UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

LISTADO DE EJERCICICOS, 525402

Análisis Funcional y Aplicaciones II

Segundo Semestre de 2006 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean X un Banach complejo y $A \in \mathcal{L}(X,X)$. Defina la constante
$$r_\sigma(A) = \inf_{n\in\mathbf{N}} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$$
y demuestre que
$$\{\, \lambda \in \mathbb{C} : \quad |\lambda| > r_\sigma(A) \,\} \subseteq \rho(A).$$

2. Sean X un Banach complejo y $A \in \mathcal{L}(X,X)$. Demuestre que si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, entonces
$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)\, R(\lambda)\, R(\mu).$$
Pruebe además que si $|\lambda - \mu|\, ||R(\mu)|| < 1$, entonces
$$R(\lambda) = \lim_{N\to\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{N} (\mu-\lambda)^{n-1} R(\mu)^n \right\} \quad en \quad \mathcal{L}(X,X).$$

3. Sean X un Banach complejo y $A, B \in \mathcal{L}(X,X)$ tales que $0 \in \rho(A)$ y
$$||A - B|| < \frac{1}{||A^{-1}||}\,.$$
Muestre que $0 \in \rho(B)$ y
$$||B^{-1}|| \;\leq\; \frac{||A^{-1}||}{(1 - ||A^{-1}||\; ||A - B||)}$$

4. Sea X un Banach real y considere el espacio producto $Z := X \times X$ provisto de
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\; y_1 + y_2) \quad \forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Z,$$
$$(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y) \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,, \forall\, (x, y) \in Z,$$
$$||(x, y)|| = ||x|| + ||y|| \quad \forall\, (x, y) \in Z.$$
Demuestre que Z es un Banach ($\mathbb{C}$), y que X se identifica con el subespacio cerrado de Z,
$$Z_0 := \{(x, 0) \in Z : \quad x \in X\}$$
Ahora, sea $A \in \mathcal{L}(X,X)$ y defina $\hat{A} \in \mathcal{L}(Z,Z)$ por $\hat{A}(x,y) = (Ax, Ay)$. Demuestre que $||A|| = ||\hat{A}||$. Pruebe además que si p es un polinomio con coeficientes reales, entonces la ecuación $p(A)\, x = y$ tiene única solución para cada $y \in X$ si y sólo si $p(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(\hat{A})$.

5. Sea $X := L^2(\mathbb{R})$ y considere el operador $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ definido por $(Af)(x) = xf(x)\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{D}(A)$. Demuestre que $\sigma_p(A) = \sigma_r(A) = \phi$, $\sigma_c(A) = \mathbb{R}$ y $\rho(A) = \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

6. Sean X un Hilbert complejo y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X y A es autoadjunto. Demuestre que $\lambda \in \rho(A)$ si y sólo sí existe $C > 0$ tal que

$$||A_\lambda x|| \geq C\,||x|| \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A)\,.$$

7. Sean X un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(X,X)$ un operador autoadjunto. Defina la constante $m = \inf\{\,\langle Au, u\rangle : u \in X\,,\,||u|| = 1\,\}$. Demuestre que $\lambda \in \rho(A)$ para todo $\lambda < m$ y que $m \in \sigma(A)$.

8. Sean X un Hilbert complejo y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X.

   i) Pruebe que si $\lambda \in \sigma_r(A)$, entonces $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

   ii) Deduzca que si A es autoadjunto entonces el espectro residual de A es vacío.

9. Sean X un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(X,X)$ un operador compacto autoadjunto.

   i) Pruebe que existe una sucesión $\{\,A_n\,\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,X)$ de operadores de rango finito tal que

   $$\lim_{n\to\infty} ||A - A_n||_{\mathcal{L}(X,X)} = 0.$$

   ii) Demuestre que la ecuación $A\,u = f$ admite una solución u si y sólo sí

   $$\sum_{\lambda\in\sigma_p(A)} \frac{|f_\lambda|^2}{|\lambda|^2} < \infty\,, \quad \text{donde} \quad f = \sum_{\lambda\in\sigma_p(A)} f_\lambda\,, \quad \text{con} \quad f_\lambda \in E_\lambda(A)\,.$$

   iii) Dados $\mu \notin \sigma(A)$ y $f \in X$, resuelva la ecuación: $\mu\,u - A\,u = f$, en términos de una base Hilbertiana de X.

