}; \Omega)$ y $\mathbf{K} : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow H(\text{div}; \Omega)$ los operadores lineales y acotados asociados a las formas bilineales A y K , respectivamente. Demuestre que \mathbf{A} es biyectivo y que \mathbf{K} es compacto.

IND. Defina el operador $S(\boldsymbol{\tau}) := (I - 2P)(\boldsymbol{\tau})$ y considere la expresión $A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau}))$ para probar que A satisface la condición inf-sup continua.

11. a) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que K transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones convergentes de Y . Pruebe que K es compacto.
- b) Sea X un espacio de Hilbert y sean $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, $x \in X$, tales que $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Pruebe que $x_n \rightarrow x$.
- c) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operador compacto. Aplique a) y b) para probar que $K^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ también es compacto.

12. a) Sea $\Omega = (0, 1)$ y $X = L^2(\Omega)$. Puede probarse que X provisto del producto escalar

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} f(x) g(x) dx \quad \forall f, g \in X$$

es un espacio de Hilbert, y que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Considere la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X$ definida por $x_n(t) = \sqrt{2} \sin(n\pi t) \forall t \in \Omega$. Demuestre que

$$\|x_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad , \quad \text{y que} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, x_n \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Concluya además que $x_n \xrightarrow{w} 0$, y que x_n NO CONVERGE FUERTEMENTE a la función nula.

- b) A propósito de lo anterior, demuestre que en un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita, la convergencia débil no es equivalente a la convergencia fuerte.
13. a) Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $N(T) = \{0\}$ y $R(T) = Y$. Demuestre que X es reflexivo (separable) si y sólo si Y es reflexivo (separable).
- b) Sean X, Y espacios de Banach separables. Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también es separable.
- c) Dado un abierto Ω de \mathbb{R}^N y $p \in \mathbb{R}$, $2 \leq p < \infty$, se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ medible y } \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_{\Omega} |f|^p dx \right\}^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Puede probarse que $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ es un espacio de Banach separable. Por otra parte, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está dado por

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \text{ existe } g_i \in L^p(\Omega), i = \overline{1, N} \text{ tal que} \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}$$

En tal caso se escribe $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, y se define la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Puede probarse que $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ también es Banach. Demuestre que $W^{1,p}(\Omega)$ es separable.

14. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se dice que T es DÉBILMENTE COMPACTO si para toda sucesión acotada $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de X existe una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n \in \mathbf{N}}$ tal que $\{Tx_n^{(1)}\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge débilmente en Y . Pruebe que si X o Y es *reflexivo*, entonces todo operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es débilmente compacto.

15. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $-\infty < a < b < +\infty$. Asuma que $C[a, b]$ es separable, y demuestre que para todo entero no negativo k , $C^k[a, b]$ también es separable.
16. a) Sea X un espacio de Banach, y considere una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Demuestre que $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- b) Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$. Pruebe que $x_n \rightarrow x$.
17. Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador compacto. Demuestre que $\mathcal{R}(T)$ es separable.
- IND.: Escriba $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \|x\| \leq n\}$, y luego use que todo subconjunto relativamente compacto de un espacio métrico es separable.
18. Un importante resultado establece que *todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo*. En lo que sigue suponga que Ω es un abierto de \mathbb{R}^n y que $p \in \mathbb{R}$ es tal que $p \geq 2$.

- a) A partir del hecho que $\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2} \forall \alpha, \beta \geq 0$, demuestre la desigualdad de Clarkson:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2} \left\{ \|f\|_{L^p(\Omega)}^p + \|g\|_{L^p(\Omega)}^p \right\} \quad \forall f, g \in L^p(\Omega).$$

- b) Utilice la desigualdad anterior para probar que $L^p(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$, es uniformemente convexo y por lo tanto reflexivo. Además, deduzca que $W^{1,p}(\Omega)$ también es reflexivo.
19. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional NO-LINEAL. Se dice que J es CONTINUO (resp. DÉBILMENTE CONTINUO) si para toda sucesión $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ tal que $v_n \rightarrow v \in V$ (resp. $v_n \xrightarrow{w} v \in V$) se tiene que

$$J(v_n) \rightarrow J(v) \in \mathbb{R}.$$

- a) Determine cual de estos dos conceptos de continuidad implica al otro.

Un subconjunto U de V se dice DÉBILMENTE COMPACTO si toda sucesión $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de U posee una subsucesión débilmente convergente en U .

- b) Pruebe que si U es un subconjunto compacto de V y $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo (o bien si U es un subconjunto débilmente compacto de V y $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ es débilmente continuo), entonces existe $u \in U$ tal que

$$J(u) = \min_{v \in U} J(v).$$

Un subconjunto U de V se dice DÉBILMENTE CERRADO si el límite de toda sucesión $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de U que converge débilmente, pertenece a U .

