UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

LISTADO DE EJERCICIOS 4220014 / 408601

Análisis Funcional

Primer Semestre de 2014 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

Índice

1. Introducción

1.1 *Sea X un espacio vectorial normado y sea $S := \{x \in X : \quad \|x\| = 1\}$. Pruebe que S es completo si y sólo si X es Banach.*

1.2 *Sean $I := (t_0, t_0 + \tau)$, $f_j : \bar{I} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, j \in \{1, \ldots, n\}$, funciones continuas, y considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Hallar $u := (u_1, \cdots, u_n)^{\mathtt{t}} \in [C^1(I) \times C(\bar{I})]^n$ tal que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du_j}{dt} = f_j(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)) \quad \forall\, t \in I \qquad y \\ \\ u_j(t_0) = \eta_j \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \end{array} \right. \tag{1}$$

donde t_0, τ, η_j, $j = 1, \cdots, n$ son constantes reales dadas y τ es positivo. Suponga además que existe $M > 0$ tal que

$$|f_j(t,z) - f_j(t,w)| \leq M\|z - w\|_\infty \quad \forall\, z, w \,\in\, \mathbf{R}^n, \quad \forall\, t \,\in\, \bar{I}.$$

Demuestre que (1) tiene una única solución $u(t)$ para todo $t \in \bar{I}$.

1.3 *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y considere una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H tal que $\langle x_n, x_m \rangle \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n \neq m \end{array} \right.$. Pruebe que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\,\langle x, x_n \rangle\,|^2 \;\leq\; \|x\|^2 \quad \forall\, x \;\in\; H$. Además, dada una sucesión de escalares $\{\,\alpha_n\,\}_{n\in\mathbb{N}}$, demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, x_n$ converge en H si y sólo si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \;<\; +\infty$.*

1.4 *Dado Ω abierto de $\mathbb{R}^n$ y $m \in \mathbb{N}$, se define el* espacio de Sobolev *de orden m, como*

$$H^m(\Omega) \;:=\; \left\{ u \,\in\, \mathcal{D}'(\Omega) \;: \quad \partial^\alpha u \,\in\, L^2(\Omega) \quad \forall\, \alpha,\, |\alpha| \,\leq\, m \right\},$$

el cual se provee de la norma $\|u\|_{H^m(\Omega)} \;:=\; \left\{ \displaystyle\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2}$. Asuma que $L^2(\Omega)$ con el producto escalar usual $\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} \;:=\; \displaystyle\int_\Omega uv\, dx$ es un espacio de Hilbert, y demuestre que $H^m(\Omega)$ también lo es.

1.5 *Se dice que un espacio de Banach X es* uniformemente convexo *si para todo $\varepsilon \,>\, 0$ existe $\delta \,>\, 0$ tal que*

$$\Big(x, y \,\in\, X\,,\;\; \|x\| \leq 1\,,\;\; \|y\| \leq 1 \quad y \quad \|x - y\| \,>\, \varepsilon \Big) \;\Rightarrow\; \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \;<\; 1 - \delta\,.$$

Demuestre que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

1.6 ([20], Ejercicio 4.6) *El* Teorema del Punto Fijo de Brouwer *establece que si S es un subconjunto compacto, convexo, y no vacío de un espacio vectorial de dimensión finita, y T es una aplicación continua de S en S, entonces T tiene al menos un punto fijo. Use este resultado de Brouwer para demostrar que si X es un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $\| \cdot \|$, y si F es una aplicación continua de X en X tal que, para algún $\mu > 0$, $\langle F(u), u \rangle \geq 0 \quad \forall\, u \in X$ con $\|u\| = \mu$, entonces existe $u_0 \in X$, $\|u_0\| \leq \mu$, tal que $F(u_0) = 0$.*

1.7 ([20]) *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$.* El problema de Navier-Stokes, *un problema de suma importancia en mecánica de fluidos, consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$ y la presión p de un fluido, tales que*

$$\begin{gathered} -\Delta\, \mathbf{u} + \sum_{j=1}^{2} u_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \textit{en} \quad \Omega\,, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \textit{en} \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} = 0 \quad \textit{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\, dx = 0\,. \end{gathered} \tag{2}$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$, $Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q\, dx = 0 \right\}$, y demuestre que la formulación débil de (2) se reduce a: encontrar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ tales que:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= f(\mathbf{v}) \qquad \forall\, \mathbf{v} \in H \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \qquad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned}$$

donde $a : H \times H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$, y $f : H \to \mathbb{R}$, están definidas por

$$a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx\,,$$

$$b(\mathbf{v}, p) := -\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx \quad , \quad f(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx\,.$$

1.8 ([20]) *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$.* El problema de Stokes *corresponde a una versión linealizada del problema de Navier-Stokes y consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$ y la presión p de un fluido, tales que*

$$\begin{gathered} -\Delta\, \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \textit{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \textit{en} \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} = 0 \quad \textit{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\, dx = 0\,. \end{gathered} \tag{3}$$

Utilice el ejercicio anterior para deducir la formulación débil de (3).

1.9 *Dado Ω abierto de $\mathbb{R}^n$ y $p \in [1, +\infty)$, se define*

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \quad f \textit{ medible y } \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Puede probarse que $L^p(\Omega)$, provisto de la norma $\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_\Omega |f|^p \, dx \right\}^{1/p}$ es un espacio de Banach. Además, dados $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega |f\, g| \, dx \;\leq\; \|f\|_{L^p(\Omega)} \, \|g\|_{L^q(\Omega)} \,.$$

Entonces, dado $m \in \mathbb{N}$ se define el Espacio de Sobolev *de orden (m, p), como*

$$W^{m,p}(\Omega) \;:=\; \left\{ u \,\in\, \mathcal{D}'(\Omega) : \quad \partial^\alpha u \,\in\, L^p(\Omega) \quad \forall\, \alpha,\, |\alpha| \,\leq\, m \right\},$$

el cual se provee de la norma $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \;:=\; \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right\}^{1/p}$. *Demuestre que $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

1.10 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{T} := \{T_1, T_2, ..., T_N\}$ una triangularización de Ω, es decir:*

i) $\bar{T}_j$ *es un triángulo con interior no-vacío* $\quad \forall\, j \in \{1, ..., N\}$,

ii) $T_i \cap T_j \,=\, \emptyset \quad \forall\, i \neq j$, *y*

iii) $\bar{\Omega} \,=\, \cup \{ \bar{T}_j : \quad j \in \{1, ..., N\} \}$.

Defina el subespacio de $[L^2(\Omega)]^2$

$$H \;:=\; \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \,\in\, L^2(T_j) \quad \forall\, j \,\in\, \{1, ..., N\} \} \,,$$

donde la pertenencia local $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \,\in\, L^2(T_j)$ está dada en el sentido distribucional, es decir en $\mathcal{D}'(T_j)$, lo cual significa que existe $z_j \in L^2(T_j)$ tal que

$$- \int_{T_j} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx \;=\; \int_{T_j} z_j \, \varphi \, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(T_j) \,,$$

y en tal caso se escribe $z_j = \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})$ en T_j. Demuestre que H provisto de la norma

$$\|\boldsymbol{\tau}\| \;:=\; \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \;+\; \sum_{j=1}^{N} \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{L^2(T_j)} \right\}^{1/2} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H \,,$$

es un espacio de Hilbert real.

2. Dualidad

2.1 *Sea X un espacio vectorial normado y $f : X \to \mathbb{R}$ un funcional lineal. Pruebe que $f \in X'$ si y sólo si $N(f)$, el espacio nulo de f, es un subespacio cerrado de X.*

2.2 *Sean X un Hilbert sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y $F : X \to \mathbb{K}$ un funcional lineal tal que su espacio nulo $N(F) \;:=\; \left\{ x \,\in\, X : \quad F(x) \,=\, 0 \right\}$ no es denso en X. Pruebe que $F \in X'$ y concluya así que $N(F)$ es un subespacio cerrado propio de X.*

2.3 *Sea V un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Demuestre que el dual V' es Banach.*

2.4 *Sea M un subespacio cerrado propio de un Banach X y sea $x_0 \in X - M$. Aplique la segunda forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach para probar que existen F_1, $F_2 \in M^o$ tales que $\|F_1\| = 1$ y $F_2(x_0) = \mathrm{dist}(x_0, M)$.*

2.5 *Sea H un espacio vectorial normado real. Pruebe que si la norma de H satisface*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left\{ ||x||^2 + ||y||^2 \right\} \quad \forall\, x, y \in H,$$

entonces ella proviene de un producto escalar.

2.6 *Sea $X := C([0,1])$ provisto de la norma uniforme*

$$\|u\| := \text{máx}\,\{\, |u(t)| : \quad t \in [0,1]\,\} \qquad \forall\, u \in X\,,$$

y dado $f \in X$, fijo, defina el funcional lineal $F : X \to \mathbb{R}$ como

$$F(u) := \int_0^1 u(t)\, f(t)\, dt \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Demuestre que $F \in X'$ y $\|F\| = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt$.

Indicación: *Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $x_n \in X$ dada por $x_n(t) := u_n(f(t)) \ \ \forall\, t \in [0,1]$, donde $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función continua*

$$u_n(t) := \begin{cases} 1 & si \quad t \geq 1/n\,, \\ -1 & si \quad t \leq -1/n\,, \\ n\,t & si \quad -1/n \leq t \leq 1/n\,, \end{cases}$$

y luego use x_n para probar que $\quad \|F\| \geq \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt - \frac{1}{n}$.