   iv) Aplique el resultado anterior a la ecuación integral siguiente:

   $$u \in X \qquad , \qquad 3u(x) - \int_\Omega K(x,t)\,u(t)\,dt = f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

   donde $\Omega := (0,1)$, $X := L^2(\Omega)$, $f \in X$, y K es la función sobre $\Omega\times\Omega$ definida por

   $$K(x,t) := \begin{cases} x(1-t) & si \quad t \leq x\,, \\ \\ t(1-x) & si \quad t > x\,. \end{cases}$$

10. Sea X un espacio de Banach y $A \in \mathcal{L}(X,X)$. Suponga que existe un entero $k \geq 1$ tal que A^k es compacto. Demuestre que $I - A$ es un operador de Fredholm.

11. Sea H un Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Se dice que $A \in \mathcal{L}(H,H)$ es un operador normal si $A^* A = A A^*$. Pruebe en este caso que:

   a) $\lambda \in \sigma_p(A)$ si y sólo si $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$. Concluya además que

   $$E_\lambda(A) := N(A - \lambda I) = E_{\bar{\lambda}}(A^*) := N(A^* - \bar{\lambda} I) .$$

   b) Si λ, $\mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$, entonces $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A^*)$.

12. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Lipschitz-continua. Demuestre que existen una base Hilbertiana $\{ e_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ de $L^2(\Omega)$ y una sucesión $\{ \lambda_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ de números reales con $\lambda_n > 0$, y $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, tales que $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, y $- \Delta e_n = \lambda_n e_n$ en Ω. Se dice aquí que los λ_n son los valores propios del Laplaciano (con condición de Dirichlet), y que las e_n son las funciones propias asociadas.

13. Sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq L^2(-1,1) \to L^2(-1,1)$ el operador definido por

   $$(A u) (x) = x u(x) + \theta \int_{-1}^{1} u(t) \, dt ,$$

   donde $\theta \in \mathbb{R}$. Obtenga la mayor información posible sobre el espectro de A.

14. Sean $\Omega := (0,1)$, $p \in C^1(\bar{\Omega})$ y $q \in C(\bar{\Omega})$, con $p(x) \geq \alpha > 0 \ \forall x \in \Omega$. Demuestre que existen una base Hilbertiana $\{ e_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ de $L^2(\Omega)$ y una sucesión $\{ \lambda_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ de números reales con $\lambda_n > 0$, y $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, tales que $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, y

   $$-(p e_n')' + q e_n = \lambda_n e_n \quad \text{en} \quad \Omega .$$

15. Sea H un espacio de Hilbert separable. Se dice que $T : H \to H$ es un operador de Hilbert-Schmidt si existe una base $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de H tal que

   $$||| \, T \, |||^2 := \sum_{n \in \mathbf{N}} \|T e_n\|^2 < \infty .$$

   Sean p y q como en el problema anterior. Demuestre que el operador lineal $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ que a cada $f \in L^2(\Omega)$ le asigna la única solución $u := Tf$ de

   $$-(p u')' + q u = f \quad \text{en} \quad \Omega := (0,1)$$

   $$u(0) = u(1) = 0$$

   es un operador de Hilbert Schmidt.

16. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un Hilbert ($\mathbb{C}$), y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H y A es autoadjunto. Demuestre que $\mathcal{D}(A)$ provisto con el producto escalar $\langle u, v \rangle_{\mathcal{D}(A)} := \langle u, v \rangle_H + \langle Au, Av \rangle_H$, es un espacio de Hilbert. Suponga ahora que $\mathbf{i} : \mathcal{D}(A) \to H$ es una inyección compacta, y que $A^{-1} \in \mathcal{L}(H, \mathcal{D}(A))$. Demuestre que

i) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$.

ii) Los elementos de $\sigma_p(A)$ pueden ordenarse en una sucesión $\{ \lambda_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ tal que $|\lambda_n| \to \infty$, cuando $n \to \infty$.

iii) Los espacios propios $E_{\lambda_n} := N(A - \lambda_n I)$ son de dimensión finita, ortogonales dos a dos, y $H = \oplus\{ E_{\lambda_n} : \quad n \in \mathbf{N} \}$.