- c) Demuestre que si V es reflexivo, U es un subconjunto acotado y débilmente cerrado de V , y $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ es débilmente continuo, entonces existe $u \in U$ tal que

$$J(u) = \min_{v \in U} J(v).$$

20. Sea X un espacio vectorial normado. Un subespacio W de X' se dice SATURADO si para todo $F \in X' - W$ existe $x \in {}^oW$ tal que $F(x) \neq 0$.

- a) Pruebe que si X es reflexivo y W es un subespacio cerrado de X' , entonces W es saturado.
 b) Pruebe que un subespacio W de X' es saturado sí y sólo sí $W = ({}^oW)^o$.

Un subconjunto W de X' se dice DÉBILMENTE* CERRADO si el límite de toda sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de W que converge débilmente*, pertenece a W .

- c) Pruebe que si un subespacio W de X' es saturado entonces él es débilmente* cerrado.

21. Dado $p \geq 1$, considere el espacio vectorial normado

$$\ell_p(\mathbb{C}) := \{ \mathbf{x} := \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty \},$$

provisto de la suma y multiplicación por escalar usuales, y cuya norma está dada

$$\text{por} \quad \|\mathbf{x}\| := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right\}^{1/p}. \quad \text{Demuestre que } \ell_p(\mathbb{C}) \text{ es separable.}$$

22. Sean X un Banach complejo y $A \in \mathcal{L}(X, X)$. Defina la constante

$$r_\sigma(A) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n}$$

y demuestre que

$$\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r_\sigma(A) \} \subseteq \rho(A).$$

23. Sean X un Banach complejo y $A \in \mathcal{L}(X, X)$. Demuestre que si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, entonces

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda) R(\lambda) R(\mu).$$

Pruebe además que si $|\lambda - \mu| \|R(\mu)\| < 1$, entonces

$$R(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^N (\mu - \lambda)^{n-1} R(\mu)^n \right\} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}(X, X).$$

24. Sean X un Banach complejo y $A, B \in \mathcal{L}(X, X)$ tales que $0 \in \rho(A)$ y

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Muestre que $0 \in \rho(B)$ y

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{(1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|)}$$

25. Sea X un Banach real y considere el espacio producto $Z := X \times X$ provisto de

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Z,$$

$$(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in Z,$$

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \quad \forall (x, y) \in Z.$$

Demuestre que Z es un Banach (\mathbb{C}), y que X se identifica con el subespacio cerrado de Z ,

$$Z_0 := \{(x, 0) \in Z : x \in X\}$$

Ahora, sea $A \in \mathcal{L}(X, X)$ y defina $\hat{A} \in \mathcal{L}(Z, Z)$ por $\hat{A}(x, y) = (Ax, Ay)$. Demuestre que $\|A\| = \|\hat{A}\|$. Pruebe además que si p es un polinomio con coeficientes reales, entonces la ecuación $p(A)x = y$ tiene única solución para cada $y \in X$ si y sólo si $p(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(\hat{A})$.

26. Sea $X := L^2(\mathbb{R})$ y considere el operador $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ definido por $(Af)(x) = xf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{D}(A)$. Demuestre que $\sigma_p(A) = \sigma_r(A) = \emptyset$, $\sigma_c(A) = \mathbb{R}$ y $\rho(A) = \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

27. Sean X un Hilbert complejo y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X . Demuestre que $\lambda \in \rho(A^*)$ si y sólo si $(A^* - \lambda I)$ es inyectivo y existe $C > 0$ tal que $\|(A^* - \lambda I)^{-1}(x)\| \leq C \|x\| \quad \forall x \in X$.

28. Sean X un Hilbert complejo y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X y A es autoadjunto. Demuestre que $\lambda \in \rho(A)$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que $\|A_\lambda x\| \geq C \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$.

29. Sean X un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador autoadjunto. Defina la constante $m = \inf \{ \langle Au, u \rangle : u \in X, \|u\| = 1 \}$. Demuestre que $\lambda \in \rho(A)$ para todo $\lambda < m$ y que $m \in \sigma(A)$.

30. Sean X un Hilbert complejo y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X .

i) Pruebe que si $\lambda \in \sigma_r(A)$, entonces $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

ii) Deduzca que si A es autoadjunto entonces el espectro residual de A es vacío.

31. Sean X un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador compacto autoadjunto.

- i) Pruebe que existe una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, X)$ de operadores de rango finito tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\|_{\mathcal{L}(X, X)} = 0.$$

- ii) Demuestre que la ecuación $Au = f$ admite una solución u si y sólo si

$$\sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \frac{|f_\lambda|^2}{|\lambda|^2} < \infty, \quad \text{donde } f = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} f_\lambda, \quad \text{con } f_\lambda \in E_\lambda(A).$$

- iii) Dados $\mu \notin \sigma(A)$ y $f \in X$, resuelva la ecuación: $\mu u - Au = f$, en términos de una base Hilbertiana de X .

