

LISTADO DE EJERCICIOS 525401

Análisis Funcional y Aplicaciones I

Primer Semestre de 2016

Prof. Gabriel N. Gatica.

Índice

1. INTRODUCCIÓN	2
2. DUALIDAD	4
3. OPERADORES LINEALES	11
4. PROBLEMAS VARIACIONALES	26
5. OPERADORES COMPACTOS	43
6. REFLEXIVIDAD Y SEPARABILIDAD	48
7. NOCIONES DE TEORÍA ESPECTRAL	51
8. TEORÍA DE DISTRIBUCIONES	54
9. ESPACIOS DE SOBOLEV	58

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Sea X un espacio vectorial normado y sea $S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Pruebe que S es completo si y sólo si X es Banach.

1.2 Sean $I := (t_0, t_0 + \tau)$, $f_j : \bar{I} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, funciones continuas, y considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Hallar $u := (u_1, \dots, u_n)^t \in [C^1(I) \times C(\bar{I})]^n$ tal que

$$\begin{cases} \frac{du_j}{dt} = f_j(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) & \forall t \in I & y \\ u_j(t_0) = \eta_j & \forall j \in \{1, \dots, n\}, \end{cases} \quad (1)$$

donde t_0, τ, η_j , $j = 1, \dots, n$ son constantes reales dadas y τ es positivo. Suponga además que existe $M > 0$ tal que

$$|f_j(t, z) - f_j(t, w)| \leq M \|z - w\|_\infty \quad \forall z, w \in \mathbf{R}^n, \quad \forall t \in \bar{I}.$$

Demuestre que (1) tiene una única solución $u(t)$ para todo $t \in \bar{I}$.

1.3 Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y considere una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de H tal que $\langle x_n, x_m \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H$. Además,

dada una sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge en H si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$.

1.4 Dado Ω abierto de \mathbb{R}^n y $m \in \mathbb{N}$, se define el ESPACIO DE SOBOLEV de orden m , como

$$H^m(\Omega) := \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq m \right\},$$

el cual se provee de la norma $\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$. Asuma que $L^2(\Omega)$ con

el producto escalar usual $\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} uv \, dx$ es un espacio de Hilbert, y demuestre que $H^m(\Omega)$ también lo es.

1.5 Se dice que un espacio de Banach X es UNIFORMEMENTE CONVEXO si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left(x, y \in X, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \quad y \quad \|x - y\| > \varepsilon \right) \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Demuestre que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

1.6 ([26], Ejercicio 4.6) El TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER establece que si S es un subconjunto compacto, convexo, y no vacío de un espacio vectorial de dimensión finita, y T es una aplicación continua de S en S , entonces T tiene al menos un punto fijo. Use este resultado de Brouwer para demostrar que si X es un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $\| \cdot \|$, y si F es una aplicación continua de X en X tal que, para algún $\mu > 0$, $\langle F(u), u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in X$ con $\|u\| = \mu$, entonces existe $u_0 \in X$, $\|u_0\| \leq \mu$, tal que $F(u_0) = 0$.

1.7 ([26]) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 con frontera suave Γ , y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. EL PROBLEMA DE NAVIER-STOKES, un problema de suma importancia en mecánica de fluidos, consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^t$ y la presión p de un fluido, tales que

$$-\Delta \mathbf{u} + \sum_{j=1}^2 u_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad \int_{\Omega} p \, dx = 0.$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$, $Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\}$, y demuestre que la formulación débil de (2) se reduce a: encontrar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ tales que:

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in Q,$$

donde $a : H \times H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, $b : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$, y $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, están definidas por

$$a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx,$$

$$b(\mathbf{v}, p) := - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \quad , \quad f(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx.$$

1.8 ([26]) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 con frontera suave Γ , y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. EL PROBLEMA DE STOKES corresponde a una versión linealizada del problema de Navier-Stokes y consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^t$ y la presión p de un fluido, tales que

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad \int_{\Omega} p \, dx = 0.$$

Utilice el ejercicio anterior para deducir la formulación débil de (3).

1.9 Dado Ω abierto de \mathbb{R}^n y $p \in [1, +\infty)$, se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ medible y } \int_{\Omega} |f|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Puede probarse que $L^p(\Omega)$, provisto de la norma $\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_{\Omega} |f|^p dx \right\}^{1/p}$ es un espacio de Banach. Además, dados $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene la desigualdad de Hölder

$$\int_{\Omega} |f g| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Entonces, dado $m \in \mathbb{N}$ se define el ESPACIO DE SOBOLEV de orden (m, p) , como

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \partial^{\alpha} u \in L^p(\Omega) \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq m \right\},$$

el cual se provee de la norma $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right\}^{1/p}$. Demuestre que $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

1.10 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 y sea $\mathcal{T} := \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ una triangularización de Ω , es decir:

- i) \bar{T}_j es un triángulo con interior no-vacío $\forall j \in \{1, \dots, N\}$,
- ii) $T_i \cap T_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$, y
- iii) $\bar{\Omega} = \cup \{ \bar{T}_j : j \in \{1, \dots, N\} \}$.

Defina el subespacio de $[L^2(\Omega)]^2$

$$H := \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j) \quad \forall j \in \{1, \dots, N\} \},$$

donde la pertenencia local $\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j)$ está dada en el sentido distribucional, es decir en $\mathcal{D}'(T_j)$, lo cual significa que existe $z_j \in L^2(T_j)$ tal que

$$- \int_{T_j} \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{\tau} dx = \int_{T_j} z_j \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(T_j),$$

y en tal caso se escribe $z_j = \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})$ en T_j . Demuestre que H provisto de la norma

$$\|\boldsymbol{\tau}\| := \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \sum_{j=1}^N \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{L^2(T_j)}^2 \right\}^{1/2} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H,$$

es un espacio de Hilbert real.

2. DUALIDAD

2.1 Sea X un espacio vectorial normado y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal. Pruebe que $f \in X'$ si y sólo si $N(f)$, el espacio nulo de f , es un subespacio cerrado de X .

2.2 Sean X un Hilbert sobre \mathbb{K} (\mathbb{R} o \mathbb{C}) y $F : X \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal tal que su espacio nulo $N(F) := \left\{ x \in X : F(x) = 0 \right\}$ no es denso en X . Pruebe que $F \in X'$ y concluya así que $N(F)$ es un subespacio cerrado propio de X .

2.3 Sea V un espacio vectorial normado sobre el cuerpo \mathbb{K} (\mathbb{R} o \mathbb{C}). Demuestre que el dual V' es Banach.

2.4 Sea M un subespacio cerrado propio de un Banach X y sea $x_0 \in X - M$. Aplique la segunda forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach para probar que existen $F_1, F_2 \in M^\circ$ tales que $\|F_1\| = 1$ y $F_2(x_0) = \text{dist}(x_0, M)$.

2.5 Sea H un espacio vectorial normado real. Pruebe que si la norma de H satisface

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \{ \|x\|^2 + \|y\|^2 \} \quad \forall x, y \in H,$$

entonces ella proviene de un producto escalar.

2.6 Sea $X := C([0, 1])$ provisto de la norma uniforme

$$\|u\| := \text{máx} \{ |u(t)| : t \in [0, 1] \} \quad \forall u \in X,$$

y dado $f \in X$, fijo, defina el funcional lineal $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(u) := \int_0^1 u(t) f(t) dt \quad \forall u \in X.$$

Demuestre que $F \in X'$ y $\|F\| = \int_0^1 |f(t)| dt$.

INDICACIÓN: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $x_n \in X$ dada por $x_n(t) := u_n(f(t)) \quad \forall t \in [0, 1]$, donde $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función continua

$$u_n(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 1/n, \\ -1 & \text{si } t \leq -1/n, \\ nt & \text{si } -1/n \leq t \leq 1/n, \end{cases}$$

y luego use x_n para probar que $\|F\| \geq \int_0^1 |f(t)| dt - \frac{1}{n}$.

2.7 ([4], [32]) Considere un abierto acotado Ω de \mathbb{R}^n con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\text{div}; \Omega) := \left\{ v \in [L^2(\Omega)]^n : \text{div } v := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w \rangle_{H(\text{div}; \Omega)} := \int_{\Omega} v \cdot w dx + \int_{\Omega} \text{div } v \text{div } w dx \quad \forall v, w \in H(\text{div}; \Omega).$$

a) Demuestre que $(H(\text{div}; \Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\text{div}; \Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que para todo $g \in [L^2(\Omega)]^n$ existe un único $v_g \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} v_g \cdot w dx + \int_{\Omega} \text{div } v_g \text{div } w dx = \int_{\Omega} g \cdot w dx \quad \forall w \in H(\text{div}; \Omega).$$

IND.: Dada $v \in [L^2(\Omega)]^n$, se dice que $\operatorname{div} v \in L^2(\Omega)$ si existe $z \in L^2(\Omega)$ tal que

$$-\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} z \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

2.8 ([4], [32]) Considere un abierto acotado Ω de \mathbb{R}^2 con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\operatorname{rot}; \Omega) := \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \operatorname{rot} v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w \rangle_{H(\operatorname{rot}; \Omega)} := \int_{\Omega} v \cdot w dx + \int_{\Omega} \operatorname{rot} v \operatorname{rot} w dx \quad \forall v, w \in H(\operatorname{rot}; \Omega).$$

a) Demuestre que $(H(\operatorname{rot}; \Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\operatorname{rot}; \Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que para todo $g \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$ existe un único $v_g \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} v_g \cdot w dx + \int_{\Omega} \operatorname{rot} v_g \operatorname{rot} w dx = \int_{\Omega} \operatorname{rot} g \operatorname{rot} w dx \quad \forall w \in H(\operatorname{rot}; \Omega).$$

IND.: Notar que $v \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$ si y sólo si $(v_2, -v_1) \in H(\operatorname{div}; \Omega)$. También, dada $v \in [L^2(\Omega)]^2$, se dice que $\operatorname{rot} v \in L^2(\Omega)$ si existe $z \in L^2(\Omega)$ tal que

$$-\int_{\Omega} v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx + \int_{\Omega} v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx = \int_{\Omega} z \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

2.9 Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{C} y sea $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \quad \text{y} \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in X.$$

Además, sean S un subespacio de X y $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal tales que

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in S.$$

Demuestre que f puede extenderse a un funcional lineal $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$|F(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

2.10 Pruebe que todo espacio de Hilbert es estrictamente convexo.

2.11 Demuestre que para todo $f \in (H^m(\Omega))'$ existen funciones $f_\alpha \in L^2(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, tales que

$$f(v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} f_\alpha \partial^\alpha v dx \quad \forall v \in H^m(\Omega).$$

2.12 Sea X un espacio vectorial normado.

a) Sea Y un subespacio no denso de X . Demuestre que existe un funcional no nulo $F \in X'$ tal que $F(x) = 0$ para todo $x \in Y$.

- b) Sean $x_0, x_1 \in X$ tal que $x_0 \neq x_1$. Pruebe que existe una sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X'$ tal que $\|F_n\| = \|x_0 - x_1\|^n$ y $F_n(x_1) = F_n(x_0) + \|x_1 - x_0\|^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.13 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sea $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional no lineal. Se dice que J admite una derivada direccional en $v \in V$, en la dirección $\varphi \in V$, si la expresión $\frac{J(v+\varepsilon\varphi)-J(v)}{\varepsilon}$ admite un límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. El valor de este límite se denota $DJ(v, \varphi)$. Entonces, J se dice diferenciable en el sentido de Gâteaux (o G -diferenciable) en $v \in V$, si $DJ(v, \varphi)$ existe para todo $\varphi \in V$. Ahora, si J es G -diferenciable en $v \in V$ y si $DJ(v, \cdot) \in V'$, se concluye, por el Teorema de Representación de Riesz, que existe un único elemento $z \in V$ tal que $DJ(v, \varphi) = \langle z, \varphi \rangle \forall \varphi \in V$. En tal caso, se denota $z := J'(v)$ y se llama el GRADIENTE de J en v . A su vez, se dice que J tiene segunda diferencial en el sentido de Gâteaux en $v \in V$, en las direcciones φ y $\psi \in V$, si la expresión $\frac{DJ(v+\varepsilon\psi, \varphi) - DJ(v, \varphi)}{\varepsilon}$ admite un límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. El valor de este límite se denota $D^2J(v, \varphi, \psi)$.

- a) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n y considere $V := L^2(\Omega)$. Defina $J_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$J_0(v) := \int_{\Omega} (v^2 + v) \quad \forall v \in V$$

y calcule $J'_0(v)$ para todo $v \in V$. Qué puede decir de $J'_0(v)$ si J_0 se restringe al espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$?

- b) Suponga que J es G -diferenciable en $(v + \alpha\varphi)$, en la dirección φ , para todo $\alpha \in [0, 1]$. Demuestre que existe $\beta \in (0, 1)$ tal que

$$J(v + \varphi) = J(v) + DJ(v + \beta\varphi, \varphi).$$

- c) Suponga que J es α -convexo, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que para todo $u, v \in V$ y para todo $\beta \in [0, 1]$:

$$J((1 - \beta)u + \beta v) \leq (1 - \beta)J(u) + \beta J(v) - \frac{\alpha}{2}\beta(1 - \beta)\|u - v\|^2.$$

Además, asuma que J es G -diferenciable en todo $v \in V$. Demuestre que para todo $u, v \in V$ se tiene:

$$DJ(u, u - v) - DJ(v, u - v) \geq \alpha\|u - v\|^2$$

y

$$J(v) \geq J(u) + DJ(u, v - u) + \frac{\alpha}{2}\|v - u\|^2.$$

- d) Suponga que J es G -diferenciable en $v \in V$ y que, dada una dirección $\varphi \in V$, $D^2J(v + \alpha\varphi, \varphi, \varphi)$ existe $\forall \alpha \in [0, 1]$. Demuestre que hay una constante $\beta \in (0, 1)$ tal que

$$J(v + \varphi) = J(v) + DJ(v, \varphi) + \frac{1}{2}D^2J(v + \beta\varphi, \varphi, \varphi).$$

2.14 Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sea V un subespacio cerrado de H . El anulador (o aniquilador) de V se denota por V° y se define como

$$V^\circ := \{F \in H' : F(x) = 0 \quad \forall x \in V\}.$$

Demuestre que

$$H = V \oplus \mathcal{R}(V^\circ),$$

donde $\mathcal{R} : H' \rightarrow H$ denota la aplicación de Riesz.

2.15 Sea X un espacio vectorial normado y sea $x_0 \in X$ tal que $|F(x_0)| \leq C_0$ para todo $F \in X'$ con $\|F\|_{X'} = 1$. Demuestre que $\|x_0\| \leq C_0$.

2.16 Sea V un subespacio de un Hilbert $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y defina

$$V^\perp := \{y \in Y : \langle y, z \rangle = 0 \quad \forall z \in V\}.$$

Si \bar{V} denota la clausura de V , demuestre que $\bar{V}^\perp = V^\perp$. Concluya que V es denso en Y si y sólo si $V^\perp = \{0\}$.

2.17

a) Sea S un subconjunto de un Hilbert H y sea M el subespacio cerrado generado por S . Pruebe que S^\perp es un subespacio cerrado de H , $M^\perp = S^\perp$, y $M = (S^\perp)^\perp$.

b) Sea V un subespacio de un Hilbert H . Demuestre que $H = \bar{V} \oplus V^\perp$.

2.18

a) Sea S un subespacio de un Hilbert H . Demuestre que $S^\perp = \bar{S}^\perp$.

b) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera suave Γ , y considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Encuentre y caracterice un subespacio V de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus V$.

2.19 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , y sea $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen constantes $M, \beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Defina el conjunto

$$S := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1 \right\},$$

y demuestre que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ existe un único $g \in S$ tal que

$$\int_{\Omega} \kappa(x) \|\nabla u(x) - \nabla g(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dx = \min_{v \in S} \int_{\Omega} \kappa(x) \|\nabla u(x) - \nabla v(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dx.$$

2.20 Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert COMPLEJO, y sean $u, v \in H$, $u \neq v$, tales que $\|u\| = \|v\|$. Defina $w := u - v$ y considere la proyección ortogonal $\mathbf{P} : H \rightarrow S^\perp$, donde S es el subespacio generado por w . Demuestre que

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{P}(v) = \frac{u+v}{2} + \left\{ \frac{\mathbf{i} \operatorname{Im}(\langle u, v \rangle)}{\|w\|^2} \right\} w.$$

Qué sucede cuando H es un Hilbert REAL ? Interprete gráficamente.

2.21 ([4], [32]) Sea $\Omega :=]0, 1[^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ y considere el espacio de Hilbert $(H(\operatorname{div}; \Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde

$$H(\operatorname{div}; \Omega) := \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(\Omega) \}$$

y

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \int_{\Omega} \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\tau} dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\zeta}) \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) dx \quad \forall \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div}; \Omega).$$

Además, sea S el subespacio de $H(\operatorname{div}; \Omega)$ dado por

$$S := \{ \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma x_1, \beta + \gamma x_2) \quad \forall x := (x_1, x_2) \in \Omega; \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \},$$

y sea $\boldsymbol{\sigma} \in H(\operatorname{div}; \Omega)$ definida por $\boldsymbol{\sigma}(x) = (x_1 x_2, x_1 + x_2) \quad \forall x := (x_1, x_2) \in \Omega$. Aplique el teorema de caracterización respectivo y encuentre la mejor aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$ por elementos de S , con respecto a la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2.22 Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X := \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, provisto del producto escalar $\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^t B) \quad \forall A, B \in X$.

a) Demuestre que $X = X_{\text{sim}} \oplus X_{\text{asim}}$, donde

$$X_{\text{sim}} = \{A \in X : A^t = A\} \quad \text{y} \quad X_{\text{asim}} = \{A \in X : A^t = -A\}.$$

b) Sea $C := (c_{ij})_{n \times n} \in X$ tal que $c_{ij} = 1 \quad \forall i \geq j$ y $c_{ij} = 0 \quad \forall i < j$. Encuentre las mejores aproximaciones de C por matrices de X_{sim} y X_{asim} , con respecto a la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2.23 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base de un subespacio U de X .

a) Demuestre que existen $F_1, F_2, \dots, F_n \in X'$ tales que $F_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$.

b) Pruebe que $X = U \oplus V$, donde $V := \{x \in X : F_j(x) = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}\}$.

2.24

a) Dado $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre \mathbb{R} con aplicación de Riesz $\mathcal{R} : X' \rightarrow X$, defina $[\cdot, \cdot] : X' \times X' \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$[F, G] := \langle \mathcal{R}(F), \mathcal{R}(G) \rangle \quad \forall F, G \in X',$$

y pruebe que $(X', [\cdot, \cdot])$ es un espacio de Hilbert.

b) Sea X un espacio vectorial normado sobre \mathbb{R} y denote por X'' al dual del dual X' , es decir

$$X'' := \left\{ \mathcal{F} : X' \rightarrow \mathbb{R} : \mathcal{F} \text{ es lineal y acotado} \right\}.$$

Demuestre que para cada $x \in X$ el funcional $J(x) : X' \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $J(x)(F) := F(x) \quad \forall F \in X'$ es un elemento de X'' , y que la aplicación resultante $J : X \rightarrow X''$ es inyectiva e isométrica. Luego, utilice a) para probar que si X es un Hilbert entonces J es biyectiva.

2.25 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , y sea $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen constantes $M, \beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre, utilizando algún resultado de dualidad, que para todo $f \in L^2(\Omega)$ existe un único $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \left\{ \kappa \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{\kappa} u v \right\} = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

y

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\{ \frac{M}{\min\{\beta, \frac{1}{M}\}} \right\}^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

2.26 Dado $n \in \mathbb{N}$, considere una partición $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = 1$ de $\Omega :=]0, 1[$ y defina los subespacios de $L^2(\Omega)$ dados por

$$H_n^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : u|_{]t_{j-1}, t_j[} \in H^1(]t_{j-1}, t_j[) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \right\},$$

y

$$S_n := \left\{ u \in L^2(\Omega) : u|_{]t_{j-1}, t_j[} \text{ es constante } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

Entonces, dado $u \in H_n^1(\Omega)$, encuentre su mejor aproximación por elementos de S_n^\perp con respecto al producto escalar

$$\langle v, w \rangle := \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} p_j v w \quad \forall v, w \in H_n^1(\Omega),$$

donde p_j es el polinomio definido por $p_j(t) := (t - t_{j-1}) \quad \forall t \in]t_{j-1}, t_j[$. Qué sucede con dicha mejor aproximación si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se reemplaza por

$$\langle\langle v, w \rangle\rangle := \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \{ p_j v w + v' w' \} \quad \forall v, w \in H_n^1(\Omega)?$$

2.27 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 y sea \mathcal{T} un conjunto finito de triángulos T , cuyos interiores son disjuntos entre sí, tal que $\bar{\Omega} = \cup \{T : T \in \mathcal{T}\}$. Defina

$$H_{\mathcal{T}}^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : u|_T \in H^1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T} \right\}, \quad y$$

$$S_{\mathcal{T}} := \left\{ u \in L^2(\Omega) : u|_T \text{ es constante } \forall T \in \mathcal{T} \right\}.$$

Entonces, dado $u \in H_{\mathcal{T}}^1(\Omega)$, encuentre su mejor aproximación por elementos de $S_{\mathcal{T}}^\perp$ con respecto al producto escalar

$$\langle v, w \rangle := \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \{ v w + \nabla v \cdot \nabla w \} \quad \forall v, w \in H_{\mathcal{T}}^1(\Omega).$$

Qué sucede con dicha mejor aproximación si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se reemplaza por

$$\langle\langle v, w \rangle\rangle := \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T v w \quad \forall v, w \in H_{\mathcal{T}}^1(\Omega)?$$

2.28 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $\bar{B}(\mathbf{0}, 1) := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ su bola unitaria cerrada. A su vez, dados $N \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^N)$, y $\beta \in \mathbb{R}^N$, se define el funcional $(\beta \cdot A) : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $(\beta \cdot A)(x) := \langle \beta, A(x) \rangle_N \quad \forall x \in X$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ es el producto escalar usual de \mathbb{R}^N . Demuestre que un vector α de \mathbb{R}^N pertenece a $\overline{A(\bar{B}(\mathbf{0}, 1))}$ si y sólo si $|\langle \beta, \alpha \rangle_N| \leq \|\beta \cdot A\|_{X'}$ $\forall \beta \in \mathbb{R}^N$.
[INDICACION: Para la implicación recíproca razone por contradicción].