17. Sea H un Hilbert complejo no trivial, y sea $A \in \mathcal{L}(H, H)$ un operador biyectivo tal que $A^* = A^{-1}$ (OPERADOR UNITARIO). Demuestre que $||A|| = 1$, y concluya que

$$\sigma(A) \subseteq \{ \lambda \in \mathbb{C} : \quad |\lambda| = 1 \}.$$

18. Sean X un Hilbert complejo y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X y A es autoadjunto.

    i) Demuestre que $\lambda \in \sigma(A)$ si y sólo sí existe una sucesión $\{ x_n \}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $||x_n|| = 1$ y $(A - \lambda I)x_n \to 0$, cuando $n \to \infty$.

    ii) Pruebe que $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \; \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$ (A POSITIVO) si y sólo sí $\sigma(A) \subseteq [0, \infty)$.

19. Sea $X = L^2(0,1)$ y considere el operador $A \in \mathcal{L}(X, X)$ definido por

$$(A\,x)(t) := t\,x(t) \quad \forall\, t \in (0,1)\,, \; \forall\, x \in X\,.$$

Demuestre que $\sigma(A) = [0,1]$ y concluya que A no es compacto.

IND.: Para $\lambda \in (0,1)$ defina la sucesión $x_n(t) := \begin{cases} \sqrt{t} & , \quad t \in (\lambda, \lambda + \frac{1}{n})\,, \\ 0 & , \quad t \notin (\lambda, \lambda + \frac{1}{n})\,. \end{cases}$

20. Sean H un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(H, H)$ un operador autoadjunto. Dado un subespacio cerrado S de H invariante con respecto a A, denote por $\sigma(A, S)$ y $\sigma(A, S^\perp)$ los espectros de las restricciones $A|_S$ y $A|_{S^\perp}$, respectivamente. Demuestre que $\sigma(A) = \sigma(A, S) \cup \sigma(A, S^\perp)$.

21. Sea X un espacio de Hilbert de dimensión infinita, y sea $K \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador compacto. Demuestre que $0 \in \sigma(K)$ y que $\sigma(K) - \{0\} = \sigma_p(K) - \{0\}$.

22. Sean X un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador autoadjunto. Demuestre que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene $\quad X = N(A - \lambda I) \oplus \overline{R(A - \lambda I)}$.

23. Se dice que una proyección P_L (sobre un subespacio cerrado L de un Hilbert H) es parte de una proyección P_M (sobre otro subespacio cerrado M) si $L \subseteq M$. Demuestre que P_L es parte de P_M si y sólo si una de las siguientes se cumple:

    i) $P_M\,P_L = P_L$.

    ii) $P_L\,P_M = P_L$.

    iii) $||P_L(x)|| \leq ||P_M(x)|| \quad \forall\, x \in H$.

24. Sean P_L y P_M proyecciones en un Hilbert H. Pruebe que $P_L \leq P_M$ si y sólo si $L \subseteq M$.

25. Sea $A \in \mathcal{L}(X,X)$ un operador autoadjunto tal que $-\eta I \leq A \leq \eta I$ para algún $\eta > 0$. Muestre que $||A|| \leq \eta$.