- iv) Aplique el resultado anterior a la ecuación integral siguiente:

$$u \in X \quad , \quad 3u(x) - \int_{\Omega} K(x, t) u(t) dt = f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

donde $\Omega := (0, 1)$, $X := L^2(\Omega)$, $f \in X$, y K es la función sobre $\Omega \times \Omega$ definida por

$$K(x, t) := \begin{cases} x(1-t) & \text{si } t \leq x, \\ t(1-x) & \text{si } t > x. \end{cases}$$

32. Sea X un espacio de Banach y $A \in \mathcal{L}(X, X)$. Suponga que existe un entero $k \geq 1$ tal que A^k es compacto. Demuestre que $I - A$ es un operador de Fredholm.

33. Sea X el espacio de Hilbert complejo $L^2(\Omega)$, con $\Omega :=]0, 1[$, y considere el operador lineal $K : X \rightarrow X$ definido por

$$(Ku)(t) := \int_0^1 k(t, s) u(s) ds \quad \forall t \in \Omega, \quad \forall u \in X,$$

donde $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ está dada por $k(t, s) := \min\{t, s\} \quad \forall (t, s) \in \Omega \times \Omega$.

- i) Muestre que K es autoadjunto y luego utilice una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ para concluir que K es compacto.
- ii) Encuentre el espectro de K . Para este efecto, proceda como se indica a continuación. Dado $\lambda \in \sigma_p(K)$ y $v \in N(K - \lambda I) \setminus \{0\}$, derive dos veces la ecuación $K(v) - \lambda v = 0$ y obtenga el problema de valores de contorno:

$$\lambda v'' + v = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad v'(1) = v(0) = 0.$$

Observe así que $\lambda \neq 0$. Luego, multiplique la ecuación diferencial por \bar{v} , integre sobre Ω , y deduzca de la identidad resultante que $\lambda > 0$. Entonces, demuestre que la solución de la ecuación diferencial está dada por:

$$v(t) := C_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad \forall t \in \Omega,$$

y use las condiciones de contorno para probar que los valores propios de K están dados por $\lambda_j := \frac{4}{\pi^2(2j-1)^2} \quad \forall j \in \mathbf{N}$, con funciones propias

$$v_j(t) := \sin\left(\frac{\pi(2j-1)t}{2}\right) \quad \forall t \in \Omega.$$

iii) Concluya que $\|K\| = \frac{4}{\pi^2}$.

34. Sea H un Hilbert sobre \mathbb{C} . Se dice que $A \in \mathcal{L}(H, H)$ es un operador normal si $A^*A = AA^*$. Pruebe en este caso que:

a) $\lambda \in \sigma_p(A)$ si y sólo si $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$. Concluya además que

$$E_\lambda(A) := N(A - \lambda I) = E_{\bar{\lambda}}(A^*) := N(A^* - \bar{\lambda} I).$$

b) Si $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$, entonces $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A)$.

35. Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera Lipschitz-continua. Demuestre que existen una base Hilbertiana $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de $L^2(\Omega)$ y una sucesión $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de números reales con $\lambda_n > 0$, y $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tales que $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, y $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$ en Ω . Se dice aquí que los λ_n son los valores propios del Laplaciano (con condición de Dirichlet), y que las e_n son las funciones propias asociadas.

36. Sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq L^2(-1, 1) \rightarrow L^2(-1, 1)$ el operador definido por

$$(Au)(x) = xu(x) + \theta \int_{-1}^1 u(t) dt,$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$. Obtenga la mayor información posible sobre el espectro de A .

37. Sean $\Omega := (0, 1)$, $p \in C^1(\bar{\Omega})$ y $q \in C(\bar{\Omega})$, con $p(x) \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in \Omega$. Demuestre que existen una base Hilbertiana $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de $L^2(\Omega)$ y una sucesión $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de números reales con $\lambda_n > 0$, y $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tales que $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, y

$$-(pe_n')' + qe_n = \lambda_n e_n \quad \text{en } \Omega.$$

38. Sea H un espacio de Hilbert separable. Se dice que $T : H \rightarrow H$ es un operador de HILBERT-SCHMIDT si existe una base $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de H tal que

$$\|T\|^2 := \sum_{n \in \mathbf{N}} \|Te_n\|^2 < \infty.$$

Sean p y q como en el problema anterior. Demuestre que el operador lineal $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ que a cada $f \in L^2(\Omega)$ le asigna la única solución $u := Tf$ de

$$-(pu')' + qu = f \quad \text{en } \Omega := (0, 1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

es un operador de Hilbert Schmidt.

39. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un Hilbert (\mathbb{C}) , y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \rightarrow H$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H y A es autoadjunto. Demuestre que $\mathcal{D}(A)$ provisto con el producto escalar $\langle u, v \rangle_{\mathcal{D}(A)} := \langle u, v \rangle_H + \langle Au, Av \rangle_H$, es un espacio de Hilbert. Suponga ahora que $\mathbf{i} : \mathcal{D}(A) \rightarrow H$ es una inyección compacta, y que $A^{-1} \in \mathcal{L}(H, \mathcal{D}(A))$. Demuestre que

i) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$.

ii) Los elementos de $\sigma_p(A)$ pueden ordenarse en una sucesión $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $|\lambda_n| \rightarrow \infty$, cuando $n \rightarrow \infty$.

iii) Los espacios propios $E_{\lambda_n} := N(A - \lambda_n I)$ son de dimensión finita, ortogonales dos a dos, y $H = \bigoplus \{ E_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N} \}$.

40. Sea H un Hilbert complejo no trivial, y sea $A \in \mathcal{L}(H, H)$ un operador biyectivo tal que $A^* = A^{-1}$ (OPERADOR UNITARIO). Demuestre que $\|A\| = 1$, y concluya que

$$\sigma(A) \subseteq \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1 \}.$$

41. Sean X un Hilbert complejo y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X y A es autoadjunto.

i) Demuestre que $\lambda \in \sigma(A)$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $(A - \lambda I)x_n \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

ii) Pruebe que $\langle Ax, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(A)$ (A POSITIVO) si y sólo si $\sigma(A) \subseteq [0, \infty)$.

42. Sea $X = L^2(0, 1)$ y considere el operador $A \in \mathcal{L}(X, X)$ definido por

$$(Ax)(t) := tx(t) \quad \forall t \in (0, 1), \forall x \in X.$$

Demuestre que $\sigma(A) = [0, 1]$ y concluya que A no es compacto.

IND.: Para $\lambda \in (0, 1)$ defina la sucesión $x_n(t) := \begin{cases} \sqrt{t} & , \quad t \in (\lambda, \lambda + \frac{1}{n}), \\ 0 & , \quad t \notin (\lambda, \lambda + \frac{1}{n}). \end{cases}$

43. Sean H un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(H, H)$ un operador autoadjunto. Dado un subespacio cerrado S de H invariante con respecto a A , denote por $\sigma(A, S)$ y $\sigma(A, S^\perp)$ los espectros de las restricciones $A|_S$ y $A|_{S^\perp}$, respectivamente. Demuestre que $\sigma(A) = \sigma(A, S) \cup \sigma(A, S^\perp)$.

44. Sea X un espacio de Hilbert de dimensión infinita, y sea $K \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador compacto. Demuestre que $0 \in \sigma(K)$ y que $\sigma(K) - \{0\} = \sigma_p(K) - \{0\}$.

45. Sean X un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador autoadjunto. Demuestre que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene $X = N(A - \lambda I) \oplus \overline{R(A - \lambda I)}$.

46. Se dice que una proyección P_L (sobre un subespacio cerrado L de un Hilbert H) es parte de una proyección P_M (sobre otro subespacio cerrado M) si $L \subseteq M$. Demuestre que P_L es parte de P_M si y sólo si una de las siguientes se cumple:

- i) $P_M P_L = P_L$.
- ii) $P_L P_M = P_L$.
- iii) $\|P_L(x)\| \leq \|P_M(x)\| \quad \forall x \in H$.

47. Sean P_L y P_M proyecciones en un Hilbert H . Pruebe que $P_L \leq P_M$ si y sólo si $L \subseteq M$.

48. Sea $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador autoadjunto tal que $-\eta I \leq A \leq \eta I$ para algún $\eta > 0$. Muestre que $\|A\| \leq \eta$.

49. Sean X un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador autoadjunto con familia espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$. Defina las constantes $m := \inf \{\langle A(u), u \rangle : \|u\| = 1\}$, $M := \sup \{\langle A(u), u \rangle : \|u\| = 1\}$, y dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha < \beta$, denote $E(\Delta) := E_\beta - E_\alpha$. Pruebe que para toda función continua f y para todo $\epsilon \in (0, 1)$ se tiene

$$E(\Delta) \left(\int_m^{M+\epsilon} f(\lambda) dE_\lambda \right) = \int_\alpha^\beta f(\lambda) dE_\lambda.$$

50. Sea $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador autoadjunto y sea $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ su familia espectral. Muestre que para todas las funciones continuas f, g , se tiene

$$\left\langle \left\{ \int_m^{M+\epsilon} f(\lambda) dE_\lambda \right\} x, \left\{ \int_m^{M+\epsilon} g(\lambda) dE_\lambda \right\} x \right\rangle = \int_m^{M+\epsilon} f(\lambda) \overline{g(\lambda)} d\langle E_\lambda x, x \rangle.$$