2.7 ([3], [26]) *Considere un abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio*

$$H(\mathrm{div}\,;\Omega) := \left\{ v \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\; v := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w \rangle_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w\, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\; v \;\mathrm{div}\; w\, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\,.$$

a) *Demuestre que $(H(\mathrm{div}\,;\Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.*

b) *Pruebe que para todo $g \in [L^2(\Omega)]^n$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega v_g \cdot w\, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\; v_g \;\mathrm{div}\; w\, dx = \int_\Omega g \cdot w\, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\,.$$

IND.: *Dada* $v \in [L^2(\Omega)]^n$, *se dice que* $\mathrm{div}\ v \in L^2(\Omega)$ *si existe* $z \in L^2(\Omega)$ *tal que*

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i \,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega z\,\varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

2.8 ([3], [26]) *Considere un abierto acotado* Ω *de* $\mathbb{R}^2$ *con frontera* Γ *suficientemente suave, y defina el espacio*

$$H(\mathrm{rot};\Omega) := \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}\, v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)} := \int_\Omega v\cdot w\, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v\ \mathrm{rot}\, w\, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

a) *Demuestre que* $(H(\mathrm{rot};\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)})$ *es un espacio de Hilbert.*

b) *Pruebe que para todo* $g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ *existe un único* $v_g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega v_g\cdot w\, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v_g\ \mathrm{rot}\, w\, dx = \int_\Omega \mathrm{rot}\, g\, \mathrm{rot}\, w\, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

IND.: *Notar que* $v \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ *si y sólo si* $(v_2, -v_1) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)$. *También, dada* $v \in [L^2(\Omega)]^2$, *se dice que* $\mathrm{rot}\, v \in L^2(\Omega)$ *si existe* $z \in L^2(\Omega)$ *tal que*

$$-\int_\Omega v_2\, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\, dx + \int_\Omega v_1\, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\, dx = \int_\Omega z\,\varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

2.9 *Sea* X *un espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{C}$ *y sea* $p : X \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$p(\alpha\, x) = |\alpha|\, p(x) \quad y \quad p(x+y) \le p(x) + p(y) \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}\,,\ \forall\, x\,,\, y \in X\,.$$

Además, sean S *un subespacio de* X *y* $f : S \to \mathbb{C}$ *un funcional lineal tales que*

$$|f(x)| \le p(x) \qquad \forall\, x \in S\,.$$

Demuestre que f *puede extenderse a un funcional lineal* $F : X \to \mathbb{C}$ *tal que*

$$|F(x)| \le p(x) \qquad \forall\, x \in X\,.$$

2.10 *Pruebe que todo espacio de Hilbert es estrictamente convexo.*

2.11 *Demuestre que para todo* $f \in (H^m(\Omega))'$ *existen funciones* $f_\alpha \in L^2(\Omega)$, $|\alpha| \le m$, *tales que*

$$f(v) = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega f_\alpha\, \partial^\alpha\, v\, dx \quad \forall\, v \in H^m(\Omega)\,.$$

2.12 *Sea* X *un espacio vectorial normado.*

a) *Sea* Y *un subespacio no denso de* X. *Demuestre que existe un funcional no nulo* $F \in X'$ *tal que* $F(x) = 0$ *para todo* $x \in Y$.

b) *Sean x_0, $x_1 \in X$ tal que $x_0 \neq x_1$. Pruebe que existe una sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X'$ tal que $||F_n|| = ||x_0 - x_1||^n$ y $F_n(x_1) = F_n(x_0) + ||x_1 - x_0||^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

2.13 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sea $J : V \to \mathbb{R}$ un funcional nolineal. Se dice que J admite una derivada direccional en $v \in V$, en la dirección $\varphi \in V$, si la expresión $\frac{J(v+\varepsilon\varphi)-J(v)}{\varepsilon}$ admite un límite cuando $\varepsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $DJ(v, \varphi)$. Entonces, J se dice diferenciable en el sentido de Gâteaux (o G-diferenciable) en $v \in V$, si $DJ(v, \varphi)$ existe para todo $\varphi \in V$. Ahora, si J es G-diferenciable en $v \in V$ y si $DJ(v, \cdot) \in V'$, se concluye, por el Teorema de Representación de Riesz, que existe un único elemento $z \in V$ tal que $DJ(v, \varphi) = \langle z, \varphi \rangle \; \forall \, \varphi \in V$. En tal caso, se denota $z := J'(v)$ y se llama el* GRADIENTE *de J en v. A su vez, se dice que J tiene segunda diferencial en el sentido de Gâteaux en $v \in V$, en las direcciones φ y $\psi \in V$, si la expresión $\frac{DJ(v+\varepsilon\psi,\varphi) - DJ(v,\varphi)}{\varepsilon}$ admite un límite cuando $\varepsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $D^2 J(v, \varphi, \psi)$.*

a) *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y considere $V := L^2(\Omega)$. Defina $J_0 : V \to \mathbb{R}$ por*

$$J_0(v) := \int_\Omega (v^2 + v) \quad \forall \, v \in V$$

y calcule $J_0'(v)$ para todo $v \in V$. Qué puede decir de $J_0'(v)$ si J_0 se restringe al espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$?

b) *Suponga que J es G-diferenciable en $(v + \alpha\varphi)$, en la dirección φ, para todo $\alpha \in [0, 1]$. Demuestre que existe $\beta \in (0, 1)$ tal que*

$$J(v + \varphi) = J(v) + DJ(v + \beta \, \varphi, \varphi) \, .$$

c) *Suponga que J es α-convexo, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que para todo u, $v \in V$ y para todo $\beta \in [0, 1]$:*

$$J((1 - \beta) \, u + \beta \, v) \leq (1 - \beta) \, J(u) + \beta \, J(v) - \frac{\alpha}{2} \beta \, (1 - \beta) \, ||u - v||^2 \, .$$

Además, asuma que J es G-diferenciable en todo $v \in V$. Demuestre que para todo u, $v \in V$ se tiene:

$$DJ(u, u - v) - DJ(v, u - v) \geq \alpha \, ||u - v||^2$$

y

$$J(v) \geq J(u) + DJ(u, v - u) + \frac{\alpha}{2} \, ||v - u||^2 \, .$$

d) *Suponga que J es G-diferenciable en $v \in V$ y que, dada una dirección $\varphi \in V$, $D^2 J(v + \alpha\varphi, \varphi, \varphi)$ existe $\forall \, \alpha \in [0, 1]$. Demuestre que hay una constante $\beta \in (0, 1)$ tal que*

$$J(v + \varphi) = J(v) + DJ(v, \varphi) + \frac{1}{2} \, D^2 J(v + \beta\varphi, \varphi, \varphi) \, .$$

2.14 *Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sea V un subespacio cerrado de H. El anulador (o aniquilador) de V se denota por V^o y se define como*

$$V^o := \{ \, F \in H' : \quad F(x) = 0 \quad \forall \, x \in V \, \} \, .$$

Demuestre que

$$H = V \oplus \mathcal{R}(V^o) \, ,$$

donde $\mathcal{R} : H' \to H$ denota la aplicación de Riesz.

2.15 *Sea X un espacio vectorial normado y sea $x_0 \in X$ tal que $|\,F(x_0)\,| \leq C_0$ para todo $F \in X'$ con $||F||_{X'} = 1$. Demuestre que $||x_0|| \leq C_0$.*

2.16 *Sea V un subespacio de un Hilbert $(Y, \langle\,\cdot, \cdot\,\rangle)$ y defina*

$$V^{\perp} := \{y \in Y : \quad \langle y, z\rangle = 0 \quad \forall\, z \in V\}\,.$$

Si $\overline{V}$ denota la clausura de V, demuestre que $\overline{V}^{\perp} = V^{\perp}$. Concluya que V es denso en Y si y sólo si $V^{\perp} = \{0\}$.

2.17

a) *Sea S un subconjunto de un Hilbert H y sea M el subespacio cerrado generado por S. Pruebe que $S^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H, $M^{\perp} = S^{\perp}$, y $M = (S^{\perp})^{\perp}$.*

b) *Sea V un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $H = \overline{V} \oplus V^{\perp}$.*

2.18

a) *Sea S un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $S^{\perp} = \bar{S}^{\perp}$.*

b) *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ, y considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Encuentre y caracterice un subespacio V de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus V$.*

2.19 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen constantes M, $\beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Defina el conjunto*

$$S \,:=\, \Big\{ v \in H_0^1(\Omega) : \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, 1 \Big\}\,,$$

y demuestre que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ existe un único $g \in S$ tal que

$$\int_\Omega \kappa(x)\,\|\nabla u(x) - \nabla g(x)\|^2_{\mathbb{R}^n}\,dx \,=\, \min_{v\in S} \int_\Omega \kappa(x)\,\|\nabla u(x) - \nabla v(x)\|^2_{\mathbb{R}^n}\,dx\,.$$

2.20 *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert* COMPLEJO, *y sean $u\,,\ v \in H$, $u \neq v$, tales que $\|u\| = \|v\|$. Defina $w := u - v$ y considere la proyección ortogonal $\mathbf{P} : H \to S^{\perp}$, donde S es el subespacio generado por w. Demuestre que*

$$\mathbf{P}(u) \,=\, \mathbf{P}(v) \,=\, \frac{u+v}{2} \,+\, \left\{\frac{\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(\langle u, v\rangle)}{\|w\|^2}\right\} w\,.$$

Qué sucede cuando H es un Hilbert REAL *? Interprete gráficamente.*

2.21 ([3], [26]) *Sea $\Omega :=]0,1[^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ y considere el espacio de Hilbert $(H(\mathrm{div};\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde*

$$H(\mathrm{div};\Omega) \,:=\, \{\,\boldsymbol{\tau} \,\in\, [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \,\in\, L^2(\Omega)\,\}$$

y

$$\langle\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau}\rangle \,:=\, \int_\Omega \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dx \,+\, \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\zeta})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx \qquad \forall\,\boldsymbol{\zeta},\,\boldsymbol{\tau} \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

Además, sea S el subespacio de $H(\mathrm{div};\Omega)$ dado por

$$S := \{\boldsymbol{\tau} :\ \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma\,x_1, \beta + \gamma\,x_2)\ \forall\,x := (x_1, x_2) \,\in\, \Omega;\ \text{con } \alpha,\ \beta,\ \gamma \,\in\, \mathbb{R}\,\}\,,$$

y sea $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ definida por $\quad \boldsymbol{\sigma}(x) \,=\, (x_1 x_2, x_1 + x_2) \quad \forall\,x := (x_1, x_2) \,\in\, \Omega$. Aplique el teorema de caracterización respectivo y encuentre la mejor aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$ por elementos de S, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

2.22 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X := \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, provisto del producto escalar $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^t B)\ \ \forall\, A,\, B \in X$.*

a) *Demuestre que $X = X_{\mathtt{sim}} \oplus X_{\mathtt{asim}}$, donde*

$$X_{\mathtt{sim}} = \{\, A \in X : \quad A^t = A \,\} \quad y \quad X_{\mathtt{asim}} = \{\, A \in X : \quad A^t = -A \,\}.$$

b) *Sea $C := (c_{ij})_{n\times n} \in X$ tal que $\quad c_{ij} = 1\ \ \forall\, i \geq j \quad y \quad c_{ij} = 0\ \ \forall\, i < j$. Encuentre las mejores aproximaciones de C por matrices de $X_{\mathtt{sim}}$ y $X_{\mathtt{asim}}$, con respecto a la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

2.23 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ una base de un subespacio U de X.*

a) *Demuestre que existen $F_1, F_2, ..., F_n \in X'$ tales que $F_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\}$.*

b) *Pruebe que $X = U \oplus V$, donde $V := \{\, x \in X : \quad F_j(x) = 0 \quad \forall\, j \in \{1, ..., n\}\,\}$.*

2.24

a) *Dado $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ con aplicación de Riesz $\mathcal{R} : X' \to X$, defina $[\,\cdot,\cdot\,] : X' \times X' \to \mathbb{R}$ por*

$$[F, G] := \langle \mathcal{R}(F), \mathcal{R}(G)\rangle \qquad \forall\, F,\, G \in X',$$

y pruebe que $(X', [\,\cdot,\cdot\,])$ es un espacio de Hilbert.

b) *Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ y denote por X'' al dual del dual X', es decir*

$$X'' := \Big\{ \mathcal{F} : X' \to \mathbb{R} : \quad \mathcal{F} \text{ es lineal y acotado} \Big\}.$$

Demuestre que para cada $x \in X$ el funcional $J(x) : X' \to \mathbb{R}$ definido por $J(x)(F) := F(x) \quad \forall\, F \in X'$ es un elemento de X'', y que la aplicación resultante $J : X \to X''$ es inyectiva e isométrica. Luego, utilice a) para probar que si X es un Hilbert entonces J es biyectiva.

