

**LISTADO DE EJERCICIOS, 525401**

*Análisis Funcional y Aplicaciones I*

Primer Semestre de 2013

Prof. Gabriel N. Gatica.

1. (TEOREMA DE HAHN-BANACH SOBRE  $\mathbb{C}$ ). Sea  $X$  un espacio vectorial normado sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$  y sea  $p : X \rightarrow \mathbf{R}$  tal que

$$p(\alpha x) = |\alpha|p(x) \quad \text{y} \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in X.$$

Además, sean  $S$  un subespacio de  $X$  y  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal tal que

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in S.$$

Demuestre que  $f$  puede extenderse a un funcional lineal  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$|F(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

2. (APLICACIÓN SIMPLE DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH). Sea  $X$  un espacio vectorial normado sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$ .

a) Dados un conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  de  $N$  vectores linealmente independientes de  $X$  y  $\{a_1, a_2, \dots, a_N\} \subseteq \mathbb{C}$ , pruebe que existe  $F \in X'$  tal que  $F(x_j) = a_j$  para todo  $j \in \{1, \dots, N\}$ .

b) Utilice a) para probar que todo subespacio  $Y$  de dimensión finita admite un suplemento topológico.

3. Sea  $\Omega := (a, b)$  un intervalo acotado de  $\mathbf{R}$  y dado  $m \in \mathbf{N}$  considere el espacio de Sobolev  $H^m(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : v^{(j)} \in L^2(\Omega) \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}\}$ . Asuma que la inyección  $i : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  es compacta y demuestre que la inyección  $i : H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-1}(\Omega)$  también lo es.

4. Sean  $X, Y, Z$  espacios vectoriales normados y sean  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $B \in \mathcal{L}(Z, X)$ . Demuestre que  $(AB)' = B' A'$ . Suponga que  $A$  es invertible y demuestre que  $A'$  también lo es, con  $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ .

5. (INVERSO A IZQUIERDA). Sean  $E, F$  espacios de Banach y sea  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  tal que  $N(T) = \{0\}$ . Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Existe  $S \in \mathcal{L}(F, E)$  tal que  $ST = I : E \rightarrow E$ .

b)  $R(T)$  es cerrado y posee un suplemento topológico en  $F$ .

6. (APLICACIÓN DE REFLEXIVIDAD). Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach y sea  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E \rightarrow F$  lineal cerrado tal que  $\mathcal{D}(A)$  es denso en  $E$ . Pruebe que si  $E$  es reflexivo entonces

$$N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}.$$

7. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y considere un operador NOLINEAL  $T : H \rightarrow H$ , FUERTEMENTE MONÓTONO y LIPSCHITZ-CONTINUO. Esto significa, respectivamente, que existen constantes  $\alpha, M > 0$  tales que

$$\langle Tv - Tw, v - w \rangle \geq \alpha \|v - w\|_H^2 \quad \text{y} \quad \|Tv - Tw\|_H \leq M \|v - w\|_H \quad \forall v, w \in H.$$

- a) Dada  $f \in H$ , demuestre que existe un único  $u \in H$  tal que  $Tu = f$ .  
b) Sea  $H_n$  un subespacio de dimensión finita de  $H$  y considere el esquema de Galerkin asociado: Hallar  $u_n \in H_n$  tal que

$$\langle Tu_n, v_n \rangle = \langle f, v_n \rangle \quad \forall v_n \in H_n.$$

Pruebe que

$$\|u - u_n\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in H_n} \|u - v_n\|_H.$$

IND.: Para **a**), aplicar el Teorema del Punto Fijo de Banach al operador  $P : H \rightarrow H$ , con  $Pv := v - \rho(Tv - f)$ , donde  $\rho$  es un parámetro a elegir de manera conveniente.

8. Sean  $X, Y$  espacios de Banach, y sea  $A : X \rightarrow Y$  un operador lineal cerrado tal que  $N(A) = \{0\}$  y  $R(A) = Y$ . Demuestre que  $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ .

IND.: Considere  $\mathcal{D}(A)$  provisto de la norma  $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$ .

9. Sea  $X$  un espacio vectorial normado y  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  un funcional lineal. Pruebe que  $f \in X'$  sí y sólo sí  $N(f)$  es un subespacio cerrado de  $X$ .  
10. Sea  $X$  un espacio vectorial normado.

- a) Demuestre que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces la sucesión completa converge.  
b) Sea  $S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ . Pruebe que  $S$  es completo sí y sólo sí  $X$  es Banach.

11. Considere un abierto acotado  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  con frontera  $\Gamma$  suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\text{div}; \Omega) := \left\{ v \in [L^2(\Omega)]^n : \text{div } v := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w \rangle_{H(\text{div}; \Omega)} := \int_{\Omega} v \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \text{div } v \, \text{div } w \, dx \quad \forall v, w \in H(\text{div}; \Omega).$$

- a) Demuestre que  $(H(\operatorname{div}; \Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\operatorname{div}; \Omega)})$  es un espacio de Hilbert.  
b) Pruebe que para todo  $g \in [L^2(\Omega)]^n$  existe un único  $v_g \in H(\operatorname{div}; \Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} v_g \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} v_g \operatorname{div} w \, dx = \int_{\Omega} g \cdot w \, dx \quad \forall w \in H(\operatorname{div}; \Omega).$$

IND.: Dada  $v \in [L^2(\Omega)]^n$ , se dice que  $\operatorname{div} v := z \in L^2(\Omega)$  si

$$-\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} z \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

12. Considere un abierto acotado  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^2$  con frontera  $\Gamma$  suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\operatorname{rot}; \Omega) := \{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \operatorname{rot} v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w \rangle_{H(\operatorname{rot}; \Omega)} := \int_{\Omega} v \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{rot} v \operatorname{rot} w \, dx \quad \forall v, w \in H(\operatorname{rot}; \Omega).$$

- a) Demuestre que  $(H(\operatorname{rot}; \Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\operatorname{rot}; \Omega)})$  es un espacio de Hilbert.  
b) Pruebe que para todo  $g \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$  existe un único  $v_g \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} v_g \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{rot} v_g \operatorname{rot} w \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{rot} g \operatorname{rot} w \, dx \quad \forall w \in H(\operatorname{rot}; \Omega).$$

IND.: Notar que  $v \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$  sí y sólo sí  $(v_2, -v_1) \in H(\operatorname{div}; \Omega)$ . También, dada  $v \in [L^2(\Omega)]^2$ , se dice que  $\operatorname{rot} v := z \in L^2(\Omega)$  si

$$-\int_{\Omega} v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \, dx + \int_{\Omega} v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \, dx = \int_{\Omega} z \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

13. Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^n$  con frontera suave  $\Gamma$ , y defina el espacio  $V := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , es decir

$$V = \{ v \in H^2(\Omega) : v = 0 \text{ en } \Gamma \}.$$

Demuestre que existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V.$$

IND.: Dada  $v \in V$ , defina  $f = -\Delta v \in L^2(\Omega)$  y aplique el Lema de Lax-Milgram al problema de valores de contorno:  $-\Delta u = f$  en  $\Omega$ ,  $u = 0$  en  $\Gamma$ .

14. Sea  $X$  el espacio de las funciones continuas sobre  $[0, 1]$  provisto de la norma uniforme. Dados los polinomios  $p_j \in X$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , con  $p_j(t) = t^j \forall t \in [0, 1]$ , se define el operador  $A : X \rightarrow X$  como

$$A(u) := \sum_{j=0}^n \left\{ \int_0^1 u(t) p_j(t) dt \right\} p_j \quad \forall u \in X.$$

Demuestre que  $A \in \mathcal{L}(X, X)$  y encuentre explícitamente el operador adjunto  $A' : X' \rightarrow X'$ .

IND.: Para todo  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  defina  $F_j : X \rightarrow \mathbf{R}$  por  $F_j(u) := \int_0^1 u(t) p_j(t) dt$   $\forall u \in X$ , y observe que  $F_j \in X'$ .

15. Considere dos espacios vectoriales normados  $X$  e  $Y$ .

- a) Sea  $A_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$  tal que  $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ . Demuestre que existe un operador  $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y, X))$  tal que  $\mathcal{T}_0 A_0 = A_0^{-1}$  y  $\|\mathcal{T}_0\| = \|A_0^{-1}\|/\|A_0\|$ .
- b) Pruebe que si  $Y$  es Banach y  $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y', X'))$  es un operador biyectivo, entonces  $\mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(Y', X'), \mathcal{L}(X, Y))$ .

16. Sea  $\Omega := (0, 1)$  y considere el problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} -(au')' + bu &= f & \text{en } \Omega \\ u'(0) = u'(1) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $a(x) = x^2 + 2$ ,  $b(x) = 2 + \text{sen}(x)$  y  $f(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$ . Puede probarse que la formulación débil de (1) consiste en hallar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\int_0^1 (au'v' + buv) dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2)$$

Demuestre que existe un único  $u \in H^1(\Omega)$  solución de (2).

17. Sean  $X, Y$  espacios vectoriales normados y considere  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

- a) Demuestre que  $R(A)^0 = N(A')$  y que

$$N(A') = \{0\} \quad \text{si y solo si} \quad \overline{R(A)} = Y.$$

- b) Pruebe que si  $N(A) = \{0\}$  y  $R(A) = Y$ , entonces  $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ .

18. Sea  $M$  un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado  $X$ .

- a) Demuestre que  $M = {}^0(M^0)$ .

- b) Pruebe que el aniquilador de  $(\frac{X}{M})'$  coincide con  $M$ .

19. Sean  $X, Y$  espacios vectoriales normados y sea  $T : X' \rightarrow Y'$  un operador lineal cerrado y biyectivo. Demuestre que  $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y', X')$ .
20. Sean  $I := [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ ,  $f_j : I \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , funciones continuas, y considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Hallar  $u := (u_1, \dots, u_n)$  tal que

$$\begin{cases} \frac{du_j}{dt} = f_j(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) & y \\ u_j(t_0) = \eta_j & \forall j = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3)$$

donde  $t_0, \tau, \eta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  son constantes reales dadas y  $\tau$  es positivo. Suponga además que existe  $M > 0$  tal que

$$|f_j(t, z) - f_j(t, w)| \leq M \|z - w\|_\infty \quad \forall z, w \in \mathbf{R}^n, \quad \forall t \in I.$$

Demuestre que (3) tiene una única solución  $u(t)$  para todo  $t \in I$ .

IND.: Transforme (3) en una ecuación integral de Volterra y luego aplique algún resultado apropiado sobre puntos fijos.

21. Sean  $X, Y$  espacios de Banach y  $A : X \rightarrow Y$  un operador lineal. Pruebe que si  $GA \in X' \quad \forall G \in Y'$ , entonces  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ .
22. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y considere una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  de  $H$  tal que  $\langle x_n, x_m \rangle = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$ . Pruebe que  $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H$ . Además, dada una sucesión de escalares  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ , demuestre que son equivalentes,

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$  converge en  $H$ .
- b)  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$ .

23. Dado un abierto  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$ , se define

$$L^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ medible y } \int_{\Omega} |f|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Dado un multíndice  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ , y una función diferenciable  $u$ , se denota

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \text{y} \quad \partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Con estas notaciones, para cada  $m \in \mathbf{N}$  se define el ESPACIO DE SOBOLEV de orden  $m$ , como

$$H^m(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \forall \alpha, |\alpha| \leq m \text{ existe } g_\alpha \in L^2(\Omega), \text{ tal que} \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} u \partial^{\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_{\alpha} \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega) \right\}$$

En tal caso se escribe  $\partial^{\alpha} u = g_{\alpha}$ , y se define la norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^{\alpha} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Asuma que  $L^2(\Omega)$  provisto del producto escalar  $\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} uv dx$ , es un espacio de Hilbert, y demuestre que  $H^m(\Omega)$  es también un espacio de Hilbert. Muestre además que para todo  $f \in (H^m(\Omega))'$  existen funciones  $f_{\alpha} \in L^2(\Omega)$ ,  $|\alpha| \leq m$ , tales que  $f(v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} f_{\alpha} \partial^{\alpha} v dx \quad \forall v \in H^m(\Omega)$ .

24. Se dice que un espacio de Banach  $X$  es UNIFORMEMENTE CONVEXO si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$(x, y \in X, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ y } \|x - y\| > \epsilon) \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Demuestre que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

25. Sean  $X, Y$  espacios de Hilbert y considere  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

- a) Demuestre que  $A^*$  es inyectivo si y sólo si  $R(A)$  es denso en  $Y$ .  
b) Suponga que existe  $\beta > 0$  tal que

$$\inf_{z \in N(A)} \|x - z\| \leq \beta \|Ax\| \quad \forall x \in X.$$

Demuestre que  $R(A) = N(A^*)^{\perp}$ .

- c) Pruebe que  $A^* = R_X A' R_Y^{-1}$ , donde  $R_X : X' \rightarrow X$  y  $R_Y : Y' \rightarrow Y$  denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que  ${}^{\circ}N(A') = N(A^*)^{\perp}$ .

26. Sea  $X$  un espacio de Banach e  $Y$  un espacio vectorial normado. Sea  $\{T_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$  existe  $\forall x \in X$ . Pruebe que existe  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  tal que  $T_n(x) \rightarrow T(x) \quad \forall x \in X$ .