51. Sean X un Banach complejo y $f : G \subseteq \mathbb{C} \rightarrow X$ una función continua, donde G es un subconjunto abierto del plano complejo. Sea Γ una curva continuamente diferenciable en G . Muestre que la integral de línea $\int_\Gamma f(\lambda) d\lambda$ puede definirse de la misma manera como en el caso de una función f a valores en \mathbb{C} . Si Γ se orienta en sentido anti-horario, entonces $\int_\Gamma f(\lambda) d\lambda$ también se escribe en la forma $\oint_\Gamma f(\lambda) d\lambda$. Demuestre que si $A \in \mathcal{L}(X, X)$, entonces

$$A \left(\int_\Gamma f(\lambda) d\lambda \right) = \int_\Gamma (Af(\lambda)) d\lambda.$$

52. Sean X un Hilbert complejo y $T \in \mathcal{L}(X, X)$. Sea Γ una curva simple cerrada continuamente diferenciable cuyo interior contiene el espectro $\sigma(T)$ de T . Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, entera, y defina

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda) (T - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

- i) Aplique el Teorema de Cauchy para mostrar que la definición anterior es independiente de Γ . Pruebe también que si $f(\lambda) = \lambda^n$, entonces $f(T) = T^n$.

IND.: Usar que

$$(T - \lambda I)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{T^m}{\lambda^{m+1}}.$$

ii) Muestre que si T es autoadjunto, entonces

$$f(T) = \int_m^{M+\varepsilon} f(\lambda) dE_\lambda \quad ,$$

donde $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es la familia espectral de T .

53. Sea $X = L^2(0, 1)$ y considere el operador $A \in \mathcal{L}(X, X)$ definido por

$$(Ax)(t) := tx(t) \quad \forall t \in (0, 1), \forall x \in X.$$

Encuentre la familia espectral del operador A .

54. Sean X un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador autoadjunto. Demuestre que si $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$, entonces

$$N(A - \lambda_0 I) = (E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0})(X),$$

donde $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es la familia espectral de A .

55. Sean X un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador autoadjunto con familia espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ y constantes asociadas: $m := \inf \{ \langle A(u), u \rangle : \|u\| = 1 \}$ y $M := \sup \{ \langle A(u), u \rangle : \|u\| = 1 \}$.

- i) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $(\alpha, \beta) \cap \sigma(A) = \emptyset$. Pruebe que para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $[\lambda, \mu] \subseteq (\alpha, \beta)$ se tiene $E_\mu = E_\lambda$.
- ii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < m \leq M < b$ y sea f una función continua sobre $[a, b]$ tal que $f(t) = 0 \quad \forall t \in \sigma(A)$. Pruebe que $f(A)$ es el operador nulo.
- iii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < m \leq M < b$ y sea g una función continua sobre $[a, b]$. Pruebe que $g(A)$ es invertible si y sólo si $g(t) \neq 0 \quad \forall t \in \sigma(A)$.

56. Sean X un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador autoadjunto tal que $m := \inf \{ \langle Au, u \rangle : u \in X, \|u\| = 1 \} > 0$. Sea $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la familia espectral de A y demuestre que

$$\left\langle A(x), \left\{ \int_m^{M+\varepsilon} \frac{1}{\lambda} dE_\lambda \right\} (x) \right\rangle = \|x\|^2 \quad \forall x \in X.$$

57. Pruebe que las siguientes son distribuciones sobre \mathbb{R} :

- i) $\langle u, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right\} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$
- ii) $\langle u, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$
- iii) $\langle u, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0) \ln(\varepsilon) \right\} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$

58. i) Pruebe que $VP(\frac{1}{x}) : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle VP(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

es una distribución sobre \mathbb{R} .

ii) Demuestre que $(\log|x|)' = VP(\frac{1}{x})$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

59. Sean Ω un abierto de \mathbb{R}^n y $f \in C_0^k(\Omega)$. Demuestre que para cada α , $|\alpha| \leq k$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha (f_\epsilon - f)(x)| = 0.$$

60. Sea $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, y para cada $n \geq 3$ defina los conjuntos

$$\Omega_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right).$$

Construya una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \geq 3} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$, tal que $f_n = 1$ en Ω_n para todo $n \geq 3$, $|\partial^\alpha f_n(x)| \leq C_\alpha n^{|\alpha|} \forall x \in \Omega$, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n (2 - f_n) dx = 1.$$

61. Demuestre que la aplicación $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(m) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

es una distribución de orden infinito.

62. Para cada $\epsilon \in (0, 1)$ considere $u_\epsilon \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\text{sop } u_\epsilon \subseteq \bar{B}(0, \epsilon) \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^n} u_\epsilon(x) dx = 1 \quad , \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u_\epsilon(x)| dx < \infty.$$

Pruebe que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u_\epsilon \varphi dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

63. Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{1 + n^2 x^2} \varphi(x) dx = \pi \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

64. Sean X_1, X_2, \dots, X_m abiertos de \mathbb{R}^n , y sea K un compacto contenido en $\cup_{j=1}^m X_j$. Pruebe que existen funciones $\varphi_j \in C_0^\infty(X_j)$ tales que

$$0 \leq \varphi_j \leq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^m \varphi_j^2(x) = 1 \quad \text{en una vecindad de } K.$$