26. Sean X un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(X,X)$ un operador autoadjunto con familia espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Defina las constantes $m := \inf\{\langle A(u),u\rangle : \|u\| = 1\}$, $M := \sup\{\langle A(u),u\rangle : \|u\| = 1\}$, y dados $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha < \beta$, denote $E(\Delta) := E_\beta - E_\alpha$. Pruebe que para toda función continua f y para todo $\epsilon \in (0,1)$ se tiene

$$E(\Delta)\left(\int_m^{M+\varepsilon} f(\lambda)\,dE_\lambda\right) = \int_\alpha^\beta f(\lambda)dE_\lambda\,.$$

27. Sea $A \in \mathcal{L}(X,X)$ un operador autoadjunto y sea $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ su familia espectral. Muestre que para todas las funciones continuas f,g, se tiene

$$\left\langle \left\{\int_m^{M+\varepsilon} f(\lambda)dE_\lambda\right\} x, \left\{\int_m^{M+\varepsilon} g(\lambda)dE_\lambda\right\} x\right\rangle = \int_m^{M+\varepsilon} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\; d\langle E_\lambda x, x\rangle\,.$$

28. Sean X un Banach complejo y $f : G \subseteq \mathbb{C} \to X$ una función continua, donde G es un subconjunto abierto del plano complejo. Sea Γ una curva continuamente diferenciable en G. Muestre que la integral de línea $\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda$ puede definirse de la misma manera como en el caso de una función f a valores en $\mathbb{C}$. Si Γ se orienta en sentido anti-horario, entonces $\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda$ también se escribe en la forma $\oint_\Gamma f(\lambda)d\lambda$. Demuestre que si $A \in \mathcal{L}(X,X)$, entonces

$$A\left(\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda\right) = \int_\Gamma (\,Af(\lambda)\,)d\lambda\,.$$

29. Sean X un Hilbert complejo y $T \in \mathcal{L}(X,X)$. Sea Γ una curva simple cerrada continuamente diferenciable cuyo interior contiene el espectro $\sigma(T)$ de T. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica, entera, y defina

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\lambda)\;(T-\lambda I)^{-1}d\lambda.$$

   i) Aplique el Teorema de Cauchy para mostrar que la definición anterior es independiente de Γ. Pruebe también que si $f(\lambda) = \lambda^n$, entonces $f(T) = T^n$. Ind.: Usar que

$$(T-\lambda I)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{T^m}{\lambda^{m+1}}.$$

   ii) Muestre que si T es autoadjunto, entonces

$$f(T) = \int_m^{M+\varepsilon} f(\lambda)\;dE_\lambda \quad,$$

   donde $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ es la familia espectral de T.

30. Sea $X = L^2(0,1)$ y considere el operador $A \in \mathcal{L}(X,X)$ definido por

$$(A\,x)(t) := t\,x(t) \quad \forall\, t \in (0,1)\,,\ \forall\, x \in X\,.$$

Encuentre la familia espectral del operador A.

31. Sean X un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X,X)$ un operador autoadjunto. Demuestre que si $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$, entonces

$$N(A - \lambda_0 I) = (E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0})(X)\,,$$

donde $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ es la familia espectral de A.

32. Pruebe que las siguientes son distribuciones sobre $\mathbb{R}$:

i) $$\langle u, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon}\right\} \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

ii) $$\langle u, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

iii) $$\langle u, \varphi\rangle := \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{\varphi(0)}{\epsilon} + \varphi'(0)\,ln\,(\epsilon)\right\} \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

33. Demuestre que $(log\,|x|)' = VP(\frac{1}{x})$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

34. Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f \in C_0^k(\Omega)$. Demuestre que para cada α, $|\alpha| \leq k$,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\,\sup_{x\in\Omega}\,|\,\partial^\alpha\,(f_\epsilon - f)\,(x)\,| = 0\,.$$

35. Sea $\Omega = (0,1)\times(0,1)$, y para cada $n \geq 3$ defina los conjuntos

$$\Omega_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right)\times\left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right)\,.$$

Construya una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\geq 3} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$, tal que $f_n = 1$ en Ω_n para todo $n \geq 3$, $|\partial^\alpha f_n(x)| \leq C_\alpha\, n^{|\alpha|}\ \forall\, x \in \Omega$, y

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,(2 - f_n)\,dx = 1\,.$$

36. Demuestre que la aplicación $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle u, \varphi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\varphi^{(m)}(m) \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

es una distribución de orden infinito.