2.29 Dados $k \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, denote por $P_k([a, b])$ al espacio de polinomios de grado $\leq k$ definidos sobre $[a, b]$. Equivalentemente, $p \in P_k([a, b])$ si y sólo si existen

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que $p(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j x^j \quad \forall x \in [a, b]$. Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $p_n \in P_n([a, b])$ y $\delta_n > 0$, tales que

$$\inf_{q \in P_{n-1}([a, b])} \int_a^b p_n(x) \{x^n + q(x)\} dx \geq \delta_n.$$

2.30 Dado $k \in \mathbb{N}$, defina los subespacios de dimensión finita de $L^2(] - \pi, \pi[)$:

$$E_k := \langle \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k\} \rangle \quad y \quad F_k := \langle \{\psi_1, \dots, \psi_k\} \rangle,$$

donde $\varphi_j(x) := \cos(jx)$ y $\psi_j(x) := \sin(jx)$, $\forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\forall x \in] - \pi, \pi[$. Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $(r_n, s_n) \in E_n \times F_n$ y $\varepsilon_n > 0$, tales que

$$\inf_{(\varphi, \psi) \in E_{n-1} \times F_{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \{r_n + s_n\} \{\varphi_n - \varphi + \psi_n - \psi\} \geq \varepsilon_n.$$

3. OPERADORES LINEALES

3.1 Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X)$. Demuestre que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\substack{x, z \in X \\ \|x\|, \|z\| \leq 1}} |\langle A(x), z \rangle|.$$

3.2 Sean X, Y, Z espacios de Banach y sean $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(Z, X)$. Demuestre que $(AB)' = B' A'$. Suponga que A es invertible y demuestre que A' también lo es, con $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

3.3 [INVERSO A IZQUIERDA]. Sean X, Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $N(A) = \{0\}$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Existe $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ tal que $BA = I : X \rightarrow X$.
- $R(A)$ es cerrado y posee un suplemento topológico en Y .
- Confirme o desmienta si en el caso en que ambos espacios son Hilbert, dicho suplemento topológico está dado por $R(A)^\perp$.

3.4 Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0, 1]$ provisto de la norma uniforme. Dados los polinomios $p_j \in X$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, con $p_j(t) = t^j \quad \forall t \in [0, 1]$, se define el operador $A : X \rightarrow X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^n \left\{ \int_0^1 u(t) p_j(t) dt \right\} p_j \quad \forall u \in X.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \rightarrow X'$.

IND.: Para todo $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ defina $F_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $F_j(u) := \int_0^1 u(t) p_j(t) dt \quad \forall u \in X$, y observe que $F_j \in X'$.

3.5 Considere dos espacios vectoriales normados X e Y .

- a) Sea $A_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Demuestre que existe un operador $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y, X))$ tal que $\mathcal{T}_0 A_0 = A_0^{-1}$ y $\|\mathcal{T}_0\| = \|A_0^{-1}\|/\|A_0\|$.
- b) Pruebe que si Y es Banach y $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y', X'))$ es un operador biyectivo, entonces $\mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(Y', X'), \mathcal{L}(X, Y))$.

3.6 Sean X, Y espacios de Banach y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

- a) Demuestre que $R(A)^0 = N(A')$ y que

$$N(A') = \{0\} \quad \text{si y sólo si} \quad \overline{R(A)} = Y.$$

- b) Pruebe que si $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$, entonces $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

3.7 Sea M un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado X . Pruebe que el aniquilador de $(\frac{X}{M})'$ coincide con M .

3.8 Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea $T : X' \rightarrow Y'$ un operador lineal cerrado y biyectivo. Demuestre que $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y', X')$.

3.9 Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \forall G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

IND.: Utilizar el TEOREMA DE BANACH-STEINHAUSS.

3.10 Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, X)$, con $\|A\| < 1$. Demuestre que $(I + A)$ es invertible y que

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X, X)$. Muestre también que

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

3.11 Sean X, Y espacios de Banach y sea $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \rightarrow Y$ un operador lineal. El grafo de T se denota por \mathcal{G}_T y se define como

$$\mathcal{G}_T := \{(x, y) \in X \times Y : x \in \mathcal{D}(T), y = Tx\}$$

Suponga que $\mathcal{D}(T)$ y \mathcal{G}_T son subespacios cerrados de X y $X \times Y$, respectivamente. Demuestre que T es acotado sobre $\mathcal{D}(T)$.

3.12 Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \rightarrow Y$ un operador lineal. Un operador lineal $\tilde{T} : \mathcal{D}(\tilde{T}) \subseteq X \rightarrow Y$ se dice una extensión de T si $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(\tilde{T})$ y $Tx = \tilde{T}x \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$.

DEFINICIÓN. Se dice que $\bar{T} : \mathcal{D}(\bar{T}) \subseteq X \rightarrow Y$ es la CLAUSURA de T , si:

- i) \bar{T} es un operador lineal cerrado

ii) \bar{T} es una extensión de T

iii) Si $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \rightarrow Y$ es cualquier operador con las propiedades i) y ii), entonces \tilde{T} es una extensión de \bar{T} .

Sean X, Y espacios de Banach, y sea $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ un operador lineal. Pruebe que T tiene una clausura \bar{T} si y sólo si la siguiente condición se satisface

$$\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq D(T), x_n \rightarrow 0, Tx_n \rightarrow y \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

3.13 Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0, \pi]$ provisto de la norma uniforme. Dadas las funciones trigonométricas $p_j, q_j \in X$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, con $p_j(t) = \sin(jt)$ y $q_j(t) = \cos(jt)$, $\forall t \in [0, \pi]$, se define el operador $A : X \rightarrow X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^n \left\{ \int_0^\pi u(t) p_j(t) dt \right\} p_j + \sum_{j=0}^n \left\{ \int_0^\pi u(t) q_j(t) dt \right\} q_j \quad \forall u \in X.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \rightarrow X'$.

3.14 Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Recuerde que el operador adjunto de Hilbert de A se denota $A^* : Y \rightarrow X$, donde para cada $y \in Y$, $A^*y \in X$ es el único elemento (dado por TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ) tal que $\langle Ax, y \rangle_Y = \langle x, A^*y \rangle_X \quad \forall x \in X$.

- Pruebe nuevamente que $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ y $\|A^*\| = \|A\|$, y deduzca también que $(A^*)^* = A$.
- Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y .
- Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\inf_{z \in N(A)} \|x - z\| \leq \beta \|Ax\| \quad \forall x \in X$, y demuestre que $R(A) = N(A^*)^\perp$.
- Pruebe que $A^* = R_X A' R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \rightarrow X$ y $R_Y : Y' \rightarrow Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^o N(A') = N(A^*)^\perp$.

3.15 Sean U un espacio vectorial normado y V un espacio de Banach. Además, sea $P : U' \rightarrow \mathcal{L}(U, V)$ un operador lineal cerrado tal que $N(P)$ es el funcional nulo sobre U y $R(P) = \mathcal{L}(U, V)$. Demuestre que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha \|F\|_{U'} \leq \|P(F)\|_{\mathcal{L}(U, V)} \quad \forall F \in \mathcal{D}(P).$$

3.16 Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

IND.: Hacer una demostración alternativa a la sugerida en el Ejercicio 3.9 utilizando ahora el TEOREMA DEL GRAFO CERRADO en vez del TEOREMA DE BANACH-STEINHAUSS.

3.17

- a) Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de HILBERT. Dados $n \in \mathbb{N}$, $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq H$ y un conjunto de funcionales $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \subseteq H'$, se define el operador $A : H \rightarrow H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^n F_j(u) p_j \quad \forall u \in H.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H, H)$ y encuentre explícitamente el operador $A^* : H \rightarrow H$.

- b) Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el espacio de HILBERT $L^2(0, 1)$ provisto del producto escalar

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u(t) v(t) dt \quad \forall u, v \in H.$$

Dados los polinomios $p_j \in H$, $j \in \{1, \dots, n\}$, con $p_j(t) = t^j \forall t \in (0, 1)$, se define el operador $A : H \rightarrow H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^1 u(t) p_j(t) dt \right\} p_j \quad \forall u \in H.$$

Demuestre que A es lineal, acotado y AUTOADJUNTO, esto es $A \in \mathcal{L}(H, H)$ y $A = A^*$.

3.18 Sea M un subespacio cerrado de un Hilbert H . Por el Teorema de Descomposición Ortogonal, cada $x \in H$ puede escribirse únicamente en la forma $x = y + z$, con $y \in M$ y $z \in M^\perp$. El punto $y \in M$ se llama la PROYECCIÓN de x en M , y el operador $P := X \rightarrow M$, $Px = y$, se llama la proyección sobre M . También se denota $P := P_M$ y se dice que P es una proyección.

- i) Pruebe que si P es una proyección, entonces P es autoadjunto, $P^2 = P$, y $\|P\| = 1$ si $P \neq 0$.
- ii) Pruebe que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es autoadjunto y $P^2 = P$, entonces P es una proyección sobre algún subespacio cerrado de H .

3.19 ([4], [32]) Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ y $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

a) Demuestre que
$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \quad \forall q \in Q.$$

b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que
$$\sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q,$$
 y pruebe que

$$H = R(\mathbf{B}^*) \oplus V.$$

3.20 [PSEUDO-INVERSA DE MOORE-PENROSE]. Sean X, Y Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\mathcal{R}(A) = Y$, y sea $V = N(A)$. Dado el operador de proyección ortogonal $P : X \rightarrow V$, considere $B : Y \rightarrow X$ tal que $B(y) = x - P(x)$ para todo $y \in Y$, donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$.

- a) Demuestre que B está bien definido y que B es una biyección lineal y acotada de Y en V^\perp . Pruebe, además, que B es un inverso a derecha de A , esto es $AB(y) = y$ para todo $y \in Y$.

- b) Defina $A_0 : V^\perp \rightarrow Y$ como $A_0(x) = A(x)$ para todo $x \in V^\perp$, es decir $A_0 = A|_{V^\perp}$, y pruebe que $A_0^{-1} = B$.
- c) Extienda los resultados anteriores al caso en que $\mathcal{R}(A)$ es un subespacio CERRADO propio de Y .

3.21 ([5], [20]) Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert y sea $P \in \mathcal{L}(H, H)$, no trivial. Se dice que P es un PROYECTOR si satisface $P^2 = P$. En tal caso se dice que P es un PROYECTOR ORTOGONAL si además verifica que $\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in R(P), \quad \forall v \in N(P)$.

- a) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es un proyector entonces $H = N(P) \oplus R(P)$ y $\|P\| \geq 1$.
- b) Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- i) P es un proyector ortogonal.
 - ii) $R(P) = N(P)^\perp$.
 - iii) P es autoadjunto

- c) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es un proyector ortogonal entonces $\|P\| = 1$.

3.22 [CLAUSURA DE OPERADORES]. Sean X e Y Banach. Se dice que un operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ admite una clausura si existe un operador lineal $B : \mathcal{D}(B) \subseteq X \rightarrow Y$ tal que B es una extensión de A y $G(B) = \overline{G(A)}$. Demuestre que A admite una clausura si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $(x_n, A(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\mathbf{0}, y)$, con $y \in Y$, se tiene necesariamente que $y = \mathbf{0}$ [Notar que el presente enunciado es equivalente al del Ejercicio 3.12].

3.23 Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \rightarrow H$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H .

- a) Sea $y \in H$ y suponga que existe $\tilde{y} \in H$ tal que

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, \tilde{y} \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Demuestre que dicho \tilde{y} es único.

- b) Considere el conjunto

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) := \{y \in H : \text{existe } \tilde{y} \in H \text{ tal que } \langle A(x), y \rangle = \langle x, \tilde{y} \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)\},$$

y defina el operador $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \rightarrow H$ dado por $\tilde{A}(y) := \tilde{y} \quad \forall y \in \mathcal{D}(\tilde{A})$. Demuestre que \tilde{A} es lineal y cerrado.

3.24 ([33]) Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert y sea $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(H, H)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : H \rightarrow H$, y tal que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. El objetivo de este ejercicio es probar que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)}$, para cuyo efecto proceda como se indica:

- a) Sea S un subespacio de dimensión 2 de H y sea $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S, S)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : S \rightarrow S$, y tal que $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}$. Pruebe que $S = R(\mathbf{Q}) \oplus R(\mathbf{I} - \mathbf{Q})$ y concluya que existen vectores no nulos $p, q, r, s \in S$ que satisfacen $\langle p, q \rangle = \langle r, s \rangle = 1$, tales que

$$\mathbf{Q}(v) = \langle q, v \rangle p \quad \text{y} \quad (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) = \langle s, v \rangle r \quad \forall v \in S.$$

- b) A partir de la identidad $v = \mathbf{Q}(v) + (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) \quad \forall v \in S$, deduzca que $\|p\|^2 \|q\|^2 = \|r\|^2 \|s\|^2 = 1 - \langle p, r \rangle \langle q, s \rangle$ y concluya así que

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S, S)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S, S)}.$$

- c) Dado $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$, considere el subespacio S generado por los vectores x y $\mathbf{P}(x)$ y defina $\mathbf{Q} := \mathbf{P}|_S$. Demuestre que $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S, S)$, observe que la dimensión de S es ≤ 2 , y luego pruebe, usando b), que $\|(\mathbf{I} - \mathbf{P})(x)\| \leq \|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)}$.

- d) Concluya, a partir de c), que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)}$.

3.25 Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espacio de Hilbert complejo y considere $H \times H$ provisto del producto escalar

$$\langle (u, v), (z, w) \rangle_{H \times H} := \langle u, z \rangle_H + \langle v, w \rangle_H \quad \forall (u, v), (z, w) \in H \times H.$$

Además, dado $A \in \mathcal{L}(H, H)$, defina el operador $B : H \times H \rightarrow H \times H$ por

$$B((u, v)) := (iA(v), -iA^*(u)) \quad \forall (u, v) \in H \times H.$$

Demuestre que $\|B\| = \|A\|$ y que B es autoadjunto.

3.26 Sean E y F espacios de Banach, y sea $T : E \rightarrow F$ un operador lineal cerrado con dominio $D(T)$ e imagen $R(T)$. Demuestre que son equivalentes:

- El operador T es inyectivo, y T^{-1} es acotado sobre $R(T)$.
- Existe una constante positiva C tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in D(T)$.
- $R(T)$ es cerrado en F , y T es inyectivo.

3.27 Sea Ω un dominio convexo y acotado de \mathbb{R}^2 con frontera poligonal Γ , y sean $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ los productos escalares de $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente.

- a) Pruebe que para todo $r \in L^2(\Omega)$ existe un único $z \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\langle z, w \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle r, w \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

- b) Deduzca que z es la única solución débil del problema de valores de contorno:

$$-\Delta z + z = r \quad \text{en } \Omega, \quad \nabla z \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en } \Gamma,$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal sobre Γ , y **observe** (no lo demuestre) que la convexidad de Ω garantiza que $z \in H^2(\Omega)$.

c) Defina un operador lineal apropiado y demuestre, utilizando el Teorema del Grafo Cerrado, que existe $C > 0$ tal que

$$\|z\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|r\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall r \in L^2(\Omega).$$

3.28 Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert real y sea $A \in \mathcal{L}(H, H)$ el operador inducido por una forma bilineal y acotada $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$. Además, sea Π la proyección ortogonal de H sobre un subespacio cerrado S , y suponga que existe $\alpha > 0$ tal que $a(v, v) \geq \alpha \langle v, v \rangle \quad \forall v \in S$. Demuestre que $\Pi A : S \rightarrow S$ es una biyección lineal.

3.29 ([23]) Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sean V_1, V_2, \dots, V_N subespacios cerrados mutuamente ortogonales de H , esto es $v_i \perp v_j \quad \forall v_i \in V_i, \forall v_j \in V_j, \forall i \neq j$. Demuestre que $\mathbb{I} - \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \dots + \mathbb{P}_N$, donde $\mathbb{P} : H \rightarrow V_1^\perp \cap V_2^\perp \cap \dots \cap V_N^\perp$ y $\mathbb{P}_j : H \rightarrow V_j$ son los proyectores ortogonales respectivos.

3.30 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n y considere el espacio de Hilbert $V := [L^2(\Omega)]^{n \times n}$ sobre \mathbb{R} con el producto escalar $\langle \sigma, \tau \rangle := \int_{\Omega} \sigma : \tau$, donde

$$\sigma : \tau := \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \tau_{ij} \quad \forall \sigma := (\sigma_{ij})_{n \times n}, \quad \tau := (\tau_{ij})_{n \times n} \in V.$$

A su vez, defina el subespacio $U := \{ \alpha \mathbb{A} + \beta \mathbb{B} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} = \langle \{ \mathbb{A}, \mathbb{B} \} \rangle$, donde $\mathbb{A} := (a_{ij})_{n \times n}$ y $\mathbb{B} := (b_{ij})_{n \times n}$ están definidos por

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad \text{y} \quad b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}.$$

Encuentre U^\perp y defina explícitamente los proyectores ortogonales sobre U y U^\perp . Qué sucede con estos proyectores si U se reemplaza por $\langle \{ \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{I} \} \rangle$, donde \mathbb{I} es el tensor identidad de V ?

3.31 Sean $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ y $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ espacios de Hilbert sobre \mathbb{C} con normas inducidas $\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$, respectivamente, y sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ tal que $\|T(x)\|_2 = \|x\|_1 \quad \forall x \in H_1$. Demuestre que $\langle T(x), T(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1 \quad \forall x, y \in H_1$.

IND.: Considere las expresiones nulas $\|T(x+y)\|_2^2 - \|x+y\|_1^2$ y $\|T(x+iy)\|_2^2 - \|x+iy\|_1^2$.

3.32 Dado Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , defina el operador $A : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ por

$$A(u) := \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_j \right\} v_j \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

donde $\{u_1, u_2, \dots, u_N\} \subseteq H^1(\Omega)$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_N\} \subseteq L^2(\Omega)$. Demuestre que A es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto A^* .

3.33 Sea $X := C[0, 1]$ provisto de la norma uniforme, y sean $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}, \{q_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tales que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} p_j(s) q_j(t)$ converge uniformemente a una función continua $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, es decir

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \max_{(s,t) \in [0,1] \times [0,1]} \left| K(s,t) - \sum_{j=1}^N p_j(s) q_j(t) \right| \right\} = 0.$$

A su vez, sea $F_j \in X'$ definido por $F_j(u) := \int_0^1 q_j(t) u(t) dt \quad \forall u \in X$. Pruebe que para todo $G \in X'$, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} G(p_j) F_j$ es convergente en X' . Identifique el valor del límite respectivo en términos del adjunto de un operador conveniente.

3.34 ([4], [32]) [LA CONDICIÓN INF-SUP CONTINUA]. Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ e $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) A es sobreyectivo.
- ii) $A^* : Y \rightarrow X$ es inyectivo y de rango cerrado.
- iii) Existe $\alpha > 0$ tal que $\|A^*(y)\|_X := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|\langle A(x), y \rangle_Y|}{\|x\|_X} \geq \alpha \|y\|_Y \quad \forall y \in Y$.
- iv) Existe un operador $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ tal que $AB = I$ en Y y $BA = I - P$ en X , donde $P : X \rightarrow N(A)$ es el proyector ortogonal.