65. Sea $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, $p > 1$, y suponga que existe $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} v \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^{\alpha} \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Demuestre que $\partial^{\alpha} u_{\epsilon}(x) = v_{\epsilon}(x)$, $\forall x \in \Omega$, $\forall \epsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Además, pruebe que para todo compacto $K \subseteq \Omega$ existe una sucesión $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{N}} \subseteq C^{|\alpha|}(\Omega)$ tal que

$$\|\varphi_j - u\|_{L^p(K)} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \|\partial^{\alpha} \varphi_j - v\|_{L^p(K)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \rightarrow \infty.$$

66. i) Demuestre que la inyección $\mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ es densa.

ii) Sean $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ tales que $\text{sop } u \cap \text{sop } \varphi = \emptyset$. Demuestre que $\langle u, \varphi \rangle = 0$.

67. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n y sean $x_0, x_1 \in \Omega$ tales que $x_0 \neq x_1$. Suponga que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\text{sop } u \subseteq \{x_0, x_1\}$.

i) Demuestre que existen enteros no negativos N_0, N_1 , y constantes $c_{\alpha}, d_{\beta} \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq N_0$, $|\beta| \leq N_1$, tales que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq N_0} c_{\alpha} \langle \partial^{\alpha} \delta_{x_0}, \varphi \rangle + \sum_{|\beta| \leq N_1} d_{\beta} \langle \partial^{\beta} \delta_{x_1}, \varphi \rangle.$$

ii) Extienda el resultado anterior al caso en que $\text{sop } u \subseteq \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, con $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

68. i) Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, donde Ω es el abierto de \mathbb{R}^2 definido por

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}.$$

Si $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, pruebe que existe una constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\langle u, \varphi \rangle = \lambda \int_{\Omega} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

ii) Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, donde Ω es el abierto de \mathbb{R}^3 definido por

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a < x < b, c < y < d, e < z < f\}.$$

Si $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, qué puede decir acerca de la distribución u ?

69. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un abierto y sea $\{u_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ una sucesión de distribuciones sobre Ω . Se dice que la sucesión $\{u_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ converge a $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle u_j, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Demuestre que

$$\frac{j}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{j^2 x^2}{2}} \rightarrow \delta \quad \text{cuando} \quad j \rightarrow \infty.$$

IND.: Notar que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

70. Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $\{u_k\}_{k \in \mathbf{N}} \subseteq W^{m,p}(\Omega)$, tal que $\|u_k\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq M$ para todo $k \in \mathbf{N}$. Demuestre que si $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, entonces $u \in W^{m,p}(\Omega)$.
71. Sean Ω un abierto de \mathbb{R}^n , $m \in \mathbf{N}$ y $\{u_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ una sucesión acotada de $H^m(\Omega)$ tal que $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Demuestre que $u \in H^m(\Omega)$.
72. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n , y sean $g \in C^\infty(\Omega)$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se define la distribución $gu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ como $\langle gu, \varphi \rangle := \langle u, g\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Demuestre que para todo multíndice α se tiene la FÓRMULA DE LEIBNIZ:

$$\partial^\alpha (gu) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta g \partial^{\alpha-\beta} u.$$

73. Sea Ω un abierto de \mathbb{R} , y considere el operador $Lv := v' + v \quad \forall v \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pruebe que si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $Lu = f \in C^\infty(\Omega)$, entonces $u \in C^\infty(\Omega)$. Así, $Lu = f$ en el sentido clásico, y la suavidad de f se transmite a la solución u .
74. Sea Ω un abierto de \mathbb{R} , y considere el operador $Lv := v' + gv \quad \forall v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, donde $g \in C^\infty(\Omega)$. Demuestre que si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $Lu = f \in C(\Omega)$, entonces $u \in C^1(\Omega)$, y así $Lu = f$ en el sentido clásico.
75. Sea $Lu := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, el OPERADOR DE ONDAS en el plano. Pruebe que $LE = \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, donde

$$E(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } |x| < t, \\ 0 & \text{si } |x| > t, \end{cases} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

76. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n y $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\langle u, \varphi \rangle \geq 0$ para toda función no-negativa $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Pruebe que u es una distribución de orden 0.
77. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n que incluye al vector nulo, y sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $x_j u = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pruebe que existe una constante C tal que $u = C\delta$.
78. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n y $\{f_j\}_{j \in \mathbf{N}} \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_K |f_j(x)| dx = 0$$

para todo compacto $K \subseteq \Omega$. Pruebe que $\partial^\alpha f_j \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega) \quad \forall \alpha$.