IND.: Aplicar TEOREMA DE BANACH-STEINHAUSS.

27. Sea  $H$  un espacio de Hilbert, y sea  $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  una sucesión de subespacios de dimensión finita de  $H$  tal que  $H_{n-1} \subset H_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$ , y  $\cup_{n \in \mathbf{N}} H_n$  es denso en  $H$ . Sea  $B : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$  una forma bilineal acotada y suponga que para todo  $f \in H'$  existe una única sucesión  $\{u_n(f)\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq H$  tal que

$$u_n(f) \in H_n \quad , \quad B(u_n(f), v_n) = f(v_n) \quad \forall v_n \in H_n,$$

y  $\|u_n(f)\| \leq C_0 \|f\| \quad \forall n \in \mathbf{N}$ , donde  $C_0$  es una constante positiva independiente de  $n$  y de  $f$ . Suponga además que para todo  $f \in H'$  existe un único  $u(f) \in H$  tal que

$$B(u(f), v) = f(v) \quad \forall v \in H.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u(f) - u_n(f)\| = 0 \quad \forall f \in H'.$$

IND.: Defina la proyección de Galerkin  $P_n : H \rightarrow H_n$ , donde  $\forall v \in H$ ,  $P_n v$  denota la única solución de  $B(P_n v, w_n) = B(v, w_n) \quad \forall w_n \in H_n$  y observe que  $P_n u(f) = u_n(f)$ .

28. Sea  $H$  un espacio vectorial normado real. Pruebe que si la norma de  $H$  satisface

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \{ \|x\|^2 + \|y\|^2 \} \quad \forall x, y \in H,$$

entonces ella proviene de un producto escalar.

29. Sea  $X$  un espacio de Banach y sea  $A \in \mathcal{L}(X, X)$ , con  $\|A\| < 1$ . Demuestre que  $(I + A)$  es invertible y que

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en  $\mathcal{L}(X, X)$ . Muestre también que

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

30. Sean  $X, Y$  espacios de Banach y sea  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$  un operador lineal. El grafo de  $T$  se denota por  $G_T$  y se define como

$$G_T := \{(x, y) \in X \times Y : x \in D(T), y = Tx\}$$

Suponga que  $D(T)$  y  $G_T$  son subespacios cerrados de  $X$  y  $X \times Y$ , respectivamente. Demuestre que  $T$  es acotado sobre  $D(T)$ .

31. (LEMA DE LAX-MILGRAM GENERALIZADO). Sean  $H_1, H_2$  espacios de Hilbert y sea  $B : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbf{R}$  una forma bilineal tal que

a)  $B$  es acotada, es decir existe  $C_1 > 0$  tal que

$$|B(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_2} \quad \forall (u, v) \in H_1 \times H_2.$$

b)  $B$  es débilmente coerciva, es decir existe  $C_2 > 0$  tal que

$$\sup_{\substack{v \in H_2 \\ v \neq 0}} \frac{|B(u, v)|}{\|v\|_{H_2}} \geq C_2 \|u\|_{H_1} \quad \forall u \in H_1,$$

y para cada  $v \in H_2$ ,  $v \neq 0$ , se tiene  $\sup_{u \in H_1} |B(u, v)| > 0$ .

Demuestre que, dado  $F \in H_2'$ , existe un único  $u \in H_1$  tal que  $B(u, v) = F(v)$  para todo  $v \in H_2$ , y además  $\|u\|_{H_1} \leq \frac{1}{C_2} \|F\|_{H_2'}$ .

32. Sean  $X, Y$  espacios vectoriales normados y  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$  un operador lineal. Un operador lineal  $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \rightarrow Y$  se dice una *extensión* de  $T$  si  $D(T) \subseteq D(\tilde{T})$  y  $Tx = \tilde{T}x \quad \forall x \in D(T)$ .

DEFINICIÓN. Se dice que  $\bar{T} : D(\bar{T}) \subseteq X \rightarrow Y$  es la **CLAUSURA** de  $T$ , si:

- i)  $\bar{T}$  es un operador lineal cerrado
- ii)  $\bar{T}$  es una extensión de  $T$
- iii) Si  $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \rightarrow Y$  es cualquier operador con las propiedades i) y ii), entonces  $\tilde{T}$  es una extensión de  $\bar{T}$ .

Sean  $X, Y$  espacios de Banach, y sea  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$  un operador lineal. Pruebe que  $T$  tiene una clausura  $\bar{T}$  sí y sólo si la siguiente condición se satisface

$$\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq D(T), \quad x_n \rightarrow 0, \quad Tx_n \rightarrow y \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

33. Sea  $X$  el espacio vectorial de las funciones continuas sobre  $\bar{\Omega} := [0, 1]$  provisto de la norma uniforme. Dados  $u_1, u_2, y \in X$ , considere la ecuación integral: *Hallar  $u \in X$  tal que*

$$u(t) - \int_0^1 u_1(t) s^2 u(s) ds - \int_0^1 u_2(t) (1 - \frac{3}{2}s) u(s) ds = y(t) \quad \forall t \in \bar{\Omega}. \quad (4)$$

- i) Si  $u_1(t) = 4t$  y  $u_2(t) = 1 \quad \forall t \in \Omega$ , deduzca una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (4) tenga al menos una solución.
  - ii) Pruebe que si  $u_1(t) = t$  y  $u_2(t) = 1$ , entonces para cada  $y \in X$  la ecuación integral (4) tiene una única solución.
34. Sean  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espacio de Banach,  $\{B_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, X)$  y  $B \in \mathcal{L}(X, X)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(x) - B(x)\|_X = 0$  para todo  $x \in X$ . Razone por contradicción y luego aplique el teorema del acotamiento uniforme para probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n K - B K\|_{\mathcal{L}(X, X)} = 0 \quad \forall K \in \mathcal{K}(X, X).$$

35. Sean  $X, Y, Z$  espacios vectoriales normados.

- i) Pruebe que si  $K \in \mathcal{L}(X, Y)$  es de rango finito, entonces  $K$  es compacto.
  - ii) Demuestre que si  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  y  $K \in \mathcal{K}(Y, Z)$ , entonces  $KA$  también es compacto.
36. Sea  $X$  un espacio vectorial normado de dimensión INFINITA y sea  $K \in \mathcal{K}(X, X)$  un operador inyectivo. Demuestre que  $K^{-1} \notin \mathcal{L}(X, X)$ .

37. Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Banach y sea  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Suponga que existen sucesiones  $\{F_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X'$ ,  $\{y_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq Y$ ,  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathbf{R}$  tales que

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|F_n\|_{X'} < +\infty, \quad \sup_{n \in \mathbf{N}} \|y_n\|_Y < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty,$$

y además

$$Ax = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \lambda_n F_n(x) y_n \quad \forall x \in X.$$

Demuestre que  $A$  es compacto.

38. i) Sea  $p > 1$  y considere el operador  $K : l_p \rightarrow l_p$  definido por

$$K(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_k}{k}, \dots) \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_p.$$

Demuestre que  $K$  es compacto.

- ii) Sean  $X, Y$  espacios vectoriales normados y considere el conjunto

$$\mathcal{H} := \{F \in (\mathcal{L}(X, Y))' : F(K) = 0 \quad \forall K \in \mathcal{L}(X, Y)\}.$$

Pruebe que  $\mathcal{H} = (\frac{\mathcal{L}(X, Y)}{K(X, Y)})'$ .

39. Sea  $X$  el espacio de las funciones continuas sobre  $[0, \pi]$  provisto de la norma uniforme. Dadas las funciones trigonométricas  $p_j, q_j \in X$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , con  $p_j(t) = \sin(jt)$  y  $q_j(t) = \cos(jt)$ ,  $\forall t \in [0, \pi]$ , se define el operador  $A : X \rightarrow X$  como

$$A(u) := \sum_{j=0}^n \left\{ \int_0^\pi u(t) p_j(t) dt \right\} p_j + \sum_{j=0}^n \left\{ \int_0^\pi u(t) q_j(t) dt \right\} q_j \quad \forall u \in X.$$

Demuestre que  $A \in \mathcal{L}(X, X)$  y encuentre explícitamente el operador adjunto  $A' : X' \rightarrow X'$ .

40. Sean  $H$  y  $V$  dos espacios de Hilbert tales que  $H \subseteq V$  y la inyección  $i : H \rightarrow V$  es compacta.

- a) Se dice que una forma bilineal acotada  $A$  definida sobre  $H \times H$  satisface la DESIGUALDAD DE GÄRDING si existen  $\alpha > 0$  y una forma bilineal acotada  $K : H \times V \rightarrow \mathbf{R}$  tales que

$$A(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 - K(v, v) \quad \forall v \in H.$$

Dado  $F \in H'$ , considere el siguiente problema variacional: Hallar  $u \in H$  tal que

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H. \quad (5)$$

Demuestre que si  $A$  satisface la desigualdad de Garding, entonces (5) tiene solución para cada  $F \in H'$  SI Y SOLO SI  $u = 0$  es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

- b) Se dice que  $A$  satisface la DESIGUALDAD DE GÅRDING GENERALIZADA si existen  $\alpha > 0$ , una forma bilineal acotada  $K : H \times V \rightarrow \mathbf{R}$ , y un isomorfismo  $S : H \rightarrow H$  tales que

$$A(v, Sv) \geq \alpha \|v\|_H^2 - K(v, Sv) \quad \forall v \in H.$$

Demuestre que si  $A$  satisface la desigualdad de Garding generalizada, entonces (5) tiene solución para cada  $F \in H'$  SI Y SOLO SI  $u = 0$  es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

41. Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Banach tal que  $X$  es reflexivo. Demuestre que  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  es compacto SI Y SÓLO SI  $A$  transforma sucesiones débilmente convergentes de  $X$  en sucesiones fuertemente convergentes de  $Y$ .
42. a) Sea  $\Omega = (0, 1)$  y  $X = L^2(\Omega)$ . Puede probarse que  $X$  provisto del producto escalar

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} f(x) g(x) dx \quad \forall f, g \in X$$

es un espacio de Hilbert, y que  $C_0^\infty(\Omega)$  es denso en  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Considere la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X$  definida por  $x_n(t) = \sqrt{2} \sin(n\pi t) \quad \forall t \in \Omega$ . Demuestre que

$$\|x_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad , \quad \text{y que} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, x_n \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Concluya además que  $x_n \xrightarrow{w} 0$ , y que  $x_n$  NO CONVERGE FUERTEMENTE a la función nula.

- b) A propósito de lo anterior, demuestre que en un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita, la convergencia débil no es equivalente a la convergencia fuerte.
43. DEFINICIÓN. Sea  $X$  un espacio de Banach y  $T : X \rightarrow X'$  un operador NOLINEAL. Se dice que  $T$  satisface la propiedad (S) si para toda sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X$  tal que

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad \text{y} \quad (T(x_n))(x_n - x) - (T(x))(x_n - x) \rightarrow 0,$$

se tiene  $x_n \rightarrow x$ .

Sean  $H, Q, V$  espacios de Banach tales que  $H \subseteq V$  y  $\mathbf{i} : H \rightarrow V$  es compacta. Sea  $X := H \times Q$ , y considere una forma bilineal acotada  $B : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  y un operador no lineal  $A : H \rightarrow H'$  que satisfacen las siguientes propiedades

- i) existe  $C_0 > 0$  tal que

$$B((u, \lambda), (u, \lambda)) \geq C_0 \|\lambda\|_Q^2 \quad \forall (u, \lambda) \in X.$$

- ii) existen  $C_1, C_2 > 0$  tal que para todo  $u, v \in H$

$$(A(u))(u - v) - (A(v))(u - v) \geq C_1 \|u - v\|_H^2 + R(u, v),$$

donde

$$|R(u, v)| \leq C_2 \{1 + \|u\|_H + \|v\|_H\} \|u - v\|_V.$$

Demuestre que el operador no lineal  $T : X \rightarrow X'$  definido por

$$(T(u, \lambda))(v, \mu) := (A(u))(v) + B((u, \lambda), (v, \mu)),$$

satisface la propiedad (S).

44. a) Sean  $X, Y$  espacios de Banach y suponga que existe un operador  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  tal que  $N(T) = \{0\}$  y  $R(T) = Y$ . Demuestre que  $X$  es reflexivo (separable) si y sólo si  $Y$  es reflexivo (separable).
- b) Sean  $X, Y$  espacios de Banach separables. Demuestre que el espacio producto  $X \times Y$  también es separable.
- c) Dado un abierto  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^N$  y  $p \in \mathbf{R}$ ,  $2 \leq p < \infty$ , se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ medible y } \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_{\Omega} |f|^p dx \right\}^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Puede probarse que  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$  es un espacio de Banach separable. Por otra parte, el espacio de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  está dado por

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \text{ existe } g_i \in L^p(\Omega), i = \overline{1, N} \text{ tal que} \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}$$

En tal caso se escribe  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ , y se define la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Puede probarse que  $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$  también es Banach. Demuestre que  $W^{1,p}(\Omega)$  es separable.