3.35 Dado Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , defina el operador $A : H^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ por

$$A(u) := \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Omega} \Delta u \Delta u_j \right\} v_j \quad \forall u \in H^2(\Omega),$$

donde $\{u_1, u_2, \dots, u_N\} \subseteq H^2(\Omega)$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_N\} \subseteq H^1(\Omega)$. Demuestre que A es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto A^* .

3.36 Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre \mathbb{C} y $A : H \rightarrow H$ un operador lineal tal que $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A(y) \rangle \quad \forall x, y \in H$. Pruebe que A es acotado.

3.37 Sean V y W subespacios cerrados de un Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, y sean $P : H \rightarrow V$ y $Q : H \rightarrow W$ los proyectores ortogonales respectivos. Demuestre que

$$\langle (Q - P)(x), x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H \quad \text{si y sólo si} \quad V \subseteq W.$$

3.38 Dado Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , defina el operador $A : H^1(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega)$ por

$$A(u) := \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_j \right\} v_j \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

donde $\{u_1, u_2, \dots, u_N\} \subseteq H^1(\Omega)$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_N\} \subseteq H^2(\Omega)$. Demuestre que A es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto A^* .

3.39 El presente ejercicio apunta a aplicar la teoría desarrollada para el análisis de la función spline de interpolación a otras tres situaciones distintas, pero con características similares.

- a) Sean $\Omega :=]a, b[$, $n \in \mathbb{N}$, y considere la partición $a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$. Además, sean $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha, \beta > 0$. Luego, dado $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \dots, z_n)^t \in \mathbb{R}^n$, se pide analizar la solubilidad del siguiente problema: Hallar $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$ tal que $u_1(t_i) - u_2(t_i) = z_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, y de modo que

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} (u_1^{(m)}(t))^2 dt + \beta \int_{\Omega} (u_2^{(m)}(t))^2 dt \\ = & \min_{\substack{\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \\ v_1(t_i) - v_2(t_i) = z_i \quad \forall i}} \left\{ \alpha \int_{\Omega} (v_1^{(m)}(t))^2 dt + \beta \int_{\Omega} (v_2^{(m)}(t))^2 dt \right\} \end{aligned}$$

Se genera algún cambio en su análisis si la condición de interpolación se reemplaza por $v_1(t_i) = v_2(t_i) = z_i \quad \forall i$? Explique y fundamente.

- b) Sea S un subespacio de dimensión finita N de un Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$, y consideremos una base $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ de S . Además, sea $\Pi : H \rightarrow S^\perp$ el proyector ortogonal. Demuestre que para cada $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \dots, z_N)^t \in \mathbb{R}^N$ existe un único $u \in H$ tal que $\langle u, p_i \rangle_H = z_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$, y de modo que

$$\|\Pi(u)\|_H = \min_{\substack{v \in H \\ \langle v, p_i \rangle_H = z_i \quad \forall i}} \|\Pi(v)\|_H$$

Deduzca un algoritmo para calcular u .

- c) Sean $\Omega :=]-\pi, \pi[$ y $(H^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega})$ el espacio de Sobolev de orden 1. A su vez, sea $n \in \mathbb{N}$ y considere los conjuntos de funciones $\{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n\}$ y $\{q_0, q_1, q_2, \dots, q_n\}$ definidos por $p_k(t) := \sin(kt)$ y $q_k(t) := \cos(kt) \quad \forall t \in [-\pi, \pi], \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Entonces, dado $\mathbf{z} := (z_0, z_1, z_2, \dots, z_n)^t \in \mathbb{R}^{n+1}$, se pide analizar la solubilidad del siguiente problema: Hallar $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ tal que $\langle u_1, p_k \rangle_{1,\Omega} + \langle u_2, q_k \rangle_{1,\Omega} = z_k \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, y de modo que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (u_1'(t))^2 dt + \int_{\Omega} (u_2'(t))^2 dt \\ = & \min_{\substack{\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \\ \langle v_1, p_k \rangle_{1,\Omega} + \langle v_2, q_k \rangle_{1,\Omega} = z_k \quad \forall k}} \left\{ \int_{\Omega} (v_1'(t))^2 dt + \int_{\Omega} (v_2'(t))^2 dt \right\} \end{aligned}$$

3.40 Sea G un subespacio de un espacio vectorial normado X , y sea N un subespacio del dual de un espacio de Banach reflexivo Y . Demuestre que:

- a) $\text{dist}(f, G^\circ) = \sup_{\substack{x \in \overline{G} \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| \quad \forall f \in X'$.
- b) $\overline{N} = ({}^\circ N)^\circ$.
- c) $\text{dist}(y, {}^\circ N) = \sup_{\substack{g \in \overline{N} \\ \|g\| \leq 1}} |g(y)| \quad \forall y \in Y$.
- d) $\text{dist}(g, \overline{N}) = \sup_{\substack{y \in {}^\circ N \\ \|y\| \leq 1}} |g(y)| \quad \forall g \in Y'$.

3.41 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R} , considere los espacios de Hilbert reales dados por $X := L^2(\Omega)$ e $Y := \mathbb{R}^{2 \times 2}$ provistos de los productos escalares

$$\langle u, v \rangle_X := \int_{\Omega} u v \quad \forall u, v \in X, \quad \langle A, B \rangle_Y := \text{tr}(A^t B) \quad \forall A, B \in Y,$$

y defina el operador $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ por

$$\mathcal{A}(u) := \begin{pmatrix} \int_{\Omega} u & \int_{\Omega} x u \\ \int_{\Omega} x u & \int_{\Omega} x^2 u \end{pmatrix} \quad \forall u \in X.$$

- i) Demuestre que \mathcal{A} es lineal y acotado y calcule explícitamente el operador adjunto \mathcal{A}^* y los espacios $N(\mathcal{A})$, $R(\mathcal{A})$, $N(\mathcal{A}^*)$ y $R(\mathcal{A}^*)$.
- ii) Encuentre un subespacio cerrado S de X tal que $\mathcal{A}|_S : S \rightarrow R(\mathcal{A})$ sea biyectivo.
- iii) Defina $\tilde{Y} := \{B \in Y : B^t = -B\}$ y demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|\mathcal{A}^*(A)\|_X \geq C \inf_{B \in \tilde{Y}} \|A - B\|_Y \quad \forall A \in Y.$$

- iv) Reemplace $X := L^2(\Omega)$ por $X := H^1(\Omega)$ con su producto escalar habitual, y recalcule el operador adjunto \mathcal{A}^* .

3.42 Sean X , Y_1 e Y_2 espacios de Banach sobre \mathbb{K} , y sean $A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subseteq X \rightarrow Y_1$ y $A_2 : \mathcal{D}(A_2) \subseteq X \rightarrow Y_2$ operadores lineales cerrados. Considere el espacio producto $Y := Y_1 \times Y_2$ y demuestre que el operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$, definido por $A(x) := (A_1(x), A_2(x))$ $\forall x \in \mathcal{D}(A) := \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_2)$, también es cerrado. Recíprocamente, suponga que $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ es lineal cerrado, y que para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $\{A_i(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en Y_i , $i \in \{1, 2\}$, existe una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para la cual $\{A_j(x_n^{(1)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en Y_j , $\forall j \in \{1, 2\}$. Demuestre en tal caso que para cada $i \in \{1, 2\}$, $A_i|_{\mathcal{D}(A)}$ es cerrado.

3.43 Determine, justificadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- i) Todo operador lineal, acotado y biyectivo de un Banach X en un Banach Y es compacto.
- ii) Dados H y Q espacios de Hilbert se tiene que $A \in \mathcal{L}(H, Q)$ es biyectivo si y sólo si $A^* \in \mathcal{L}(Q, H)$ es biyectivo.
- iii) Existen operadores compactos que no son cerrados.
- iv) Dados X e Y espacios de Banach, el inverso de un operador lineal, cerrado y biyectivo $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$, también es cerrado.
- v) Dados X e Y espacios de Banach, el inverso de un operador lineal, cerrado y biyectivo $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$, es acotado.
- vi) Dados X e Y espacios de Banach, Y de dimensión finita, y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, el rango del operador adjunto $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$ es cerrado.

3.44 Sea $\Omega :=]0, 1[$, considere los espacios de Hilbert reales dados por $X = L^2(\Omega)$ e $Y = \ell_2(\mathbb{R}) := \left\{ A := \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} : a_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$, provistos de los productos escalares usuales

$$\langle u, v \rangle_X := \int_0^1 u v \quad \forall u, v \in X,$$

$$\langle A, B \rangle_Y := \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \quad \forall A := \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}, B := \{b_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in Y,$$

y defina el operador $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ por

$$\mathcal{A}(u) := \left\{ \frac{1}{k} \int_0^1 x^k u \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \forall u \in X.$$

i) Demuestre que \mathcal{A} está bien definido y es lineal y acotado, y luego calcule el operador adjunto \mathcal{A}^* y los espacios $N(\mathcal{A})$ y $R(\mathcal{A}^*)$.

ii) Encuentre un subespacio cerrado S de X tal que $\mathcal{A}|_S : S \rightarrow R(\mathcal{A})$ sea biyectivo.

3.45 ([23]) El presente ejercicio apunta a caracterizar la sobreyectividad de un operador cuyo rango está contenido en un espacio producto, en términos de la sobreyectividad de sus respectivas componentes.

a) Recuerde primero que, dados $m, n \in \mathbb{N}$ y un operador lineal $\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, el Teorema de las Dimensiones establece que $n = \dim N(\mathcal{B}) + \dim R(\mathcal{B})$. Luego, suponga que $m = m_1 + m_2$ y que $\mathcal{B}(x) = (\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, donde $\mathcal{B}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ es lineal para cada $i \in \{1, 2\}$, y demuestre que \mathcal{B} es sobreyectivo si y sólo si

i) \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 son sobreyectivos. ii) $\mathbb{R}^n = N(\mathcal{B}_1) + N(\mathcal{B}_2)$.

b) Sean U y V subespacios cerrados de un Hilbert $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $U^\perp \subseteq U + V$. ii) $X = U + V$. iii) $U^\perp + V^\perp \subseteq U + V$.

c) Sean X, Y_1 e Y_2 espacios de Hilbert arbitrarios y defina $Y := Y_1 \times Y_2$. Luego, sea $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\mathcal{B}(x) = (\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)) \quad \forall x \in X$, donde $\mathcal{B}_i \in \mathcal{L}(X, Y_i) \quad \forall i \in \{1, 2\}$, y demuestre que \mathcal{B} es sobreyectivo si y sólo si

i) \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 son sobreyectivos. ii) $X = N(\mathcal{B}_1) + N(\mathcal{B}_2)$.

3.46 Sean X e Y espacios de Banach para los cuales existe una biyección $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, y sea Z un subespacio de X . Pruebe que todo $g \in Z'$ puede “extenderse” a un $G \in Y'$ tal que $\|G\|_{Y'} \cong \|g\|_{Z'}$.

3.47 Sea X un espacio de Banach real y sea \mathbf{a} una forma bilineal sobre X , esto es, $\mathbf{a} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación que satisface:

i) $\mathbf{a}(\alpha x + \beta z, y) = \alpha \mathbf{a}(x, y) + \beta \mathbf{a}(z, y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y, z \in X,$

$$\text{ii) } \mathbf{a}(x, \alpha y + \beta z) = \alpha \mathbf{a}(x, y) + \beta \mathbf{a}(x, z) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y, z \in X.$$

En tal caso se define $\mathbf{A} : X \rightarrow X'$ como $\mathbf{A}(x)(y) := \mathbf{a}(x, y) \quad \forall x, y \in X$, el cual se llama OPERADOR LINEAL INDUCIDO POR \mathbf{a} . Asuma entonces que existen constantes $M, m > 0$ tales que

$$\text{iii) } |\mathbf{a}(x, y)| \leq M \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in X, \quad y$$

$$\text{iv) } \mathbf{a}(x, x) \geq m \|x\|^2 \quad \forall x \in X,$$

y demuestre que \mathbf{A} es acotado, inyectivo y de rango $R(\mathbf{A})$ cerrado. Pruebe además que ${}^\circ R(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$, defina el operador adjunto $\mathbf{A}' : (X')' \rightarrow X'$, y comente bajo qué supuesto adicional sobre el espacio X podrá concluirse, a partir de las hipótesis i) - iv), que \mathbf{A} es biyectivo.

3.48 Sean X e Y espacios de Banach reales y sea $\mathcal{A} : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, esto es, \mathcal{A} satisface:

$$\text{i) } \mathcal{A}(\alpha x + \beta z, y) = \alpha \mathcal{A}(x, y) + \beta \mathcal{A}(z, y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, z \in X, \quad \forall y \in Y,$$

$$\text{ii) } \mathcal{A}(x, \alpha y + \beta z) = \alpha \mathcal{A}(x, y) + \beta \mathcal{A}(x, z) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, \quad \forall y, z \in Y.$$

Asuma adicionalmente que \mathcal{A} es acotada y débilmente coerciva, es decir:

$$\text{iii) } \text{ existe } M > 0 \text{ tal que } |\mathcal{A}(x, y)| \leq M \|x\| \|y\| \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y,$$

$$\text{iv) } \text{ existe } \alpha > 0 \text{ tal que } \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{A}(x, y)}{\|x\|} \geq \alpha \|y\| \quad \forall y \in Y,$$

$$\text{v) } \sup_{y \in Y} \mathcal{A}(x, y) > 0 \quad \forall x \in X, \quad x \neq \mathbf{0},$$

y defina los operadores lineales $\mathbf{A} : X \rightarrow Y'$ y $\mathbf{B} : Y \rightarrow X'$ como

$$\mathbf{A}(x)(y) := \mathcal{A}(x, y) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(y)(x) := \mathcal{A}(x, y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y.$$

- Demuestre que \mathbf{A} y \mathbf{B} están bien definidos y son acotados.
- Pruebe que \mathbf{A} y \mathbf{B} son inyectivos y que $R(\mathbf{B})$ es cerrado en X' .
- Defina explícitamente los operadores $\mathbf{A}' : Y'' \rightarrow X'$ y $\mathbf{B}' : X'' \rightarrow Y'$, y deduzca que \mathbf{B}' es sobreyectivo.
- Suponga en particular que X e Y son espacios de Hilbert y demuestre en tal caso que $\mathcal{R}_X \circ \mathbf{B} = (\mathcal{R}_Y \circ \mathbf{A})^*$, donde \mathcal{R}_X y \mathcal{R}_Y son las aplicaciones de Riesz respectivas. Concluya a partir de esta identidad y iv) que \mathbf{A} es biyectivo.

3.49 Dado $n \in \mathbb{N}$, considere una partición $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = 1$ de $\Omega :=]0, 1[$, y defina el operador lineal $A : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$A(u) := \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \{t u(t) + u'(t)\} dt \right)_{j=1, n} \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

donde $H^1(\Omega)$ y \mathbb{R}^n se proveen de sus productos escalares usuales. Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathbb{R}^n)$, defina explícitamente el operador $A^* : \mathbb{R}^n \rightarrow H^1(\Omega)$, y pruebe que $\|A^*\| \leq 2/\sqrt{3}$.

3.50 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 y sea \mathcal{T} un conjunto finito de triángulos T , cuyos interiores son disjuntos entre sí, tal que $\bar{\Omega} = \cup\{T : T \in \mathcal{T}\}$. Defina $A : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N$ por

$$A(u) := \left(\int_T \{u(x) + x \cdot \nabla u(x)\} dx \right)_{T \in \mathcal{T}} \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

donde N es la cardinalidad de \mathcal{T} , y los espacios $H^1(\Omega)$ y \mathbb{R}^N se proveen de sus productos escalares usuales. Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathbb{R}^N)$ y defina explícitamente el operador $A^* : \mathbb{R}^N \rightarrow H^1(\Omega)$.

3.51 Determine, **justificadamente**, si las siguientes afirmaciones son verdaderas, falsas o no necesariamente ciertas (a menos que se tenga una hipótesis extra):

- i) La suma de dos operadores cerrados es un operador cerrado.
- ii) Si X es un Hilbert y $A, B \in \mathcal{L}(X)$ son autoadjuntos e inyectivos, entonces $R(A) = R(B)$.
- iii) Si X es un espacio vectorial normado y $A : X \rightarrow X'$ es un operador lineal, cerrado y biyectivo, entonces A^{-1} es acotado.
- iv) Si X e Y son Banach y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ es un operador lineal cerrado no acotado, entonces $\mathcal{D}(A)$ es un subespacio cerrado propio de X .
- v) El adjunto de todo operador lineal, acotado y sobreyectivo de un Hilbert X en un Hilbert Y es inyectivo.
- vi) La suma de un operador acotado con uno cerrado es un operador cerrado.
- vii) Si X e Y son espacios vectoriales normados y $A : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow Y'$ es un operador lineal, cerrado y biyectivo, entonces A^{-1} es acotado.
- viii) Si X e Y son espacios de Banach y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ es un operador lineal cerrado e inyectivo tal que $A^{-1} : \mathcal{D}(A^{-1}) \subseteq Y \rightarrow X$ no es acotado, entonces $R(A)$ es un subespacio cerrado propio de Y .
- ix) El teorema del grafo cerrado no puede ser demostrado con el teorema de la aplicación abierta.

3.52 Sean X e Y espacios de Banach y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ un operador lineal cerrado con $\mathcal{D}(A)$ denso en X . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) A' es sobreyectivo, es decir $R(A') = X'$.

b) Existe $c \geq 0$ tal que

$$\|x\| \leq c \|A(x)\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

c) $N(A) = \{\theta_X\}$ y $R(A)$ es cerrado.

3.53 Dado un abierto acotado y simplemente conexo Ω de \mathbb{R}^n con frontera suave Γ , considere los espacios de Hilbert

$$L^2(\Omega) := \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v \text{ medible, } \int_{\Omega} v^2 < +\infty \right\}$$

y

$$H(\text{div}; \Omega) := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^n : \text{div } \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega) \right\},$$

provistos, respectivamente, de los productos interiores

$$\langle v, w \rangle_{0, \Omega} := \int_{\Omega} v w \quad \text{y} \quad \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\text{div}, \Omega} := \int_{\Omega} \left\{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \text{div } \boldsymbol{\sigma} \text{div } \boldsymbol{\tau} \right\},$$

con normas inducidas $\|\cdot\|_{0, \Omega}$ y $\|\cdot\|_{\text{div}, \Omega}$. Demuestre que para cada $N \in \mathbb{N}$ y para cada conjunto $\{\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \dots, \boldsymbol{\tau}_N\} \subseteq H(\text{div}; \Omega)$ se tiene que

$$A_N := \bigcap_{n=1}^N \left\{ \text{div } \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega), \quad \|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_n\|_{\text{div}, \Omega} < n \right\} \text{ es abierto en } L^2(\Omega).$$

3.54 Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ y $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q)$ espacios de Hilbert sobre \mathbb{R} con normas inducidas $\|\cdot\|_H$ y $\|\cdot\|_Q$, respectivamente, y sea $A : \mathcal{D}(A) = H \rightarrow Q$ un operador lineal. Suponga que para cada $q \in Q$ existe $c_q > 0$ tal que

$$|\langle q, A(\boldsymbol{\tau}) \rangle_Q| \leq c_q \|\boldsymbol{\tau}\|_H \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H.$$

Pruebe de dos maneras distintas que A es acotado.

3.55 Sean S_1 y S_2 subespacios cerrados de un Banach X . Suponga primero que existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tal que

$$\text{dist}(x_n, S_1 \cap S_2) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \text{dist}(x_n, S_1) + \text{dist}(x_n, S_2) \right\} = 0,$$

y concluya que $S_1 + S_2$ es un subespacio propio de $\overline{S_1 + S_2}$. Suponga luego que existen un subespacio S denso en X y una constante $c > 0$ tal que

$$\text{dist}(x, S_1 \cap S_2) \leq c \left\{ \text{dist}(x, S_1) + \text{dist}(x, S_2) \right\} \quad \forall x \in S,$$

y demuestre en tal caso que $S_1 + S_2$ es cerrado.

3.56 Sean A y B subespacios cerrados de un Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sobre \mathbb{R} .

6.1) Pruebe que $\text{dist}(x, A^\perp) = \sup_{\substack{a \in A \\ \|a\| \leq 1}} |\langle a, x \rangle| \quad \forall x \in H.$

6.2) Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) $A + B$ es cerrado en H .
- b) $A^\perp + B^\perp = (A \cap B)^\perp$.
- c) $A^\perp + B^\perp$ es cerrado en H .
- d) $A + B = (A^\perp \cap B^\perp)^\perp$.

3.57 Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ y $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q)$ espacios de Hilbert sobre \mathbb{R} , y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \rightarrow Q$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H . Entonces se introduce el OPERADOR ADJUNTO de A como $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subseteq Q \rightarrow H$, donde

$$\mathcal{D}(A^*) := \left\{ q \in Q : \exists \tau^* \in H \text{ tal que } \langle A(\tau), q \rangle_Q = \langle \tau, \tau^* \rangle_H \quad \forall \tau \in \mathcal{D}(A) \right\},$$

y en tal caso se define $A^*(q) = \tau^* \quad \forall q \in \mathcal{D}(A^*)$.