37. Para cada $\epsilon \in (0,1)$ considere $u_\epsilon \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\operatorname{sop} u_\epsilon \subseteq \bar{B}(0,\epsilon) \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^n} u_\epsilon(x)\, dx = 1 \quad , \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u_\epsilon(x)|\, dx < \infty\,.$$

Pruebe que $\displaystyle \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} u_\epsilon\, \varphi\, dx = \varphi(0) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,.$

38. Demuestre que $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{1 + n^2 x^2}\, \varphi(x)\, dx = \pi\, \varphi(0) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$

39. Sean $X_1, X_2, ..., X_m$ abiertos de $\mathbb{R}^n$, y sea K un compacto contenido en $\cup_{j=1}^m X_j$. Pruebe que existen funciones $\varphi_j \in C_0^\infty(X_j)$ tales que

$$0 \leq \varphi_j \leq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^m \varphi_j^2(x) = 1 \quad \text{en una vecindad de } K\,.$$

40. Sea $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, $p > 1$, y suponga que existe $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v\, \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Demuestre que $\partial^\alpha u_\epsilon(x) = v_\epsilon(x)$, $\forall\, x \in \Omega$, $\forall\, \epsilon < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Además, pruebe que para todo compacto $K \subseteq \Omega$ existe una sucesión $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{N}} \subseteq C^{|\alpha|}(\Omega)$ tal que

$$||\varphi_j - u||_{L^p(K)} \to 0 \quad \text{y} \quad ||\partial^\alpha \varphi_j - v||_{L^p(K)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad j \to \infty\,.$$

41. i) Demuestre que la inyección $\mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ es densa.

    ii) Sean $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ tales que $\operatorname{sop} u \cap \operatorname{sop} \varphi = \phi$. Demuestre que $\langle u, \varphi \rangle = 0$.

42. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sean x_0, $x_1 \in \Omega$ tales que $x_0 \neq x_1$. Suponga que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $sop\, u \subseteq \{x_0, x_1\}$.

    i) Demuestre que existen enteros no negativos N_0, N_1, y constantes c_α, $d_\beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq N_0$, $|\beta| \leq N_1$, tales que $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq N_0} c_\alpha\, \langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle + \sum_{|\beta| \leq N_1} d_\beta\, \langle \partial^\beta \delta_{x_1}, \varphi \rangle\,.$$

    ii) Extienda el resultado anterior al caso en que $\operatorname{sop} u \subseteq \{\, x_0, x_1, ..., x_N \,\}$, con $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j \in \{1, 2, ..., N\}$.

43. i) Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, donde Ω es el abierto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\Omega = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a < x < b\,,\, c < y < d \,\}\,.$$

Si $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, pruebe que existe una constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\langle u, \varphi \rangle = \lambda \int_\Omega \varphi\, dx\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

ii) Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, donde Ω es el abierto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\Omega \,=\, \{\, (x, y, z) \,\in\, \mathbb{R}^3 \;:\; a \,<\, x \,<\, b\,,\, c \,<\, y \,<\, d\,,\, e \,<\, z \,<\, f \,\}\,.$$

Si $\frac{\partial u}{\partial x} \,=\, \frac{\partial u}{\partial y} \,=\, 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, qué puede decir acerca de la distribución u?.

44. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un abierto y sea $\{u_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ una sucesión de distribuciones sobre Ω. Se dice que la sucesión $\{u_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ converge a $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$\lim_{j\to\infty} \langle u_j, \varphi\rangle \;=\; \langle u, \varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \,\in\, \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Demuestre que

$$\frac{j}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{j^2 x^2}{2}} \;\to\; \delta \quad \text{cuando} \quad j \to \infty\,.$$

Ind.: Notar que $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

45. Sean $u \,\in\, L^p(\Omega)$ y $\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}} \,\subseteq\, W^{m,p}(\Omega)$, tal que $||u_k||_{W^{m,p}(\Omega)} \,\leq\, M$ para todo $k \in \mathbf{N}$. Demuestre que si $u_k \overset{k\to\infty}{\to} u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, entonces $u \,\in\, W^{m,p}(\Omega)$.

46. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, y sean $g \,\in\, C^\infty(\Omega)$, $u \,\in\, \mathcal{D}'(\Omega)$. Se define la distribución $gu \,\in\, \mathcal{D}'(\Omega)$ como $\langle gu, \varphi\rangle \;:=\; \langle u, g\varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \,\in\, \mathcal{D}(\Omega)$. Demuestre que para todo multíndice α se tiene la Fórmula de Leibniz:

$$\partial^\alpha\,(g\,u) \;=\; \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\, \partial^\beta g\; \partial^{\alpha-\beta}\, u\;.$$

47. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}$, y considere el operador $L\,v \;:=\; v' \,+\, v \quad \forall\, v \,\in\, \mathcal{D}'(\Omega)$. Pruebe que si $u \,\in\, \mathcal{D}'(\Omega)$ y $L\,u \,=\, f \,\in\, C^\infty(\Omega)$, entonces $u \,\in\, C^\infty(\Omega)$. Así, $L\,u \,=\, f$ en el sentido clásico, y la suavidad de f se transmite a la solución u.

48. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}$, y considere el operador $L\,v \;:=\; v' \,+\, gv \quad \forall\, v \,\in\, \mathcal{D}'(\Omega)$, donde $g \,\in\, C^\infty(\Omega)$. Demuestre que si $u \,\in\, \mathcal{D}'(\Omega)$ y $L\,u \,=\, f \,\in\, C(\Omega)$, entonces $u \,\in\, C^1(\Omega)$, y así $L\,u \,=\, f$ en el sentido clásico.

49. Sea $L\,u \;:=\; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \,-\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \forall\, u \,\in\, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, el Operador de Ondas en el plano. Pruebe que $L\,E \,=\, \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, donde

$$E(x,t) \;:=\; \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } |x| \,<\, t\,, \\ 0 & \text{si } |x| \,>\, t\,, \end{cases} \qquad \forall\,(x,t) \,\in\, \mathbb{R}^2\,.$$

50. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $u \,\in\, \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\langle u, \varphi\rangle \;\geq\; 0$ para toda función no-negativa $\varphi \,\in\, C_0^\infty(\Omega)$. Pruebe que u es una distribución de orden 0.

51. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ que incluye al vector nulo, y sea $u \,\in\, \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $x_j\, u \,=\, 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, para todo $j \,\in\, \{1, 2, ..., n\}$. Pruebe que existe una constante C tal que $u \,=\, C\,\delta$.

52. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\{f_j\}_{j\in\mathbf{N}} \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \int_K |f_j(x)|\, dx \,=\, 0$$

para todo compacto $K \subseteq \Omega$. Pruebe que $\partial^\alpha f_j \,\to\, 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)\ \ \forall\, \alpha$.

53. i) Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y K un compacto contenido en Ω. Pruebe que existe una función $f \in C(\Omega)$ y un multíndice α tales que

$$\langle u, \varphi\rangle \,=\, (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)\, \partial^\alpha \varphi(x)\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)\,.$$

ii) Sean V y Ω abiertos de $\mathbb{R}^n$, y K compacto tales que $K \subset V \subset \Omega$. Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ de orden N con $\operatorname{sop} u \,=\, K$. Aplique i) para demostrar que existe un número finito de funciones $f_\beta \in C(\Omega)$, cuyos soportes están contenidos en V, tales que

$$u \,=\, \sum_\beta \partial^\beta f_\beta\,.$$

54. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, y f^ϵ su regularizada. Pruebe que:

i) $f^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$, donde $\Omega_\epsilon := \{\, x \in \Omega : \quad \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\,\}$.

ii) $f^\epsilon(x) \overset{\epsilon\to 0}{\to} f(x)$ para casi todos los $x \in \Omega$.

iii) si $f \in C(\Omega)$, entonces $f^\epsilon \overset{\epsilon\to 0}{\to} f$ uniformemente sobre compactos de Ω.

iv) si $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, entonces $f^\epsilon \overset{\epsilon\to 0}{\to} f$ en $L^p_{loc}(\Omega)$.