45. Sean  $X, Y$  espacios de Banach y sea  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Se dice que  $T$  es DÉBILMENTE COMPACTO si para toda sucesión acotada  $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  de  $X$  existe una subsucesión  $\{x_n^{(1)}\}_{n \in \mathbf{N}}$  tal que  $\{Tx_n^{(1)}\}_{n \in \mathbf{N}}$  converge débilmente en  $Y$ . Pruebe que si  $X$  o  $Y$  es *reflexivo*, entonces todo operador  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  es débilmente compacto.
46. Sean  $a, b \in \mathbf{R}$  tal que  $-\infty < a < b < +\infty$ . Asuma que  $C[a, b]$  es separable, y demuestre que para todo entero no negativo  $k$ ,  $C^k[a, b]$  también es separable.
47. Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbf{R}^2$  con frontera suave  $\Gamma$ . Considere el problema de valores de contorno:

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{en } \Gamma, \quad \int_{\Omega} u dx = a_1, \quad (6)$$

donde  $a_1 \in \mathbf{R}$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ , y  $g \in L^2(\Gamma)$  satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_{\Omega} f \, dx + \int_{\Gamma} g \, ds = 0.$$

Demuestre que una formulación débil de (6) consiste en: *Hallar*  $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$  tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \lambda \int_{\Omega} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, ds,$$

$$\mu \int_{\Omega} u \, dx = \mu a_1,$$

para todo  $(v, \mu) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ . Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene única solución, la cual depende continuamente de los datos.

48. a) Sea  $X$  un espacio de Banach, y considere una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X$  tal que  $x_n \xrightarrow{w} x$ . Demuestre que  $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$ .

b) Sea  $X$  un espacio de Banach uniformemente convexo, y sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  una sucesión en  $X$  tal que  $x_n \xrightarrow{w} x$  y  $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$ . Pruebe que  $x_n \rightarrow x$ .

49. Sean  $X, Y$  espacios vectoriales normados y  $T : X \rightarrow Y$  un operador compacto. Demuestre que  $\mathcal{R}(T)$  es separable.

IND.: Escriba  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \|x\| \leq n\}$ , y luego use que todo subconjunto relativamente compacto de un espacio métrico es separable.

50. Un importante resultado establece que *todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo*. En lo que sigue suponga que  $\Omega$  es un abierto de  $\mathbf{R}^n$  y que  $p \in \mathbf{R}$  es tal que  $p \geq 2$ .

a) A partir del hecho que  $\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2} \forall \alpha, \beta \geq 0$ , demuestre la desigualdad de Clarkson:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2} \left\{ \|f\|_{L^p(\Omega)}^p + \|g\|_{L^p(\Omega)}^p \right\} \quad \forall f, g \in L^p(\Omega).$$

b) Utilice la desigualdad anterior para probar que  $L^p(\Omega)$ ,  $2 \leq p < \infty$ , es uniformemente convexo y por lo tanto reflexivo. Además, deduzca que  $W^{1,p}(\Omega)$  también es reflexivo.

51. Sea  $V$  un espacio de Hilbert y  $a : V \times V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  una forma trilineal tal que para todo  $w \in V$ , la forma bilineal  $a(w; \cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  es acotada. Dado  $F \in V'$ , considere el problema: *Hallar*  $u \in V$  tal que

$$a(u; u, v) = F(v) \quad \forall v \in V. \tag{7}$$

Suponga que existe  $\alpha > 0$  tal que

$$a(w; v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v, w \in V.$$

Asuma además que existe una constante  $C_0 > 0$  tal que para todo  $w_1, w_2, u, v \in V$ ,

$$|a(w_1; u, v) - a(w_2; u, v)| \leq C_0 \|w_1 + w_2\|_V \|u\|_V \|v\|_V \|w_1 - w_2\|_V.$$

Encuentre una constante positiva  $C_1$  tal que para todo  $F \in V'$ ,  $\|F\|_{V'} \leq C_1$ , el problema (7) admite una única solución.

52. a) El TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER establece que: *Dado un subconjunto  $S$  compacto, convexo, y no vacío de un espacio vectorial de dimensión finita, y una aplicación continua  $T$  de  $S$  en  $S$ , entonces  $T$  tiene al menos un punto fijo.* Use este resultado de Brouwer para demostrar que si  $X$  es un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y norma  $\|\cdot\|$ , y si  $F$  es una aplicación continua de  $X$  en  $X$  tal que, para algún  $\mu > 0$ ,  $\langle F(u), u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in X$  con  $\|u\| = \mu$ , entonces existe  $u_0 \in X$ ,  $\|u_0\| \leq \mu$ , tal que  $F(u_0) = 0$ .
- b) Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^2$  con frontera suave  $\Gamma$ , y sea  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ . EL PROBLEMA DE NAVIER-STOKES, un problema de suma importancia en mecánica de fluidos, consiste en encontrar el vector de velocidades  $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$  y la presión  $p$  de un fluido, tales que

$$-\Delta \mathbf{u} + \sum_{j=1}^2 u_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma, \quad \int_{\Omega} p \, dx = 0.$$

Defina los espacios  $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ , y

$$Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\}.$$

Demuestre que la formulación débil de (8) se reduce a: *encontrar  $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$  tales que:*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q, \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $a : H \times H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $b : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ , y  $f \in H'$ , están definidas por

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx, \\ b(\mathbf{v}, p) &:= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad f(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx. \end{aligned}$$

c) En lo que sigue considere un problema del tipo (9), no necesariamente proveniente de (8), y asuma que las siguientes hipótesis se cumplen:  $b$  es una forma bilineal acotada,  $b$  satisface la condición de Babuska-Brezzi continua, y para cada  $\mathbf{w} \in H$  la aplicación  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$  es también una forma bilineal acotada. Sea  $V := \{\mathbf{v} \in H : b(\mathbf{v}, q) = 0 \ \forall q \in Q\}$ . Demuestre que (9) puede reducirse, equivalentemente, al siguiente problema no-lineal: hallar  $\mathbf{u} \in V$  tal que

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (10)$$

d) Además de lo dicho en c), suponga ahora que: existe una constante  $\alpha > 0$  tal que  $a(\mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|^2$  para todo  $\mathbf{v} \in V$ ;  $V$  es separable y para cada  $\mathbf{v} \in V$ , la aplicación  $\mathbf{u} \rightarrow a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$  es *secuencialmente débilmente continua*, es decir

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u} \in V \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a(\mathbf{u}_n; \mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Demuestre que el problema (10) tiene al menos una solución  $\mathbf{u} \in V$ .

IND.: Muestre primero que existe una sucesión  $\{\mathbf{v}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  en  $V$  tal que para todo  $m \geq 1$  el conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$  es linealmente independiente, y las combinaciones lineales finitas de los  $\mathbf{v}_n$  constituyen un conjunto denso en  $V$ . Luego, denote por  $V_m$  al subespacio de  $V$  generado por  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ , y aplique el método de Galerkin en conjunto con lo probado en parte a) para construir una sucesión de soluciones aproximantes.

53. Dado un abierto  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  y  $p \in [1, +\infty)$ , se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ medible y } \int_{\Omega} |f|^p dx < +\infty \right\}.$$

Puede probarse que  $L^p(\Omega)$ , provisto de la norma  $\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_{\Omega} |f|^p dx \right\}^{1/p}$  es un espacio de Banach. Además, dados  $f \in L^p(\Omega)$  y  $g \in L^q(\Omega)$ , con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , se tiene la desigualdad de Hölder

$$\int_{\Omega} |f g| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Ahora, para un multíndice  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ , y una función diferenciable  $u$ , se denota  $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$  y  $\partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ . Con estas notaciones, dado  $m \in \mathbf{N}$  se define el ESPACIO DE SOBOLEV de orden  $(m, p)$ , como

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha, |\alpha| \leq m \text{ existe } g_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tal que} \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}$$

En tal caso se escribe  $\partial^\alpha u = g_\alpha$ , y se define la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right\}^{1/p}.$$

Demuestre que  $W^{m,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach.

54. Sean  $X, Y$  espacios de Hilbert y considere  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Se define el operador adjunto de Hilbert de  $A$ , y se denota  $A^*$ , como  $A^* : Y \rightarrow X$ , donde para cada  $y \in Y$ ,  $A^*y \in X$  es el único elemento (dado por TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ) tal que  $\langle Ax, y \rangle_Y = \langle x, A^*y \rangle_X \quad \forall x \in X$ .

- a) Pruebe que  $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ ,  $\|A^*\| = \|A\|$  y que  $(A^*)^* = A$ .
- b) Demuestre que  $A^*$  es inyectivo si y sólo si  $R(A)$  es denso en  $Y$ .
- c) Suponga que existe  $\beta > 0$  tal que  $\inf_{z \in N(A)} \|x - z\| \leq \beta \|Ax\| \quad \forall x \in X$ , y demuestre que  $R(A) = N(A^*)^\perp$ .
- d) Pruebe que  $A^* = R_X A' R_Y^{-1}$ , donde  $R_X : X' \rightarrow X$  y  $R_Y : Y' \rightarrow Y$  denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que  ${}^oN(A') = N(A^*)^\perp$ .

55. Sea  $X$  un espacio vectorial normado.

- a) Sea  $Y$  un subespacio no denso de  $X$ . Demuestre que existe un funcional no nulo  $F \in X'$  tal que  $F(x) = 0$  para todo  $x \in Y$ .
- b) Sean  $x_0, x_1 \in X$  tal que  $x_0 \neq x_1$ . Pruebe que existe una sucesión  $\{F_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X'$  tal que  $\|F_n\| = \|x_0 - x_1\|^n$  y  $F_n(x_1) = F_n(x_0) + \|x_1 - x_0\|^{n+1}$  para todo  $n \in \mathbf{N}$ .

56. Sea  $X$  un espacio de Hilbert con aplicación de Riesz  $R_X : X' \rightarrow X$ , y sean  $S, T$ , subconjuntos de  $X$  y  $X'$ , respectivamente. Establezca qué relaciones existen entre  $S^o$  y  $S^\perp$ , y entre  ${}^oT$  y  $R_X(T)$ .

57. Sean  $U$  un espacio vectorial normado y  $V$  un espacio de Banach. Además, sea  $P : U' \rightarrow \mathcal{L}(U, V)$  un operador lineal cerrado tal que  $N(P)$  es el funcional nulo sobre  $U$  y  $R(P) = \mathcal{L}(U, V)$ . Demuestre que existe una constante  $\alpha > 0$  tal que

$$\alpha \|F\|_{U'} \leq \|P(F)\|_{\mathcal{L}(U, V)} \quad \forall F \in \mathcal{D}(P).$$

58. Sean  $X, Y$  espacios de Banach y  $A : X \rightarrow Y$  un operador lineal. Pruebe que si  $GA \in X' \quad \forall G \in Y'$ , entonces  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

IND.: Hacer una demostración alternativa utilizando el TEOREMA DEL GRAFO CERRADO en vez del TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS.

59. Sean  $H, Q, V$  y  $W$  espacios de Hilbert tales que  $H \xrightarrow{c} V$  and  $Q \xrightarrow{c} W$ . Sean  $a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}, b : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$  formas bilineales acotadas y defina

$$B : (H \times Q) \times (H \times Q) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$B((u, \lambda), (v, \mu)) := a(u, v) + b(v, \lambda) + b(u, \mu) \quad \forall (u, \lambda), (v, \mu) \in H \times Q.$$

Suponga que existe una forma bilineal acotada  $a_0 : H \times V \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $\tilde{a} := a + a_0$  es  $H$ -elíptica; es decir, existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\tilde{a}(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H.$$

También, asuma que existen una forma bilineal acotada  $b_0 : V \times W \rightarrow \mathbf{R}$  y una constante  $\beta > 0$  tales que  $\tilde{b} := b + b_0$  verifica

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\tilde{b}(v, \lambda)}{\|v\|_H} \geq \beta \|\lambda\|_Q \quad \forall \lambda \in Q.$$

Demuestre que  $B$  satisface la DESIGUALDAD DE GÅRDING GENERALIZADA.

60. Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y sea  $J : V \rightarrow \mathbf{R}$  un funcional no lineal. Se dice que  $J$  admite una derivada direccional en  $v \in V$ , en la dirección  $\varphi \in V$ , si la expresión  $\frac{J(v+\epsilon\varphi)-J(v)}{\epsilon}$  admite un límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . El valor de este límite se denota  $DJ(v, \varphi)$ . Entonces,  $J$  se dice diferenciable en el sentido de GATEAUX (o  $G$ -diferenciable) en  $v \in V$ , si  $DJ(v, \varphi)$  existe para todo  $\varphi \in V$ . Ahora, si  $J$  es  $G$ -diferenciable en  $v \in V$  y si  $DJ(v, \cdot) \in V'$ , se concluye, por el Teorema de Representación de Riesz, que existe un único elemento  $z \in V$  tal que  $DJ(v, \varphi) = \langle z, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in V$ . En tal caso, se denota  $z := J'(v)$  y se llama el GRADIENTE de  $J$  en  $v$ .

Se dice que  $J$  tiene segunda diferencial en el sentido de Gateaux en  $v \in V$ , en las direcciones  $\varphi$  y  $\psi \in V$ , si la expresión  $\frac{DJ(v+\epsilon\psi, \varphi) - DJ(v, \varphi)}{\epsilon}$  admite un límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . El valor de este límite se denota  $D^2J(v, \varphi, \psi)$ .

- a) Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^n$  y considere  $V := L^2(\Omega)$ . Defina  $J_0 : V \rightarrow \mathbf{R}$  por

$$J_0(v) := \int_{\Omega} (v^2 + v) dx \quad \forall v \in V$$

y calcule  $J'_0(v)$  para todo  $v \in V$ . Qué puede decir de  $J'_0(v)$  si  $J_0$  se restringe al espacio de Sobolev  $H^1(\Omega)$ ?