2.25 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen constantes $M, \beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre, utilizando algún resultado de dualidad, que para todo $f \in L^2(\Omega)$ existe un único $u \in H^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega \Big\{ \kappa\, \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{\kappa}\, u\, v \Big\} = \int_\Omega f\, v \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega),$$

y

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\{ \frac{M}{\min\left\{\beta, \frac{1}{M}\right\}} \right\}^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

2.26 *Dado $n \in \mathbb{N}$, considere una partición $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = 1$ de $\Omega :=]0,1[$ y defina los subespacios de $L^2(\Omega)$ dados por*

$$H_n^1(\Omega) := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad u|_{]t_{j-1},t_j[} \in H^1(]t_{j-1},t_j[) \quad \forall\, j \in \{1,2,\ldots,n\} \Big\},$$

y

$$S_n := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad u|_{]t_{j-1},t_j[} \text{ es constante } \forall\, j \in \{1,2,\ldots,n\} \Big\}.$$

Entonces, dado $u \in H_n^1(\Omega)$, encuentre su mejor aproximación por elementos de $S_n^\perp$ con respecto al producto escalar

$$\langle v, w\rangle := \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} p_j\, v\, w \qquad \forall\, v,\, w \in H_n^1(\Omega),$$

donde p_j es el polinomio definido por $p_j(t) := (t - t_{j-1}) \quad \forall\, t \in]t_{j-1}, t_j[$. Qué sucede con dicha mejor aproximación si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se reemplaza por

$$\langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle := \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big\{ p_j\, v\, w + v'\, w' \Big\} \qquad \forall\, v,\, w \in H_n^1(\Omega)\,?$$

2.27 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{T}$ un conjunto finito de triángulos T, cuyos interiores son disjuntos entre sí, tal que $\bar{\Omega} = \cup\{T : \quad T \in \mathcal{T}\}$. Defina*

$$H_{\mathcal{T}}^1(\Omega) := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad u|_T \in H^1(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{T} \Big\}, \quad y$$

$$S_{\mathcal{T}} := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad u|_T \quad \text{es constante} \quad \forall\, T \in \mathcal{T} \Big\}.$$

Entonces, dado $u \in H_{\mathcal{T}}^1(\Omega)$, encuentre su mejor aproximación por elementos de $S_{\mathcal{T}}^\perp$ con respecto al producto escalar

$$\langle v, w\rangle := \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \Big\{ v\, w + \nabla v \cdot \nabla w \Big\} \qquad \forall\, v,\, w \in H_{\mathcal{T}}^1(\Omega).$$

Qué sucede con dicha mejor aproximación si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se reemplaza por

$$\langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle := \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T v\, w \qquad \forall\, v,\, w \in H_{\mathcal{T}}^1(\Omega)\,?$$

2.28 *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $\bar{B}(\mathbf{0},1) := \Big\{ x \in X : \quad \|x\| \le 1 \Big\}$ su bola unitaria cerrada. A su vez, dados $N \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^N)$, y $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^N$, se define el funcional $(\boldsymbol{\beta} \cdot A) : X \to \mathbb{R}$ por $(\boldsymbol{\beta} \cdot A)(x) := \langle \boldsymbol{\beta}, A(x)\rangle_N \quad \forall\, x \in X$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_N$ es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^N$. Demuestre que un vector $\boldsymbol{\alpha}$ de $\mathbb{R}^N$ pertenece a $\overline{A\big(\bar{B}(\mathbf{0},1)\big)}$ si y sólo si $|\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}\rangle_N| \le \|\boldsymbol{\beta} \cdot A\|_{X'} \quad \forall\, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^N$.*
[INDICACION: *Para la implicación recíproca razone por contradicción*].

3. Operadores Lineales

3.1 *Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X)$. Demuestre que*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\substack{x,\, z \in X \\ \|x\|,\, \|z\| \le 1}} |\langle A(x), z\rangle| \,.$$

3.2 *Sean X, Y, Z espacios de Banach y sean $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Z,X)$. Demuestre que $(AB)' = B'\,A'$. Suponga que A es invertible y demuestre que A' también lo es, con $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.*

3.3 [Inverso a izquierda]. *Sean X, Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $N(A) = \{0\}$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *Existe $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ tal que $B\,A = I : X \to X$.*

b) *$R(A)$ es cerrado y posee un suplemento topológico en Y.*

3.4 *Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dados los polinomios $p_j \in X$, $j \in \{0,1,...,n\}$, con $p_j(t) = t^j$ $\forall\, t \in [0,1]$, se define el operador $A : X \to X$ como*

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in X \,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X,X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.
Ind.: *Para todo $j \in \{0,1,...,n\}$ defina $F_j : X \to \mathbb{R}$ por $F_j(u) := \displaystyle\int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt$ $\forall\, u \in X$, y observe que $F_j \in X'$.*

3.5 *Considere dos espacios vectoriales normados X e Y.*

a) *Sea $A_0 \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. Demuestre que existe un operador $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X,Y), \mathcal{L}(Y,X))$ tal que $\mathcal{T}_0 A_0 = A_0^{-1}$ y $||\mathcal{T}_0|| = ||A_0^{-1}||/||A_0||$.*

b) *Pruebe que si Y es Banach y $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X,Y), \mathcal{L}(Y',X'))$ es un operador biyectivo, entonces $\mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(Y',X'), \mathcal{L}(X,Y))$.*

3.6 *Sean X, Y espacios de Banach y considere $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

a) *Demuestre que $R(A)^0 = N(A')$ y que*

$$N(A') = \{0\} \quad \text{si y sólo si} \quad \overline{R(A)} = Y.$$

b) *Pruebe que si $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$, entonces $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.*

3.7 *Sea M un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado X. Pruebe que el aniquilador de $(\frac{X}{M})'$ coincide con M.*

3.8 *Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea $T : X' \to Y'$ un operador lineal cerrado y biyectivo. Demuestre que $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y', X')$.*

3.9 *Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X'$ $\forall\, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.*
IND.: *Utilizar el* TEOREMA DE BANACH-STEINHAUSS.

3.10 *Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, X)$, con $||A|| < 1$. Demuestre que $(I + A)$ es invertible y que*

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X, X)$. Muestre también que

$$||(I + A)^{-1}|| \, \leq \, \frac{1}{1 - ||A||}.$$

3.11 *Sean X, Y espacios de Banach y sea $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. El grafo de T se denota por $\mathcal{G}_T$ y se define como*

$$\mathcal{G}_T := \{(x, y) \in X \times Y : \quad x \in D(T), \; y = Tx\}$$

Suponga que $\mathcal{D}(T)$ y $\mathcal{G}_T$ son subespacios cerrados de X y $X \times Y$, respectivamente. Demuestre que T es acotado sobre $\mathcal{D}(T)$.

3.12 *Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Un operador lineal $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ se dice una extensión de T si $D(T) \subseteq D(\tilde{T})$ y $Tx = \tilde{T}x \quad \forall\, x \in D(T)$.*
DEFINICIÓN. *Se dice que $\overline{T} : D(\overline{T}) \subseteq X \to Y$ es la* CLAUSURA *de T, si:*

- **i)** *$\overline{T}$ es un operador lineal cerrado*
- **ii)** *$\overline{T}$ es una extensión de T*
- **iii)** *Si $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ es cualquier operador con las propiedades* **i)** *y* **ii)**, *entonces $\tilde{T}$ es una extensión de $\overline{T}$.*

Sean X, Y espacios de Banach, y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que T tiene una clausura $\overline{T}$ si y sólo si la siguiente condición se satisface

$$\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq D(T), \; x_n \to 0 \;, \; Tx_n \to y \qquad \Rightarrow \qquad y = 0.$$

3.13 *Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0, \pi]$ provisto de la norma uniforme. Dadas las funciones trigonométricas $p_j, q_j \in X$, $j \in \{0, 1, ..., n\}$, con $p_j(t) = \operatorname{sen}(jt)$ y $q_j(t) = \cos(jt)$, $\forall\, t \in [0, \pi]$, se define el operador $A : X \to X$ como*

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^{\pi} u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j + \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^{\pi} u(t)\, q_j(t)\, dt \right\} q_j \qquad \forall\, u \in X \, .$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

3.14 *Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Recuerde que el operador adjunto de Hilbert de A se denota $A^* : Y \to X$, donde para cada $y \in Y$, $A^* y \in X$ es el único elemento (dado por* Teorema de Representación de Riesz*) tal que $\langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, A^* y\rangle_X \quad \forall\, x \in X$.*

a) *Pruebe nuevamente que $A^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ y $||A^*|| = ||A||$, y deduzca también que $(A^*)^* = A$.*

b) *Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.*

c) *Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\inf\limits_{z \in N(A)} ||x - z|| \leq \beta\, ||Ax|| \quad \forall\, x \in X$, y demuestre que $R(A) = N(A^*)^\perp$.*

d) *Pruebe que $A^* = R_X\, A'\, R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \to X$ y $R_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^{o}N(A') = N(A^*)^\perp$.*

3.15 *Sean U un espacio vectorial normado y V un espacio de Banach. Además, sea $P : U' \to \mathcal{L}(U,V)$ un operador lineal cerrado tal que $N(P)$ es el funcional nulo sobre U y $R(P) = \mathcal{L}(U,V)$. Demuestre que existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$\alpha\, ||F||_{U'} \;\leq\; ||P(F)||_{\mathcal{L}(U,V)} \quad \forall\, F \in \mathcal{D}(P)\,.$$

3.16 *Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X'$ $\forall\, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.*
Ind.: *Hacer una demostración alternativa a la sugerida en el Ejercicio 3.9 utilizando ahora el* Teorema del Grafo Cerrado *en vez del* Teorema de Banach-Steinhauss.