55. (El espacio $W^{1,p}_0(\Omega)$ y el operador de trazas). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1, y sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. El objetivo es probar que $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ si y sólo si $T(u) = 0$ en $\partial\Omega$, donde $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ es el operador de trazas. Para la segunda implicación se sugiere seguir el siguiente esquema:

i) Use partición de la unidad y aplanamiento de la frontera $\partial\Omega$ para reducir el problema al caso en que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, $\operatorname{sop} u$ compacto en $\bar{\mathbb{R}}^n_+$, y $T(u) = 0$ en $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$.

ii) Pruebe que existe una sucesión $\{u_m\}_{m\in\mathbf{N}} \subseteq C^1(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ tal que

$$\|u_m - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0 \quad \text{y} \quad \|T(u_m)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \to 0\,, \quad \text{cuando } m \to \infty\,.$$

iii) Dado $x := (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $x_n > 0$, note que

$$u_m(x', x_n) = u_m(x', 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x', t)\, dt\,,$$

y deduzca, usando la desigualdad de Hölder y ii), que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p\, dx' \,\le\, C\, x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|\nabla u(x', t)\|^p\, dx' dt$$

para casi todo $x_n > 0$.

iv) Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ en $[0,1]$, $\varphi = 0$ en $\mathbb{R} - [0,2]$, defina $\varphi_m(x) := \varphi(mx_n)$, $w_m(x) := u(x)\,(1 - \varphi_m(x))$, y demuestre que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \|\nabla w_m - \nabla u\|^p \, dx \;\leq\; C \,\{\, A(m) + B(m) \,\} \,,$$

donde

$$A(m) := \int_{\mathbb{R}^n_+} |\varphi_m(x)|^p \, \|\nabla u(x)\|^p \, dx$$

y

$$B(m) := m^p \int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',t)|^p \, dx' dt \,.$$

v) Pruebe que $A(m)$, $B(m) \to 0$, y concluya que $\|w_m - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0$ cuando $m \to \infty$.

vi) Utilice las funciones w_m para obtener una sucesión $\{v_m\}_{m \in \mathbf{N}} \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ tal que $\|v_m - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0$ cuando $m \to \infty$, y concluya así que $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

56. (Desigualdad general de Hölder). Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, y sean $1 \leq p_1, p_2, ..., p_m < \infty$, con $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$. Suponga que $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$, y muestre que

$$\int_\Omega \prod_{k=1}^m |u_k| \, dx \;\leq\; \prod_{k=1}^m \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)} \,.$$

Ind.: aplicar inducción y la desigualdad de Hölder usual.

57. (Teorema de Plancherel). Sea $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. La transformada de Fourier $\hat{v}$ de v se define como

$$\hat{v}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \, v(x) \, dx \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \,.$$

Demuestre que la transformada de Fourier es una isometría de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, esto es $\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\|\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \;=\; \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ para todo $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

58. Demuestre que

$$H^1(\mathbb{R}^n) \;=\; \Big\{\, v \in L^2(\mathbb{R}^n) : \quad (1 + \|\xi\|^2)^{1/2} \, \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n) \,\Big\} \,,$$

y que

$$\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \;=\; \|(1 + \|\xi\|^2)^{1/2} \, \hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^n) \,.$$

59. (Teorema de Rellich). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. El objetivo es demostrar que $H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$. Para tal efecto, se sugiere proceder de la siguiente manera:

i) Considere una sucesión acotada $\{v_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ de $H^1(\Omega)$, defina $u_m := E(v_m)$ $\forall\, m \in \mathbf{N}$, donde $E : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^n)$ es el operador de extensión usual, y muestre que existen una subsucesión $\{u_m^{(1)}\}_{m\in\mathbf{N}} \subseteq \{u_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ y $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, con sop u compacto, tales que $\{u_m^{(1)}\}_{m\in\mathbf{N}}$ converge débilmente a u en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

ii) Aplique el Teorema de Plancherel y el problema anterior para mostrar que

$$\|u_m^{(1)} - u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \;\le\; \int_{B(\mathbf{0},M)} |\hat{u}_m^{(1)}(\xi) - \hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \;+\; \frac{1}{1+M^2}\, \|u_m^{(1)} - u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $M > 0$.