- b) Suponga que  $J$  es  $G$ -diferenciable en  $(v + \alpha\varphi)$ , en la dirección  $\varphi$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Demuestre que existe  $\beta \in (0, 1)$  tal que

$$J(v + \varphi) = J(v) + DJ(v + \beta\varphi, \varphi).$$

- c) Suponga que  $J$  es  $\alpha$ -convexo, esto es, existe  $\alpha > 0$  tal que para todo  $u, v \in V$  y para todo  $\beta \in [0, 1]$ :

$$J((1 - \beta)u + \beta v) \leq (1 - \beta)J(u) + \beta J(v) - \frac{\alpha}{2}\beta(1 - \beta)\|u - v\|^2.$$

Además, asuma que  $J$  es  $G$ -diferenciable en todo  $v \in V$ . Demuestre que para todo  $u, v \in V$  se tiene:

$$DJ(u, u - v) - DJ(v, u - v) \geq \alpha \|u - v\|^2$$

y

$$J(v) \geq J(u) + DJ(u, v - u) + \frac{\alpha}{2} \|v - u\|^2.$$

- d)** Suponga que  $J$  es  $G$ -diferenciable en  $v \in V$  y que, dada una dirección  $\varphi \in V$ ,  $D^2J(v + \alpha\varphi, \varphi, \varphi)$  existe  $\forall \alpha \in [0, 1]$ . Demuestre que hay una constante  $\beta \in (0, 1)$  tal que

$$J(v + \varphi) = J(v) + DJ(v, \varphi) + \frac{1}{2} D^2J(v + \beta\varphi, \varphi, \varphi).$$

61. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y sea  $V$  un subespacio cerrado de  $H$ . El anulador (o aniquilador) de  $V$  se denota por  $V^\circ$  y se define como

$$V^\circ := \{ F \in H' : F(x) = 0 \quad \forall x \in V \}.$$

Demuestre que

$$H = V \oplus \mathcal{R}(V^\circ),$$

donde  $\mathcal{R} : H' \rightarrow H$  denota la aplicación de Riesz.

62. Sea  $X$  un espacio vectorial normado y sea  $x_0 \in X$  tal que  $|F(x_0)| \leq C_0$  para todo  $F \in X'$  con  $\|F\|_{X'} = 1$ . Demuestre que  $\|x_0\| \leq C_0$ .
63. Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $B : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$  una forma bilineal tal que

- i)**  $B$  es simétrica, es decir

$$B(u, v) = B(v, u) \quad \forall (u, v) \in H \times H.$$

- ii)**  $B$  es acotada, es decir existe  $C_1 > 0$  tal que

$$|B(u, v)| \leq C_1 \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall (u, v) \in H \times H.$$

- iii)**  $B$  es débilmente coerciva, es decir existe  $C_2 > 0$  tal que

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|B(u, v)|}{\|v\|_H} \geq C_2 \|u\|_H \quad \forall u \in H.$$

Demuestre que, dado  $F \in H'$ , existe un único  $u \in H$  tal que  $B(u, v) = F(v)$  para todo  $v \in H$ , y además,  $\|u\|_H \leq \frac{1}{C_2} \|F\|_{H'}$ .

64. Sea  $V$  un subespacio de un Hilbert  $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y defina

$$V^\perp := \{ y \in Y : \langle y, z \rangle = 0 \quad \forall z \in V \}.$$

Si  $\bar{V}$  denota la clausura de  $V$ , demuestre que  $\bar{V}^\perp = V^\perp$ . Concluya que  $V$  es denso en  $Y$  sí y sólo sí  $V^\perp = \{0\}$ .

65. Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbf{R}^n$ . Asuma que la inyección  $i : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  es compacta y demuestre que la inyección  $i : H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-1}(\Omega)$  también es compacta, para todo entero  $m \geq 2$ .
66. Sean  $X$  y  $M$  espacios de Hilbert y sean  $a : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $b : X \times M \rightarrow \mathbf{R}$  dos formas bilineales acotadas. Suponga además que  $a$  es simétrica y semi-definida positiva sobre  $X$ . Dados  $F \in X'$ ,  $G \in M'$  se define el operador  $\mathcal{J} : X \times M \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$\mathcal{J}(v, \mu) := \frac{1}{2} a(v, v) + b(v, \mu) - F(v) - G(\mu).$$

Considere entonces los siguientes problemas variacionales:

Hallar  $(u, \lambda) \in X \times M$  tal que

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= F(v) \quad \forall v \in X, \\ b(u, \mu) &= G(\mu) \quad \forall \mu \in M. \end{aligned} \quad (11)$$

Hallar  $(u, \lambda) \in X \times M$  tal que

$$\mathcal{J}(u, \mu) \leq \mathcal{J}(u, \lambda) \leq \mathcal{J}(v, \lambda) \quad \forall (v, \mu) \in X \times M. \quad (12)$$

Demuestre que  $(u, \lambda)$  es solución de (11) si y sólo si  $(u, \lambda)$  es solución de (12).

67. Sean  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ ,  $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$  espacios de Hilbert y considere operadores  $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X, X)$ ,  $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X, Y)$  y  $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$ . Suponga que  $\mathbf{S}$  es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \geq 0 \quad \forall y \in Y,$$

y que existen constantes  $\alpha, \beta > 0$  tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x \rangle_X \geq \alpha \|x\|_X^2 \quad \forall x \in X$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y \rangle_Y}{\|x\|_X} \geq \beta \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

Dados  $f \in X$  y  $g \in Y$ , demuestre que existe un único par  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$  tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante  $C > 0$ , que depende de  $\|\mathbf{P}\|$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\|\mathbf{Q}\|$ , tal que

$$\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\| \leq C \{ \|f\| + \|g\| \}.$$

IND.: Transforme a una ecuación equivalente en  $Y$  y luego aplique el Lema de Lax-Milgram.

68. Sean  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ ,  $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$  espacios de Hilbert y considere operadores  $\mathbf{P} : X \rightarrow X$ ,  $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X, Y)$  y  $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$ . Suponga que  $\mathbf{S}$  es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \geq 0 \quad \forall y \in Y,$$

que  $\mathbf{P}$  es NOLINEAL, y que existen constantes  $M, \alpha, \beta > 0$  tales que

$$\|\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}\|_X \leq M \|x - \bar{x}\|_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x - \bar{x} \rangle_X \geq \alpha \|x - \bar{x}\|_X^2 \quad \forall x, \bar{x} \in X,$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y \rangle_Y}{\|x\|_X} \geq \beta \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

Dados  $f \in X$  y  $g \in Y$ , demuestre que existe un único par  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$  tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante  $C > 0$ , que depende de  $M, \alpha, \beta$  y  $\|\mathbf{Q}\|$ , tal que

$$\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\| \leq C \{ \|f\| + \|g\| + \|\mathbf{P}(0)\| \}.$$

69. Sea  $\Omega := (0, 3)$  y considere el problema de valores de contorno:  $-u'' + (x+1)u = x$  en  $\Omega$ ,  $u(0) = u(3) = 0$ . Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Considere la partición uniforme  $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$  y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio

$$H_2 := \{ v \in C(\bar{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \quad \text{y} \quad v|_{[x_j, x_{j-1}]} \text{ es un polinomio} \\ \text{de grado} \leq 1, \forall j \in \{1, 2, 3\} \}.$$

IND.: Notar que  $H_2 = \langle \{e_1, e_2\} \rangle$ , donde  $e_j \in H_2$  es tal que  $e_j(x_i) = \delta_{ij}$  para todo  $i, j \in \{1, 2\}$ .

70. a) Sea  $S$  un subconjunto de un Hilbert  $H$  y sea  $M$  el subespacio cerrado generado por  $S$ . Pruebe que  $S^\perp$  es un subespacio cerrado de  $H$ ,  $M^\perp = S^\perp$ , y  $M = (S^\perp)^\perp$ .
- b) Sea  $V$  un subespacio de un Hilbert  $H$ . Demuestre que  $H = \bar{V} \oplus V^\perp$ .

71. Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^2$  con frontera suave  $\Gamma$ , y sea  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ . EL PROBLEMA DE STOKES consiste en encontrar el vector de velocidades  $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$  y la presión  $p$  de un fluido, tales que

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, & \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma, & \int_{\Omega} p \, dx &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Defina los espacios  $H := [H_0^1(\Omega)]^2$  y  $Q := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\}$ . Demuestre que la formulación débil de (13) se reduce a: encontrar  $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$  tales que:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, p) &= F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H, \\ B(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q, \end{aligned}$$

donde  $A : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $B : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$  y  $F \in H'$ , están definidos por

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx,$$

$$B(\mathbf{v}, p) := - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx.$$

72. a) Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de HILBERT. Dados  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq H$  y  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \subseteq H'$ , se define el operador  $A : H \rightarrow H$  como

$$A(u) := \sum_{j=1}^n F_j(u) p_j \quad \forall u \in H.$$

Demuestre que  $A \in \mathcal{L}(H, H)$  y encuentre explícitamente el operador adjunto  $A^* : H \rightarrow H$ .

- b) Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  el espacio de HILBERT  $L^2(0, 1)$  provisto del producto escalar

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u(t) v(t) \, dt \quad \forall u, v \in H.$$

Dados los polinomios  $p_j \in H$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , con  $p_j(t) = t^j \, \forall t \in (0, 1)$ , se define el operador  $A : H \rightarrow H$  como

$$A(u) := \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^1 u(t) p_j(t) \, dt \right\} p_j \quad \forall u \in H.$$

Demuestre que  $A$  es lineal, acotado y AUTOADJUNTO, esto es  $A \in \mathcal{L}(H, H)$  y  $A = A^*$ .

73. Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Banach, y sea  $A : X \rightarrow Y$  un operador lineal cerrado con dominio  $D(A)$  e imagen  $R(A)$ . Demuestre que son equivalentes:

- El operador  $A$  es inyectivo, y  $A^{-1}$  es acotado sobre  $R(A)$ .
- Existe una constante positiva  $C$  tal que  $\|Ax\| \geq C\|x\|$  para todo  $x \in D(A)$ .
- $R(A)$  es cerrado en  $Y$ , y  $A$  es inyectivo.

74. Sea  $M$  un subespacio cerrado de un Hilbert  $H$ . Por el Teorema de Proyección, cada  $x \in H$  puede escribirse únicamente en la forma  $x = y + z$ , con  $y \in M$  y  $z \in M^\perp$ . El punto  $y \in M$  se llama la PROYECCIÓN de  $x$  en  $M$ , y el operador  $P := X \rightarrow M$ ,  $Px = y$ , se llama la proyección sobre  $M$ . También se denota  $P := P_M$  y se dice que  $P$  es una proyección.

- i) Pruebe que si  $P$  es una proyección, entonces  $P$  es autoadjunto,  $P^2 = P$ , y  $\|P\| = 1$  si  $P \neq 0$ .
- ii) Pruebe que si  $P \in \mathcal{L}(H, H)$  es autoadjunto y  $P^2 = P$ , entonces  $P$  es una proyección sobre algún subespacio cerrado de  $H$ .
75. a) Sea  $S$  un subespacio de un Hilbert  $H$ . Demuestre que  $S^\perp = \bar{S}^\perp$ .
- b) Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^n$  con frontera suave  $\Gamma$ , y considere el espacio de Sobolev  $H^1(\Omega)$ . Encuentre y caracterice el subespacio  $V$  de  $H^1(\Omega)$  tal que  $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus V$ .
76. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $A : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$  una forma bilineal acotada y  $H$ -elíptica, y  $F \in H'$ . Además, sea  $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  una sucesión de subespacios de dimensión finita de  $H$ , y para cada  $n \in \mathbf{N}$  considere una forma bilineal acotada  $A_n : H_n \times H_n \rightarrow \mathbf{R}$  tal que la sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  es uniformemente elíptica. Esto significa que existe  $\tilde{\alpha} > 0$ , independiente de  $n$ , tal que  $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha} \|v_n\|_H^2 \forall v_n \in H_n, \forall n \in \mathbf{N}$ .

- a) Pruebe que existen únicos  $u \in H$  y  $u_n \in H_n$  tales que

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H$$

y

$$A_n(u_n, v_n) = F(v_n) \quad \forall v_n \in H_n.$$

- b) Demuestre que existe  $C > 0$ , independiente de  $n \in \mathbf{N}$ , tal que

$$\|u - u_n\|_H \leq C \inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H + \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|A(v_n, w_n) - A_n(v_n, w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}.$$

77. Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^n$ , y sea  $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  una función continua para la cual existen constantes  $M, \beta > 0$ , tales que  $\beta \leq \kappa(x) \leq M$  para todo  $x \in \Omega$ . Defina el conjunto

$$S := \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1\},$$

y demuestre que para todo  $u \in H_0^1(\Omega)$  existe un único  $g \in S$  tal que

$$\int_{\Omega} \kappa(x) \|\nabla u(x) - \nabla g(x)\|_{\mathbf{R}^n}^2 dx = \min_{v \in S} \int_{\Omega} \kappa(x) \|\nabla u(x) - \nabla v(x)\|_{\mathbf{R}^n}^2 dx.$$

78. Sean  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  y  $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q)$  espacios de Hilbert, y sea  $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$  con espacio nulo  $V := N(\mathbf{B})$ .