3.17

a) *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de* Hilbert*. Dados $n \in \mathbb{N}$, $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq H$ y un conjunto de funcionales $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subseteq H'$, se define el operador $A : H \to H$ como*

$$A(u) \;:=\; \sum_{j=1}^{n} F_j(u)\, p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H,H)$ y encuentre explícitamente el operador $A^* : H \to H$.

b) *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el espacio de* Hilbert *$L^2(0,1)$ provisto del producto escalar*

$$\langle u, v\rangle \;:=\; \int_0^1 u(t)\, v(t)\, dt \qquad \forall\, u\,,\; v \in H\,.$$

Dados los polinomios $p_j \in H$, $j \in \{1, ..., n\}$, con $p_j(t) = t^j$ $\forall\, t \in (0,1)$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que A es lineal, acotado y autoadjunto*, esto es $A \in \mathcal{L}(H,H)$ y $A = A^*$.*

3.18 *Sea M un subespacio cerrado de un Hilbert H. Por el Teorema de Descomposición Ortogonal, cada $x \in H$ puede escribirse únicamente en la forma $x = y + z$, con $y \in M$ y $z \in M^{\perp}$. El punto $y \in M$ se llama la* PROYECCIÓN *de x en M, y el operador $P := X \to M, \quad Px = y$, se llama la proyección sobre M. También se denota $P := P_M$ y se dice que P es una proyección.*

i) *Pruebe que si P es una proyección, entonces P es autoadjunto, $P^2 = P$, y $\|P\| = 1$ si $P \neq 0$.*

ii) *Pruebe que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es autoadjunto y $P^2 = P$, entonces P es una proyección sobre algún subespacio cerrado de H.*

3.19 ([3], [26]) *Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.*

a) *Demuestre que* $\displaystyle \sup_{\substack{v\in H \\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v\in V^{\perp} \\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

b) *Suponga que existe $\beta > 0$ tal que* $\displaystyle \sup_{\substack{v\in V^{\perp} \\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \beta\, \|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$, *y pruebe que* $H = R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

3.20 [PSEUDO-INVERSA DE MOORE-PENROSE]. *Sean X, Y Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\mathcal{R}(A) = Y$, y sea $V = N(A)$. Dado el operador de proyección ortogonal $P : X \to V$, considere $B : Y \to X$ tal que $B(y) = x - P(x)$ para todo $y \in Y$, donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$.*

a) *Demuestre que B está bien definido y que B es una biyección lineal y acotada de Y en $V^{\perp}$. Pruebe, además, que B es un* inverso a derecha *de A, esto es $AB(y) = y$ para todo $y \in Y$.*

b) *Defina $A_0 : V^{\perp} \to Y$ como $A_0(x) = A(x)$ para todo $x \in V^{\perp}$, es decir $A_0 = A|_{V^{\perp}}$, y pruebe que $A_0^{-1} = B$.*

c) *Extienda los resultados anteriores al caso en que $\mathcal{R}(A)$ es un subespacio* CERRADO *propio de Y.*

3.21 ([4], [15]) *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $P \in \mathcal{L}(H, H)$, no trivial. Se dice que P es un* PROYECTOR *si satisface $P^2 = P$. En tal caso se dice que P es un* PROYECTOR ORTOGONAL *si además verifica que $\langle u, v\rangle = 0 \quad \forall\, u \in R(P), \quad \forall\, v \in N(P)$.*

a) *Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es un proyector entonces $H = N(P) \oplus R(P)$ y $\|P\| \geq 1$.*

b) *Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *P es un proyector ortogonal.*

ii) $R(P) = N(P)^{\perp}$.

iii) *P es autoadjunto*

c) *Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector ortogonal entonces $\|P\| = 1$.*

3.22 [Clausura de operadores]. *Sean X e Y Banach. Se dice que un operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ admite una clausura si existe un operador lineal $B : \mathcal{D}(B) \subseteq X \to Y$ tal que B es una extensión de A y $G(B) = \overline{G(A)}$. Demuestre que A admite una clausura si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $(x_n, A(x_n)) \overset{n\to\infty}{\to} (\mathbf{0}, y)$, con $y \in Y$, se tiene necesariamente que $y = \mathbf{0}$ [Notar que el presente enunciado es equivalente al del Ejercicio 3.12].*

3.23 *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H.*

a) Sea $y \in H$ y suponga que existe $\tilde{y} \in H$ tal que

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, \tilde{y}\rangle \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\,.$$

Demuestre que dicho $\tilde{y}$ es único.

b) Considere el conjunto

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) := \{y \in H : \text{ existe } \tilde{y} \in H \text{ tal que } \langle A(x), y\rangle = \langle x, \tilde{y}\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\}\,,$$

y defina el operador $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \to H$ dado por $\tilde{A}(y) := \tilde{y} \quad \forall\, y \in H$. Demuestre que $\tilde{A}$ es lineal y cerrado.

3.24 ([27]) *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(H,H)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : H \to H$, y tal que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. El objetivo de este ejercicio es probar que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|\mathbb{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$, para cuyo efecto proceda como se indica:*

a) Sea S un subespacio de dimensión 2 de H y sea $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S,S)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : S \to S$, y tal que $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}$. Pruebe que $S = R(\mathbf{Q}) \oplus R(\mathbb{I} - \mathbf{Q})$ y concluya que existen vectores no nulos p, q, r, $s \in S$ que satisfacen $\langle p, q\rangle = \langle r, s\rangle = 1$, tales que

$$\mathbf{Q}(v) = \langle q, v\rangle\, p \qquad y \qquad (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) = \langle s, v\rangle\, r \qquad \forall\, v \in S\,.$$

b) A partir de la identidad $v = \mathbf{Q}(v) + (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) \quad \forall\, v \in S$, deduzca que $\|p\|^2\,\|q\|^2 = \|r\|^2\,\|s\|^2 = 1 - \langle p, r\rangle\,\langle q, s\rangle$ y concluya así que

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S,S)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S,S)}.$$

c) Dado $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$, considere el subespacio S generado por los vectores x y $\mathbf{P}(x)$ y defina $\mathbf{Q} := \mathbf{P}|_S$. Demuestre que $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S,S)$, observe que la dimensión de S es ≤ 2, y luego pruebe, usando b), que $\|(\mathbf{I} - \mathbf{P})(x)\| \leq \|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

d) Concluya, a partir de c), que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

3.25 *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ un espacio de Hilbert complejo y considere $H \times H$ provisto del producto escalar*

$$\langle (u,v), (z,w)\rangle_{H\times H} := \langle u, z\rangle_H + \langle v, w\rangle_H \qquad \forall\,(u,v)\,,\ (z,w) \in H \times H\,.$$

Además, dado $A \in \mathcal{L}(H,H)$, defina el operador $B : H \times H \to H \times H$ por

$$B((u,v)) := (\imath\, A(v), -\,\imath\, A^*(u)) \qquad \forall\,(u,v) \in H \times H\,.$$

Demuestre que $\|B\| = \|A\|$ y que B es autoadjunto.

3.26 *Sean E y F espacios de Banach, y sea $T : E \to F$ un operador lineal cerrado con dominio $D(T)$ e imagen $R(T)$. Demuestre que son equivalentes:*

a) *El operador T es inyectivo, y T^{-1} es acotado sobre $R(T)$.*

b) *Existe una constante positiva C tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in D(T)$.*

c) *$R(T)$ es cerrado en F, y T es inyectivo.*

3.27 *Sea Ω un dominio convexo y acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y sean $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1(\Omega)}$ los productos escalares de $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente.*

a) *Pruebe que para todo $r \in L^2(\Omega)$ existe un único $z \in H^1(\Omega)$ tal que*

$$\langle z, w\rangle_{H^1(\Omega)} \;=\; \langle r, w\rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, w \in H^1(\Omega)\,.$$

b) *Deduzca que z es la única solución débil del problema de valores de contorno:*

$$-\,\Delta z + z \;=\; r \quad en \quad \Omega\,, \quad \nabla z \cdot \boldsymbol{\nu} \;=\; 0 \quad en \quad \Gamma\,,$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal sobre Γ, y **observe** *(no lo demuestre) que la convexidad de Ω garantiza que $z \in H^2(\Omega)$.*

c) *Defina un operador lineal apropiado y demuestre, utilizando el Teorema del Grafo Cerrado, que existe $C > 0$ tal que*

$$\|z\|_{H^2(\Omega)} \;\leq\; C\,\|r\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, r \in L^2(\Omega)\,.$$

3.28 *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert real y sea $A \in \mathcal{L}(H,H)$ el operador inducido por una forma bilineal y acotada $a : H \times H \to \mathbb{R}$. Además, sea Π la proyección ortogonal de H sobre un subespacio cerrado S, y suponga que existe $\alpha > 0$ tal que $a(v,v) \geq \alpha\,\langle v, v\rangle \quad \forall\, v \in S$. Demuestre que $\Pi A : S \to S$ es una biyección lineal.*

3.29 ([17]) *Sea $(H, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle)$ un espacio de Hilbert y sean $V_1, V_2, ..., V_N$ subespacios cerrados mutuamente ortogonales de H, esto es $v_i \perp v_j\ \forall\, v_i \in V_i,\ \forall\, v_j \in V_j,\ \forall\, i \neq j$. Demuestre que $\mathbb{I} - \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \cdots + \mathbb{P}_N$, donde $\mathbb{P} : H \longrightarrow V_1^\perp \cap V_2^\perp \cap \cdots \cap V_N^\perp$ y $\mathbb{P}_j : H \longrightarrow V_j$ son los proyectores ortogonales respectivos.*

3.30 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y considere el espacio de Hilbert $V := [L^2(\Omega)]^{n\times n}$ sobre $\mathbb{R}$ con el producto escalar $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}\rangle := \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}$, donde*

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \;:=\; \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}\,\tau_{ij} \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma} \;:=\; (\sigma_{ij})_{n\times n}\,, \quad \boldsymbol{\tau} \;:=\; (\tau_{ij})_{n\times n} \in V\,.$$

A su vez, defina el subespacio $U := \{\,\alpha\,\mathbb{A} + \beta\,\mathbb{B} : \quad \alpha\,,\,\beta \in \mathbb{R}\,\} = \langle\,\{\mathbb{A},\mathbb{B}\}\,\rangle$, donde $\mathbb{A} := (a_{ij})_{n\times n}$ y $\mathbb{B} := (b_{ij})_{n\times n}$ están definidos por

$$a_{ij} \;:=\; \begin{cases} 1 & \textit{si } j = i-1 \\ 0 & \textit{e.o.c.} \end{cases} \qquad y \qquad b_{ij} \;:=\; \begin{cases} 1 & \textit{si } j = i+1 \\ 0 & \textit{e.o.c.} \end{cases}\,.$$

Encuentre $U^\perp$ y defina explícitamente los proyectores ortogonales sobre U y $U^\perp$. Qué sucede con estos proyectores si U se reemplaza por $\langle\,\{\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{I}\}\,\rangle$, donde $\mathbb{I}$ es el tensor identidad de V ?