79. i) Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y K un compacto contenido en Ω . Pruebe que existe una función $f \in C(\Omega)$ y un multíndice α tales que

$$\langle u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

- ii) Sean V y Ω abiertos de \mathbb{R}^n , y K compacto tales que $K \subset V \subset \Omega$. Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ de orden N con $\text{sop } u = K$. Aplique i) para demostrar que existe un número finito de funciones $f_\beta \in C(\Omega)$, cuyos soportes están contenidos en V , tales que

$$u = \sum_{\beta} \partial^\beta f_\beta.$$

80. Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, y f^ϵ su regularizada. Pruebe que:

- i) $f^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$, donde $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$.
 ii) $f^\epsilon(x) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f(x)$ para casi todos los $x \in \Omega$.
 iii) si $f \in C(\Omega)$, entonces $f^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f$ uniformemente sobre compactos de Ω .
 iv) si $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, entonces $f^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f$ en $L^p_{loc}(\Omega)$.

81. (EL ESPACIO $W^{1,p}_0(\Omega)$ Y EL OPERADOR DE TRAZAS). Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 , y sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. El objetivo es probar que $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ si y sólo si $T(u) = 0$ en $\partial\Omega$, donde $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ es el operador de trazas. Para la segunda implicación se sugiere seguir el siguiente esquema:

- i) Use partición de la unidad y aplanamiento de la frontera $\partial\Omega$ para reducir el problema al caso en que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, $\text{sop } u$ compacto en $\bar{\mathbb{R}}^n_+$, y $T(u) = 0$ en $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$.
 ii) Pruebe que existe una sucesión $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq C^1(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ tal que

$$\|u_m - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \|T(u_m)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty.$$

- iii) Dado $x := (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $x_n > 0$, note que

$$u_m(x', x_n) = u_m(x', 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x', t) dt,$$

y deduzca, usando la desigualdad de Hölder y ii), que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p dx' \leq C x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|\nabla u(x', t)\|^p dx' dt$$

para casi todo $x_n > 0$.

- iv) Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ en $[0, 1]$, $\varphi = 0$ en $\mathbb{R} - [0, 2]$, defina $\varphi_m(x) := \varphi(mx_n)$, $w_m(x) := u(x)(1 - \varphi_m(x))$, y demuestre que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \|\nabla w_m - \nabla u\|^p dx \leq C \{A(m) + B(m)\},$$

donde

$$A(m) := \int_{\mathbb{R}^n_+} |\varphi_m(x)|^p \|\nabla u(x)\|^p dx$$

y

$$B(m) := m^p \int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', t)|^p dx' dt.$$

- v) Pruebe que $A(m), B(m) \rightarrow 0$, y concluya que $\|w_m - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$.
- vi) Utilice las funciones w_m para obtener una sucesión $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ tal que $\|v_m - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, y concluya así que $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

82. (DESIGUALDAD GENERAL DE HÖLDER). Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n , y sean $1 \leq p_1, p_2, \dots, p_m < \infty$, con $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$. Suponga que $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$ para todo $k \in \{1, \dots, m\}$, y muestre que

$$\int_{\Omega} \prod_{k=1}^m |u_k| dx \leq \prod_{k=1}^m \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

IND.: aplicar inducción y la desigualdad de Hölder usual.

83. (TEOREMA DE PLANCHEREL). Sea $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. La transformada de Fourier \hat{v} de v se define como

$$\hat{v}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} v(x) dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demuestre que la transformada de Fourier es una isometría de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, esto es $\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\|\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ para todo $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

84. Demuestre que

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + \|\xi\|^2)^{1/2} \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

y que

$$\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + \|\xi\|^2)^{1/2} \hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

85. (TEOREMA DE RELICH). Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 . El objetivo es demostrar que $H^1(\Omega) \xrightarrow{c} L^2(\Omega)$. Para tal efecto, se sugiere proceder de la siguiente manera:

- i) Considere una sucesión acotada $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de $H^1(\Omega)$, defina $u_m := E(v_m)$ $\forall m \in \mathbb{N}$, donde $E : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$ es el operador de extensión usual, y muestre que existen una subsucesión $\{u_m^{(1)}\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ y $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, con $\text{sop } u$ compacto, tales que $\{u_m^{(1)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a u en $L^2(\mathbb{R}^n)$.
- ii) Aplique el Teorema de Plancherel y el problema anterior para mostrar que

$$\|u_m^{(1)} - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \int_{B(\mathbf{0}, M)} |\hat{u}_m^{(1)}(\xi) - \hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{1 + M^2} \|u_m^{(1)} - u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2$$

para todo $M > 0$.

iii) Utilice i) para probar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{u}_m^{(1)}(\xi) = \hat{u}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

y luego aplique el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue para deducir que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B(\mathbf{0}, M)} |\hat{u}_m^{(1)}(\xi) - \hat{u}(\xi)|^2 d\xi = 0 \quad \text{para todo } M > 0.$$

iv) Concluya a partir de ii) y iii) que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|v_m^{(1)} - u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0.$$

86. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n . Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-1}(\Omega)$ también es compacta, para todo entero $m \geq 2$.