- a) Demuestre que A^* está bien definido y es un operador cerrado, y luego deduzca el concepto de autoadjunto cuando $H = Q$.
- b) Suponga en particular que $Q = Q_1 \times Q_2$, donde $(Q_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ y $(Q_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ son también espacios de Hilbert reales, y que

$$A(\tau) = (A_1(\tau), A_2(\tau)) \quad \forall \tau \in \mathcal{D}(A),$$

donde $A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subseteq H \rightarrow Q_1$ y $A_2 : \mathcal{D}(A_2) \subseteq H \rightarrow Q_2$ son operadores lineales con $\mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(A_2) = \mathcal{D}(A)$ denso en H . Describa los dominios $\mathcal{D}(A_1^*)$, $\mathcal{D}(A_2^*)$, y $\mathcal{D}(A^*)$ sólo en términos de A_1 y A_2 , y demuestre que

$$A^*(q) = A_1^*(q_1) + A_2^*(q_2) \quad \forall q := (q_1, q_2) \in \mathcal{D}(A_1^*) \times \mathcal{D}(A_2^*).$$

Qué relación (si es que) existe entre $\mathcal{D}(A^*)$ y $\mathcal{D}(A_1^*) \times \mathcal{D}(A_2^*)$? Deduzca finalmente que si A es cerrado y sobreyectivo entonces existe $c > 0$ tal que

$$\|A_1^*(q_1) + A_2^*(q_2)\|_H \geq c \|q\|_Q \quad \forall q := (q_1, q_2) \in \mathcal{D}(A_1^*) \times \mathcal{D}(A_2^*).$$

3.58 Sean X e Y espacios de Banach, y sea $\mathcal{J} : Y' \times X' \rightarrow X' \times Y'$ la aplicación definida por $\mathcal{J}(G, F) = (-F, G) \quad \forall (G, F) \in Y' \times X'$. A su vez, sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ un operador lineal cerrado con $\mathcal{D}(A) = X$, tal que $\mathcal{J}(\mathcal{G}(A')) + N(A)^\circ \times N(A')$ es un subespacio cerrado de $X' \times Y'$. Demuestre que A es acotado.

3.59 Dado un abierto acotado y simplemente conexo Ω de \mathbb{R}^2 con frontera suave Γ , considere los espacios de Hilbert

$$L^2(\Omega) := \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v \text{ medible, } \int_\Omega v^2 < +\infty \right\}$$

y

$$H(\text{rot}; \Omega) := \left\{ \tau := (\tau_1, \tau_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \text{rot } \tau := \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\},$$

provistos, respectivamente, de los productos interiores

$$\langle v, w \rangle_{0, \Omega} := \int_\Omega v w \quad \text{y} \quad \langle \sigma, \tau \rangle_{\text{rot}, \Omega} := \int_\Omega \left\{ \sigma \cdot \tau + \text{rot } \sigma \text{rot } \tau \right\},$$

con normas inducidas $\|\cdot\|_{0, \Omega}$ y $\|\cdot\|_{\text{rot}, \Omega}$. Demuestre que existe $\delta \in (0, 1)$ tal que para cada $v \in L^2(\Omega)$, existe $\zeta_v \in H(\text{rot}; \Omega)$ con $\|\zeta_v\|_{\text{rot}, \Omega} < \delta^{-1}$ tal que $v = \|v\|_{0, \Omega} \text{rot } \zeta_v$.

4. PROBLEMAS VARIACIONALES

4.1 ([10]) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera suave Γ , y defina $V := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, es decir

$$V = \{v \in H^2(\Omega) : v = 0 \text{ en } \Gamma\}.$$

Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V.$$

IND.: Dada $v \in V$, defina $f = -\Delta v \in L^2(\Omega)$ y aplique el Lema de Lax-Milgram al problema de valores de contorno: $-\Delta u = f$ en Ω , $u = 0$ en Γ .

4.2 ([29]) Sea $\Omega := (0, 1)$ y considere el problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} -(au')' + bu &= f \quad \text{en } \Omega \\ u'(0) = u'(1) &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{4}$$

donde $a(x) = x^2 + 2$, $b(x) = 2 + \sin(x)$ y $f(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$. Puede probarse que la formulación débil de (4) consiste en hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_0^1 (au'v' + buv) dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{5}$$

Demuestre que existe un único $u \in H^1(\Omega)$ solución de (5).

4.3 ([29]) Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1} \subset H_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, y $\cup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ es denso en H . Sea $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f \in H'$ existe una única sucesión $\{u_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$ tal que

$$u_n(f) \in H_n \quad , \quad B(u_n(f), v_n) = f(v_n) \quad \forall v_n \in H_n,$$

y $\|u_n(f)\| \leq C_0 \|f\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$, donde C_0 es una constante positiva independiente de n y de f . Suponga además que para todo $f \in H'$ existe un único $u(f) \in H$ tal que

$$B(u(f), v) = f(v) \quad \forall v \in H.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u(f) - u_n(f)\| = 0 \quad \forall f \in H'.$$

IND.: Defina la proyección de Galerkin $P_n : H \rightarrow H_n$, donde $\forall v \in H$, $P_n v$ denota la única solución de $B(P_n v, w_n) = B(v, w_n) \quad \forall w_n \in H_n$ y observe que $P_n u(f) = u_n(f)$.

4.4 ([28]) Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^2 con frontera suave Γ . Considere el problema de valores de contorno:

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{en } \Gamma, \quad \int_{\Omega} u dx = a_1, \tag{6}$$

donde $a_1 \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, y $g \in L^2(\Gamma)$ satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} g ds = 0.$$

Demuestre que una formulación débil de (6) consiste en: Hallar $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \lambda \int_{\Omega} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, ds,$$

$$\mu \int_{\Omega} u \, dx = \mu a_1,$$

para todo $(v, \mu) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$.

4.5 ([26]) Sean V un espacio de Hilbert y $a : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma trilineal tal que para todo $w \in V$, la forma bilineal $a(w; \cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada. Dado $F \in V'$, considere el problema: Hallar $u \in V$ tal que

$$a(u; u, v) = F(v) \quad \forall v \in V. \quad (7)$$

Suponga que existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(w; v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v, w \in V.$$

Asuma además que existe una constante $C_0 > 0$ tal que para todo $w_1, w_2, u, v \in V$,

$$|a(w_1; u, v) - a(w_2; u, v)| \leq C_0 \|w_1 + w_2\|_V \|u\|_V \|v\|_V \|w_1 - w_2\|_V.$$

Encuentre una constante positiva C_1 tal que para todo $F \in V'$, $\|F\|_{V'} \leq C_1$, el problema (7) admite una única solución.

4.6 ([26], Ejercicio 1.6)

a) El TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER establece que: Dado un subconjunto S compacto, convexo, y no vacío de un espacio vectorial de dimensión finita, y una aplicación continua T de S en S , entonces T tiene al menos un punto fijo. Use este resultado de Brouwer para demostrar que si X es un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $\|\cdot\|$, y si F es una aplicación continua de X en X tal que, para algún $\mu > 0$, $\langle F(u), u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in X$ con $\|u\| = \mu$, entonces existe $u_0 \in X$, $\|u_0\| \leq \mu$, tal que $F(u_0) = 0$.

b) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 con frontera suave Γ , y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. EL PROBLEMA DE NAVIER-STOKES, un problema de suma importancia en mecánica de fluidos, consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluido, tales que

$$-\Delta \mathbf{u} + \sum_{j=1}^2 u_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma, \quad \int_{\Omega} p \, dx = 0.$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$, y

$$Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\}.$$

Demuestre que la formulación débil de (8) se reduce a: encontrar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ tales que:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q, \end{aligned} \quad (9)$$

donde $a : H \times H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, $b : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$, y $f \in H'$, están definidas por

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx, \\ b(\mathbf{v}, p) &:= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx \quad , \quad f(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx. \end{aligned}$$

- c) En lo que sigue considere un problema del tipo (9), no necesariamente proveniente de (8), y asuma que las siguientes hipótesis se cumplen: b es una forma bilineal acotada, b satisface la condición de Babuška-Brezzi continua, y para cada $\mathbf{w} \in H$ la aplicación $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es también una forma bilineal acotada. A su vez, sea

$$V := \left\{ \mathbf{v} \in H : b(\mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall q \in Q \right\}.$$

Demuestre que (9) puede reducirse, equivalentemente, al siguiente problema no-lineal: hallar $\mathbf{u} \in V$ tal que

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (10)$$

- d) Además de lo dicho en c), suponga ahora que: existe una constante $\alpha > 0$ tal que $a(\mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|^2$ para todo $\mathbf{v} \in V$; V es separable; y para cada $\mathbf{v} \in V$, la aplicación $\mathbf{u} \rightarrow a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es secuencialmente débilmente continua, es decir

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u} \in V \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a(\mathbf{u}_n; \mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Demuestre que el problema (10) tiene al menos una solución $\mathbf{u} \in V$.

IND.: Muestre primero que existe una sucesión $\{\mathbf{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en V tal que para todo $m \geq 1$ el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ es linealmente independiente, y las combinaciones lineales finitas de los \mathbf{v}_n constituyen un conjunto denso en V . Luego, denote por V_m al subespacio de V generado por $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$, y aplique el método de Galerkin en conjunto con lo probado en parte a) para construir una sucesión de soluciones aproximantes.

4.7 ([2]) Sea H un espacio de Hilbert y sea $B : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

- i) B es simétrica, es decir

$$B(u, v) = B(v, u) \quad \forall (u, v) \in H \times H.$$

- ii) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u, v)| \leq C_1 \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall (u, v) \in H \times H.$$

- iii) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\sup_{v \in H \setminus \{0\}} \frac{|B(u, v)|}{\|v\|_H} \geq C_2 \|u\|_H \quad \forall u \in H.$$

Demuestre que, dado $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que $B(u, v) = F(v)$ para todo $v \in H$, y además, $\|u\|_H \leq \frac{1}{C_2} \|F\|_{H'}$.

4.8 ([4]) Sean X y M espacios de Hilbert y sean $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dos formas bilineales acotadas. Suponga además que a es simétrica y semi-definida positiva sobre X . Dados $F \in X'$, $G \in M'$ se define el operador $\mathcal{J} : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{J}(v, \mu) := \frac{1}{2} a(v, v) + b(v, \mu) - F(v) - G(\mu).$$

Considere entonces los siguientes problemas variacionales:

Hallar $(u, \lambda) \in X \times M$ tal que

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= F(v) \quad \forall v \in X, \\ b(u, \mu) &= G(\mu) \quad \forall \mu \in M. \end{aligned} \quad (11)$$

Hallar $(u, \lambda) \in X \times M$ tal que

$$\mathcal{J}(u, \mu) \leq \mathcal{J}(u, \lambda) \leq \mathcal{J}(v, \lambda) \quad \forall (v, \mu) \in X \times M. \quad (12)$$

Demuestre que (u, λ) es solución de (11) si y sólo si (u, λ) es solución de (12).

4.9 ([24], [25]) Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X, X)$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que \mathbf{S} es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \geq 0 \quad \forall y \in Y,$$

y que existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x \rangle_X \geq \alpha \|x\|_X^2 \quad \forall x \in X$$

y

$$\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y \rangle_Y}{\|x\|_X} \geq \beta \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $\|\mathbf{P}\|$, α , β y $\|\mathbf{Q}\|$, tal que

$$\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\| \leq C \{ \|f\| + \|g\| \}.$$

IND.: Transforme a una ecuación equivalente en Y y luego aplique el Lema de Lax-Milgram.

4.10 ([24], [25]) Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \rightarrow X$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que \mathbf{S} es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \geq 0 \quad \forall y \in Y,$$

que \mathbf{P} es NOLINEAL, y que existen constantes $M, \alpha, \beta > 0$ tales que

$$\|\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}\|_X \leq M \|x - \bar{x}\|_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x - \bar{x} \rangle_X \geq \alpha \|x - \bar{x}\|_X^2 \quad \forall x, \bar{x} \in X ,$$

y

$$\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y \rangle_Y}{\|x\|_X} \geq \beta \|y\|_Y \quad \forall y \in Y .$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} .$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de M, α, β y $\|\mathbf{Q}\|$, tal que

$$\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\| \leq C \{ \|f\| + \|g\| + \|\mathbf{P}(0)\| \} .$$

4.11 Sea $\Omega := (0, 3)$ y considere el problema de valores de contorno: $-u'' + (x+1)u = x$ en Ω , $u(0) = u(3) = 0$. Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio

$$H_2 := \{ v \in C(\bar{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \quad \text{y} \quad v|_{[x_j, x_{j-1}]} \text{ es un polinomio} \\ \text{de grado} \leq 1, \forall j \in \{1, 2, 3\} \} .$$

IND.: Notar que $H_2 = \langle \{e_1, e_2\} \rangle$, donde $e_j \in H_2$ es tal que $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$.

4.12 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 con frontera suave Γ , y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. EL PROBLEMA DE STOKES consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluido, tales que

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, & \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma, & \int_{\Omega} p \, dx &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\}$. Demuestre que la formulación débil de (13) se reduce a: encontrar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ tales que:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, p) &= F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H, \\ B(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, $B : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx, \\ B(\mathbf{v}, p) &:= - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx. \end{aligned}$$

4.13 ([7]) Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y H -elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H , y para cada $n \in \mathbb{N}$ considere una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente elíptica. Esto significa que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n , tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha} \|v_n\|_H^2 \quad \forall v_n \in H_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H$$

y

$$A_n(u_n, v_n) = F(v_n) \quad \forall v_n \in H_n.$$

b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|u - u_n\|_H \leq C \inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H + \sup_{w_n \in H_n \setminus \{0\}} \frac{|A(v_n, w_n) - A_n(v_n, w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}.$$

4.14 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , y sea $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen constantes $M, \beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Defina el conjunto

$$S := \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1\},$$

y demuestre que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ existe un único $g \in S$ tal que

$$\int_{\Omega} \kappa(x) \|\nabla u(x) - \nabla g(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dx = \min_{v \in S} \int_{\Omega} \kappa(x) \|\nabla u(x) - \nabla v(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dx.$$

4.15 ([7]) [LEMA DE AUBIN-NITSCH]. Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y el operador identidad $\mathbf{i} : V \rightarrow H$ es continuo. Sea $A : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y V -elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \rightarrow V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface

$$A(v, \mathbf{P}(g)) = \langle g, v \rangle_H \quad \forall v \in V.$$

Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V , denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

y

$$A(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|u - u_h\|_H \leq C \|u - u_h\|_V \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{\|g\|_H} \inf_{v_h \in V_h} \|\mathbf{P}(g) - v_h\|_V \right\}.$$

4.16 Dados $\Omega := (0, 1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$-u'' = f \quad \text{en } \Omega, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 1. \quad (14)$$

a) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional MIXTA de (14) se reduce a: Hallar $(\sigma, (u, \varphi)) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, (u, \varphi)) &= F(\tau) \quad \forall \tau \in H, \\ b(\sigma, (v, \psi)) &= G((v, \psi)) \quad \forall (v, \psi) \in Q, \end{aligned} \quad (15)$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, $b : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) &:= \int_{\Omega} \sigma \tau \, dx \quad \forall \sigma, \tau \in H, \\ b(\tau, (v, \psi)) &:= \int_{\Omega} v \tau' \, dx + \psi \tau(1) \quad \forall (\tau, (v, \psi)) \in H \times Q. \end{aligned}$$

b) Defina los funcionales F y G , y aplique la teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que (15) tiene una única solución.

4.17 Sean $\Omega =]a, b[$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno

$$u^{(4)} = f \quad \text{en } \Omega, \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0. \quad (16)$$

i) Defina la incógnita auxiliar $\sigma := u''$ en Ω y demuestre que una formulación variacional MIXTA de (16) se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \tau \, dx + \int_{\Omega} u' \tau' \, dx &= 0 \quad \forall \tau \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} v' \sigma' \, dx &= - \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (17)$$

ii) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que (17) tiene una única solución que depende continuamente del dato f .

4.18 ([4]) [LEMA DE FORTIN]. Sean H , Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{v \in H \setminus \{0\}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_H} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q.$$

Sean $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q , respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ tal que

$$b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) = 0 \quad \forall q_n \in Q_n.$$

Suponga que la familia de operadores $\{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H, H_n)} \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de n , tal que

$$\sup_{v_n \in H_n \setminus \{0\}} \frac{b(v_n, q_n)}{\|v_n\|_H} \geq \beta^* \|q_n\|_Q \quad \forall q_n \in Q_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4.19 ([7]) [El presente enunciado es una variante del Ejercicio 4.13] Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y H -elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H , y para cada $n \in \mathbb{N}$ considere un funcional $F_n \in H'_n$ y una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \rightarrow \mathbb{R}$. Suponga también que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n , tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha} \|v_n\|_H^2 \quad \forall v_n \in H_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H \quad \text{y} \quad A_n(u_n, v_n) = F_n(v_n) \quad \forall v_n \in H_n.$$

b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|u - u_n\|_H \leq C \left(\inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H + \|\mathbf{A}(v_n) \circ \mathbf{i}_n - \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H'_n} \right\} + \|F \circ \mathbf{i}_n - F_n\|_{H'_n} \right),$$

donde $\mathbf{A} : H \rightarrow H'$ y $\mathbf{A}_n : H_n \rightarrow H'_n$ son los operadores lineales y acotados inducidos por A y A_n , respectivamente, e $\mathbf{i}_n : H_n \rightarrow H$ es la inyección canónica, esto es $\mathbf{i}_n(v_n) = v_n \quad \forall v_n \in H_n$.

4.20 ([11]) Sean Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno: $-\Delta u = f$ en Ω , $u = 0$ en $\partial\Omega$. Se puede demostrar que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx + \int_{\Omega} u \, \text{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx - \int_{\Omega} v \, \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (18)$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω representa una incógnita adicional. Además, a partir de esta relación, y dado $\delta \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$\delta \int_{\Omega} (\nabla u - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla v + \boldsymbol{\tau}) \, dx = 0 \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad (19)$$

y también

$$\int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \, \text{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx = - \int_{\Omega} f \, \text{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega). \quad (20)$$

De este modo, sumando (18), (19) y (20), se obtiene una formulación variacional mixta modificada, la cual tiene la forma: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) = F(\boldsymbol{\tau}, v) \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H}, \quad (21)$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal y $F : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal. Demuestre que, eligiendo δ convenientemente, el problema (21) tiene una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H} := H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

4.21 Sean V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada, simétrica y débilmente coerciva, y $A : V \rightarrow V'$ el operador lineal y acotado inducido por a . Dado $f \in V'$ y U un subconjunto de V no vacío convexo y cerrado, es sabido (por TEOREMA DE STAMPACCHIA) que existe un único $u \in U$ tal que

$$a(u, v - u) \geq f(v - u) \quad \forall v \in U.$$

Ahora, sean V_h un subespacio de V de dimensión finita, U_h un subconjunto de V_h no vacío convexo y cerrado, y denote por $u_h \in U_h$ a la única solución del problema discreto:

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq f(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in U_h.$$

Además, sea H un Hilbert tal que $V \subseteq H$, y la inyección canónica $i : V \rightarrow H$ es continua y densa. Demuestre que si $Au - f \in H$, entonces existe una constante C independiente de V_h y U_h , tal que

$$\|u - u_h\|_V \leq C \left\{ \inf_{v_h \in U_h} \left(\|u - v_h\|_V^2 + \|Au - f\|_H \|u - v_h\|_H \right) + \|Au - f\|_H \inf_{v \in U} \|u_h - v\|_H \right\}^{1/2}.$$

4.22 ([3]) Sean H_1, H_2, Q_1, Q_2 espacios de Hilbert sobre \mathbb{R} , y sean $a : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $b_j : H_j \times Q_j \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2\}$, formas bilineales acotadas con operadores inducidos $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ y $\mathbf{B}_j \in \mathcal{L}(H_j, Q_j)$, $j \in \{1, 2\}$, respectivamente. También, sea K_j el espacio nulo de \mathbf{B}_j , $j \in \{1, 2\}$, y sea Π_2 el proyector ortogonal de H_2 en K_2 . Suponga que:

i) $\Pi_2 \mathbf{A} : K_1 \rightarrow K_2$ es un isomorfismo.

ii) existen $\beta_1, \beta_2 > 0$ tales que

$$\|\mathbf{B}_j^*(q)\|_{H_j} := \sup_{\substack{v \in H_j \\ v \neq 0}} \frac{b_j(v, q)}{\|v\|_{H_j}} \geq \beta_j \|q\|_{Q_j} \quad \forall q \in Q_j, \quad \forall j \in \{1, 2\}.$$

Pruebe que, dados $F \in H_2'$ y $G \in Q_1'$, existe un único $(u, p) \in H_1 \times Q_2$ tal que

$$\begin{aligned} a(u, v) + b_2(v, p) &= F(v) \quad \forall v \in H_2, \\ b_1(u, q) &= G(q) \quad \forall q \in Q_1. \end{aligned}$$

4.23 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , y sea $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen constantes $M, \beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre, utilizando el LEMA DE LAX-MILGRAM, que para todo $f \in L^2(\Omega)$ y para toda constante $\delta \in (0, \min\{2\beta, \frac{2}{nM}\})$, existe un único $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \left\{ \kappa \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{\kappa} u v - \delta \sum_{i=1}^n u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

y

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\min\{\beta - \frac{\delta}{2}, \frac{1}{M} - \frac{n\delta}{2}\}} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

4.24 ([4]) Sean X_1, M_1, X_2, M_2 y Q espacios de Hilbert reales, y defina el espacio producto $H := X_1 \times M_1 \times X_2 \times M_2$. A su vez, considere operadores $A_1 \in \mathcal{L}(X_1, X_1)$, $B_1 \in \mathcal{L}(X_1, M_1)$, $A_2 \in \mathcal{L}(X_2, X_2)$, $B_2 \in \mathcal{L}(X_2, M_2)$, y $B \in \mathcal{L}(H, Q)$, y defina los operadores matriciales $A : H \rightarrow H$ y $T : H \times Q \rightarrow H \times Q$ como:

$$A := \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & B_1^* & & \\ B_1 & 0 & & \\ \hline & & A_2 & B_2^* \\ & & B_2 & 0 \end{array} \right)$$

y

$$T := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen la biyectividad de T .
- b) Establezca un esquema de Galerkin asociado al operador T y asuma hipótesis adicionales que le permitan demostrar la estimación de Cea correspondiente.