iii) Utilice i) para probar que

$$\lim_{m\to\infty} \hat{u}_m^{(1)}(\xi) \;=\; \hat{u}(\xi) \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\,,$$

y luego aplique el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue para deducir que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{B(\mathbf{0},M)} |\hat{u}_m^{(1)}(\xi) - \hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \;=\; 0 \quad \text{para todo} \quad M > 0\,.$$

iv) Concluya a partir de ii) y iii) que

$$\lim_{m\to\infty} \|v_m^{(1)} - u\|^2_{L^2(\Omega)} \;=\; 0\,.$$

60. (Definición de $H^m(\mathbb{R}^n)$ usando transformada de Fourier). Sea $m \in \mathbf{N}$. Demuestre que

$$H^m(\mathbb{R}^n) := \{ v \in L^2(\mathbb{R}^n) : \quad (1 + \|\xi\|^2)^{m/2}\, \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n) \}\,,$$

y que existen constantes C_1, $C_2 > 0$, tales que

$$C_1\, \|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \;\le\; \|(1 + \|\xi\|^2)^{m/2}\, \hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \;\le\; C_2\, \|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, v \in H^m(\mathbb{R}^n)\,.$$

61. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y defina los espacios

$$H(\mathrm{div};\Omega) \;:=\; \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ tal que } \mathrm{div}\, v := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \;\in\; L^2(\Omega) \right\}\,,$$

$$H(\mathrm{rot};\Omega) \;:=\; \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ tal que } \mathrm{rot}\, v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \;\in\; L^2(\Omega) \right\}\,,$$

provistos, respectivamente, de los productos escalares

$$\langle v, w \rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)} \;:=\; \int_\Omega v \cdot w \, dx \;+\; \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \;\mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,,$$

$$\langle v, w \rangle_{H(\mathrm{div};\Omega)} \;:=\; \int_\Omega v \cdot w \, dx \;+\; \int_\Omega \mathrm{div}\, v \;\mathrm{div}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

i) Demuestre que existe un operador $\gamma : H(\text{div};\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ lineal y continuo tal que $\gamma(u) = u \cdot \boldsymbol{\nu}\ \forall\, u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector NORMAL unitario de Γ.

ii) Demuestre que existe un operador $\gamma : H(\text{rot};\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ lineal y continuo tal que $\gamma(u) = u \cdot \tau\ \forall\, u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde τ es el vector TANGENCIAL unitario de Γ.

62. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal y sea $\mathcal{T}_h$ una triangularización de $\bar{\Omega}$. Dado $K \in \mathcal{T}_h$, sea $\boldsymbol{\nu}_K$ el vector normal a ∂K y denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial K}$ la paridad dual entre $H^{-1/2}(\partial K)$ y $H^{1/2}(\partial K)$.

i) Defina los espacios

$$X := \Big\{ v \in L^2(\Omega) : \quad v|_K \in H^1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

$$Z := \Big\{ \boldsymbol{\lambda} := (\lambda_K)_{K\in\mathcal{T}_h} \in \Pi_{K\in\mathcal{T}_h} H^{-1/2}(\partial K) : \quad \exists\, \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div};\Omega) \\ \text{tal que} \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_K = \lambda_K \quad \text{en} \quad \partial K \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

y demuestre que

$$H_0^1(\Omega) := \Big\{ v \in X : \quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle \lambda_K, v|_K \rangle_{\partial K} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\lambda} \in Z \Big\}.$$

ii) Defina los espacios

$$\tilde{X} := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \boldsymbol{\tau}|_K \in H(\text{div};K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

$$\tilde{Z} := \Big\{ \boldsymbol{\xi} := (\xi_K)_{K\in\mathcal{T}_h} \in \Pi_{K\in\mathcal{T}_h} H^{1/2}(\partial K) : \quad \exists\, v \in H_0^1(\Omega) \\ \text{tal que} \quad v = \xi_K \quad \text{en} \quad \partial K \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

y demuestre que

$$H(\text{div};\Omega) := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in \tilde{X} : \quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_K, \xi_K \rangle_{\partial K} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\xi} \in \tilde{Z} \Big\}.$$