87. (DEFINICIÓN DE $H^m(\mathbb{R}^n)$ USANDO TRANSFORMADA DE FOURIER). Sea $m \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$H^m(\mathbb{R}^n) := \{v \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + \|\xi\|^2)^{m/2} \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

y que existen constantes $C_1, C_2 > 0$, tales que

$$C_1 \|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq \|(1 + \|\xi\|^2)^{m/2} \hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \quad \forall v \in H^m(\mathbb{R}^n).$$

88. Considere un abierto acotado Ω de \mathbb{R}^2 con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y defina los espacios

$$H(\text{div}; \Omega) := \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ tal que } \text{div } v := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$H(\text{rot}; \Omega) := \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ tal que } \text{rot } v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\},$$

provistos, respectivamente, de los productos escalares

$$\langle v, w \rangle_{H(\text{rot}; \Omega)} := \int_{\Omega} v \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \text{rot } v \, \text{rot } w \, dx \quad \forall v, w \in H(\text{rot}; \Omega),$$

$$\langle v, w \rangle_{H(\text{div}; \Omega)} := \int_{\Omega} v \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \text{div } v \, \text{div } w \, dx \quad \forall v, w \in H(\text{div}; \Omega).$$

i) Demuestre que existe un operador $\gamma : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ lineal y continuo tal que $\gamma(u) = u \cdot \boldsymbol{\nu} \, \forall u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector NORMAL unitario de Γ .

ii) Demuestre que existe un operador $\gamma : H(\text{rot}; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ lineal y continuo tal que $\gamma(u) = u \cdot \tau \forall u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde τ es el vector TANGENCIAL unitario de Γ .

89. Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 con frontera poligonal y sea \mathcal{T}_h una triangulización de $\bar{\Omega}$. Dado $K \in \mathcal{T}_h$, sea ν_K el vector normal a ∂K y denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial K}$ la paridad dual entre $H^{-1/2}(\partial K)$ y $H^{1/2}(\partial K)$.

i) Defina los espacios

$$X := \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$Z := \left\{ \lambda := (\lambda_K)_{K \in \mathcal{T}_h} \in \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H^{-1/2}(\partial K) : \exists \tau \in H(\text{div}; \Omega) \right. \\ \left. \text{tal que } \tau \cdot \nu_K = \lambda_K \text{ en } \partial K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

y demuestre que

$$H_0^1(\Omega) := \left\{ v \in X : \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \langle \lambda_K, v|_K \rangle_{\partial K} = 0 \quad \forall \lambda \in Z \right\}.$$

ii) Defina los espacios

$$\tilde{X} := \left\{ \tau \in [L^2(\Omega)]^2 : \tau|_K \in H(\text{div}; K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$\tilde{Z} := \left\{ \xi := (\xi_K)_{K \in \mathcal{T}_h} \in \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H^{1/2}(\partial K) : \exists v \in H_0^1(\Omega) \right. \\ \left. \text{tal que } v = \xi_K \text{ en } \partial K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

y demuestre que

$$H(\text{div}; \Omega) := \left\{ \tau \in \tilde{X} : \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \langle \tau \cdot \nu_K, \xi_K \rangle_{\partial K} = 0 \quad \forall \xi \in \tilde{Z} \right\}.$$

90. Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera Γ de clase C^1 y defina el espacio

$$\mathcal{D}(\Gamma) := \{ v|_\Gamma : v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \}.$$

Pruebe que $\mathcal{D}(\Gamma)$ es denso en $H^{1/2}(\Gamma)$.

91. Sea u una forma lineal sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pruebe que u es continua (distribución temperada) si y sólo si existen $C > 0$ y un entero no-negativo N tales que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \right\} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

92. Demuestre que $\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}_+^n)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}_+^n)$.

93. Sea Ω un abierto 1-regular de \mathbb{R}^n con frontera Γ , y sea $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ la aplicación de trazas respectiva. Denote por $H^{1/2}(\Gamma)$ el rango de γ_0 , esto es

$$H^{1/2}(\Gamma) := \gamma_0(H^1(\Omega)),$$

y considere la aplicación

$$\|\varphi\|_{1/2,\Gamma} := \inf \left\{ \|v\|_{1,\Omega} : v \in H^1(\Omega) \text{ tal que } \gamma_0(v) = \varphi \right\} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma).$$

i) Demuestre que $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$ es una norma y que $(H^{1/2}(\Gamma), \|\cdot\|_{1/2,\Gamma})$ es Banach.

ii) Pruebe que $\mathcal{D}(\Gamma) := \{v|_{\Gamma} : v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ es denso en $H^{1/2}(\Gamma)$.

94. Dados $1 \leq p < n$ y $q \geq 1$, interesa averiguar si existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{[L^p(\mathbb{R}^n)]^n} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n). \quad (5)$$

Para este efecto, considere $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$, y aplique (5) a la función

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Deduzca así que $q = \frac{np}{n-p}$ constituye una condición necesaria para (5).