4.25 ([2]) Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H, \| \cdot \|_H)$ un espacio de Hilbert real y $A : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada con operador inducido $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H, H)$. Suponga que existen operadores $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in \mathcal{L}(H, H)$ y constantes $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tales que

$$\langle \mathbf{S}_1^* \mathbf{A}(\tau), \tau \rangle_H \geq \alpha_1 \|\tau\|_H^2 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{A} \mathbf{S}_2(\tau), \tau \rangle_H \geq \alpha_2 \|\tau\|_H^2 \quad \forall \tau \in H.$$

- a) Pruebe que para todo $F \in H'$ existe un único $\sigma \in H$ tal que

$$A(\sigma, \tau) = F(\tau) \quad \forall \tau \in H,$$

y deduzca la existencia de $C > 0$, independiente de F , tal que

$$\|\sigma\|_H \leq C \|F\|_{H'}.$$

- b) Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de H tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(\tau, H_h) = 0 \quad \forall \tau \in H$, y, dado $F \in H'$, considere el esquema de Galerkin: Hallar $\sigma_h \in H_h$ tal que

$$A(\sigma_h, \tau_h) = F(\tau_h) \quad \forall \tau_h \in H_h. \quad (22)$$

Suponga que para $i = 1$ o para $i = 2$ (pero no para ambos), existen operadores inyectivos $\mathbf{S}_{i,h} \in \mathcal{L}(H_h, H_h)$ para todo $h > 0$, y constantes $C_i, \delta > 0$, independientes de h , tales que

$$\|\mathbf{S}_i(\tau_h) - \mathbf{S}_{i,h}(\tau_h)\|_H \leq C_i h^\delta \|\mathbf{S}_i(\tau_h)\|_H \quad \forall \tau_h \in H_h.$$

Demuestre que existe $h_0 > 0$ tal que para todo $h \leq h_0$ el problema (22) tiene solución única, es estable, y se verifica la estimación de Cea.

- c) Qué puede decir sobre las hipótesis para a) y b) si A es simétrica ?

4.26 ([12], [15], [16], [17]) Sean $(X_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{X_1})$, $(X_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{X_2})$, e $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert, defina el producto $X := X_1 \times X_2$, y considere operadores lineales y acotados $\mathbf{P} : X \rightarrow X$, $\mathbf{Q} : X \rightarrow Y$, $A : X_1 \rightarrow X_1$, $B : X_1 \rightarrow X_2$, y $C : X_2 \rightarrow X_2$, tales que:

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & -C \end{pmatrix}.$$

Sea $V := V_1 \times V_2$ el kernel de \mathbf{Q} , donde $V_1 \subseteq X_1$ y $V_2 \subseteq X_2$, y suponga que:

- i) existe $\alpha > 0$ tal que $\langle A(x_1), x_1 \rangle_{X_1} \geq \alpha \|x_1\|_{X_1}^2 \quad \forall x_1 \in V_1$.

ii) existe $\beta > 0$ tal que $\sup_{x_1 \in V_1 \setminus \mathbf{0}} \frac{\langle B(x_1), x_2 \rangle_{X_2}}{\|x_1\|_{X_1}} \geq \beta \|x_2\|_{X_2} \quad \forall x_2 \in V_2.$

iii) $\langle C(x_2), x_2 \rangle_{X_2} \geq 0 \quad \forall x_2 \in V_2.$

iv) existe $\tilde{\beta} > 0$ tal que $\|\mathbf{Q}^*(y)\|_X \geq \tilde{\beta} \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$

a) Pruebe que para todo $(f, g) \in X \times Y$ existe un único $(x, y) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x) + \mathbf{Q}^*(y) &= f, \\ \mathbf{Q}(x) &= g, \end{aligned} \tag{23}$$

y encuentre explícitamente una constante $C > 0$ tal que

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} \leq C \left\{ \|f\|_X + \|g\|_Y \right\}.$$

b) Defina un esquema de Galerkin para (23) y establezca condiciones suficientes que aseguren su solubilidad única y estabilidad.

c) Demuestre la estimación de Cea para el esquema definido en b).

4.27 ([7], [31]) Dados Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera Γ de clase C^1 , $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y constantes $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$, considere el problema:

$$-\Delta u + \kappa_1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} + \kappa_2 u = f \quad \text{en } \Omega, \quad \nabla u \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{en } \Gamma, \tag{24}$$

donde \mathbf{n} es el vector normal en Γ . Deduzca la formulación primal de (24) y encuentre la mayor región factible para $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2$ que asegura elipticidad de la forma bilineal resultante. A su vez, defina el esquema de Galerkin asociado y establezca la estimación de Cea correspondiente en términos de κ_1 y κ_2 . Luego, reemplace el dato de Neumann por uno de Dirichlet homogéneo y pruebe en tal caso que la elipticidad indicada sólo depende de κ_2 .

4.28 ([27]) Dados H , Q_1 y Q_2 espacios de Hilbert reales, defina $Q := Q_1 \times Q_2$ y considere formas bilineales acotadas $b : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$, $b_1 : H \times Q_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $b_2 : H \times Q_2 \rightarrow \mathbb{R}$, con operadores inducidos denotados por \mathbf{B} , \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 , respectivamente, tales que

$$b(\boldsymbol{\tau}, (v, \psi)) = b_1(\boldsymbol{\tau}, v) + b_2(\boldsymbol{\tau}, \psi) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H, \quad \forall (v, \psi) \in Q.$$

Pruebe en primer lugar que $\mathbf{B}(\boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{B}_1(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\tau})) \in Q \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H$. Luego, introduzca los espacios nulos $V_1 := N(\mathbf{B}_1)$ y $V_2 := N(\mathbf{B}_2)$, y demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in H \\ \boldsymbol{\tau} \neq \mathbf{0}}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}, (v, \psi))}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} \geq \beta \|(v, \psi)\|_Q \quad \forall (v, \psi) \in Q.$$

b) existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in V_1 \\ \boldsymbol{\tau} \neq 0}} \frac{b_2(\boldsymbol{\tau}, \psi)}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} \geq \beta \|\psi\|_{Q_2} \quad \forall \psi \in Q_2 \quad \text{y} \quad \sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in V_2 \\ \boldsymbol{\tau} \neq 0}} \frac{b_1(\boldsymbol{\tau}, v)}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} \geq \beta \|v\|_{Q_1} \quad \forall v \in Q_1.$$

Extienda el resultado anterior al caso en que b se escribe como suma de n formas bilineales acotadas $b_i : H \times Q_i \rightarrow \mathbb{R}$, con Q_1, Q_2, \dots, Q_n espacios de Hilbert reales.

4.29 Dados X, M y Q espacios de Hilbert reales, defina $H := X \times M$ y considere operadores $A_1 \in \mathcal{L}(X, X)$, $B_1 \in \mathcal{L}(X, M)$ y $B \in \mathcal{L}(H, Q)$. A su vez, sean $A : H \rightarrow H$ y $T : H \times Q \rightarrow H \times Q$ los operadores definidos matricialmente por

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & B_1^* \\ B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen la biyectividad de T .

b) Establezca un esquema de Galerkin asociado al operador T y asuma hipótesis adicionales que le permitan demostrar la estimación de Cea correspondiente.

4.30 Dados Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera Γ de clase C^1 , $f \in L^2(\Omega)$, y constantes $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ con $\kappa_2 \neq 0$, considere el problema:

$$-\Delta u + \kappa_1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} + \kappa_2 u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (25)$$

Defina la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} = \nabla u$ en Ω y deduzca la siguiente formulación variacional mixta de (25): Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que

$$\kappa_2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_{\Omega} \text{div } \boldsymbol{\sigma} \text{ div } \boldsymbol{\tau} - \kappa_1 \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \sigma_j \text{ div } \boldsymbol{\tau} = - \int_{\Omega} f \text{ div } \boldsymbol{\tau} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega).$$

Dibuje la región $S := \left\{ (\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2 : \kappa_2 > 0 \text{ y } |\kappa_1| < 2 \min \left\{ \kappa_2, \frac{1}{n} \right\} \right\}$, y pruebe que para todo $(\kappa_1, \kappa_2) \in S$ el problema anterior tiene una única solución $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div}; \Omega)$ que depende continuamente del dato f .

4.31 Dados Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera Γ de clase C^1 , $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{K} \in [C(\bar{\Omega})]^{n \times n}$ simétrica y uniformemente definida positiva, y constantes $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$, considere el problema:

$$-\text{div}(\mathbf{K} \nabla u) + \kappa_1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} + \kappa_2 u = f \quad \text{en } \Omega, \quad \mathbf{K} \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (26)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal unitario en Γ . Deduzca la formulación primal de (26) y encuentre la mayor región factible para $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2$ que asegura, mediante el Lema de Lax-Milgram clásico, que dicha formulación tiene una única solución. A su vez, defina el esquema de Galerkin asociado y establezca la estimación de Cea en términos de \mathbf{K} , κ_1 y κ_2 .

4.32 ([9]) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y sean $\Gamma_D, \Gamma_N \subseteq \Gamma$ tales que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| > 0$ y $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Se sabe que

$$H^{1/2}(\Gamma_*) := \left\{ \gamma_0(w)|_{\Gamma_*} : w \in H^1(\Omega) \right\} \quad \forall * \in \{D, N\},$$

con $\|\varphi\|_{1/2, \Gamma_*} := \inf \left\{ \|w\|_{1, \Omega} : w \in H^1(\Omega), \gamma_0(w)|_{\Gamma_*} = \varphi \right\} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_*)$. A su vez, denotando por $E_{N,0} : H^{1/2}(\Gamma_N) \rightarrow L^2(\Gamma)$ el operador de extensión nula

$$E_{N,0}(\varphi) := \begin{cases} \varphi & \text{en } \Gamma_N \\ 0 & \text{en } \Gamma \setminus \Gamma_N \end{cases} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_N),$$

se tiene que $H_{00}^{1/2}(\Gamma_N) := \left\{ \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_N) : E_{N,0}(\varphi) \in H^{1/2}(\Gamma) \right\}$, con norma inducida $\|\varphi\|_{1/2, 00, \Gamma_N} := \|E_{N,0}(\varphi)\|_{1/2, \Gamma} \quad \forall \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_N)$.

i) Pruebe que para cada $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ existe un único $w_\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(w_\varphi)|_{\Gamma_D} = \varphi$ y $\|\varphi\|_{1/2, \Gamma_D} = \|w_\varphi\|_{1, \Omega}$.

ii) Dado $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, considere el problema de valores de contorno

$$\Delta z_\varphi = 0 \text{ en } \Omega, \quad \gamma_0(z_\varphi)|_{\Gamma_D} = \varphi \text{ en } \Gamma_D, \quad \gamma_1(z_\varphi) = 0 \text{ en } \Gamma_N,$$

y demuestre fundadamente, utilizando una adecuada fórmula de integración por partes, que $z_\varphi = \tilde{z}_\varphi + w_\varphi$, donde $\tilde{z}_\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ es tal que

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{z}_\varphi \cdot \nabla v = - \int_{\Omega} \nabla w_\varphi \cdot \nabla v \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega). \quad (27)$$

Pruebe que (27) tiene solución única y concluya que $\|z_\varphi\|_{1, \Omega} \leq c \|\varphi\|_{1/2, \Gamma_D}$.

iii) Defina el operador $E_D : H^{1/2}(\Gamma_D) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ por $E_D(\varphi) := \gamma_0(z_\varphi) \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, y pruebe que E_D es lineal y acotado.

iv) Pruebe que $H^{1/2}(\Gamma) = E_D(H^{1/2}(\Gamma_D)) \oplus E_{N,0}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_N))$. Equivalentemente, dado $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, demuestren que existen únicos $\psi_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ y $\psi_N \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_N)$ tales que $\psi = E_D(\psi_D) + E_{N,0}(\psi_N)$.

v) Deduzca a partir de iv) que, dado $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$, existen $\lambda_D \in H^{-1/2}(\Gamma_D)$ y $\lambda_N \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_N)$ tales que $\langle \lambda, \psi \rangle = \langle \lambda_D, \psi_D \rangle_{\Gamma_D} + \langle \lambda_N, \psi_N \rangle_{\Gamma_N} \quad \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Concluya que si $\lambda|_{\Gamma_N} = 0$, λ se identifica con un funcional en $H^{-1/2}(\Gamma_D)$.

4.33 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y sean $\Gamma_D, \Gamma_N \subseteq \Gamma$ tales que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| > 0$ y $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, considere el problema de valores de contorno

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad \gamma_0(u)|_{\Gamma_D} = g \text{ en } \Gamma_D, \quad \gamma_1(u) = 0 \text{ en } \Gamma_N. \quad (28)$$

- i) Utilice lo que sea necesario del Ejercicio 4.32 para probar que una formulación primal-mixta de (28) se reduce a: Hallar $(u, \lambda) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= F(v) \quad \forall v \in H, \\ b(u, \xi) &= G(\xi) \quad \forall \xi \in Q, \end{aligned} \tag{29}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := H^{-1/2}(\Gamma_D)$, $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ son las formas bilineales dadas por

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{y} \quad b(v, \xi) := \langle \xi, \gamma_0(v) \rangle_{\Gamma_D} \quad \forall u, v \in H, \quad \forall \xi \in Q,$$

y los funcionales $F \in H'$ y $G \in Q'$ dependen de f y g , respectivamente.

- ii) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que existe una única solución de (29), la cual depende continuamente de los datos f y g .
- iii) Sea H_h un subespacio arbitrario de dimensión finita de H y, dada una partición $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de Γ_D , defina

$$Q_h := \left\{ \xi_h \in L^2(\Gamma_D) : \xi_h|_{e_j} \in P_0(e_j) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

Considere el sistema de Galerkin asociado a (29), suponga que b satisface la condición inf-sup discreta con una constante $\beta > 0$ independiente de las dimensiones de H_h y Q_h , y pruebe que dicho esquema discreto posee una única solución $(u_h, \lambda_h) \in H_h \times Q_h$. Establezca además la estimación de Cea y comente si acaso el error $\|u - u_h\|_{1, \Omega}$ depende o no de $\text{dist}(\lambda, Q_h)$.

4.34 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^N con frontera suave Γ , y sean

$$H = \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega) := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{N \times N} : \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^N \right\} \quad \text{y} \quad Q := [L^2(\Omega)]^N,$$

los espacios de Hilbert con productos interiores y normas inducidas denotadas, respectivamente, por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{div}, \Omega}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{0, \Omega}$, $\| \cdot \|_{\mathbf{div}, \Omega}$ y $\| \cdot \|_{0, \Omega}$. Considere el operador $P : H \rightarrow H$ que a cada $\boldsymbol{\sigma} \in H$ le asigna $P(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}$, donde $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{u}}) \in H \times Q$ es solución del problema

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\tau} + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} &= 0 & \forall \boldsymbol{\tau} \in H, \\ \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} & \forall \mathbf{v} \in Q. \end{aligned} \tag{30}$$

- a) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que P está bien definido y que $P \in \mathcal{L}(X)$.
- b) Defina el subespacio cerrado de H dado por

$$V := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in H : \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Omega \right\},$$

y pruebe que $V = N(P)$, $P^2 = P$, y $H = V \oplus R(P)$.

- c) Deduzca a partir de b) que $V^\perp = R(P)$ (ortogonalidad en H), y muestre que existe una constante $C \geq 1$ tal que

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\text{div},\Omega} \leq C \|\mathbf{div} \boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in V^\perp,$$

concluyendo así que $\|\cdot\|_{\text{div},\Omega}$ y $\|\mathbf{div} \cdot\|_{0,\Omega}$ son equivalentes en V^\perp .

4.35 ([22]) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ tal que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ and $|\Gamma_D| > 0$, y sea $\boldsymbol{\nu}$ el vector normal a Γ . Dados $\mathbf{f} \in [C(\bar{\Omega})]^n$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, el problema de Darcy con presión dependiente de la porosidad consiste en encontrar la velocidad \mathbf{u} y la presión p de un fluido, tales que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= p\mathbf{f} + \nabla p \quad \text{en } \Omega, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ p &= g \quad \text{en } \Gamma_D, \quad \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en } \Gamma_N. \end{aligned} \quad (31)$$

- a) Demuestre que la formulación variacional mixta de (31) se reduce a: Hallar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, g \rangle_D + \int_{\Omega} p\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in H, \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q, \end{aligned} \quad (32)$$

donde $H := \left\{ \mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega) : \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en } \Gamma_N \right\}$, $Q := L^2(\Omega)$, $\mathbf{a} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{b} : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ son las formas bilineales dadas por

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}(\mathbf{v}, q) := \int_{\Omega} q \text{div } \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H, \quad \forall q \in Q,$$

y $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma_D)$ y $H^{1/2}(\Gamma_D)$.

- b) Demuestre que (32) puede re-escribirse, equivalentemente, como una ecuación de punto fijo de la forma $(\mathbf{u}, p) = T(\mathbf{u}, p)$, donde, gracias a la Teoría de Babuška-Brezzi, $T : H \times Q \rightarrow H \times Q$ es un operador no-lineal bien definido. De hecho, utilice el principio de superposición para darse cuenta que en realidad T es una aplicación afín. Luego, aplique el Teorema del Punto Fijo de Banach para concluir que si $\|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega} := \sup_{x \in \Omega} \|\mathbf{f}(x)\|$ es suficientemente pequeño, entonces el problema (32) tiene una única solución. Pruebe en tal caso que existe $C > 0$, dependiente de $\|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega}$, tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{\text{div},\Omega} + \|p\|_{0,\Omega} \leq C \|g\|_{1/2,\Gamma_D}.$$

4.36 ([1], [8]) Sea Ω un abierto suave de \mathbb{R}^n con frontera Γ , y denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{div};\Omega}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega}$ los productos escalares usuales de $H(\text{div}; \Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente. Entonces, dados $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$, y constantes $a, b \in \mathbb{R}$, considere el problema variacional: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u, \phi) \in H(\text{div}; \Omega) \times H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\text{div},\Omega} + \langle u, v \rangle_{1,\Omega} - a \int_{\Omega} \phi v &= \int_{\Omega} f \text{div } \boldsymbol{\tau}, \\ \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi - b \int_{\Omega} \phi \psi - b \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi &= \int_{\Gamma} g \psi, \end{aligned} \quad (33)$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v, \psi) \in H(\text{div}; \Omega) \times H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

a) Introduzca operadores $S := (S_1, S_2) : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H(\text{div}; \Omega) \times H^1(\Omega)$ y $\tilde{S} : H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$, bien definidos, tales que (33) se reduzca equivalentemente a la ecuación de punto fijo: Hallar $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $T(\phi) = \phi$, donde $T(\phi) := \tilde{S}(\phi, S_2(\phi)) \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$.

b) Demuestre que existen constantes $C(a), C(b) \geq 0$ tales que

$$\|S_1(\phi) - S_1(\varphi)\|_{\text{div}; \Omega} + \|S_2(\phi) - S_2(\varphi)\|_{1, \Omega} \leq C(a) \|\phi - \varphi\|_{0, \Omega},$$

$$\|\tilde{S}(\phi, u) - \tilde{S}(\varphi, w)\|_{1, \Omega} \leq C(b) \left\{ \|\phi - \varphi\|_{0, \Omega} + \|u - w\|_{1, \Omega} \right\},$$

para todo $\phi, \varphi \in H_0^1(\Omega)$, $u, w \in H^1(\Omega)$.

c) Deduzca a partir de a) y b) que existe una constante $C(a, b) \geq 0$ tal que

$$\|T(\phi) - T(\varphi)\|_{1, \Omega} \leq C(a, b) \|\phi - \varphi\|_{0, \Omega} \quad \forall \phi, \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

pruebe luego que T es compacto, y concluya finalmente que para a y b suficientemente pequeños, el problema original (33) posee una única solución.