- a) Demuestre que  $\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \quad \forall q \in Q.$

b) Suponga que existe  $\beta > 0$  tal que  $\sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q$ , y pruebe que  $H = R(\mathbf{B}^*) \oplus V$ .

79. (LA CONDICIÓN INF-SUP CONTINUA). Sean  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$  e  $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$  espacios de Hilbert y considere  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $A$  es sobreyectivo.
- ii)  $A^* : Y \rightarrow X$  es inyectivo y de rango cerrado.
- iii) Existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\|A^*(y)\|_X \geq \alpha \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

iv) Existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|\langle A(x), y \rangle_Y|}{\|x\|_X} \geq \alpha \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

80. (PSEUDO-INVERSA DE MOORE-PENROSE). Sean  $X, Y$  espacios de Hilbert,  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  tal que  $\mathcal{R}(A) = Y$ , y sea  $V = N(A)$ . Dado el operador de proyección ortogonal  $P : X \rightarrow V$ , considere  $B : Y \rightarrow X$  tal que  $B(y) = x - P(x)$  para todo  $y \in Y$ , donde  $x \in X$  es tal que  $A(x) = y$ .

- a) Demuestre que  $B$  está bien definido y que  $B$  es una biyección lineal y acotada de  $Y$  en  $V^\perp$ . Pruebe, además, que  $B$  es un *inverso a derecha* de  $A$ , esto es  $AB(y) = y$  para todo  $y \in Y$ .
- b) Defina  $A_0 : V^\perp \rightarrow Y$  como  $A_0(x) = A(x)$  para todo  $x \in V^\perp$ , es decir  $A_0 = A|_{V^\perp}$ , y pruebe que  $A_0^{-1} = B$ .
- c) Extienda los resultados anteriores al caso en que  $\mathcal{R}(A)$  es un subespacio CERRADO propio de  $Y$ .

81. (LEMA DE AUBIN-NITSCHKE). Sean  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ,  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$  espacios de Hilbert tal que  $V \subseteq H$  y el operador identidad  $\mathbf{i} : V \rightarrow H$  es continuo. Sea  $A : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  una forma bilineal acotada y  $V$ -elíptica, y considere el operador  $\mathbf{P} : H \rightarrow V$ , donde para todo  $g \in H$ ,  $\mathbf{P}(g)$  es el único elemento en  $V$  que satisface

$$A(v, \mathbf{P}(g)) = \langle g, v \rangle_H \quad \forall v \in V.$$

Dados  $F \in V'$  y  $V_h$  un subespacio de dimensión finita de  $V$ , denote por  $u \in V$  y  $u_h \in V_h$  las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

y

$$A(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Demuestre que existe  $C > 0$  tal que

$$\|u - u_h\|_H \leq C \|u - u_h\|_V \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{\|g\|_H} \inf_{v_h \in V_h} \|\mathbf{P}(g) - v_h\|_V \right\}.$$

82. Dados  $\Omega := (0, 1)$  y  $f \in L^2(\Omega)$ , interesa resolver el siguiente problema:

$$-u'' = f \quad \text{en } \Omega, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 1. \quad (14)$$

a) Defina  $\sigma := u'$  en  $\Omega$  y demuestre que una formulación variacional MIXTA de (14) se reduce a: Hallar  $(\sigma, (u, \varphi)) \in H \times Q$  tal que

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, (u, \varphi)) &= F(\tau) \quad \forall \tau \in H, \\ b(\sigma, (v, \psi)) &= G((v, \psi)) \quad \forall (v, \psi) \in Q, \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $H := H^1(\Omega)$ ,  $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$ ,  $F \in H'$ ,  $G \in Q'$ , y  $a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $b : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$  son las formas bilineales definidas por

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) &:= \int_{\Omega} \sigma \tau \, dx \quad \forall \sigma, \tau \in H, \\ b(\tau, (v, \psi)) &:= \int_{\Omega} v \tau' \, dx + \psi \tau(1) \quad \forall (\tau, (v, \psi)) \in H \times Q. \end{aligned}$$

b) Defina los funcionales  $F$  y  $G$ , y aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (15) tiene una única solución.

83. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert COMPLEJO, y sean  $u, v \in H$ ,  $u \neq v$ , tales que  $\|u\| = \|v\|$ . Defina  $w := u - v$  y considere la proyección ortogonal  $\mathbf{P} : H \rightarrow S^\perp$ , donde  $S$  es el subespacio generado por  $w$ . Demuestre que

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{P}(v) = \frac{u + v}{2} + \left\{ \frac{\mathbf{i} \operatorname{Im}(\langle u, v \rangle)}{\|w\|^2} \right\} w.$$

Qué sucede cuando  $H$  es un Hilbert REAL ? Interprete gráficamente.

84. Sean  $\Omega = ]a, b[$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ , y considere el problema de valores de contorno

$$u^{(4)} = f \quad \text{en } \Omega, \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0. \quad (16)$$

i) Defina la incógnita auxiliar  $\sigma := u''$  en  $\Omega$  y demuestre que una formulación variacional MIXTA de (16) se reduce a: Hallar  $(\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \tau \, dx + \int_{\Omega} u' \tau' \, dx &= 0 \quad \forall \tau \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} v' \sigma' \, dx &= - \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (17)$$

ii) Aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (17) tiene una única solución que depende continuamente del dato  $f$ .

85. (LEMA DE FORTIN). Sean  $H, Q$  espacios de Hilbert, y sea  $b : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$  una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe  $\beta > 0$  tal que:

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_H} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q. \quad (18)$$

Sean  $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  y  $\{Q_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  sucesiones de subespacios de dimensión finita de  $H$  y  $Q$ , respectivamente, y asuma que para cada  $n \in \mathbf{N}$  existe  $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$  tal que

$$b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) = 0 \quad \forall q_n \in Q_n.$$

Suponga que la familia de operadores  $\{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  es uniformemente acotada, es decir existe  $C > 0$  tal que  $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H, H_n)} \leq C$  para todo  $n \in \mathbf{N}$ , y demuestre que existe  $\beta^* > 0$ , independiente de  $n$ , tal que

$$\sup_{\substack{v_n \in H_n \\ v_n \neq 0}} \frac{b(v_n, q_n)}{\|v_n\|_H} \geq \beta^* \|q_n\|_Q \quad \forall q_n \in Q_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

86. Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^n$  con frontera de clase  $C^{0,1}$ , y considere el espacio de Sobolev  $H^2(\Omega)$ , con producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2(\Omega)}$ , norma inducida  $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ , y semi-norma  $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ . Además, sea  $P_1(\Omega)$  el espacio de polinomios sobre  $\Omega$  de grado  $\leq 1$  con base  $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$  donde  $p_0(x) = 1$  y  $p_i(x) = x_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\forall x := (x_1, \dots, x_n)^T \in \Omega$ .

a) (DESIGUALDAD DE POINCARÉ GENERALIZADA). Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|_{H^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^n |\langle v, p_i \rangle_{H^2(\Omega)}|^2 \right\}^{1/2} \quad \forall v \in H^2(\Omega),$$

y demuestre que existen  $C_1, C_2 > 0$  tales que

$$C_1 |||v||| \leq \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C_2 |||v||| \quad \forall v \in H^2(\Omega).$$

IND.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que  $\forall n \in \mathbf{N}$  existe  $v_n \in H^2(\Omega)$  tal que  $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} > n |||v_n|||$ . Luego, defina  $w_n := \frac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}}$ , observe que  $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$ , note que  $|||w_n||| < \frac{1}{n}$ , y aplique el hecho que la inclusión de  $H^2(\Omega)$  en  $H^1(\Omega)$  es compacta.

b) (LEMA DE DENY-LIONS). Considere el espacio cociente  $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$  con norma  $||[v]||_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \inf_{p \in P_1(\Omega)} \|v - p\|_{H^2(\Omega)}$ , y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega).$$

Demuestre que  $|\cdot|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$  está bien definida y que existe  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} &\leq \| [v] \|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \\ &\leq C \| [v] \|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \quad \forall [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega). \end{aligned}$$

IND.: Note que para todo  $p \in P_1(\Omega)$  y para todo  $\alpha$  con  $|\alpha| = 2$  se tiene  $\partial^\alpha p = 0$ . Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.

c) (LEMA DE BRAMBLE-HILBERT). Sea  $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$  tal que  $\Pi(p) = p \forall p \in P_1(\Omega)$ . Demuestre que existe  $C > 0$  tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq C |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega).$$

IND.: Note que  $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v - p) \forall p \in P_1(\Omega)$ , y luego aplique el Lema de Deny-Lions.

87. Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^2$  y sea  $\mathcal{T} := \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  una triangularización de  $\Omega$ , es decir:

- i)  $\bar{T}_j$  es un triángulo con interior no-vacío  $\forall j \in \{1, \dots, N\}$ ,
- ii)  $T_i \cap T_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ , y
- iii)  $\bar{\Omega} = \cup \{ \bar{T}_j : j \in \{1, \dots, N\} \}$ .

a) Defina el subespacio de  $[L^2(\Omega)]^2$

$$H := \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j) \quad \forall j \in \{1, \dots, N\} \},$$

provisto de la norma

$$\| \boldsymbol{\tau} \| := \left\{ \| \boldsymbol{\tau} \|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \sum_{j=1}^N \| \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \|_{L^2(T_j)}^2 \right\}^{1/2} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H,$$

y demuestre que  $(H, \|\cdot\|)$  es un espacio de Hilbert real.

IND.: note que la pertenencia local  $\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j)$  está dada en el sentido distribucional, lo cual significa que existe  $z_j \in L^2(T_j)$  tal que

$$- \int_{T_j} \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx = \int_{T_j} z_j \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(T_j).$$

En este caso se escribe  $z_j = \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})$  en  $T_j$  (distribucionalmente).

b) Pruebe que existe un único  $\boldsymbol{\sigma} \in H$  tal que  $\| \boldsymbol{\sigma} \| \leq |\Omega|^{1/2}$  y

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx + \sum_{j=1}^N \int_{T_j} (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) - 1) \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H.$$

88. Sea  $\Omega := (0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbf{R}^2$  y considere el espacio de Hilbert  $(H(\text{div}; \Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , donde

$$H(\text{div}; \Omega) := \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \text{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(\Omega) \}$$

y

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \int_{\Omega} \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx + \int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\zeta}) \text{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx \quad \forall \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega).$$

Además, sea  $S$  el subespacio de  $H(\text{div}; \Omega)$  dado por

$$S := \{ \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma x_1, \beta + \gamma x_2) \quad \forall x := (x_1, x_2) \in \Omega; \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \},$$

y sea  $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div}; \Omega)$  definida por  $\boldsymbol{\sigma}(x) = (x_1 x_2, x_1 + x_2) \quad \forall x := (x_1, x_2) \in \Omega$ . Aplique el teorema de caracterización respectivo y encuentre la mejor aproximación de  $\boldsymbol{\sigma}$  por elementos de  $S$ , con respecto a la norma inducida por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

89. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $A : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$  una forma bilineal acotada y  $H$ -elíptica, y  $F \in H'$ . Además, sea  $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  una sucesión de subespacios de dimensión finita de  $H$ , y para cada  $n \in \mathbf{N}$  considere un funcional  $F_n \in H'_n$  y una forma bilineal acotada  $A_n : H_n \times H_n \rightarrow \mathbf{R}$ . Suponga también que existe  $\tilde{\alpha} > 0$ , independiente de  $n$ , tal que  $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha} \|v_n\|_H^2 \quad \forall v_n \in H_n, \forall n \in \mathbf{N}$ .

- a) Pruebe que existen únicos  $u \in H$  y  $u_n \in H_n$  tales que

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H \quad \text{y} \quad A_n(u_n, v_n) = F_n(v_n) \quad \forall v_n \in H_n.$$

- b) Demuestre que existe  $C > 0$ , independiente de  $n \in \mathbf{N}$ , tal que

$$\|u - u_n\|_H \leq C \left( \inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H + \|\mathbf{A}(v_n) \circ \mathbf{i}_n - \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H'_n} \right\} + \|F \circ \mathbf{i}_n - F_n\|_{H'_n} \right),$$

donde  $\mathbf{A} : H \rightarrow H'$  y  $\mathbf{A}_n : H_n \rightarrow H'_n$  son los operadores lineales y acotados inducidos por  $A$  y  $A_n$ , respectivamente, e  $\mathbf{i}_n : H_n \rightarrow H$  es la inyección canónica, esto es  $\mathbf{i}_n(v_n) = v_n \quad \forall v_n \in H_n$ .

90. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un Hilbert y sea  $P \in \mathcal{L}(H, H)$ , no trivial. Se dice que  $P$  es un PROYECTOR si satisface  $P^2 = P$ . En tal caso se dice que  $P$  es un PROYECTOR ORTOGONAL si además verifica que  $\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in R(P), \quad \forall v \in N(P)$ .

- a) Demuestre que si  $P \in \mathcal{L}(H, H)$  es un proyector entonces  $H = N(P) \oplus R(P)$  y  $\|P\| \geq 1$ .