3.31 *Sean* $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ *y* $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)_2$ *espacios de Hilbert sobre* $\mathbb{C}$ *con normas inducidas* $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$*, respectivamente, y sea* $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *tal que* $\|T(x)\|_2 = \|x\|_1 \quad \forall\, x \in H_1$*. Demuestre que* $\langle T(x), T(y)\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1 \quad \forall\, x,\, y \in H_1$*.*
IND.: *Considere las expresiones nulas* $\|T(x+y)\|^2 - \|x+y\|^2$ *y* $\|T(x+iy)\|^2 - \|x+iy\|^2$*.*

3.32 *Dado* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$*, defina el operador* $A : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ *por*

$$A(u) := \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_j \right\} v_j \quad \forall\, u \in H^1(\Omega)\,,$$

donde $\{u_1, u_2, ..., u_N\} \subseteq H^1(\Omega)$ *y* $\{v_1, v_2, ..., v_N\} \subseteq L^2(\Omega)$*. Demuestre que* A *es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto* A^**.*

3.33 *Sea* $X := C[0,1]$ *provisto de la norma uniforme, y sean* $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$*,* $\{q_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq X$ *tales que la serie* $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} p_j(s)\, q_j(t)$ *converge uniformemente a una funcion continua* $K : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$*, es decir*

$$\lim_{N\to+\infty} \left\{ \max_{(s,t)\in[0,1]\times[0,1]} \left| K(s,t) - \sum_{j=1}^{N} p_j(s)\, q_j(t) \right| \right\} = 0\,.$$

A su vez, sea $F_j \in X'$ *definido por* $F_j(u) := \displaystyle\int_0^1 q_j(t)\, u(t)\, dt \quad \forall\, u \in X$*. Pruebe que para todo* $G \in X'$*, la serie* $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} G(p_j)\, F_j$ *es convergente en* X'*. Identifique el valor del límite respectivo en términos del adjunto de un operador conveniente.*

3.34 ([3], [26]) [LA CONDICIÓN INF-SUP CONTINUA]. *Sean* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ *e* $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ *espacios de Hilbert y considere* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$*. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) A *es sobreyectivo.*

ii) $A^* : Y \to X$ *es inyectivo y de rango cerrado.*

iii) Existe $\alpha > 0$ *tal que* $\displaystyle\|A^*(y)\|_X := \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|\langle A(x), y\rangle_Y|}{\|x\|_X} \geq \alpha\, \|y\|_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$

iv) Existe un operador $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ *tal que* $A\,B = I$ *en* Y *y* $B\,A = I - P$ *en* X*, donde* $P : X \to N(A)$ *es el proyector ortogonal.*

3.35 *Dado* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$*, defina el operador* $A : H^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ *por*

$$A(u) := \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \Delta u\, \Delta u_j \right\} v_j \quad \forall\, u \in H^2(\Omega)\,,$$

donde $\{u_1, u_2, ..., u_N\} \subseteq H^2(\Omega)$ *y* $\{v_1, v_2, ..., v_N\} \subseteq H^1(\Omega)$*. Demuestre que* A *es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto* A^**.*

3.36 *Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $A : H \to H$ un operador lineal tal que $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle \quad \forall\, x,\, y \in H$. Pruebe que A es acotado.*

3.37 *Sean V y W subespacios cerrados de un Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, y sean $P : H \to V$ y $Q : H \to W$ los proyectores ortogonales respectivos. Demuestre que*

$$\langle (Q-P)(x), x\rangle \,\geq\, 0 \quad \forall\, x \in H \quad \textit{si y sólo si} \quad V \subseteq W\,.$$

3.38 *Dado Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, defina el operador $A : H^1(\Omega) \longrightarrow H^2(\Omega)$ por*

$$A(u) \,:=\, \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_j \right\} v_j \quad \forall\, u \,\in\, H^1(\Omega)$$

donde $\{u_1, u_2, ..., u_N\} \subseteq H^1(\Omega)$ y $\{v_1, v_2, ..., v_N\} \subseteq H^2(\Omega)$. Demuestre que A es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto A^*.

3.39 *El presente ejercicio apunta a aplicar la teoría desarrollada para el análisis de la función spline de interpolación a otras tres situaciones distintas, pero con características similares.*

a) *Sean $\Omega :=]a,b[$, $n \in \mathbb{N}$, y considere la partición $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$. Además, sean $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha,\, \beta > 0$. Luego, dado $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \ldots, z_n)^{\mathtt{t}} \in \mathbb{R}^n$, se pide analizar la solubilidad del siguiente problema: Hallar $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$ tal que $u_1(t_i) - u_2(t_i) = z_i \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, y de modo que*

$$\alpha \int_\Omega \left(u_1^{(m)}(t)\right)^2 dt \,+\, \beta \int_\Omega \left(u_2^{(m)}(t)\right)^2 dt$$
$$= \min_{\substack{\mathbf{v}:=(v_1,v_2)\in H^m(\Omega)\times H^m(\Omega)\\ v_1(t_i)\,-\,v_2(t_i)\,=\,z_i\ \forall\, i}} \left\{ \alpha \int_\Omega \left(v_1^{(m)}(t)\right)^2 dt \,+\, \beta \int_\Omega \left(v_2^{(m)}(t)\right)^2 dt \right\}$$

Se genera algún cambio en su análisis si la condición de interpolación se reemplaza por $v_1(t_i) = v_2(t_i) = z_i \;\forall\, i$? Explique y fundamente.

b) *Sea S un subespacio de dimensión finita N de un Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, y consideremos una base $\{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$ de S. Además, sea $\Pi : H \to S^\perp$ el proyector ortogonal. Demuestre que para cada $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \ldots, z_N)^{\mathtt{t}} \in \mathbb{R}^N$ existe un único $u \in H$ tal que $\langle u, p_i\rangle_H = z_i \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, y de modo que*

$$\|\Pi(u)\|_H \;=\; \min_{\substack{v\in H\\ \langle v,p_i\rangle_H\,=\,z_i\ \forall\, i}} \|\Pi(v)\|_H$$

Deduzca un algoritmo para calcular u.

c) *Sean $\Omega :=]-\pi,\pi[$ y $\left(H^1(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{1,\Omega}\right)$ el espacio de Sobolev de orden 1. A su vez, sea $n \in \mathbb{N}$ y considere los conjuntos de funciones $\{p_0, p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ y $\{q_0, q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ definidos por $p_k(t) := \mathrm{sen}(kt)$ y $q_k(t) := \cos(kt) \quad \forall\, t \in [-\pi, \pi], \quad \forall\, k \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Entonces, dado $\mathbf{z} := (z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n)^{\mathtt{t}} \in \mathbb{R}^{n+1}$, se pide analizar la solubilidad del siguiente problema: Hallar $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ tal que $\langle u_1, p_k\rangle_{1,\Omega} + \langle u_2, q_k\rangle_{1,\Omega} = z_k \quad \forall\, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, y de modo que*

$$\int_\Omega \left(u_1'(t)\right)^2 dt \,+\, \int_\Omega \left(u_2'(t)\right)^2 dt$$
$$= \min_{\substack{\mathbf{v}:=(v_1,v_2)\in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\\ \langle v_1,p_k\rangle_{1,\Omega}\,+\,\langle v_2,q_k\rangle_{1,\Omega}\ =\,z_k\ \forall\, k}} \left\{ \int_\Omega \left(v_1'(t)\right)^2 dt \,+\, \int_\Omega \left(v_2'(t)\right)^2 dt \right\}$$

3.40 *Sea G un subespacio de un espacio vectorial normado X, y sea N un subespacio del dual de un espacio de Banach reflexivo Y. Demuestre que:*

a) $\operatorname{dist}(f, G^o) \;=\; \sup\limits_{\substack{x\in \overline{G} \\ \|x\|\le 1}} |f(x)| \qquad \forall\, f \,\in\, X'\,.$

b) $\overline{N} \;=\; \big({}^oN\big)^o\,.$

c) $\operatorname{dist}(y, {}^o N) \;=\; \sup\limits_{\substack{g\in \overline{N} \\ \|g\|\le 1}} |g(y)| \qquad \forall\, y \,\in\, Y\,.$

d) $\operatorname{dist}(g, \overline{N}) \;=\; \sup\limits_{\substack{y\in {}^oN \\ \|y\|\le 1}} |g(y)| \qquad \forall\, g \,\in\, Y'\,.$

3.41 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}$, considere los espacios de Hilbert reales dados por $X \,:=\, L^2(\Omega)$ e $Y \,:=\, \mathbb{R}^{2\times 2}$ provistos de los productos escalares*

$$\langle u, v\rangle_X \,:=\, \int_\Omega u\, v \quad \forall\, u,\, v \,\in\, X\,, \qquad \langle A, B\rangle_Y \,:=\, \operatorname{tr}\big(A^{\mathtt{t}}\, B\big) \quad \forall\, A,\, B \,\in\, Y\,,$$

y defina el operador $\mathcal{A} : X \to Y$ por

$$\mathcal{A}(u) \,:=\, \begin{pmatrix} \displaystyle\int_\Omega u & \displaystyle\int_\Omega x\, u \\[2ex] \displaystyle\int_\Omega x\, u & \displaystyle\int_\Omega x^2\, u \end{pmatrix} \qquad \forall\, u \,\in\, X\,.$$

i) *Demuestre que $\mathcal{A}$ es lineal y acotado y calcule explícitamente el operador adjunto $\mathcal{A}^*$ y los espacios $N(\mathcal{A})$, $R(\mathcal{A})$, $N(\mathcal{A}^*)$ y $R(\mathcal{A}^*)$.*

ii) *Encuentre un subespacio cerrado S de X tal que $\mathcal{A}|_S : S \to R(\mathcal{A})$ sea biyectivo.*

iii) *Defina $\tilde{Y} \,:=\, \big\{ B \in Y : \quad B^{\mathtt{t}} \,=\, -\, B \big\}$ y demuestre que existe $C > 0$ tal que*

$$\|\mathcal{A}^*(A)\|_X \,\ge\, C \inf_{B\in\tilde{Y}} \|A - B\|_Y \quad \forall\, A \in Y\,.$$

iv) *Reemplace $X \,:=\, L^2(\Omega)$ por $X \,:=\, H^1(\Omega)$ con su producto escalar habitual, y recalcule el operador adjunto $\mathcal{A}^*$.*