4.37 Utilice una fórmula de integración por partes adecuada, y luego aplique el análisis sobre alternativa de Fredholm y método de Galerkin para estudiar la solubilidad discreta del problema de valores de contorno:

$$\Delta u + k u = f \quad \text{en } \Omega :=]0, 1[^2, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{en } \Gamma := \partial \Omega,$$

donde $k \in [-1, +\infty[$, $f \in L^2(\Omega)$, ν es el vector normal en Γ , y $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

4.38 ([1], [8]) Sea Ω un abierto suave de \mathbb{R}^n con frontera Γ , y denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{div}; \Omega}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1, \Omega}$ los productos escalares usuales de $H(\text{div}; \Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente. A su vez, sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ con $H^{1/2}(\Gamma)$. Entonces, dados $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y constantes $a, b \in \mathbb{R}$, considere el problema variacional: Hallar $(\sigma, u, \phi) \in H(\text{div}; \Omega) \times H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\text{div}; \Omega} + \langle u, v \rangle_{1, \Omega} - a \int_{\Omega} \phi v = \int_{\Omega} f \text{div } \tau,$$

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi - b \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left\{ \phi - u + \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \langle g, \psi \rangle_{\Gamma},$$
(34)

para todo $(\tau, v, \psi) \in H(\text{div}; \Omega) \times H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

i) Introduzca operadores $S := (S_1, S_2) : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H(\text{div}; \Omega) \times H^1(\Omega)$ y $\tilde{S} : H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$, bien definidos, tales que (34) se reduzca equivalentemente a la ecuación de punto fijo: Hallar $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $T(\phi) = \phi$, donde $T(\phi) := \tilde{S}(\phi, S_2(\phi)) \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$.

ii) Demuestre que existen constantes $C(a), C(b) \geq 0$ tales que

$$\|S_1(\phi) - S_1(\varphi)\|_{\text{div}; \Omega} + \|S_2(\phi) - S_2(\varphi)\|_{1, \Omega} \leq C(a) \|\phi - \varphi\|_{0, \Omega},$$

$$\|\tilde{S}(\phi, u) - \tilde{S}(\varphi, w)\|_{1, \Omega} \leq C(b) \left\{ \|\phi - \varphi\|_{0, \Omega} + \|u - w\|_{1, \Omega} \right\},$$

para todo $\phi, \varphi \in H_0^1(\Omega)$, $u, w \in H^1(\Omega)$.

iii) Deduzca a partir de i) y ii) que existe una constante $C(a, b) \geq 0$ tal que

$$\|T(\phi) - T(\varphi)\|_{1,\Omega} \leq C(a, b) \|\phi - \varphi\|_{0,\Omega} \quad \forall \phi, \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

pruebe luego que T es compacto, y concluya finalmente que para a y b suficientemente pequeños, el problema original (33) posee una única solución.

4.39 Utilice una fórmula de integración por partes adecuada, y luego aplique el análisis sobre alternativa de Fredholm y método de Galerkin para estudiar la solubilidad discreta del problema de valores de contorno:

$$\Delta u + k u = f \quad \text{en } \Omega :=]0, 1[^2, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + u = g \quad \text{en } \Gamma := \partial\Omega,$$

donde $k \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$, ν es el vector normal en Γ , y $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

4.40 ([6]) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera suave Γ , y sean

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Gamma \right\}, \quad \mathbf{H}_0^1(\Omega) := [\mathbf{H}_0^1(\Omega)]^n, \quad \mathbf{L}^2(\Omega) := [L^2(\Omega)]^n,$$

$$\mathbb{L}^2(\Omega) := [L^2(\Omega)]^{n \times n}, \quad \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega) := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\},$$

cuyas normas respectivas son $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ y $\|\cdot\|_{\mathbf{div};\Omega}$. Entonces, dados $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y parámetros κ_1 y κ_2 a ser elegidos convenientemente, una formulación mixta simplificada del problema de Navier-Stokes consiste en: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in \mathbf{H} := \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) + B(\mathbf{w}; (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) = F(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbf{H}, \quad (35)$$

donde A , B , y F están definidos por

$$\begin{aligned} A((\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) &:= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} + \kappa_1 \int_{\Omega} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \kappa_2 \int_{\Omega} \{ \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} \} : \nabla \mathbf{v}, \end{aligned}$$

$$B(\mathbf{w}; (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) := \int_{\Omega} (\mathbf{w} \otimes \mathbf{u}) : \{ \boldsymbol{\tau} - \kappa_2 \nabla \mathbf{v} \},$$

$$F(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := -\kappa_1 \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

para todo $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbf{H}$. Notar aquí que, dados vectores \mathbf{w} , \mathbf{u} y tensores $\boldsymbol{\zeta}$,

$\boldsymbol{\tau}$, se definen $\mathbf{w} \otimes \mathbf{u} := (w_i u_j)_{i,j=1}^n$ y $\boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\tau} := \sum_{i,j=1}^n \zeta_{ij} \tau_{ij}$.

a) Demuestre que para $\kappa_1 > 0$ y $\kappa_2 \in (0, 2)$, la forma bilineal A es elíptica en \mathbf{H} con una constante α dependiente de ambos parámetros.

b) Aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la inyección continua de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ en $\mathbf{L}^4(\Omega) := [L^4(\Omega)]^n$ para deducir la existencia de $c(\Omega, \kappa_2) > 0$ tal que

$$|B(\mathbf{w}; (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}))| \leq c(\Omega, \kappa_2) \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\|_{\mathbf{H}}.$$

- c) Pruebe que existe $r > 0$ tal que para cada $\mathbf{w} \in \mathbf{V}(r) := \left\{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \leq r \right\}$, existe un único $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) + B(\mathbf{w}; (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) = F(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbf{H}. \quad (36)$$

En tal caso defina el operador $\mathbf{S} : \mathbf{V}(r) \rightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ por $\mathbf{S}(\mathbf{w}) := \mathbf{u}$, y deduzca la dependencia continua de (36) (según el Lema de Lax-Milgram).

- d) Observe que (35) puede reformularse equivalentemente como la ecuación de punto fijo: Hallar $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(r)$ tal que $\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, y luego aplique la elipticidad de la forma bilineal $A(\cdot, \cdot) + B(\mathbf{w}; \cdot, \cdot)$ y el Teorema de Banach, para concluir que, bajo adecuadas hipótesis sobre \mathbf{f} , el problema (35) tiene una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in \mathbf{H}$ con $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(r)$.

4.41 ([13], [14]) Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ y $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q)$ espacios de Hilbert tales que $H \subseteq Q$, y suponga que existe $A \in \mathcal{L}(H, Q)$ such that

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle_H = \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle_Q + \langle A(\boldsymbol{\zeta}), A(\boldsymbol{\tau}) \rangle_Q \quad \forall \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \in H.$$

A su vez, dados $\boldsymbol{\sigma} \in H$ y $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de subespacios de dimensión finita de H , considere para cada $n \in \mathbb{N}$ una aproximación $\boldsymbol{\sigma}_n \in H_n$ de $\boldsymbol{\sigma}$ tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_n\|_Q < +\infty$. Luego, asuma que $A(\boldsymbol{\sigma})$ es conocido explícitamente, y defina una **aproximación postprocesada** de $\boldsymbol{\sigma}$ como el único elemento $\boldsymbol{\sigma}_n^* \in H_n$ (si es que existe) tal que

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_n^*, \boldsymbol{\tau}_n \rangle_H = \langle \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\tau}_n \rangle_Q + \langle A(\boldsymbol{\sigma}), A(\boldsymbol{\tau}_n) \rangle_Q \quad \forall \boldsymbol{\tau}_n \in H_n.$$

Pruebe que $\boldsymbol{\sigma}_n^*$ está efectivamente bien definido y concluya que

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_n^*\|_H \leq \|\boldsymbol{\sigma} - \Pi_n(\boldsymbol{\sigma})\|_H + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_n\|_Q,$$

donde $\Pi_n : H \rightarrow H_n$ es el proyector ortogonal.

5. OPERADORES COMPACTOS

5.1 Sea X el espacio vectorial de las funciones continuas sobre $\bar{\Omega} := [0, 1]$ provisto de la norma uniforme. Dados $u_1, u_2, y \in X$, considere la ecuación integral: Hallar $u \in X$ tal que

$$u(t) - \int_0^1 u_1(t) s^2 u(s) ds - \int_0^1 u_2(t) \left(1 - \frac{3}{2}s\right) u(s) ds = y(t) \quad \forall t \in \bar{\Omega}. \quad (37)$$

- i) Si $u_1(t) = 4t$ y $u_2(t) = 1 \forall t \in \Omega$, deduzca una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (37) tenga al menos una solución.
- ii) Pruebe que si $u_1(t) = t$ y $u_2(t) = 1$, entonces para cada $y \in X$ la ecuación integral (37) tiene una única solución.

5.2 Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados.

- i) Pruebe que si $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ es de rango finito, entonces K es compacto.
- ii) Demuestre que si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $K \in \mathcal{L}(Y, Z)$, entonces KA también es compacto.

5.3 Sea X un espacio vectorial normado de dimensión INFINITA y sea $K \in K(X, X)$ un operador inyectivo. Demuestre que $K^{-1} \notin \mathcal{L}(X, X)$.

5.4 Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Suponga que existen sucesiones $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X'$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$, $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|F_n\|_{X'} < +\infty, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\|_Y < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty,$$

y además

$$Ax = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \lambda_n F_n(x) y_n \quad \forall x \in X.$$

Demuestre que A es compacto.

5.5 Sea $p > 1$ y considere el operador $K : l_p \rightarrow l_p$ definido por

$$K(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_k}{k}, \dots) \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_p.$$

Demuestre que K es compacto.

5.6 ([19]) Sean H y V dos espacios de Hilbert tales que $H \subseteq V$ y la inyección $i : H \rightarrow V$ es compacta.

- a) Se dice que una forma bilineal acotada A definida sobre $H \times H$ satisface la DESIGUALDAD DE GÅRDING si existen $\alpha > 0$ y una forma bilineal acotada $K : H \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$A(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 - K(v, v) \quad \forall v \in H.$$

Dado $F \in H'$, considere el siguiente problema variacional: Hallar $u \in H$ tal que

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H. \quad (38)$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Gårding, entonces (38) tiene solución para cada $F \in H'$ SI Y SÓLO SI $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

- b) Se dice que A satisface la DESIGUALDAD DE GÅRDING GENERALIZADA si existen $\alpha > 0$, una forma bilineal acotada $K : H \times V \rightarrow \mathbb{R}$, y un isomorfismo $S : H \rightarrow H$ tales que

$$A(v, Sv) \geq \alpha \|v\|_H^2 - K(v, Sv) \quad \forall v \in H.$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding generalizada, entonces (38) tiene solución para cada $F \in H'$ SI Y SÓLO SI $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

5.7 Sea $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y defina el operador integral $\mathbf{K} : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ por

$$\mathbf{K}(u)(t) := \int_0^1 K(t, s) u(s) ds \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall u \in C[0, 1].$$

Aplice el Teorema de Arzelá - Ascoli para probar que \mathbf{K} es compacto.

5.8 ([20], [21]) Sea Ω un dominio poligonal convexo de \mathbb{R}^2 con frontera Γ , y dado $f \in L^2(\Omega)$, considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:

$$\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (39)$$

i) Introduzca la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω y pruebe que una formulación variacional mixta de (39) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} - \int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \text{div}(\boldsymbol{\tau}) = - \int_{\Omega} f \text{div}(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega). \quad (40)$$

ii) Defina el operador $P : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$ que a cada $\boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega)$ le asigna $P(\boldsymbol{\tau}) := \nabla z$, donde $z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ es la única solución del problema:

$$\Delta z = \text{div}(\boldsymbol{\tau}) \quad \text{en } \Omega, \quad z = 0 \quad \text{en } \Gamma.$$

Pruebe que P es un proyector compacto, y concluya que (cf. Ejercicio 3.21)

$$H(\text{div}; \Omega) = P(H(\text{div}; \Omega)) \oplus (I - P)(H(\text{div}; \Omega)).$$

iii) Utilice la descomposición anterior de $H(\text{div}; \Omega)$ para demostrar que (40) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + K(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = F(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega),$$

donde

$$A(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := - \int_{\Omega} P(\boldsymbol{\sigma}) \cdot P(\boldsymbol{\tau}) - \int_{\Omega} \text{div} P(\boldsymbol{\sigma}) \text{div} P(\boldsymbol{\tau}) + \int_{\Omega} (I - P)(\boldsymbol{\sigma}) \cdot (I - P)(\boldsymbol{\tau}),$$

$$K(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := 2 \int_{\Omega} P(\boldsymbol{\sigma}) \cdot P(\boldsymbol{\tau}) + \int_{\Omega} P(\boldsymbol{\sigma}) \cdot (I - P)(\boldsymbol{\tau}) + \int_{\Omega} (I - P)(\boldsymbol{\sigma}) \cdot P(\boldsymbol{\tau}),$$

y F es el funcional definido por el lado derecho de (40).

iv) Sean $\mathbf{A} : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow H(\text{div}; \Omega)$ y $\mathbb{K} : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow H(\text{div}; \Omega)$ los operadores lineales y acotados asociados a las formas bilineales A y K , respectivamente. Demuestre que \mathbf{A} es biyectivo y que \mathbb{K} es compacto.

IND. Defina el operador $S(\boldsymbol{\tau}) := (I - 2P)(\boldsymbol{\tau})$ y considere la expresión $A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau}))$ para probar que A satisface la condición inf-sup continua.

5.9

a) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que K transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones convergentes de Y . Pruebe que K es compacto.

b) Sea X un espacio de Hilbert y sean $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, $x \in X$, tales que $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Pruebe que $x_n \rightarrow x$.

c) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operador compacto. Aplique a) y b) para probar que $K^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ también es compacto.

5.10 ([18]) Sea X un espacio de Banach y $T : X \rightarrow X'$ un operador NOLINEAL. Se dice que T satisface la propiedad (S) si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tal que

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad y \quad (T(x_n))(x_n - x) - (T(x))(x_n - x) \longrightarrow 0,$$

se tiene $x_n \rightarrow x$. Ahora, sean H, Q, V espacios de Banach tales que $H \subseteq V$ y $i : H \rightarrow V$ es compacta. Sea $X := H \times Q$, y considere una forma bilineal acotada $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ y un operador no lineal $A : H \rightarrow H'$ que satisfacen las siguientes propiedades

i) existe $C_0 > 0$ tal que

$$B((u, \lambda), (u, \lambda)) \geq C_0 \|\lambda\|_Q^2 \quad \forall (u, \lambda) \in X.$$

ii) existen $C_1, C_2 > 0$ tal que para todo $u, v \in H$

$$(A(u))(u - v) - (A(v))(u - v) \geq C_1 \|u - v\|_H^2 + R(u, v),$$

donde

$$|R(u, v)| \leq C_2 \{1 + \|u\|_H + \|v\|_H\} \|u - v\|_V.$$

Demuestre que el operador no lineal $T : X \rightarrow X'$ definido por

$$(T(u, \lambda))(v, \mu) := (A(u))(v) + B((u, \lambda), (v, \mu)),$$

satisface la propiedad (S).

5.11 Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n . Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-1}(\Omega)$ también es compacta, para todo entero $m \geq 2$.

5.12 ([30], [31]) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall x := (x_1, \dots, x_n)^t \in \Omega$.

a) [DESIGUALDAD DE POINCARÉ GENERALIZADA]. Defina la aplicación

$$\|v\| := \left\{ |v|_{H^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^n |\langle v, p_i \rangle_{H^2(\Omega)}|^2 \right\}^{1/2} \quad \forall v \in H^2(\Omega),$$

y demuestre que existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \|v\| \leq \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C_2 \|v\| \quad \forall v \in H^2(\Omega).$$

IND.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $v_n \in H^2(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} > n \|v_n\|$. Luego, defina $w_n := \frac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}}$, observe que $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$, note que $\|w_n\| < \frac{1}{n}$, y aplique el hecho que la inclusión de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ es compacta.

b) [LEMA DE DENY-LIONS]. Considere el espacio cociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma

$$\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \inf_{p \in P_1(\Omega)} \|v - p\|_{H^2(\Omega)},$$

y defina

$$\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega).$$

Demuestre que $|\cdot|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} &\leq \|v\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \\ &\leq C \|v\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \quad \forall [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega). \end{aligned}$$

IND.: Note que para todo $p \in P_1(\Omega)$ y para todo α con $|\alpha| = 2$ se tiene $\partial^\alpha p = 0$. Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.

c) [LEMA DE BRAMBLE-HILBERT]. Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p \quad \forall p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq C |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega).$$

IND.: Note que $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v - p) \quad \forall p \in P_1(\Omega)$, y luego aplique el Lema de Deny-Lions.

5.13 Aplique el análisis sobre alternativa de Fredholm y método de Galerkin para estudiar la solubilidad discreta del problema de valores de contorno:

$$u'' + k u = f \quad \text{en } \Omega :=]0, 1[, \quad u'(0) = a, \quad u'(1) = b,$$

con $f \in L^2(\Omega)$, $k \in \mathbb{R}^+$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

5.14 Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert real y $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada cuyo operador inducido $A \in \mathcal{L}(H)$ es biyectivo. Dados un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_N\} \subseteq H$ y $F \in H'$, considere la formulación variacional: Hallar $u \in H$ tal que

$$a(u, v) - \sum_{j=1}^N \langle u, u_j \rangle \langle v, u_j \rangle = F(v) \quad \forall v \in H. \quad (41)$$

Deduzca una condición necesaria y suficiente sobre $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ que garantice que para cada $F \in H'$ el problema (41) tiene una única solución.

5.15 Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert real, y sean $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas tales que a es H -elíptica y b es simétrica. Dados un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_N\} \subseteq H$ y $F \in H'$, considere la formulación variacional: Hallar $u \in H$ tal que

$$a(u, v) + \sum_{j=1}^N a(u, u_j) b(v, u_j) = F(v) \quad \forall v \in H. \quad (42)$$

Deduzca una condición necesaria y suficiente sobre $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ que garantice que para cada $F \in H'$ el problema (42) tiene una única solución. En particular, qué ocurre si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $b(u_i, u_j) = c \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$? Por otro lado, qué podría concluir si $a = b$?

6. REFLEXIVIDAD Y SEPARABILIDAD

6.1 Dado un espacio vectorial normado X , demuestre que existen un espacio vectorial normado \tilde{X} y un espacio de Banach Y , tales que X es isomorfo a \tilde{X} , $\tilde{X} \subseteq Y$, $\|x\|_Y = \|x\|_{\tilde{X}} \quad \forall x \in \tilde{X}$, y \tilde{X} es denso en Y .

6.2

- a) Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ biyectivo. Demuestre que X es reflexivo (separable) si y sólo si Y es reflexivo (separable).
- b) Sean X, Y espacios de Banach separables (reflexivos). Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también es separable (reflexivo).
- c) Dado un abierto Ω de \mathbb{R}^N y $p \in \mathbb{R}$, $2 \leq p < \infty$, se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ medible y } \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_{\Omega} |f|^p dx \right\}^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Puede probarse que $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ es un espacio de Banach separable. Por otra parte, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está dado por

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \text{ existe } g_i \in L^p(\Omega), i = \overline{1, N} \text{ tal que} \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}$$

En tal caso se escribe $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, y se define la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Puede probarse que $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ también es Banach. Demuestre que el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es separable.

6.3 Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se dice que T es DÉBILMENTE COMPACTO si para toda sucesión acotada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de X existe una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{Tx_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente en Y . Pruebe que si X o Y es reflexivo, entonces todo operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es débilmente compacto.

6.4 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $-\infty < a < b < +\infty$. Asuma que $C[a, b]$ es separable, y demuestre que para todo entero no negativo k , $C^k[a, b]$ también es separable.

6.5 Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador compacto. Demuestre que $\mathcal{R}(T)$ es separable.

IND.: Escriba $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \|x\| \leq n\}$, y luego use que todo subconjunto relativamente compacto de un espacio métrico es separable.

6.6 Un importante resultado establece que todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo. En lo que sigue suponga que Ω es un abierto de \mathbb{R}^n y que $p \in \mathbb{R}$ es tal que $p \geq 2$.