- b) Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $P$  es un proyector ortogonal.
- ii)  $R(P) = N(P)^\perp$ .
- iii)  $P$  es autoadjunto

- c) Demuestre que si  $P \in \mathcal{L}(H, H)$  es un proyector ortogonal entonces  $\|P\| = 1$ .

91. Sean  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^n$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ , y considere el problema de valores de contorno:  $-\Delta u = f$  en  $\Omega$ ,  $u = 0$  en  $\partial\Omega$ . Se puede demostrar que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar  $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx + \int_{\Omega} u \, \text{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx - \int_{\Omega} v \, \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (19)$$

para todo  $(\boldsymbol{\tau}, v) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ , donde  $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$  en  $\Omega$  representa una incógnita adicional. Además, a partir de esta relación, y dado  $\delta \in \mathbf{R}$ , se deduce que

$$\delta \int_{\Omega} (\nabla u - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla v + \boldsymbol{\tau}) \, dx = 0 \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad (20)$$

y también

$$\int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \, \text{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx = - \int_{\Omega} f \, \text{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega). \quad (21)$$

De este modo, sumando (19), (20) y (21), se obtiene una formulación variacional mixta modificada, la cual tiene la forma: Hallar  $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$  tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) = F(\boldsymbol{\tau}, v) \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H}, \quad (22)$$

donde  $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}$  es una forma bilineal y  $F : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}$  es un funcional lineal. Demuestre que, eligiendo  $\delta$  convenientemente, el problema (22) tiene una única solución  $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H} := H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ .

IND.: La norma  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  y la seminorma  $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$  son equivalentes en  $H_0^1(\Omega)$ , es decir existe  $c > 0$  tal que

$$c \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq |v|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

92. Sean  $n \in \mathbf{N}$  y  $X := \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{R})$ , el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden  $n$  con coeficientes reales, provisto del producto escalar  $\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^t B)$   $\forall A, B \in X$ .

a) Demuestre que  $X = X_{\text{sim}} \oplus X_{\text{asim}}$ , donde

$$X_{\text{sim}} = \{A \in X : A^t = A\} \quad \text{y} \quad X_{\text{asim}} = \{A \in X : A^t = -A\}.$$

b) Sea  $C := (c_{ij})_{n \times n} \in X$  tal que  $c_{ij} = 1 \quad \forall i \geq j$  y  $c_{ij} = 0 \quad \forall i < j$ . Encuentre las mejores aproximaciones de  $C$  por matrices de  $X_{\text{sim}}$  y  $X_{\text{asim}}$ , con respecto a la norma inducida por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

93. (CLAUSURA DE OPERADORES). Sean  $X$  e  $Y$  Banach. Se dice que un operador lineal  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$  admite una clausura si existe un operador lineal  $B : \mathcal{D}(B) \subseteq X \rightarrow Y$  tal que  $B$  es una extensión de  $A$  y  $G(B) = \overline{G(A)}$ . Demuestre que  $A$  admite una clausura si y sólo si para toda sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$  tal que  $(x_n, A(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\mathbf{0}, y)$ , con  $y \in Y$ , se tiene necesariamente que  $y = \mathbf{0}$ .

94. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un Hilbert y sea  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \rightarrow H$  un operador lineal tal que  $\mathcal{D}(A)$  es denso en  $H$ .

a) Sea  $y \in H$  y suponga que existe  $\tilde{y} \in H$  tal que

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, \tilde{y} \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Demuestre que dicho  $\tilde{y}$  es único.

b) Considere el conjunto

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) := \{y \in H : \text{existe } \tilde{y} \in H \text{ tal que } \langle A(x), y \rangle = \langle x, \tilde{y} \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)\},$$

y defina el operador  $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \rightarrow H$  dado por  $\tilde{A}(y) := \tilde{y} \quad \forall y \in \mathcal{D}(\tilde{A})$ . Demuestre que  $\tilde{A}$  es lineal y cerrado.

95. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un Hilbert y sea  $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(H, H)$ , no trivial, distinto del operador identidad  $\mathbf{I} : H \rightarrow H$ , y tal que  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ . El objetivo de este ejercicio es probar que  $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)}$ , para cuyo efecto proceda como se indica:

a) Sea  $S$  un subespacio de dimensión 2 de  $H$  y sea  $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S, S)$ , no trivial, distinto del operador identidad  $\mathbf{I} : S \rightarrow S$ , y tal que  $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}$ . Pruebe que  $S = R(\mathbf{Q}) \oplus R(\mathbf{I} - \mathbf{Q})$  y concluya que existen vectores no nulos  $p, q, r, s \in S$  que satisfacen  $\langle p, q \rangle = \langle r, s \rangle = 1$ , tales que

$$\mathbf{Q}(v) = \langle q, v \rangle p \quad \text{y} \quad (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) = \langle s, v \rangle r \quad \forall v \in S.$$

b) A partir de la identidad  $v = \mathbf{Q}(v) + (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) \quad \forall v \in S$ , deduzca que  $\|p\|^2 \|q\|^2 = \|r\|^2 \|s\|^2 = 1 - \langle p, r \rangle \langle q, s \rangle$  y concluya así que

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S, S)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S, S)}.$$

c) Dado  $x \in H$  tal que  $\|x\| = 1$ , considere el subespacio  $S$  generado por los vectores  $x$  y  $\mathbf{P}(x)$  y defina  $\mathbf{Q} := \mathbf{P}|_S$ . Demuestre que  $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S, S)$ , observe que la dimensión de  $S$  es  $\leq 2$ , y luego pruebe, usando b), que  $\|(\mathbf{I} - \mathbf{P})(x)\| \leq \|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)}$ .

d) Concluya, a partir de c), que  $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)}$ .

96. Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^n$  con frontera suave  $\Gamma$ .

a) Considere el espacio de Sobolev  $H^1(\Omega)$  con norma  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  y semi-norma  $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ . Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|_{H^1(\Omega)}^2 + \left( \int_{\Omega} v \, dx \right)^2 \right\}^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

y demuestre que existen  $C_1, C_2 > 0$  tales que

$$C_1 |||v||| \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 |||v||| \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

IND.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que  $\forall k \in \mathbf{N}$  existe  $v_k \in H^1(\Omega)$  tal que  $\|v_k\|_{H^1(\Omega)} > k \|v_k\|$ . Recuerde que la inclusión de  $H^1(\Omega)$  en  $L^2(\Omega)$  es compacta, y que si  $w \in L^2(\Omega)$  es tal que  $\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , entonces necesariamente  $w$  es constante en  $\Omega$ .

b) Considere el problema de valores de contorno:

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad \int_{\Omega} u \, dx = 0,$$

donde  $f \in L^2(\Omega)$  es tal que  $\int_{\Omega} f \, dx = 0$ , y demuestre que su formulación débil se reduce a: Hallar  $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$  tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \lambda \int_{\Omega} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

$$\mu \int_{\Omega} u \, dx = 0 \quad \forall \mu \in \mathbf{R}.$$

Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene solución única, la cual depende continuamente de  $f$ .

97. Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado y sea  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  una base de un subespacio  $U$  de  $X$ .

a) Demuestre que existen  $F_1, F_2, \dots, F_n \in X'$  tales que  $F_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

b) Pruebe que  $X = U \oplus V$ , donde  $V := {}^\circ\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ .

98. Dado  $p \geq 1$ , considere el espacio vectorial normado

$$\ell_p(\mathbb{C}) := \{ \mathbf{x} := \{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} : x_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbf{N} \text{ y } \sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^p < +\infty \},$$

provisto de la suma y multiplicación por escalar usuales, y cuya norma está dada

$$\text{por } \|\mathbf{x}\| := \left\{ \sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^p \right\}^{1/p}. \text{ Demuestre que } \ell_p(\mathbb{C}) \text{ es separable.}$$

99. Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y sea  $J : V \rightarrow \mathbf{R}$  un funcional NO-LINEAL. Se dice que  $J$  es CONTINUO (resp. DÉBILMENTE CONTINUO) si para toda sucesión  $\{v_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq V$  tal que  $v_n \rightarrow v \in V$  (resp.  $v_n \xrightarrow{w} v \in V$ ) se tiene que

$$J(v_n) \rightarrow J(v) \in \mathbf{R}.$$

a) Determine cual de estos dos conceptos de continuidad implica al otro.

Un subconjunto  $U$  de  $V$  se dice DÉBILMENTE COMPACTO si toda sucesión  $\{v_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  de  $U$  posee una subsucesión débilmente convergente en  $U$ .

- b) Pruebe que si  $U$  es un subconjunto compacto de  $V$  y  $J : V \rightarrow \mathbf{R}$  es continuo (o bien si  $U$  es un subconjunto débilmente compacto de  $V$  y  $J : V \rightarrow \mathbf{R}$  es débilmente continuo), entonces existe  $u \in U$  tal que

$$J(u) = \min_{v \in U} J(v).$$

Un subconjunto  $U$  de  $V$  se dice DÉBILMENTE CERRADO si el límite de toda sucesión  $\{v_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  de  $U$  que converge débilmente, pertenece a  $U$ .

- c) Demuestre que si  $V$  es reflexivo,  $U$  es un subconjunto acotado y débilmente cerrado de  $V$ , y  $J : V \rightarrow \mathbf{R}$  es débilmente continuo, entonces existe  $u \in U$  tal que

$$J(u) = \min_{v \in U} J(v).$$

100. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  un espacio de Hilbert complejo y considere  $H \times H$  provisto del producto escalar

$$\langle (u, v), (z, w) \rangle_{H \times H} := \langle u, z \rangle_H + \langle v, w \rangle_H \quad \forall (u, v), (z, w) \in H \times H.$$

Además, dado  $A \in \mathcal{L}(H, H)$ , defina el operador  $B : H \times H \rightarrow H \times H$  por

$$B((u, v)) := (\iota A(v), -\iota A^*(u)) \quad \forall (u, v) \in H \times H.$$

Demuestre que  $\|B\| = \|A\|$  y que  $B$  es autoadjunto.

101. Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach, y sea  $T : E \rightarrow F$  un operador lineal cerrado con dominio  $D(T)$  e imagen  $R(T)$ . Demuestre que son equivalentes:

- El operador  $T$  es inyectivo, y  $T^{-1}$  es acotado sobre  $R(T)$ .
- Existe una constante positiva  $C$  tal que  $\|Tx\| \geq C\|x\|$  para todo  $x \in D(T)$ .
- $R(T)$  es cerrado en  $F$ , y  $T$  es inyectivo.

102. Sea  $\Omega$  un dominio convexo y acotado de  $\mathbf{R}^2$  con frontera poligonal  $\Gamma$ , y sean  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$  los productos escalares de  $L^2(\Omega)$  y  $H^1(\Omega)$ , respectivamente.

- a) Pruebe que para todo  $r \in L^2(\Omega)$  existe un único  $z \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\langle z, w \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle r, w \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

- b) Deduzca que  $z$  es la única solución débil del problema de valores de contorno:

$$-\Delta z + z = r \quad \text{en } \Omega, \quad \nabla z \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en } \Gamma,$$

donde  $\boldsymbol{\nu}$  es el vector normal sobre  $\Gamma$ , y **observe** (no lo demuestre) que la convexidad de  $\Omega$  garantiza que  $z \in H^2(\Omega)$ .

- c) Defina un operador lineal apropiado y demuestre, utilizando el Teorema del Grafo Cerrado, que existe  $C > 0$  tal que

$$\|z\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|r\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall r \in L^2(\Omega).$$

103. Sea  $X := C([0, 1])$  provisto de la norma uniforme

$$\|u\| := \max \{ |u(t)| : t \in [0, 1] \} \quad \forall u \in X,$$

y dado  $f \in X$ , fijo, defina el funcional lineal  $F : X \rightarrow \mathbf{R}$  como

$$F(u) := \int_0^1 u(t) f(t) dt \quad \forall u \in X.$$

Demuestre que  $F \in X'$  y  $\|F\| = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

INDICACIÓN: Para cada  $n \in \mathbf{N}$  considere  $x_n \in X$  dada por  $x_n(t) := u_n(f(t))$   $\forall t \in [0, 1]$ , donde  $u_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es la función continua

$$u_n(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 1/n, \\ -1 & \text{si } t \leq -1/n, \\ nt & \text{si } -1/n \leq t \leq 1/n, \end{cases}$$

y luego use  $x_n$  para probar que  $\|F\| \geq \int_0^1 |f(t)| dt - \frac{1}{n}$ .

104. Dados  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  y  $b \in \mathbf{R}^m$ ,  $b \neq \mathbf{0}$ , defina el conjunto solución

$$S(A, b) := \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = b\}.$$

Suponga que  $S(A, b) \neq \emptyset$  y pruebe que existe  $z \in \mathbf{R}^n$  tal que

$$\inf_{x \in S(A, b)} \langle z, x \rangle_{\mathbf{R}^n} > 0.$$

105. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert real y sea  $A \in \mathcal{L}(H, H)$  el operador inducido por una forma bilineal y acotada  $a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ . Además, sea  $\Pi$  la proyección ortogonal de  $H$  sobre un subespacio cerrado  $S$ , y suponga que existe  $\alpha > 0$  tal que  $a(v, v) \geq \alpha \langle v, v \rangle \quad \forall v \in S$ . Demuestre que  $\Pi A : S \rightarrow S$  es una biyección lineal.