3.42 *Sean X, Y_1 e Y_2 espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, y sean $A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subseteq X \to Y_1$ y $A_2 : \mathcal{D}(A_2) \subseteq X \to Y_2$ operadores lineales cerrados. Considere el espacio producto $Y \,:=\, Y_1 \times Y_2$ y demuestre que el operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, definido por $A(x) \,:=\, (A_1(x), A_2(x))$ $\forall\, x \,\in\, \mathcal{D}(A) \,:=\, \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_2)$, también es cerrado. Recíprocamente, suponga que $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es lineal cerrado, y que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $\{A_i(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y_i, $i \in \{1,2\}$, existe una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para la cual $\{A_j(x_n^{(1)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y_j, $\forall\, j \in \{1,2\}$. Demuestre en tal caso que para cada $i \in \{1,2\}$, $A_i|_{\mathcal{D}(A)}$ es cerrado.*

3.43 *Determine,* **justificadamente**, *si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:*

i) *Todo operador lineal, acotado y biyectivo de un Banach X en un Banach Y es compacto.*

ii) *Dados H y Q espacios de Hilbert se tiene que $A \in \mathcal{L}(H,Q)$ es biyectivo si y sólo si $A^* \in \mathcal{L}(Q,H)$ es biyectivo.*

iii) *Existen operadores compactos que no son cerrados.*

iv) *Dados X e Y espacios de Banach, el inverso de un operador lineal, cerrado y biyectivo $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, también es cerrado.*

v) *Dados X e Y espacios de Banach, el inverso de un operador lineal, cerrado y biyectivo $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, es acotado.*

vi) *Dados X e Y espacios de Banach, Y de dimensión finita, y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, el rango del operador adjunto $A' \in \mathcal{L}(Y',X')$ es cerrado.*

3.44 *Sea $\Omega :=]0,1[$, considere los espacios de Hilbert reales dados por $X = L^2(\Omega)$ e $Y = \ell_2(\mathbb{R}) := \left\{ A := \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} : \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$, provistos de los productos escalares usuales*

$$\langle u,v\rangle_X := \int_0^1 u\,v \qquad \forall\, u,\, v \in X\,,$$

$$\langle A,B\rangle_Y := \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, b_k \qquad \forall\, A := \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}\,,\ B := \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in Y,$$

y defina el operador $\mathcal{A} : X \to Y$ por

$$\mathcal{A}(u) := \left\{ \frac{1}{k} \int_0^1 x^k\, u \right\}_{k\in\mathbb{N}} \qquad \forall\, u \in X\,.$$

i) Demuestre que $\mathcal{A}$ está bien definido y es lineal y acotado, y luego calcule el operador adjunto $\mathcal{A}^*$ y los espacios $N(\mathcal{A})$ y $\overline{R(\mathcal{A}^*)}$.

ii) Encuentre un subespacio cerrado S de X tal que $\mathcal{A}|_S : S \to R(\mathcal{A})$ sea biyectivo.

3.45 ([17]) *El presente ejercicio apunta a caracterizar la sobreyectividad de un operador cuyo rango está contenido en un espacio producto, en términos de la sobreyectividad de sus respectivas componentes.*

a) Recuerde primero que, dados $m,\, n \in \mathbb{N}$ y un operador lineal $\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, el Teorema de las Dimensiones establece que $n = \dim N(\mathcal{B}) + \dim R(\mathcal{B})$. Luego, suponga que $m = m_1 + m_2$ y que $\mathcal{B}(x) = (\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, donde $\mathcal{B}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ es lineal para cada $i \in \{1,2\}$, y demuestre que $\mathcal{B}$ es sobreyectivo si y sólo si

i) $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son sobreyectivos. *ii) $\mathbb{R}^n = N(\mathcal{B}_1) + N(\mathcal{B}_2)$.*

b) Sean U y V subespacios cerrados de un Hilbert $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $U^\perp \subseteq U + V$. *ii) $X = U + V$.* *iii) $U^\perp + V^\perp \subseteq U + V$.*

c) *Sean X, Y_1 e Y_2 espacios de Hilbert arbitrarios y defina $Y := Y_1 \times Y_2$. Luego, sea $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\mathcal{B}(x) = (\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)) \quad \forall\, x \in X$, donde $\mathcal{B}_i \in \mathcal{L}(X, Y_i) \quad \forall\, i \in \{1,2\}$, y demuestre que $\mathcal{B}$ es sobreyectivo si y sólo si*

i) $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son sobreyectivos. *ii) $X = N(\mathcal{B}_1) + N(\mathcal{B}_2)$.*

3.46 *Sean X e Y espacios de Banach para los cuales existe una biyección $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, y sea Z un subespacio de X. Pruebe que todo $g \in Z'$ puede "extenderse" a un $G \in Y'$ tal que $\|G\|_{Y'} \cong \|g\|_{Z'}$.*

3.47 *Sea X un espacio de Banach real y sea $\mathbf{a}$ una forma bilineal sobre X, esto es, $\mathbf{a} : X \times X \to \mathbb{R}$ es una aplicación que satisface:*

i) $\mathbf{a}(\alpha\, x + \beta\, z, y) = \alpha\, \mathbf{a}(x,y) + \beta\, \mathbf{a}(z,y) \quad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x,\, y,\, z \in X,$

ii) $\mathbf{a}(x, \alpha\, y + \beta\, z) = \alpha\, \mathbf{a}(x,y) + \beta\, \mathbf{a}(x,z) \quad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x,\, y,\, z \in X.$

En tal caso se define $\mathbf{A} : X \to X'$ como $\mathbf{A}(x)(y) := \mathbf{a}(x,y) \quad \forall\, x,\, y \in X$, el cual se llama OPERADOR LINEAL INDUCIDO POR $\mathbf{a}$. *Asuma entonces que existen constantes M, $m > 0$ tales que*

iii) $|\mathbf{a}(x,y)| \le M\, \|x\|\, \|y\| \quad \forall\, x,\, y \in X, \quad y$

iv) $\mathbf{a}(x,x) \ge m\, \|x\|^2 \quad \forall\, x \in X,$

y demuestre que $\mathbf{A}$ es acotado, inyectivo y de rango $R(\mathbf{A})$ cerrado. Pruebe además que ${}^\circ R(\mathbf{A}) = \big\{\mathbf{0}\big\}$, defina el operador adjunto $\mathbf{A}' : (X')' \to X'$, y comente bajo qué supuesto adicional sobre el espacio X podrá concluirse, a partir de las hipótesis i) - iv), que $\mathbf{A}$ es biyectivo.

3.48 *Sean X e Y espacios de Banach reales y sea $\mathcal{A} : X \times Y \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, esto es, $\mathcal{A}$ satisface:*

i) $\mathcal{A}(\alpha\, x + \beta\, z, y) = \alpha\, \mathcal{A}(x,y) + \beta\, \mathcal{A}(z,y) \quad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x,\, z \in X\,,\ \forall\, y \in Y,$

ii) $\mathcal{A}(x, \alpha\, y + \beta\, z) = \alpha\, \mathcal{A}(x,y) + \beta\, \mathcal{A}(x,z) \quad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in X\,,\ \forall\, y,\, z \in Y.$

Asuma adicionalmente que $\mathcal{A}$ es acotada y débilmente coerciva, es decir:

iii) *existe $M > 0$ tal que* $\quad |\mathcal{A}(x,y)| \le M\, \|x\|\, \|y\| \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y,$

iv) *existe $\alpha > 0$ tal que* $\quad \displaystyle\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{A}(x,y)}{\|x\|} \ge \alpha\, \|y\| \quad \forall\, y \in Y,$

v) $\displaystyle\sup_{y \in Y} \mathcal{A}(x,y) > 0 \qquad \forall\, x \in X,\ x \neq \mathbf{0},$

y defina los operadores lineales $\mathbf{A} : X \to Y'$ *y* $\mathbf{B} : Y \to X'$ *como*

$$\mathbf{A}(x)(y) := \mathcal{A}(x,y) \quad y \quad \mathbf{B}(y)(x) := \mathcal{A}(x,y) \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y\,.$$

a) *Demuestre que* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *están bien definidos y son acotados.*

b) *Pruebe que* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son inyectivos y que* $R(\mathbf{B})$ *es cerrado en* X'.

c) *Defina explícitamente los operadores* $\mathbf{A}' : Y'' \to X'$ *y* $\mathbf{B}' : X'' \to Y'$, *y deduzca que* $\mathbf{B}'$ *es sobreyectivo.*

d) *Suponga en particular que* X *e* Y *son espacios de Hilbert y demuestre en tal caso que* $\mathcal{R}_X \circ \mathbf{B} = \big(\mathcal{R}_Y \circ \mathbf{A}\big)^*$, *donde* $\mathcal{R}_X$ *y* $\mathcal{R}_Y$ *son las aplicaciones de Riesz respectivas. Concluya a partir de esta identidad y iv) que* $\mathbf{A}$ *es biyectivo.*

3.49 *Dado* $n \in \mathbb{N}$, *considere una partición* $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = 1$ *de* $\Omega :=]0,1[$, *y defina el operador lineal* $A : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}^n$ *por*

$$A(u) := \Big(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big\{ t\, u(t) + u'(t) \Big\}\, dt \Big)_{\overline{j=1,n}} \qquad \forall\, u \in H^1(\Omega)\,,$$

donde $H^1(\Omega)$ *y* $\mathbb{R}^n$ *se proveen de sus productos escalares usuales. Demuestre que* $A \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathbb{R}^n)$, *defina explícitamente el operador* $A^* : \mathbb{R}^n \to H^1(\Omega)$, *y pruebe que* $\|A^*\| \leq 2/\sqrt{3}$.