- a) A partir del hecho que $\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2} \forall \alpha, \beta \geq 0$, demuestre la desigualdad de Clarkson:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2} \left\{ \|f\|_{L^p(\Omega)}^p + \|g\|_{L^p(\Omega)}^p \right\} \quad \forall f, g \in L^p(\Omega).$$

- b) Utilice la desigualdad anterior para probar que $L^p(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$, es uniformemente convexo y por lo tanto reflexivo. Además, deduzca que $W^{1,p}(\Omega)$ también es reflexivo.

6.7 Dado $p \geq 1$, considere el espacio vectorial normado

$$\ell_p(\mathbb{C}) := \left\{ \mathbf{x} := \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty \right\},$$

provisto de la suma y multiplicación por escalar usuales, y cuya norma está dada por $\|\mathbf{x}\| := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right\}^{1/p}$. Demuestre que $\ell_p(\mathbb{C})$ es separable.

6.8 Dado un abierto Ω de \mathbb{R}^n , considere el espacio de Hilbert $(H(\text{div}; \Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde

$$H(\text{div}; \Omega) := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^n : \text{div } \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega) \right\},$$

y

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \int_{\Omega} \left\{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \text{div } \boldsymbol{\sigma} \text{ div } \boldsymbol{\tau} \right\} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega).$$

Asuma que $L^2(\Omega)$ es separable y demuestre que $H(\text{div}; \Omega)$ también lo es.

6.9 Dados X e Y espacios de Banach reales y $\mathcal{A} : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada, defina los operadores $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(X, Y')$ y $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(Y, X')$ por

$$\mathbf{A}(x)(y) := \mathcal{A}(x, y) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(y)(x) := \mathcal{A}(x, y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

- a) Defina explícitamente los operadores adjuntos \mathbf{A}' y \mathbf{B}' , y demuestre que $\mathbf{B} = \mathbf{A}' \circ J_Y$ y $\mathbf{A} = \mathbf{B}' \circ J_X$, donde $J_Y : Y \rightarrow Y''$ y $J_X : X \rightarrow X''$ son las inyecciones respectivas.
- b) Demuestre que considerando cualquiera de los pares de hipótesis i)-ii) o iii)-iv) dados a continuación, y asumiendo que Y es reflexivo, se tiene que \mathbf{A} , \mathbf{A}' y \mathbf{B} son biyectivos.

i) existe $\alpha > 0$ tal que $\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{A}(x, y)}{\|x\|} \geq \alpha \|y\| \quad \forall y \in Y,$

ii) $\sup_{y \in Y} \mathcal{A}(x, y) > 0 \quad \forall x \in X, x \neq \mathbf{0},$

iii) existe $\alpha > 0$ tal que $\sup_{\substack{y \in Y \\ y \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{A}(x, y)}{\|y\|} \geq \alpha \|x\| \quad \forall x \in X,$

iv) $\sup_{x \in X} \mathcal{A}(x, y) > 0 \quad \forall y \in Y, y \neq \mathbf{0},$

- c) Demuestre que considerando cualquiera de los pares de hipótesis i)-ii) o iii)-iv) dados en b), y asumiendo que X es reflexivo, se tiene que \mathbf{B} , \mathbf{B}' y \mathbf{A} son biyectivos.

6.10 Sea M un subespacio cerrado propio de un Banach reflexivo X y sea $x_0 \in X - M$. Aplique la segunda forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach para probar que existe $F \in M^\circ$ tal que $\|F\| = 1$ y $|F(x_0)| \leq \text{dist}(x_0, M)$.

6.11 Pruebe que si X e Y son Banach y $A : X \rightarrow (Y, \sigma(Y, Y'))$ es lineal y continuo, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

6.12 Dados X un espacio de Banach, $G \in X'$, $\delta > 0$ y un conjunto finito $\mathcal{S} \subseteq X$, se define

$$V(G, \delta; \mathcal{S}) := \left\{ F \in X' : |(F - G)(x)| < \delta \quad \forall x \in \mathcal{S} \right\}.$$

Demuestre que todos los conjuntos $V(G, \delta; \mathcal{S})$, con δ y \mathcal{S} variables, constituyen una base de vecindades de $\{G\}$ para la topología débil* $\sigma(X', X)$. A su vez, describa una base de vecindades de $\{G\}$ para la topología débil $\sigma(X', X'')$.

6.13 Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de X' . Entonces se tienen las siguientes implicaciones:

i) $f_n \xrightarrow{\omega^*} f \Leftrightarrow J(x)(f_n) = f_n(x) \rightarrow J(x)(f) = f(x) \quad \forall x \in X$.

ii) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\omega^*} f$.

iii) $f_n \xrightarrow{\omega} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\omega^*} f$.

iv) $\left\{ f_n \xrightarrow{\omega^*} f \quad \text{y} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \right\} \Rightarrow f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.

6.14 Probar que si Z es un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado X , entonces

$$\sigma(Z, Z') = \sigma(X, X')|_Z := \left\{ A \cap Z : A \in \sigma(X, X') \right\}.$$

6.15 Sea X un Banach tal que X' es separable. Entonces $\bar{B}_X(\mathbf{0}, 1)$ es metrizable con respecto a $\sigma(X, X')$. Recíprocamente, si $\bar{B}_X(\mathbf{0}, 1)$ es metrizable para $\sigma(X, X')$, entonces X' es separable.

6.16 El objetivo de este problema es demostrar el LEMA DE BREZIS-LIEB, cuyas hipótesis y tesis respectivas están dadas más abajo en el comienzo de ii) y en iii). Para este efecto, se sugiere proceder como se indica a continuación.

i) Dado $p \in (1, +\infty)$, pruebe que

$$C_p := \sup_{|t| \leq 1} \left\{ \frac{||t+1|^p - |t|^p - 1|}{|t|^{p-1} + |t|} \right\} < \infty,$$

y a partir de ello, tomando $t = a/b$ o $t = b/a$ cuando $ab \neq 0$, muestre que

$$||a+b|^p - |a|^p - |b|^p| \leq C_p \left\{ |a|^{p-1}|b| + |a||b|^{p-1} \right\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (43)$$

ii) Sean $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$ tales que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ c.t.p. en Ω y $\|f_n\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow \|f\|_{L^p(\Omega)}$. Recuerde que si $q \in (1, +\infty)$ es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, el dual de $L^p(\Omega)$ se identifica con $L^q(\Omega)$. Demuestre entonces que $|f_n - f| \xrightarrow{w} 0$ en $L^p(\Omega)$ y $|f_n - f|^{p-1} \xrightarrow{w} 0$ en $L^q(\Omega)$. Aplique luego (43) con $a = (f_n - f)(x)$ y $b = f(x)$, integre sobre Ω , y deduzca que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left\{ |f_n|^p - |f_n - f|^p \right\} = \int_{\Omega} |f|^p. \quad (44)$$

iii) Concluya finalmente de (44) que

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0.$$

INDICACIÓN: Para la primera convergencia débil pedida en ii) puede utilizar una variante del Lema de Mazur, la cual establece que para toda sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge débil en un Banach X , existe una sucesión $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge fuerte al mismo límite, donde cada v_n es una combinación convexa de elementos en $\{u_k\}_{k \geq n}$. A su vez, tenga presente que toda sucesión convergente en $L^p(\Omega)$ posee una subsucesión que converge puntualmente c.t.p. en Ω . Por último, recuerde que al ser $L^q(\Omega)$ separable, la bola unitaria de $L^p(\Omega)$ es metrizable con respecto a la topología débil.

6.17 Sean H un espacio de Hilbert real y $\mathcal{R} : H' \rightarrow H$ su operador de Riesz asociado. Demuestre que A es abierto débil* de H' si y sólo si $\mathcal{R}(A)$ es abierto débil de H , esto es: $A \in \sigma(H', H) \Leftrightarrow \mathcal{R}(A) \in \sigma(H, H')$.

6.18 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 con frontera suave Γ , y sean $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H(\text{rot}; \Omega)$ y $\sigma \in H(\text{rot}; \Omega)$ tales que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \sigma_n, \tau \rangle_{\text{rot}; \Omega} = \langle \sigma, \tau \rangle_{\text{rot}; \Omega} \quad \forall \tau \in H(\text{rot}; \Omega)$. Demuestre que para cada $\tau \in H(\text{rot}; \Omega)$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \sigma_n \cdot \tau = \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \text{rot } \sigma_n \text{ rot } \tau = \int_{\Omega} \text{rot } \sigma \text{ rot } \tau.$$

IND: Recuerde que el espacio $H(\text{rot}; \Omega)$, dado por

$$H(\text{rot}; \Omega) := \left\{ \zeta := (\zeta_1, \zeta_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \text{rot } \zeta := \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\},$$

y provisto del producto escalar

$$\langle \zeta, \tau \rangle_{\text{rot}; \Omega} := \int_{\Omega} \zeta \cdot \tau \, dx + \int_{\Omega} \text{rot } \zeta \text{ rot } \tau \, dx \quad \forall \zeta, \tau \in H(\text{rot}; \Omega),$$

es un espacio de Hilbert.

7. NOCIONES DE TEORÍA ESPECTRAL

7.1 Sean X un Banach complejo y $A, B \in \mathcal{L}(X, X)$ tales que $0 \in \rho(A)$ y

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Muestre que $0 \in \rho(B)$ y

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{(1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|)}$$

7.2 Sean X un Hilbert complejo y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X . Demuestre que $\lambda \in \rho(A^*)$ si y sólo si $(A^* - \lambda I)$ es inyectivo y existe $C > 0$ tal que $\|(A^* - \lambda I)^{-1}(x)\| \leq C \|x\| \quad \forall x \in X$.

7.3 Sean X un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador compacto autoadjunto.

i) Pruebe que existe una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, X)$ de operadores de rango finito tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\|_{\mathcal{L}(X, X)} = 0.$$

ii) Demuestre que la ecuación $Au = f$ admite una solución u si y sólo si

$$\sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \frac{|f_\lambda|^2}{|\lambda|^2} < \infty, \quad \text{donde } f = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} f_\lambda, \quad \text{con } f_\lambda \in E_\lambda(A).$$

iii) Dados $\mu \notin \sigma(A)$ y $f \in X$, resuelva la ecuación: $\mu u - Au = f$, en términos de una base Hilbertiana de X .

iv) Aplique el resultado anterior a la ecuación integral siguiente:

$$u \in X \quad , \quad 3u(x) - \int_{\Omega} K(x, t) u(t) dt = f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

donde $\Omega := (0, 1)$, $X := L^2(\Omega)$, $f \in X$, y K es la función sobre $\Omega \times \Omega$ definida por

$$K(x, t) := \begin{cases} x(1-t) & \text{si } t \leq x, \\ t(1-x) & \text{si } t > x. \end{cases}$$

7.4 Sea X el espacio de Hilbert complejo $L^2(\Omega)$, con $\Omega :=]0, 1[$, y considere el operador lineal $K : X \rightarrow X$ definido por

$$(Ku)(t) := \int_0^1 k(t, s) u(s) ds \quad \forall t \in \Omega, \quad \forall u \in X,$$

donde $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ está dada por $k(t, s) := \min\{t, s\} \quad \forall (t, s) \in \Omega \times \Omega$.

i) Muestre que K es autoadjunto y luego utilice una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ para concluir que K es compacto.

ii) Encuentre el espectro de K . Para este efecto, proceda como se indica a continuación. Dado $\lambda \in \sigma_p(K)$ y $v \in N(K - \lambda I) \setminus \{0\}$, derive dos veces la ecuación $K(v) - \lambda v = 0$ y obtenga el problema de valores de contorno:

$$\lambda v'' + v = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad v'(1) = v(0) = 0.$$

Observe así que $\lambda \neq 0$. Luego, multiplique la ecuación diferencial por \bar{v} , integre sobre Ω , y deduzca de la identidad resultante que $\lambda > 0$. Entonces, demuestre que la solución de la ecuación diferencial está dada por:

$$v(t) := C_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad \forall t \in \Omega,$$

y use las condiciones de contorno para probar que los valores propios de K están dados por $\lambda_j := \frac{4}{\pi^2(2j-1)^2} \quad \forall j \in \mathbb{N}$, con funciones propias

$$v_j(t) := \sin\left(\frac{\pi(2j-1)t}{2}\right) \quad \forall t \in \Omega.$$

iii) Concluya que $\|K\| = \frac{4}{\pi^2}$.

7.5 Sea H un Hilbert sobre \mathbb{C} . Se dice que $A \in \mathcal{L}(H, H)$ es un operador normal si A y A^* conmutan, esto es $A^*A = AA^*$. Pruebe en este caso que:

a) $\lambda \in \sigma_p(A)$ si y sólo si $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$. Concluya además que

$$E_\lambda(A) := N(A - \lambda I) = E_{\bar{\lambda}}(A^*) := N(A^* - \bar{\lambda} I).$$

b) Si $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$, entonces $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A^*)$.

7.6 Sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq L^2(-1, 1) \rightarrow L^2(-1, 1)$ el operador definido por

$$(Au)(x) = xu(x) + \theta \int_{-1}^1 u(t) dt,$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$. Obtenga la mayor información posible sobre el espectro de A .

7.7 Sean $\Omega := (0, 1)$, $p \in C^1(\bar{\Omega})$ y $q \in C(\bar{\Omega})$, con $p(x) \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in \Omega$. Demuestre que existen una base Hilbertiana $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ y una sucesión $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales con $\lambda_n > 0$, y $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tales que $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, y

$$-(pe'_n)' + qe_n = \lambda_n e_n \quad \text{en } \Omega.$$

7.8 Sea H un espacio de Hilbert separable. Se dice que $T : H \rightarrow H$ es un operador de HILBERT-SCHMIDT si existe una base $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de H tal que

$$\|T\|^2 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \|Te_n\|^2 < \infty.$$

Sean p y q como en el problema anterior. Demuestre que el operador lineal $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ que a cada $f \in L^2(\Omega)$ le asigna la única solución $u := Tf$ de

$$-(pu')' + qu = f \quad \text{en } \Omega := (0, 1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

es un operador de Hilbert Schmidt.

7.9 Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un Hilbert (\mathbb{C}), y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \rightarrow H$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H y A es autoadjunto. Demuestre que $\mathcal{D}(A)$ provisto con el producto escalar $\langle u, v \rangle_{\mathcal{D}(A)} := \langle u, v \rangle_H + \langle Au, Av \rangle_H$, es un espacio de Hilbert. Suponga ahora que $\mathbf{i} : \mathcal{D}(A) \rightarrow H$ es una inyección compacta, y que $A^{-1} \in \mathcal{L}(H, \mathcal{D}(A))$. Demuestre que

i) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$.

ii) Los elementos de $\sigma_p(A)$ pueden ordenarse en una sucesión $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $|\lambda_n| \rightarrow \infty$, cuando $n \rightarrow \infty$.

iii) Los espacios propios $E_{\lambda_n} := N(A - \lambda_n I)$ son de dimensión finita, ortogonales dos a dos, y $H = \bigoplus \{E_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

7.10 Sea H un Hilbert complejo no trivial, y sea $A \in \mathcal{L}(H, H)$ un operador biyectivo tal que $A^* = A^{-1}$ (OPERADOR UNITARIO). Demuestre que $\|A\| = 1$, y concluya que

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

7.11 Sean X un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador autoadjunto. Demuestre que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene $X = N(A - \lambda I) \oplus \overline{R(A - \lambda I)}$.

7.12 [VALORES PROPIOS DE Δ]. Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera Lipschitz-continua. Demuestre que existen una base Hilbertiana $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$, y una sucesión $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales con $\lambda_n > 0$, y $\lambda_n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$, tales que $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, y $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$ en Ω . Se dice aquí que los λ_n son los valores propios del Laplaciano (con condición de Dirichlet), y que las e_n son las funciones propias asociadas.

7.13 [ESPECTRO AUTOADJUNTO]. Sean H un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(H, H)$ un operador autoadjunto. Dado un subespacio cerrado S de H invariante con respecto a A , denote por $\sigma(A, S)$ y $\sigma(A, S^\perp)$ los espectros de las restricciones $A|_S$ y $A|_{S^\perp}$, respectivamente. Demuestre que $\sigma(A) = \sigma(A, S) \cup \sigma(A, S^\perp)$.

7.14 Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert (\mathbb{C}) y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal con $\mathcal{D}(A) = X$ tal que A es autoadjunto. Entonces, $\lambda \in \sigma(A)$ si y sólo si existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A x_n\| = 0$.

7.15 Sean X un Hilbert complejo y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X . Pruebe que

$$\{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_r(A)\} \subseteq \sigma_p(A^*).$$

En particular, considere el espacio $X := L^2(\Omega)$, con $\Omega :=]0, 1[$, y demuestre que $\sigma_r(A) = \emptyset$, donde $A : X \rightarrow X$ está definido por

$$(Au)(t) := \int_0^1 (t^2 s + s^2 t) u(s) ds \quad \forall t \in \Omega, \quad \forall u \in X.$$

8. TEORÍA DE DISTRIBUCIONES

8.1 Pruebe que las siguientes son distribuciones sobre \mathbb{R} :

$$i) \quad \langle u, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right\} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

$$ii) \quad \langle u, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

$$\text{iii) } \langle u, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0) \ln(\varepsilon) \right\} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

8.2

i) Pruebe que $VP(\frac{1}{x}) : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle VP(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

es una distribución sobre \mathbb{R} .

ii) Demuestre que $(\log|x|)' = VP(\frac{1}{x})$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

8.3 Sean Ω un abierto de \mathbb{R}^n y $f \in C_0^k(\Omega)$. Demuestre que para cada α , $|\alpha| \leq k$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha (f_\varepsilon - f)(x)| = 0.$$

8.4 Sea $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, y para cada $n \geq 3$ defina los conjuntos

$$\Omega_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n} \right) \times \left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n} \right).$$

Construya una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \geq 3} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$, tal que $f_n = 1$ en Ω_n para todo $n \geq 3$, $|\partial^\alpha f_n(x)| \leq C_\alpha n^{|\alpha|} \forall x \in \Omega$, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n (2 - f_n) dx = 1.$$

8.5 Para cada $\varepsilon \in (0, 1)$ considere $u_\varepsilon \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\text{sop } u_\varepsilon \subseteq \bar{B}(0, \varepsilon) \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon(x) dx = 1 \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x)| dx < \infty.$$

Pruebe que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon \varphi dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

8.6 Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{1 + n^2 x^2} \varphi(x) dx = \pi \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

8.7 Sean X_1, X_2, \dots, X_m abiertos de \mathbb{R}^n , y sea K un compacto contenido en $\cup_{j=1}^m X_j$. Pruebe que existen funciones $\varphi_j \in C_0^\infty(X_j)$ tales que

$$0 \leq \varphi_j \leq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^m \varphi_j^2(x) = 1 \quad \text{en una vecindad de } K.$$

8.8 Sea $u \in L_{loc}^p(\Omega)$, $p > 1$, y suponga que existe $v \in L_{loc}^p(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} v \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Demuestre que $\partial^\alpha u_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x)$, $\forall x \in \Omega$, $\forall \varepsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Además, pruebe que para todo compacto $K \subseteq \Omega$ existe una sucesión $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq C^{|\alpha|}(\Omega)$ tal que

$$\|\varphi_j - u\|_{L^p(K)} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \|\partial^\alpha \varphi_j - v\|_{L^p(K)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } j \rightarrow \infty.$$

8.9

- i) Demuestre que la inyección $\mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ es densa.
 ii) Sean $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ tales que $\text{sop } u \cap \text{sop } \varphi = \emptyset$. Demuestre que $\langle u, \varphi \rangle = 0$.

8.10 Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n y sean $x_0, x_1 \in \Omega$ tales que $x_0 \neq x_1$. Suponga que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\text{sop } u \subseteq \{x_0, x_1\}$.

- i) Demuestre que existen enteros no negativos N_0, N_1 , y constantes $c_\alpha, d_\beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq N_0, |\beta| \leq N_1$, tales que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq N_0} c_\alpha \langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle + \sum_{|\beta| \leq N_1} d_\beta \langle \partial^\beta \delta_{x_1}, \varphi \rangle.$$

- ii) Extienda el resultado anterior al caso en que $\text{sop } u \subseteq \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, con $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

8.11

- i) Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, donde Ω es el abierto de \mathbb{R}^2 definido por

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}.$$

Si $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, pruebe que existe una constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\langle u, \varphi \rangle = \lambda \int_{\Omega} \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

- ii) Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, donde Ω es el abierto de \mathbb{R}^3 definido por

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a < x < b, c < y < d, e < z < f\}.$$

Si $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, qué puede decir acerca de la distribución u ?

8.12 Recuerde la definición de convergencia de distribuciones y demuestre que

$$\frac{j}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{j^2 x^2}{2}} \rightarrow \delta \quad \text{cuando } j \rightarrow \infty.$$

IND.: Notar que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

8.13 Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq W^{m,p}(\Omega)$, tal que $\|u_k\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Demuestre que si $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, entonces $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

8.14 Sean Ω un abierto de \mathbb{R}^n , $m \in \mathbb{N}$ y $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de $H^m(\Omega)$ tal que $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Demuestre que $u \in H^m(\Omega)$.