106. Sean  $U, V$  y  $W$  subespacios de un espacio de Hilbert  $H$ . Pruebe que

- $(U^\perp)^\perp = \bar{U}$ .
- $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$ .
- $\overline{V^\perp + W^\perp} = (\bar{V} \cap \bar{W})^\perp$ .

107. Sea  $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  una función continua y defina el operador integral  $\mathbf{K} : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  por

$$\mathbf{K}(u)(t) := \int_0^1 K(t, s) u(s) ds \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall u \in C[0, 1].$$

Aplique el Teorema de Arzelá - Ascoli para probar que  $\mathbf{K}$  es compacto.

108. Este ejercicio debe resolverse sin aplicar el Teorema de Hahn-Banach, en ninguna de sus formas.

- i) Sea  $S$  un subespacio de un espacio vectorial normado  $X$  sobre  $\mathbf{R}$  y sea  $f \in S'$ . Construya explícitamente un funcional lineal y acotado  $g : \bar{S} \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $g(x) = f(x) \quad \forall x \in S$  y  $\|g\|_{\bar{S}'} = \|f\|_S$ .
- ii) Sea  $S$  un subespacio de un espacio de Hilbert  $X$  sobre  $\mathbf{R}$  y sea  $f \in S'$ . Demuestre que existe  $F \in X'$  tal que  $F(x) = f(x) \quad \forall x \in S$  y  $\|F\|_{X'} = \|f\|_S$ .

109. Sea  $S$  un subespacio cerrado propio de un espacio vectorial normado  $(X, \|\cdot\|)$  sobre el cuerpo  $\mathbf{R}$ . Aplique el TEOREMA DE HAHN-BANACH (SEGUNDA VERSIÓN GEOMÉTRICA) para demostrar que existe  $F \in X'$  tal que  $F \neq \Theta$  y  $F(x) = 0$  para todo  $x \in S$ .

110. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y sean  $V_1, V_2, \dots, V_N$  subespacios cerrados mutuamente ortogonales de  $H$ , esto es  $v_i \perp v_j \quad \forall v_i \in V_i, \quad \forall v_j \in V_j, \quad \forall i \neq j$ . Demuestre que  $\mathbf{I} - \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \dots + \mathbb{P}_N$ , donde  $\mathbb{P} : H \rightarrow V_1^\perp \cap V_2^\perp \cap \dots \cap V_N^\perp$  y  $\mathbb{P}_j : H \rightarrow V_j$  son los proyectores ortogonales respectivos.

111. Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^n$  y considere el espacio de Hilbert  $V := [L^2(\Omega)]^{n \times n}$  sobre  $\mathbf{R}$  con el producto escalar  $\langle \sigma, \tau \rangle := \int_\Omega \sigma : \tau$ , donde

$$\sigma : \tau := \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \tau_{ij} \quad \forall \sigma := (\sigma_{ij})_{n \times n}, \quad \tau := (\tau_{ij})_{n \times n} \in V.$$

A su vez, defina el subespacio  $U := \{\alpha \mathbb{A} + \beta \mathbb{B} : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} = \langle \{\mathbb{A}, \mathbb{B}\} \rangle$ , donde  $\mathbb{A} := (a_{ij})_{n \times n}$  y  $\mathbb{B} := (b_{ij})_{n \times n}$  están definidos por

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad \text{y} \quad b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}.$$

Encuentre  $U^\perp$  y defina explícitamente los proyectores ortogonales sobre  $U$  y  $U^\perp$ . Qué sucede con estos proyectores si  $U$  se reemplaza por  $\langle \{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbf{I}\} \rangle$ , donde  $\mathbf{I}$  es el tensor identidad de  $V$ ?

112. Sean  $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  y  $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  espacios de Hilbert sobre  $\mathbb{C}$  con normas inducidas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$ , respectivamente, y sea  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  tal que  $\|T(x)\|_2 = \|x\|_1 \quad \forall x \in H_1$ . Demuestre que  $\langle T(x), T(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1 \quad \forall x, y \in H_1$ .

IND. Considere las expresiones nulas  $\|T(x+y)\|_2^2 - \|x+y\|_1^2$  y  $\|T(x+iy)\|_2^2 - \|x+iy\|_1^2$ .

113. Sea  $\ell_2(\mathbb{C}) := \left\{ \mathbf{u} := \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} : u_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \right\}$ , provisto del producto escalar  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} u_n \bar{v}_n \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ell_2(\mathbb{C})$ . Demuestre que  $(\ell_2(\mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es Hilbert sobre  $\mathbb{C}$ .

114. Sean  $X, Y$  espacios vectoriales normados y sea  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Demuestre que

$$\text{i) } R(A)^\circ = N(A') \qquad \text{ii) } {}^\circ R(A') = N(A)$$

Además, indique a que se reducen estas identidades (y pruébelas) cuando  $X$  e  $Y$  son espacios de Hilbert y  $A'$  se reemplaza por  $A^*$ .

115. Dado  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^n$ , defina el operador  $A : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  por  $A(u) := \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_j \right\} v_j \quad \forall u \in H^1(\Omega)$ , donde  $\{u_1, u_2, \dots, u_N\} \subseteq H^1(\Omega)$  y  $\{v_1, v_2, \dots, v_N\} \subseteq L^2(\Omega)$ . Demuestre que  $A$  es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto  $A^*$ .

116. Sea  $X := C[0, 1]$  provisto de la norma uniforme, y sean  $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}, \{q_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq X$  tales que la serie  $\sum_{j=1}^{\infty} p_j(s) q_j(t)$  converge uniformemente a una función continua  $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ , es decir

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \max_{(s,t) \in [0,1] \times [0,1]} \left| K(s,t) - \sum_{j=1}^N p_j(s) q_j(t) \right| \right\} = 0.$$

A su vez, sea  $F_j \in X'$  definido por  $F_j(u) := \int_0^1 q_j(t) u(t) dt \quad \forall u \in X$ . Pruebe que para todo  $G \in X'$ , la serie  $\sum_{j=1}^{\infty} G(p_j) F_j$  es convergente en  $X'$ . Identifique el valor del límite respectivo en términos del adjunto de un operador conveniente.

117. (LA CONDICIÓN INF-SUP CONTINUA). Sean  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$  e  $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$  espacios de Hilbert y considere  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $A$  es sobreyectivo.
- ii)  $A^* : Y \rightarrow X$  es inyectivo y de rango cerrado.
- iii) Existe  $\alpha > 0$  tal que  $\|A^*(y)\|_X := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|\langle A(x), y \rangle_Y|}{\|x\|_X} \geq \alpha \|y\|_Y \quad \forall y \in Y$ .
- iv) Existe un operador  $B \in \mathcal{L}(Y, X)$  tal que  $AB = I$  en  $Y$  y  $BA = I - P$  en  $X$ , donde  $P : X \rightarrow N(A)$  es el proyector ortogonal.

118. Dado  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^n$ , defina el operador  $A : H^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$  por

$$A(u) := \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Omega} \Delta u \Delta u_j \right\} v_j \quad \forall u \in H^2(\Omega), \text{ donde } \{u_1, u_2, \dots, u_N\} \subseteq H^2(\Omega)$$

y  $\{v_1, v_2, \dots, v_N\} \subseteq H^1(\Omega)$ . Demuestre que  $A$  es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto  $A^*$ .

119. Sea  $\Omega$  un dominio poligonal convexo de  $\mathbf{R}^2$  con frontera  $\Gamma$ , y dado  $f \in L^2(\Omega)$ , considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:

$$\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (23)$$

i) Introduzca la incógnita auxiliar  $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$  en  $\Omega$  y pruebe que una formulación variacional mixta de (23) se reduce a: Hallar  $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div}; \Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} - \int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \text{div}(\boldsymbol{\tau}) = - \int_{\Omega} f \text{div}(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega). \quad (24)$$

ii) Defina el operador  $P : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$  que a cada  $\boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega)$  le asigna  $P(\boldsymbol{\tau}) := \nabla z$ , donde  $z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  es la única solución del problema:  $\Delta z = \text{div}(\boldsymbol{\tau})$  en  $\Omega$ ,  $z = 0$  en  $\Gamma$ . Pruebe que  $P$  es un proyector compacto, y concluya que

$$H(\text{div}; \Omega) = P(H(\text{div}; \Omega)) \oplus (I - P)(H(\text{div}; \Omega)).$$

iii) Utilice la descomposición anterior de  $H(\text{div}; \Omega)$  para demostrar que (24) se reduce, equivalentemente, a: Hallar  $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div}; \Omega)$  tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + K(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = F(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega), \quad (25)$$

donde

$$A(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := - \int_{\Omega} P(\boldsymbol{\sigma}) \cdot P(\boldsymbol{\tau}) - \int_{\Omega} \text{div} P(\boldsymbol{\sigma}) \text{div} P(\boldsymbol{\tau}) + \int_{\Omega} (I - P)(\boldsymbol{\sigma}) \cdot (I - P)(\boldsymbol{\tau}),$$

$$K(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := 2 \int_{\Omega} P(\boldsymbol{\sigma}) \cdot P(\boldsymbol{\tau}) + \int_{\Omega} P(\boldsymbol{\sigma}) \cdot (I - P)(\boldsymbol{\tau}) + \int_{\Omega} (I - P)(\boldsymbol{\sigma}) \cdot P(\boldsymbol{\tau}),$$

y  $F$  es el funcional definido por el lado derecho de (24).

iv) Sean  $\mathbf{A} : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow H(\text{div}; \Omega)$  y  $\mathbf{K} : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow H(\text{div}; \Omega)$  los operadores lineales y acotados asociados a las formas bilineales  $A$  y  $K$ , respectivamente. Demuestre que  $\mathbf{A}$  es biyectivo y que  $\mathbf{K}$  es compacto.

IND. Defina el operador  $S(\boldsymbol{\tau}) := (I - 2P)(\boldsymbol{\tau})$  y considere la expresión  $A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau}))$  para probar que  $A$  satisface la condición inf-sup continua.

120. Sean  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert sobre  $\mathbb{C}$  y  $A : H \rightarrow H$  un operador lineal tal que  $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A(y) \rangle \quad \forall x, y \in H$ . Pruebe que  $A$  es acotado.

121. Sea  $X$  un espacio vectorial normado. Un subespacio  $W$  de  $X'$  se dice SATURADO si para todo  $F \in X' - W$  existe  $x \in {}^{\circ}W$  tal que  $F(x) \neq 0$ .

a) Pruebe que si  $X$  es reflexivo y  $W$  es un subespacio cerrado de  $X'$ , entonces  $W$  es saturado.

b) Pruebe que un subespacio  $W$  de  $X'$  es saturado sí y sólo sí  $W = ({}^{\circ}W)^{\circ}$ .

Un subconjunto  $W$  de  $X'$  se dice DÉBILMENTE\* CERRADO si el límite de toda sucesión  $\{F_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  de  $W$  que converge débilmente\*, pertenece a  $W$ .

c) Pruebe que si un subespacio  $W$  de  $X'$  es saturado entonces él es débilmente\* cerrado.

122. Sean  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert sobre  $\mathbb{C}$  y  $A \in \mathcal{L}(H, H)$ . Se dice que  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un VALOR PROPIO de  $A$  si existe  $x \neq \theta$  tal que  $Ax = \lambda x$ .

a) Pruebe que  $|\lambda| \leq \|A\|$ .

b) Pruebe que si  $A$  es autoadjunto, entonces  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

c) Pruebe que si  $A$  es autoadjunto, y  $\mu \neq \lambda$  es otro valor propio de  $A$ , entonces  $N(\lambda \mathbf{I} - A) \perp N(\mu \mathbf{I} - A)$ .

123. a) Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Hilbert y sea  $K \in \mathcal{L}(X, Y)$  tal que  $K$  transforma sucesiones débilmente convergentes de  $X$  en sucesiones convergentes de  $Y$ . Pruebe que  $K$  es compacto.

b) Sea  $X$  un espacio de Hilbert y sean  $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X$ ,  $x \in X$ , tales que  $x_n \xrightarrow{w} x$  y  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ . Pruebe que  $x_n \rightarrow x$ .

c) Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Hilbert y sea  $K \in \mathcal{L}(X, Y)$  un operador compacto. Aplique a) y b) para probar que  $K^* \in \mathcal{L}(Y, X)$  también es compacto.

124. Sean  $V$  y  $W$  subespacios cerrados de un Hilbert  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , y sean  $P : H \rightarrow V$  y  $Q : H \rightarrow W$  los proyectores ortogonales respectivos. Demuestre que

$$\langle (Q - P)(x), x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H \quad \text{si y sólo si} \quad V \subseteq W.$$

125. Sea  $V$  un espacio vectorial normado sobre  $\mathbb{C}$ . Pruebe que el dual  $V'$  es Banach.

126. Sea  $X$  un espacio vectorial normado sobre  $\mathbf{R}$  y sea  $\mathbf{a} : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  tal que

i)  $\mathbf{a}(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in X$ .

ii)  $\mathbf{a}(x, y) = \mathbf{a}(y, x) \quad \forall x, y \in X$ .

iii)  $\mathbf{a}(\alpha x + \beta z, y) = \alpha \mathbf{a}(x, y) + \beta \mathbf{a}(z, y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \forall x, y, z \in X$ .