3.50 *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^2$ *y sea* $\mathcal{T}$ *un conjunto finito de triángulos* T, *cuyos interiores son disjuntos entre sí, tal que* $\bar{\Omega} = \cup\{T : \quad T \in \mathcal{T}\}$. *Defina* $A : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}^N$ *por*

$$A(u) := \left(\int_T \Big\{ u(x) \,+\, x \cdot \nabla u(x) \Big\}\, dx \right)_{T \in \mathcal{T}} \qquad \forall\, u \in H^1(\Omega)\,,$$

donde N *es la cardinalidad de* $\mathcal{T}$, *y los espacios* $H^1(\Omega)$ *y* $\mathbb{R}^N$ *se proveen de sus productos escalares usuales. Demuestre que* $A \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathbb{R}^N)$ *y defina explícitamente el operador* $A^* : \mathbb{R}^N \to H^1(\Omega)$.

3.51 *Determine,* **justificadamente**, *si las siguientes afirmaciones son verdaderas, falsas o no necesariamente ciertas (a menos que se tenga una hipótesis extra):*

i) *La suma de dos operadores cerrados es un operador cerrado.*

ii) *Si* X *es un Hilbert y* A, $B \in \mathcal{L}(X)$ *son autoadjuntos e inyectivos, entonces* $R(A) = R(B)$.

iii) *Si* X *es un espacio vectorial normado y* $A : X \to X'$ *es un operador lineal, cerrado y biyectivo, entonces* A^{-1} *es acotado.*

iv) *Si* X *e* Y *son Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ *es un operador lineal cerrado no acotado, entonces* $\mathcal{D}(A)$ *es un subespacio cerrado propio de* X.

v) *El adjunto de todo operador lineal, acotado y sobreyectivo de un Hilbert* X *en un Hilbert* Y *es inyectivo.*

vi) *La suma de un operador acotado con uno cerrado es un operador cerrado.*

vii) *Si X e Y son espacios vectoriales normados y $A : \mathcal{L}(X,Y) \to Y'$ es un operador lineal, cerrado y biyectivo, entonces A^{-1} es acotado.*

viii) *Si X e Y son espacios de Banach y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ es un operador lineal cerrado e inyectivo tal que $A^{-1} : \mathcal{D}(A^{-1}) \subseteq Y \to X$ no es acotado, entonces $R(A)$ es un subespacio cerrado propio de Y.*

ix) *El teorema del grafo cerrado no puede ser demostrado con el teorema de la aplicación abierta.*

3.52 *Sean X e Y espacios de Banach y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ un operador lineal cerrado con $\mathcal{D}(A)$ denso en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *A' es sobreyectivo, es decir $R(A') = X'$.*

b) *Existe $c \geq 0$ tal que*
$$\|x\| \leq c\,\|A(x)\| \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\,.$$

c) *$N(A) = \{\theta_X\}$ y $R(A)$ es cerrado.*

4. Problemas Variacionales

4.1 ([7]) *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ, y defina $V := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, es decir*
$$V = \left\{ v \in H^2(\Omega) : \quad v = 0 \quad en \quad \Gamma \right\}.$$
Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que
$$||v||_{H^1(\Omega)} \leq C\,||\Delta\, v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in V\,.$$
Ind.: *Dada $v \in V$, defina $f = -\Delta\, v \in L^2(\Omega)$ y aplique el Lema de Lax-Milgram al problema de valores de contorno: $-\Delta\, u = f$ en Ω, $u = 0$ en Γ.*

4.2 ([23]) *Sea $\Omega := (0,1)$ y considere el problema de valores de contorno*
$$\begin{array}{ll} -(au')' + bu & = f \quad \text{en} \quad \Omega \\ u'(0) = u'(1) & = 0 \quad , \end{array} \tag{4}$$
donde $a(x) = x^2+2, b(x) = 2+sen(x)$ y $f(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$. Puede probarse que la formulación débil de (4) consiste en hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que
$$\int_0^1 (au'v' + buv)dx = \int_0^1 fvdx \quad \forall v \in H^1(\Omega)\,. \tag{5}$$
Demuestre que existe un único $u \in H^1(\Omega)$ solución de (5).

4.3 ([23]) *Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{ H_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1} \subset H_n \;\forall n \in \mathbb{N}$, y $\cup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ es denso en H. Sea $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f \in H'$ existe una única sucesión $\{ u_n(f) \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ tal que*
$$u_n(f) \in H_n \quad , \quad B(u_n(f), v_n) = f(v_n) \quad \forall\, v_n \in H_n\,,$$

y $||u_n(f)|| \leq C_0\,||f||\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, *donde* C_0 *es una constante positiva independiente de* n *y de* f. *Suponga además que para todo* $f \in H'$ *existe un único* $u(f) \in H$ *tal que*

$$B(u(f), v) \,=\, f(v) \quad \forall\, v \,\in\, H\,.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to+\infty} ||u(f) \,-\, u_n(f)|| \,=\, 0 \quad \forall\, f \in H'\,.$$

IND.: *Defina la proyección de Galerkin* $P_n : H \to H_n$, *donde* $\forall\, v \in H$, $P_n v$ *denota la única solución de* $B(P_n v, w_n) = B(v, w_n) \quad \forall\, w_n \in H_n$ *y observe que* $P_n u(f) = u_n(f)$.

4.4 ([22]) *Sea* Ω *un dominio acotado de* $\mathbb{R}^2$ *con frontera suave* Γ. *Considere el problema de valores de contorno:*

$$-\,\Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \,=\, g \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \int_\Omega u\, dx \,=\, a_1\,, \tag{6}$$

donde $a_1 \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, *y* $g \in L^2(\Gamma)$ *satisfacen la condición de compatibilidad*

$$\int_\Omega f\, dx \,+\, \int_\Gamma g\, ds \,=\, 0\,.$$

Demuestre que una formulación débil de (6) consiste en: Hallar $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx \,+\, \lambda \int_\Omega v\, dx \,=\, \int_\Omega f v\, dx \,+\, \int_\Gamma g v\, ds\ ,$$

$$\mu \int_\Omega u\, dx \,=\, \mu a_1\,,$$

para todo $(v, \mu) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$.

4.5 ([20]) *Sean* V *un espacio de Hilbert y* $a : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ *una forma trilineal tal que para todo* $w \in V$, *la forma bilineal* $a(w; \cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ *es acotada. Dado* $F \in V'$, *considere el problema: Hallar* $u \in V$ *tal que*

$$a(u; u, v) \,=\, F(v) \qquad \forall\, v \,\in\, V\,. \tag{7}$$

Suponga que existe $\alpha > 0$ *tal que*

$$a(w; v, v) \;\geq\; \alpha\, ||v||_V^2 \qquad \forall\, v, w \,\in\, V\,.$$

Asuma además que existe una constante $C_0 > 0$ *tal que para todo* w_1, w_2, u, $v \in V$,

$$|a(w_1; u, v) \,-\, a(w_2; u, v)| \,\leq\, C_0\, ||w_1 \,+\, w_2||_V\, ||u||_V\, ||v||_V\, ||w_1 \,-\, w_2||_V\,.$$

Encuentre una constante positiva C_1 *tal que para todo* $F \in V'$, $||\,F\,||_{V'} \leq C_1$, *el problema (7) admite una única solución.*

4.6 ([20], Ejercicio 1.6)

a) *El* Teorema del Punto Fijo de Brouwer *establece que: Dado un subconjunto S compacto, convexo, y no vacío de un espacio vectorial de dimensión finita, y una aplicación continua T de S en S, entonces T tiene al menos un punto fijo. Use este resultado de Brouwer para demostrar que si X es un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $|| \cdot ||$, y si F es una aplicación continua de X en X tal que, para algún $\mu > 0$, $\langle F(u), u \rangle \geq 0 \quad \forall\, u \in X$ con $||u|| = \mu$, entonces existe $u_0 \in X$, $||u_0|| \leq \mu$, tal que $F(u_0) = 0$.*

b) *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$.* El problema de Navier-Stokes, *un problema de suma importancia en mecánica de fluídos, consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que*

$$-\Delta\, \mathbf{u} + \sum_{j=1}^{2} u_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \tag{8}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\, dx = 0\,.$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$, y

$$Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\, dx = 0 \right\}.$$

Demuestre que la formulación débil de (8) se reduce a: encontrar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ tales que:

$$\begin{array}{rcl} a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &=& f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H \\ b(\mathbf{u}, q) &=& 0 \quad \forall\, q \in Q\,, \end{array} \tag{9}$$

donde $a : H \times H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$, y $f \in H'$, están definidas por

$$a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\, dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i\, dx\,,$$

$$b(\mathbf{v}, p) := -\int_\Omega p\, \nabla \cdot \mathbf{v}\, dx \quad , \quad f(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx\,.$$

c) *En lo que sigue considere un problema del tipo (9), no necesariamente proveniente de (8), y asuma que las siguientes hipótesis se cumplen: b es una forma bilineal acotada, b satisface la condición de Babuška-Brezzi continua, y para cada $\mathbf{w} \in H$ la aplicación $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es también una forma bilineal acotada. A su vez, sea*

$$V := \left\{ \mathbf{v} \in H : \quad b(\mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall\, q \in Q \right\}.$$

Demuestre que (9) puede reducirse, equivalentemente, al siguiente problema no-lineal: hallar $\mathbf{u} \in V$ tal que

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in V\,. \tag{10}$$

d) *Además de lo dicho en* **c)**, *suponga ahora que: existe una constante $\alpha > 0$ tal que $a(\mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha\, ||\mathbf{v}||^2$ para todo $\mathbf{v} \in V$; V es separable; y para cada $\mathbf{v} \in V$, la aplicación $\mathbf{u} \to a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es secuencialmente débilmente continua, es decir*

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u} \in V \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} a(\mathbf{u}_n; \mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v})\,.$$

Demuestre que el problema (10) tiene al menos una solución $\mathbf{u} \in V$.