8.15 Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n , y sean $g \in C^\infty(\Omega)$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se define la distribución $gu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ como $\langle gu, \varphi \rangle := \langle u, g\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Demuestre que para todo multi-índice α se tiene la FÓRMULA DE LEIBNIZ:

$$\partial^\alpha (gu) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta g \partial^{\alpha-\beta} u.$$

8.16 Sea Ω un abierto de \mathbb{R} , y considere el operador $Lv := v' + v \quad \forall v \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pruebe que si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $Lu = f \in C^\infty(\Omega)$, entonces $u \in C^\infty(\Omega)$. Así, $Lu = f$ en el sentido clásico, y la suavidad de f se transmite a la solución u .

8.17 Sea Ω un abierto de \mathbb{R} , y considere el operador $Lv := v' + gv \quad \forall v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, donde $g \in C^\infty(\Omega)$. Demuestre que si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $Lu = f \in C(\Omega)$, entonces $u \in C^1(\Omega)$, y así $Lu = f$ en el sentido clásico.

8.18 Sea $Lu := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, el OPERADOR DE ONDAS en el plano. Pruebe que $LE = \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, donde

$$E(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } |x| < t, \\ 0 & \text{si } |x| > t, \end{cases} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

8.19 Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n y $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\langle u, \varphi \rangle \geq 0$ para toda función no-negativa $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Pruebe que u es una distribución de orden 0.

8.20 Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n que incluye al vector nulo, y sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $x_j u = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pruebe que existe una constante C tal que $u = C\delta$.

8.21 Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n y $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq L_{loc}^1(\Omega)$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_K |f_j(x)| dx = 0$$

para todo compacto $K \subseteq \Omega$. Pruebe que $\partial^\alpha f_j \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega) \quad \forall \alpha$.

8.22

i) Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y K un compacto contenido en Ω . Pruebe que existe una función $f \in C(\Omega)$ y un multi-índice α tales que

$$\langle u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

ii) Sean V y Ω abiertos de \mathbb{R}^n , y K compacto tales que $K \subset V \subset \Omega$. Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ de orden N con $\text{sop } u = K$. Aplique i) para demostrar que existe un número finito de funciones $f_\beta \in C(\Omega)$, cuyos soportes están contenidos en V , tales que

$$u = \sum_{\beta} \partial^\beta f_\beta.$$

8.23 Pruebe que si $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge a cero en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces para cada $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $u * \varphi_j$ converge a cero en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

8.24 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, y f^ε su regularizada. Pruebe que:

i) $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, donde $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

ii) $f^\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(x)$ para casi todos los $x \in \Omega$.

iii) si $f \in C(\Omega)$, entonces $f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$ uniformemente sobre compactos de Ω .

iv) si $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, entonces $f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$ en $L^p_{loc}(\Omega)$.

8.25 Sea u una forma lineal sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pruebe que u es continua (distribución temperada) si y sólo si existen $C > 0$ y un entero no-negativo N tales que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \right\} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

8.26 Demuestre que para toda $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para todo multi-índice α , y para cada $h \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$i) \widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \widehat{u} \quad ii) \widehat{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{u}$$

$$iii) \widehat{\tau_h u} = e^{-i\xi \cdot h} \widehat{u} \quad iv) \widehat{e^{ix \cdot h} u} = \tau_h \widehat{u}$$

Deduzca, a partir de estas identidades, que $\widehat{D^\alpha \delta} = \xi^\alpha$ y $\widehat{x^\alpha \delta} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \delta$, probando primero que $\widehat{\delta} = 1$

8.27 Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ tal que $x_1 u_n = (x_2 - \frac{1}{n}) u_n = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ y $\langle u_n, 1 \rangle = \frac{n-1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Justifique la coherencia de estas hipótesis y encuentre, si es posible, el límite distribucional de u_n cuando $n \rightarrow +\infty$.

9. ESPACIOS DE SOBOLEV

9.1 Probar que la norma usual de $H^m(\Omega)$ y la norma de $H^s(\Omega)$ dada en términos de la transformada de Fourier son equivalentes para $s = m \in \mathbb{N}$.

9.2 Sea Ω^- un abierto conexo y acotado de \mathbb{R}^2 con frontera Γ , y sea Ω^+ la región anular acotada por Γ y una curva cerrada Σ cuyo interior contiene a Γ . Además, sean $\gamma_0^- : H^1(\Omega^-) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_0^+ : H^1(\Omega^+) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Sigma)$ los operadores de trazas respectivos, y denote $\Omega := \Omega^- \cup \Gamma \cup \Omega^+$.

a) Demuestre que $v \in H^1(\Omega)$ si y sólo si:

$$v \in L^2(\Omega), \quad v|_{\Omega^-} \in H^1(\Omega^-), \quad v|_{\Omega^+} \in H^1(\Omega^+), \quad \text{y } \gamma_0^-(v|_{\Omega^-}) = \gamma_0^+(v|_{\Omega^+}) \text{ en } \Gamma.$$

Dados $f^- \in L^2(\Omega^-)$, $f^+ \in L^2(\Omega^+)$, $g_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y $g_\Sigma \in H^{-1/2}(\Sigma)$, considere el problema de transmisión: Hallar $(u^-, u^+) \in H^1(\Omega^-) \times H^1(\Omega^+)$ tales que

$$\begin{aligned} -\Delta u^- &= f^- \quad \text{en } \Omega^-, \quad -\Delta u^+ = f^+ \quad \text{en } \Omega^+, \\ \gamma_0^-(u^-) &= \gamma_0^+(u^+) \quad \text{en } \Gamma, \quad \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^-(\nabla u^-) - \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) = g_\Gamma \quad \text{en } \Gamma, \\ \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) &= g_\Sigma \quad \text{en } \Sigma, \quad \text{y} \quad \int_{\Omega^-} u^- + \int_{\Omega^+} u^+ = 0, \end{aligned} \tag{45}$$

donde $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^- : H(\text{div}; \Omega^-) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+ : H(\text{div}; \Omega^+) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Sigma)$ son los operadores de trazas normales respectivos ($\boldsymbol{\nu}$ apunta hacia Ω^+ en Γ y hacia el exterior de Ω^+ en Σ).

- b) Utilice identidades de Green en espacios de Sobolev convenientes y deduzca una formulación variacional de (45) con incógnita en un subespacio cerrado V de $H^1(\Omega)$.
- c) Identifique una condición de compatibilidad sobre los datos, y demuestre en tal caso que la formulación obtenida en b) posee una única solución, la cual depende continuamente de f^- , f^+ , g_Γ , y g_Σ .
- d) Pruebe que el esquema de Galerkin asociado es convergente para cualquier familia numerable $\{V_h\}_{h>0}$ de subespacios de dimensión finita de V tales que $\lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(v, V_h) = 0 \quad \forall v \in V$.
- e) Demuestre que la formulación obtenida en b) es equivalente a una formulación variacional mixta con incógnita en $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$, y verifique que ella satisface las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi.

9.3 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera Γ de clase C^1 y defina

$$\mathcal{D}(\Gamma) := \{v|_\Gamma : v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

Pruebe que $H^{1/2}(\Gamma) \subseteq \overline{\mathcal{D}(\Gamma)}^{\|\cdot\|_{0,\Gamma}}$ y $H^{1/2}(\Gamma) = \overline{\mathcal{D}(\Gamma)}^{\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}}$.

9.4 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera Γ de clase C^1 , y considere la aplicación $\|\!\| \cdot \|\!\| : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|\!\|v\|\!\| := \left\{ |v|_{1,\Omega}^2 + \|\gamma_0(v)\|_{0,\Gamma}^2 \right\}^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ es el operador de trazas usual. Utilice un argumento análogo al de la demostración de la desigualdad de Poincaré generalizada para probar que $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y $\|\!\| \cdot \|\!\|$ son equivalentes en $H^1(\Omega)$.

9.5 Demuestre que $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ es denso en $H^1(\mathbb{R}_+^n)$.

9.6 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 con frontera Γ de clase C^1 . El objetivo de este problema es demostrar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 \geq \frac{1}{2} |\mathbf{v}|_{[H^1(\Omega)]^2}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2, \tag{46}$$

donde $\mathbf{e}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\mathbf{t} \right\}$. Para tal efecto, proceda como sigue.

i) Dados $\sigma := (\sigma_{ij})$ y $\tau := (\tau_{ij})$ en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, se define el producto tensorial $\sigma : \tau := \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij} \tau_{ij}$ y se introducen los subespacios

$$\mathbb{R}_{sim}^{2 \times 2} := \{\tau \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \tau^t = \tau\} \quad \text{y} \quad \mathbb{R}_{asim}^{2 \times 2} := \{\tau \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \tau^t = -\tau\}.$$

Pruebe que $\sigma : \tau = 0 \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}_{sim}^{2 \times 2}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_{asim}^{2 \times 2}$.

ii) Note que $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{e}(\mathbf{v}) + \mathbf{w}(\mathbf{v})$, con $\mathbf{w}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^t \right\}$, y recuerde que $\|\tau\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 = \int_{\Omega} \tau : \tau \quad \forall \tau \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2}$, para probar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 - \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{v})^t$$

y

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}.$$

iii) Deduzca la identidad $\nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{v})^t = \operatorname{div} \left\{ \nabla \mathbf{v} \mathbf{v} - \operatorname{div}(\mathbf{v}) \mathbf{v} \right\} + (\operatorname{div}(\mathbf{v}))^2$ y concluya la desigualdad (46).

9.7 ([26]) Este problema constituye una versión particular del Lema de Peetre-Tartar.

a) Sean $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ y $(X_3, \|\cdot\|_3)$, espacios de Banach, y considere operadores $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ y $B \in \mathcal{L}(X_1, X_3)$, tales que B es compacto. Además, suponga que existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \leq c \left\{ \|A(x)\|_2 + \|B(x)\|_3 \right\} \quad \forall x \in X_1.$$

Demuestre que $N(A)$ es de dimensión finita, y luego razone por contradicción para probar que existe $C > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(x, N(A)) \leq C \|A(x)\|_2 \quad \forall x \in X_1.$$

b) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera suave Γ y considere la descomposición: $H^1(\Omega) = \tilde{H}^1(\Omega) \oplus \mathbb{P}_0(\Omega)$, donde $\mathbb{P}_0(\Omega)$ es el espacio de las funciones constantes sobre Ω y

$$\tilde{H}^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v = 0 \right\}.$$

Pruebe que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq |v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega). \quad (47)$$

c) Aplique a), (47), y el teorema de trazas, para demostrar que existen constantes $C_1, C_2 > 0$, tales que

$$C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq |v|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (48)$$

INDICACIÓN: para la desigualdad (48) inferior defina operadores A y B apropiados utilizando los espacios $X_1 := H^1(\Omega)$, $X_2 := [L^2(\Omega)]^2 \times L^2(\Gamma)$ y $X_3 := \mathbb{P}_0(\Omega)$.

9.8 ([26]) Sea Ω un abierto acotado y conexo de \mathbb{R}^n de clase C^1 , y sea $H^{-1}(\Omega)$ (resp. $[H^{-1}(\Omega)]^n$) el dual de $H_0^1(\Omega)$ (resp. $[H_0^1(\Omega)]^n$). Utilizando que $C_0^\infty(\Omega)$ (resp. $[C_0^\infty(\Omega)]^n$) es denso en $H_0^1(\Omega)$ (resp. $[H_0^1(\Omega)]^n$), las aplicaciones identidad $i : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ y gradiente $\nabla : L^2(\Omega) \rightarrow [\mathcal{D}'(\Omega)]^n$ se extienden por densidad a operadores $i : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ y $\nabla : L^2(\Omega) \rightarrow [H^{-1}(\Omega)]^n$, respectivamente. En tal caso, se puede probar que existe $c_1 > 0$, que depende sólo de Ω , tal que

$$\|p\|_{0,\Omega} \leq c_1 \left\{ \|p\|_{-1,\Omega} + \|\nabla p\|_{-1,\Omega} \right\} \quad \forall p \in L^2(\Omega).$$

- a) Considere el operador $B := \mathcal{R}\nabla$, donde $\mathcal{R} : [H^{-1}(\Omega)]^n \rightarrow [H_0^1(\Omega)]^n$ es la aplicación de Riesz asociada, y demuestre que el rango de B es cerrado en $[H_0^1(\Omega)]^n$.
- b) Identifique el operador adjunto $B^* : [H_0^1(\Omega)]^n \rightarrow L^2(\Omega)$ y utilice el Ejercicio 9.7 para probar que $\text{div} : W^\perp \rightarrow L_0^2(\Omega)$ es un isomorfismo, donde

$$W := \left\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n : \text{div } \mathbf{v} = 0 \right\}, \quad [H_0^1(\Omega)]^n = W \oplus W^\perp,$$

y

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_\Omega p = 0 \right\}.$$

9.9 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^N con frontera suave Γ y sea $w : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ una función que satisface las hipótesis:

- i) $w > 0$ casi en todas partes.
- ii) $1/w \in L_{loc}^1(\Omega)$; esto es, dado cualquier abierto Ω_0 tal que $\bar{\Omega}_0$ es un compacto contenido en Ω , $1/w \in L^1(\Omega_0)$.

- a) Demuestre que $L_w^2(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y } \int_\Omega |f|^2 w < \infty \right\}$ equipado con el producto interior

$$\langle u, v \rangle_{L_w^2(\Omega)} := \int_\Omega u v w$$

es un espacio de Hilbert.

- b) Demuestre que $H_w^1(\Omega) := \left\{ u \in L_w^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_w^2(\Omega) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\}$ equipado con la norma

$$\|u\|_{H_w^1(\Omega)} := \left\{ \|u\|_{L_w^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_w^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$$

es un espacio de Hilbert.

9.10 Sean Ω , w , $L_w^2(\Omega)$ y $H_w^1(\Omega)$ como en el Ejercicio 9.9 y sea $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de abiertos de \mathbb{R}^N tal que $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$. Asuma además la siguiente hipótesis adicional para w :

- iii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, la inyección de $H_w^1(\Omega_n)$ en $L_w^2(\Omega_n)$ es compacta.

Demuestre que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

- a) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u\|_{L_w^2(\Omega)}^2 \leq \varepsilon \|u\|_{H_w^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{L_w^2(\Omega_m)}^2 \quad \forall u \in H_w^1(\Omega).$$

- b) La inyección de $H_w^1(\Omega)$ en $L_w^2(\Omega)$ es compacta.

Referencias

- [1] ALVAREZ, M., GATICA, G.N. AND RUIZ-BAIER, R., *An augmented mixed-primal finite element method for a coupled flow-transport problem*. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 49, 5, pp. 1399-1427, (2015).
- [2] BABUŠKA, I. AND AZIZ, A.K., *Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method*. In: The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations (Proc. Sympos., University of Maryland, Baltimore, USA, 1972), pp. 1-359. Academic Press, New York, 1972.
- [3] BERNARDI, C., CANUTO, C. AND MADAY, Y., *Generalized inf-sup conditions for Chebyshev spectral approximation of the Stokes problem*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 25, 6, pp. 1237-1271, (1998).
- [4] BREZZI, F. AND FORTIN, M., *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 1991.
- [5] BUFFA, A., *Remarks on the discretization of some non-coercive operator with applications to heterogeneous Maxwell equations*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 43, 1, pp. 1-18, (2005).
- [6] CAMAÑO, J., OYARZÚA, R. AND TIERRA, G., *Analysis of an augmented mixed-FEM for the Navier-Stokes problem*. Preprint 2014-33, Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI²MA), Universidad de Concepción, Chile, (2014). Mathematics of Computation, to appear.
- [7] CIARLET, P., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1978.
- [8] COLMENARES, E., GATICA, G.N. AND OYARZÚA, R., *Analysis of an augmented mixed-primal formulation for the stationary Boussinesq problem*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 32, 2, pp. 445-478, (2016).
- [9] GALVIS, J. AND SARKIS, M., *Non-matching mortar discretization analysis for the coupling Stokes-Darcy equations*. Electronic Transactions on Numerical Analysis, vol. 26, pp. 350-384, (2007).
- [10] GATICA, G.N., *On the coerciveness property of the biharmonic operator*. Proyecciones, vol. 10, 17, pp. 27-34, (1991).
- [11] GATICA, G.N., *Analysis of a new augmented mixed finite element method for linear elasticity allowing RT_0 - P_1 - P_0 approximations*. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 40, 1, pp. 1-28, (2006).
- [12] GATICA, G.N. AND GATICA, L.F., *On the a-priori and a-posteriori error analysis of a two-fold saddle point approach for nonlinear incompressible elasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 68, 8, pp. 861-892, (2006).

- [13] GATICA, G.N., GATICA, L.F. AND SEQUEIRA, F., *A $RT_k - P_k$ approximation for linear elasticity yielding a broken $H(\text{div})$ convergent postprocessed stress*. Applied Mathematics Letters, vol. 49, pp. 133-140, (2015).
- [14] GATICA, G.N., GATICA, L.F. AND SEQUEIRA, F., *A priori and a posteriori error analyses of a pseudostress-based mixed formulation for linear elasticity*. Computers & Mathematics with Applications, vol. 71, 2, pp. 585-614, (2016).
- [15] GATICA, G.N., GATICA, L.F. AND STEPHAN, E.P., *A dual-mixed finite element method for nonlinear incompressible elasticity with mixed boundary conditions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, 35-36, pp. 3348-3369, (2007).
- [16] GATICA, G.N. AND HEUER, N., *A dual-dual formulation for the coupling of mixed-FEM and BEM in hyperelasticity*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 38, 2, pp. 380-400, (2000).
- [17] GATICA, G.N., HEUER, N. AND MEDDAHI, S., *On the numerical analysis of nonlinear two-fold saddle point problems*. IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 23, 2, pp. 301-330, (2003).
- [18] GATICA, G.N. AND HSIAO, G.C., *The coupling of boundary integral and finite element methods for nonmonotone nonlinear problems*. Numerical Functional Analysis and Optimization, vol. 13, 5&6, pp. 431-447, (1992).
- [19] GATICA, G.N. AND HSIAO, G.C., *A Gårding's inequality for variational problems with constraints*. Applicable Analysis, vol. 54, 1-2, pp. 73-90, (1994).
- [20] GATICA, G.N., MÁRQUEZ, A. AND MEDDAHI, S., *Analysis of the coupling of primal and dual-mixed finite element methods for a two-dimensional fluid-solid interaction problem*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 45, 5, pp. 2072-2097, (2007).
- [21] GATICA, G.N., MÁRQUEZ, A. AND MEDDAHI, S., *A new coupling of mixed finite element and boundary element methods for an exterior Helmholtz problem in the plane*. Advances in Computational Mathematics, vol. 30, 3, pp. 281-301, (2009).
- [22] GATICA, G.N., RUIZ-BAIER, R. AND TIERRA, G., *A mixed finite element method for Darcy's equations with pressure dependent porosity*. Mathematics of Computation, vol. 85, 297, pp. 1-33, (2016).
- [23] GATICA, G.N. AND SAYAS, F.-J., *Characterizing the inf-sup condition on product spaces*. Numerische Mathematik, vol. 109, 2, pp. 209-231, (2008).
- [24] GATICA, G.N. AND WENDLAND, W.L., *Coupling of mixed finite elements and boundary elements for linear and nonlinear elliptic problems*. Applicable Analysis, vol. 63, pp. 39-75, (1996).

- [25] GATICA, G.N. AND WENDLAND, W.L., *Coupling of mixed finite elements and boundary elements for a hyperelastic interface problem*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 34, 6, pp. 2335-2356, (1997).
- [26] GIRAULT, V. AND RAVIART, P.-A., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, 1986.
- [27] HOWELL, J.S. AND WALKINGTON, N.J., *Inf-sup conditions for twofold saddle point problems*. Numerische Mathematik, vol. 118, 4, pp. 663-693, (2011).
- [28] HSIAO, G.C., *A modified Galerkin scheme for elliptic equations with natural boundary conditions*. Numerical Mathematics and Applications (Oslo, 1985), 193-197, IMACS Trans. Sci. Comput.-85, I, North Holland, Amsterdam, 1986.
- [29] JOHNSON, C., *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [30] KUFNER, A., JOHN, O. AND FUČÍK, S., *Function Spaces. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids; Mechanics: Analysis*. Noordhoff International Publishing, Leyden; Academia, Prague, 1977. xv+454 pp.
- [31] QUARTERONI, A. AND VALLI, A., *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1994.
- [32] RAVIART, P.-A. AND THOMAS, J.-M., *Introduction à L'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles*. Masson, 1983.
- [33] XU, J. AND ZIKATANOV, L., *Some observations on Babuška and Brezzi theories*. Numerische Mathematik, vol. 94, 1, pp. 195-202, (2003).