Pruebe que

$$|\mathbf{a}(x, y)| \leq \frac{\epsilon}{2} \mathbf{a}(x, x) + \frac{1}{2\epsilon} \mathbf{a}(y, y) \quad \forall x, y \in X, \quad \forall \epsilon > 0.$$

127. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y sea  $S$  un subespacio de  $H$ . Demuestre que  $H = \bar{S} \oplus \mathcal{R}(W)$ , donde  $\mathcal{R} : H' \rightarrow H$  es la aplicación de Riesz y

$$W := \left\{ F \in H' : F(x) = 0 \quad \forall x \in S \right\}.$$

128. Sea  $\Omega := ]0, 1[^2 \subseteq \mathbf{R}^2$  y considere el espacio de Hilbert  $(H(\text{rot}; \Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , donde

$$H(\text{rot}; \Omega) := \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \text{rot } v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$\langle v, w \rangle := \int_{\Omega} v \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \text{rot } v \text{ rot } w \, dx \quad \forall v, w \in H(\text{rot}; \Omega).$$

Además, sea  $S$  el subespacio de  $H(\text{rot}; \Omega)$  dado por

$$S := \left\{ \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma x_2, \beta - \gamma x_1) \quad \forall x := (x_1, x_2) \in \Omega; \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \right\},$$

y sea  $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{rot}; \Omega)$  definida por  $\boldsymbol{\sigma}(x) = (x_1, x_2) \quad \forall x := (x_1, x_2) \in \Omega$ . Encuentre  $S^\perp$  y defina explícitamente los proyectores ortogonales sobre  $S$  y  $S^\perp$ . Además, encuentre la mejor aproximación de  $\boldsymbol{\sigma}$  por elementos de  $S^\perp$ , con respecto a la norma inducida por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

129. Sean  $X$  e  $Y$  Banach. Se dice que un operador lineal  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$  admite una clausura si existe un operador lineal  $B : \mathcal{D}(B) \subseteq X \rightarrow Y$  tal que  $B$  es una extensión de  $A$  y  $G(B) = \overline{G(A)}$ . Demuestre que  $A$  admite una clausura si y sólo si para toda sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$  tal que  $(x_n, A(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\mathbf{0}, y)$ , con  $y \in Y$ , se tiene necesariamente que  $y = \mathbf{0}$ .

130. Dado  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^n$ , defina el operador  $A : H^1(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega)$  por

$$A(u) := \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_j \right\} v_j \quad \forall u \in H^1(\Omega), \text{ donde } \{u_1, u_2, \dots, u_N\} \subseteq H^1(\Omega)$$

y  $\{v_1, v_2, \dots, v_N\} \subseteq H^2(\Omega)$ . Demuestre que  $A$  es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto  $A^*$ .

131. Sea  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert sobre  $\mathbf{R}$  con aplicación de Riesz  $\mathcal{R} : X' \rightarrow X$ .

- a) Demuestre que para todo subconjunto  $M$  de  $X$  se tiene que

$$\mathcal{R}^{-1}(M^\perp) = \left\{ F \in X' : F(x) = 0 \quad \forall x \in S \right\},$$

donde  $S$  es el subespacio cerrado generado por  $M$ .

- b) Defina  $[\cdot, \cdot] : X' \times X' \rightarrow \mathbf{R}$  por

$$[F, G] := \langle \mathcal{R}(F), \mathcal{R}(G) \rangle \quad \forall F, G \in X',$$

y pruebe que  $(X', [\cdot, \cdot])$  es un espacio de Hilbert.

132. Sea  $X$  un espacio vectorial normado sobre  $\mathbf{R}$  y denote por  $X''$  al dual del dual  $X'$ , es decir

$$X'' := \left\{ \mathcal{F} : X' \rightarrow \mathbf{R} : \mathcal{F} \text{ es lineal y acotado} \right\}.$$

Demuestre que para cada  $x \in X$  el funcional  $J(x) : X' \rightarrow \mathbf{R}$  definido por  $J(x)(F) := F(x) \quad \forall F \in X'$  es un elemento de  $X''$ , y que la aplicación resultante  $J : X \rightarrow X''$  es inyectiva e isométrica. Además, utilice lo estipulado en el Problema 1 b) para probar que si  $X$  es un Hilbert entonces  $J$  es biyectiva.

133. Considere la partición uniforme  $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$  del dominio  $\Omega := ]0, 3[$ , y defina el subespacio de  $H_0^1(\Omega)$  dado por

$$S := \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \text{ y } v|_{[x_{j-1}, x_j]} \text{ es una recta } \forall j \in \{1, 2, 3\} \right\}.$$

- a) Demuestre que  $\{e_1, e_2\}$  es una base de  $S$ , donde  $e_j$  es el único elemento de  $S$  tal que  $e_j(x_i) = \delta_{ij}$  para todo  $i, j \in \{1, 2\}$ .
- b) Defina explícitamente el proyector ortogonal  $P : H_0^1(\Omega) \rightarrow S^\perp$  con respecto al producto escalar  $\langle v, w \rangle := \int_\Omega v' w' \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega)$ .
134. Sea  $S$  un subespacio vectorial de un espacio vectorial normado  $X$  tal que  $\overline{S} \neq X$ . Demuestre (DE DOS MANERAS DISTINTAS) que existe  $F \in X'$  tal que  $\|F\| \neq 0$  y  $F(x) = 0 \quad \forall x \in S$ .

135. Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^n$ , y sea  $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  una función continua para la cual existen constantes  $M, \beta > 0$ , tales que  $\beta \leq \kappa(x) \leq M$  para todo  $x \in \Omega$ . Demuestre, utilizando algún resultado de dualidad, que para todo  $f \in L^2(\Omega)$  existe un único  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\int_\Omega \left\{ \kappa \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{\kappa} u v \right\} = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

y

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\{ \frac{M}{\min\{\beta, \frac{1}{M}\}} \right\}^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

136. Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}$ , considere los espacios de Hilbert reales dados por  $X := L^2(\Omega)$  e  $Y := \mathbf{R}^{2 \times 2}$  provistos de los productos escalares

$$\langle u, v \rangle_X := \int_\Omega u v \quad \forall u, v \in X, \quad \langle A, B \rangle_Y := \text{tr}(A^t B) \quad \forall A, B \in Y,$$

y defina el operador  $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$  por

$$\mathcal{A}(u) := \begin{pmatrix} \int_\Omega u & \int_\Omega x u \\ \int_\Omega x u & \int_\Omega x^2 u \end{pmatrix} \quad \forall u \in X.$$

- i) Demuestre que  $\mathcal{A}$  es lineal y acotado y calcule explícitamente el operador adjunto  $\mathcal{A}^*$  y los espacios  $N(\mathcal{A})$ ,  $R(\mathcal{A})$ ,  $N(\mathcal{A}^*)$  y  $R(\mathcal{A}^*)$ .
- ii) Encuentre un subespacio cerrado  $S$  de  $X$  tal que  $\mathcal{A}|_S : S \rightarrow R(\mathcal{A})$  sea biyectivo.
- iii) Defina  $\tilde{Y} := \{B \in Y : B^t = -B\}$  y demuestre que existe  $C > 0$  tal que

$$\|\mathcal{A}^*(A)\|_X \geq C \inf_{B \in \tilde{Y}} \|A - B\|_Y \quad \forall A \in Y.$$

- iv) Reemplace  $X := L^2(\Omega)$  por  $X := H^1(\Omega)$  con su producto escalar habitual, y recalculé el operador adjunto  $\mathcal{A}^*$ .

137. Sean  $X$ ,  $Y_1$  e  $Y_2$  espacios de Banach sobre  $\mathbb{K}$ , y sean  $A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subseteq X \rightarrow Y_1$  y  $A_2 : \mathcal{D}(A_2) \subseteq X \rightarrow Y_2$  operadores lineales cerrados. Considere el espacio producto  $Y := Y_1 \times Y_2$  y demuestre que el operador lineal  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ , definido por  $A(x) := (A_1(x), A_2(x)) \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) := \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_2)$ , también es cerrado. Recíprocamente, suponga que  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$  es lineal cerrado, y que para toda sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$  tal que  $\{A_i(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente en  $Y_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , existe una subsucesión  $\{x_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para la cual  $\{A_j(x_n^{(1)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente en  $Y_j$ ,  $\forall j \in \{1, 2\}$ . Demuestre en tal caso que para cada  $i \in \{1, 2\}$ ,  $A_i|_{\mathcal{D}(A)}$  es cerrado.

138. Enuncie el TEOREMA DE BABUSKA-BREZZI y demuestre que sus hipótesis son también necesarias.

139. Considere el espacio  $\ell_2(\mathbb{C}) := \left\{ \mathbf{u} := \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} : u_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \right\}$ , y demuestre que el operador  $K : \ell_2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{C})$  definido por

$$K(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_k}{k}, \dots\right) \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in \ell_2(\mathbb{C}),$$

es compacto.

140. Sea  $X$  un espacio vectorial normado de dimensión INFINITA. Demuestre que el operador identidad  $I \in \mathcal{L}(X, X)$  no es compacto.

141. Determine, **justificadamente**, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- i) Todo operador lineal, acotado y biyectivo de un Banach  $X$  en un Banach  $Y$  es compacto.
- ii) Dados  $H$  y  $Q$  espacios de Hilbert se tiene que  $A \in \mathcal{L}(H, Q)$  es biyectivo si y sólo si  $A^* \in \mathcal{L}(Q, H)$  es biyectivo.
- iii) Existen operadores compactos que no son cerrados.
- iv) Dados  $X$  e  $Y$  espacios de Banach, el inverso de un operador lineal, cerrado y biyectivo  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ , también es cerrado.

- v) Dados  $X$  e  $Y$  espacios de Banach, el inverso de un operador lineal, cerrado y biyectivo  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ , es acotado.
- vi) Dados  $X$  e  $Y$  espacios de Banach,  $Y$  de dimensión finita, y  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , el rango del operador adjunto  $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$  es cerrado.
142. Considere la partición uniforme  $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$  del dominio  $\Omega := ]0, 3[$ , y defina el subespacio de  $L^2(\Omega)$  dado por

$$S := \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_{[x_{j-1}, x_j]} \text{ es constante } \forall j \in \{1, 2, 3\} \right\}.$$

- a) Demuestre que  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una base de  $S$ , donde  $e_j$  es el único elemento de  $S$  tal que  $e_j|_{[x_{i-1}, x_i]} = \delta_{ij}$  para todo  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .
- b) Defina los proyectores ortogonales  $P : L^2(\Omega) \rightarrow S$  y  $Q : L^2(\Omega) \rightarrow S^\perp$  con respecto al producto escalar  $\langle v, w \rangle := \int_\Omega x v w \quad \forall v, w \in L^2(\Omega)$ .
143. Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^n$ , y sea  $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  una función continua para la cual existen constantes  $M, \beta > 0$ , tales que  $\beta \leq \kappa(x) \leq M$  para todo  $x \in \Omega$ . Demuestre, utilizando el LEMA DE LAX-MILGRAM, que para todo  $f \in L^2(\Omega)$  y para toda constante  $\delta \in (0, \min \{2\beta, \frac{2}{nM}\})$ , existe un único  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\int_\Omega \left\{ \kappa \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{\kappa} u v - \delta \sum_{i=1}^n u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

y

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\min \left\{ \beta - \frac{\delta}{2}, \frac{1}{M} - \frac{n\delta}{2} \right\}} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

144. Determine, **justificadamente**, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
- i) El adjunto de todo operador lineal, acotado e inyectivo de un Hilbert  $X$  en un Hilbert  $Y$  es sobreyectivo.
- ii) Dados  $H$  y  $Q$  espacios de Hilbert se tiene que  $A \in \mathcal{L}(H, Q)$  es biyectivo si y sólo si  $A^* \in \mathcal{L}(Q, H)$  es biyectivo.
- iii) Existen operadores acotados que no son compactos.
- iv) Dados  $X$  e  $Y$  espacios de Hilbert,  $X$  de dimensión finita, el rango de todo operador  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  es cerrado.
- v) Existen operadores cerrados que no son acotados.

145. Sea  $\Omega := ]0, 1[$ , considere los espacios de Hilbert reales dados por  $X = L^2(\Omega)$  e  $Y = \ell_2(\mathbf{R}) := \left\{ A := \{a_k\}_{k \in \mathbf{N}} : a_k \in \mathbf{R}, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$ , provistos de los productos escalares usuales

$$\langle u, v \rangle_X := \int_0^1 u v \quad \forall u, v \in X,$$

$$\langle A, B \rangle_Y := \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \quad \forall A := \{a_k\}_{k \in \mathbf{N}}, B := \{b_k\}_{k \in \mathbf{N}} \in Y,$$

y defina el operador  $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$  por

$$\mathcal{A}(u) := \left\{ \frac{1}{k} \int_0^1 x^k u \right\}_{k \in \mathbf{N}} \quad \forall u \in X.$$

- i) Demuestre que  $\mathcal{A}$  está bien definido y es lineal y acotado, y luego calcule el operador adjunto  $\mathcal{A}^*$  y los espacios  $N(\mathcal{A})$  y  $\overline{R(\mathcal{A}^*)}$ .
- ii) Encuentre un subespacio cerrado  $S$  de  $X$  tal que  $\mathcal{A}|_S : S \rightarrow R(\mathcal{A})$  sea biyectivo.
- iii) Demuestre que  $\mathcal{A}$  es compacto.

GNG/gng