IND.: *Muestre primero que existe una sucesión* $\{ \mathbf{v}_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* V *tal que para todo* $m \geq 1$ *el conjunto* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m\}$ *es linealmente independiente, y las combinaciones lineales finitas de los* $\mathbf{v}_n$ *constituyen un conjunto denso en* V*. Luego, denote por* V_m *al subespacio de* V *generado por* $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m\}$*, y aplique el método de Galerkin en conjunto con lo probado en parte* **a)** *para construir una sucesión de soluciones aproximantes.*

4.7 ([1]) *Sea* H *un espacio de Hilbert y sea* $B : H \times H \to \mathbf{R}$ *una forma bilineal tal que*

i) B *es simétrica, es decir*

$$B(u,v) \,=\, B(v,u) \quad \forall\,(u,v) \in H \times H\,.$$

ii) B *es acotada, es decir existe* $C_1 > 0$ *tal que*

$$|B(u,v)| \leq C_1||u||_H||v||_H \quad \forall\,(u,v) \in H \times H\,.$$

iii) B *es débilmente coerciva, es decir existe* $C_2 > 0$ *tal que*

$$\sup_{v\in H\setminus\{0\}} \frac{|B(u,v)|}{||v||_H} \,\geq\, C_2\,||u||_H \quad \forall\,u \in H\,.$$

Demuestre que, dado $F \in H'$*, existe un único* $u \in H$ *tal que* $B(u,v) = F(v)$ *para todo* $v \in H$*, y además,* $||u||_H \leq \frac{1}{C_2}||F||_{H'}$.

4.8 ([3]) *Sean* X *y* M *espacios de Hilbert y sean* $a : X \times X \to \mathbb{R}$*,* $b : X \times M \to \mathbb{R}$ *dos formas bilineales acotadas. Suponga además que* a *es simétrica y semi-definida positiva sobre* X*. Dados* $F \in X'$*,* $G \in M'$ *se define el operador* $\mathcal{J} : X \times M \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{J}(v,\mu) \,:=\, \frac{1}{2}\,a(v,v) \,+\, b(v,\mu) \,-\, F(v) \,-\, G(\mu)\,.$$

Considere entonces los siguientes problemas variacionales:

Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(u,v) \,+\, b(v,\lambda) \,=&\quad F(v) \quad \forall\,v \in X\,, \\ b(u,\mu) \,=&\quad G(\mu) \quad \forall\,\mu \in M\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\mathcal{J}(u,\mu) \,\leq\, \mathcal{J}(u,\lambda) \,\leq\, \mathcal{J}(v,\lambda) \qquad \forall\,(v,\mu) \in X \times M\,. \tag{12}$$

Demuestre que (u,λ) *es solución de (11) si y sólo si* (u,λ) *es solución de (12).*

4.9 ([18], [19]) *Sean* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$*,* $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ *espacios de Hilbert y considere operadores* $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X,X)$*,* $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X,Y)$ *y* $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$*. Suponga que* $\mathbf{S}$ *es semi-definido positivo, esto es*

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \,\geq\, 0 \quad \forall\,y \in Y\,,$$

y que existen constantes α*,* $\beta > 0$ *tales que*

$$\langle \mathbf{P}x, x\rangle_X \,\geq\, \alpha\,||x||_X^2 \qquad \forall\,x \in X$$

y

$$\sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y\in Y\,.$$

Dados $f\in X$ y $g\in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x},\tilde{y})\in X\times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C>0$, que depende de $||\mathbf{P}||$, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \;\leq\; C\,\{\,||f|| + ||g||\,\}\,.$$

IND.: *Transforme a una ecuación equivalente en Y y luego aplique el Lema de Lax-Milgram.*

4.10 ([18], [19]) *Sean $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y,\langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P}: X\to X$, $\mathbf{Q}\in\mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S}\in\mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es*

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y\in Y\,,$$

que $\mathbf{P}$ es NOLINEAL, *y que existen constantes M, α, $\beta>0$ tales que*

$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \;\leq\; M\,||x-\bar{x}||_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x-\bar{x}\rangle_X \;\geq\; \alpha\,||x-\bar{x}||_X^2 \quad \forall\, x,\,\bar{x}\,\in X\,,$$

y

$$\sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y\in Y\,.$$

Dados $f\in X$ y $g\in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x},\tilde{y})\in X\times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C>0$, que depende de M, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \;\leq\; C\,\{\,||f|| + ||g|| + ||\mathbf{P}(0)||\,\}\,.$$

4.11 *Sea $\Omega := (0,3)$ y considere el problema de valores de contorno: $-u'' + (x+1)\,u = x$ en Ω, $u(0) = u(3) = 0$. Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución $u\in H_0^1(\Omega)$. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio*

$$H_2 \;:=\; \{\, v\in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \quad \text{y} \quad v\,|_{[x_j,x_{j-1}]} \text{ es un polinomio}$$
$$\text{de grado } \;\leq\; 1\,, \forall\, j\in\{1,2,3\}\,\}\,.$$

IND.: *Notar que $H_2 = \langle\{e_1,e_2\}\rangle$, donde $e_j\in H_2$ es tal que $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo i, $j\in\{1,2\}$.*

4.12 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$.* El Problema de Stokes *consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que*

$$\begin{aligned} -\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad &en \quad \Omega\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad en \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad en \quad \Gamma\,, \quad &\int_\Omega p\,dx = 0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\,dx = 0 \right\}$. Demuestre que la formulación débil de (13) se reduce a: encontrar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ tales que:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{v},p) = &\quad F(\mathbf{v}) \quad \forall\,\mathbf{v} \in H\,, \\ B(\mathbf{u},q) = &\quad 0 \quad \forall\,q \in Q\,, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \to \mathbb{R}$, $B : H \times Q \to \mathbb{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\,dx\,,$$

$$B(\mathbf{v},p) := -\int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v}\,dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\,dx\,.$$

4.13 ([5]) *Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbb{N}$ considere una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbb{R}$ tal que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente elíptica. Esto significa que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha}\,\|v_n\|_H^2\ \forall\,v_n \in H_n$, $\forall\,n \in \mathbb{N}$.*

a) *Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que*

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall\,v \in H$$

y

$$A_n(u_n,v_n) = F(v_n) \qquad \forall\,v_n \in H_n\,.$$

b) *Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\|u - u_n\|_H \leq C \inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H + \sup_{w_n \in H_n \setminus \{0\}} \frac{|A(v_n,w_n) - A_n(v_n,w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}.$$

4.14 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen constantes M, $\beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Defina el conjunto*

$$S := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1 \right\},$$

y demuestre que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ existe un único $g \in S$ tal que

$$\int_\Omega \kappa(x)\,\|\nabla u(x) - \nabla g(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2\,dx = \min_{v \in S} \int_\Omega \kappa(x)\,\|\nabla u(x) - \nabla v(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2\,dx\,.$$

4.15 ([5]) [Lema de Aubin-Nitsche]. *Sean* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ *espacios de Hilbert tal que* $V \subseteq H$ *y el operador identidad* $\mathbf{i} : V \to H$ *es continuo. Sea* $A : V \times V \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal acotada y* V*-elíptica, y considere el operador* $\mathbf{P} : H \to V$*, donde para todo* $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ *es el único elemento en* V *que satisface*

$$A(v, \mathbf{P}(g)) \,=\, \langle g, v\rangle_H \quad \forall\, v \in V\,.$$

Dados $F \in V'$ *y* V_h *un subespacio de dimensión finita de* V*, denote por* $u \in V$ *y* $u_h \in V_h$ *las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es*

$$A(u, v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in V\,,$$

y

$$A(u_h, v_h) \,=\, F(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$ *tal que*

$$||u - u_h||_H \,\leq\, C\,||u - u_h||_V \,\sup_{g\in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{v_h\in V_h} ||\mathbf{P}(g) - v_h||_V \right\}.$$

4.16 *Dados* $\Omega := (0,1)$ *y* $f \in L^2(\Omega)$*, interesa resolver el siguiente problema:*

$$-\,u'' \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) \,=\, 0\,, \quad u'(1) \,=\, 1\,. \tag{14}$$

a) *Defina* $\sigma := u'$ *en* Ω *y demuestre que una formulación variacional* mixta *de (14) se reduce a: Hallar* $(\sigma, (u, \varphi)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) + b(\tau,(u,\varphi)) \,&=\, \quad F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H\,,\\ b(\sigma,(v,\psi)) \,&=\, \quad G((v,\psi)) \quad \forall\,(v,\psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{15}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, *y* $a : H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ *son las formas bilineales definidas por*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) :=& \quad \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx \qquad \forall\,\sigma,\,\tau \in H\,,\\ b(\tau,(v,\psi)) :=& \quad \int_\Omega v\,\tau'\,dx \,+\, \psi\,\tau(1) \quad \forall\,(\tau,(v,\psi)) \in H \times Q\,. \end{aligned}$$

b) *Defina los funcionales* F *y* G*, y aplique la teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que (15) tiene una única solución.*

4.17 *Sean* $\Omega =]a,b[$, $f \in L^2(\Omega)$*, y considere el problema de valores de contorno*

$$u^{(4)} \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) \,=\, 0\,. \tag{16}$$

i) *Defina la incógnita auxiliar* $\sigma := u''$ *en* Ω *y demuestre que una formulación variacional* mixta *de (16) se reduce a: Hallar* $(\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx \,+\, \int_\Omega u'\,\tau'\,dx \,&=\, \quad 0 \qquad \forall\,\tau \in H^1(\Omega)\,,\\ \int_\Omega v'\,\sigma'\,dx \,&=\, \quad -\int_\Omega f\,v\,dx \qquad \forall\, v \in H^1_0(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

ii) *Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que (17) tiene una única solución que depende continuamente del dato f.*

4.18 ([3]) [Lema de Fortin]. *Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada que satisfrace la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:*

$$\sup_{v \in H \setminus \{0\}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} \,\geq\, \beta\, \|q\|_Q \qquad \forall\, q \in Q\,.$$

Sean $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ tal que

$$b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) \,=\, 0 \qquad \forall\, q_n \in Q_n\,.$$

Suponga que la familia de operadores $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H,H_n)} \,\leq\, C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de n, tal que

$$\sup_{v_n \in H_n \setminus \{0\}} \frac{b(v_n,q_n)}{\|v_n\|_H} \,\geq\, \beta^*\, \|q_n\|_Q \qquad \forall\, q_n \in Q_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

4.19 ([5]) *[El presente enunciado es una variante del Ejercicio 4.13] Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbb{N}$ considere un funcional $F_n \in H_n'$ y una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbb{R}$. Suponga también que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \,\geq\, \tilde{\alpha}\, \|v_n\|_H^2 \quad \forall\, v_n \in H_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.*

a) *Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que*

$$A(u,v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in H \qquad \text{y} \qquad A_n(u_n, v_n) \,=\, F_n(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

b) *Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\|u - u_n\|_H \,\leq\, C \left(\inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H \,+\, \|\mathbf{A}(v_n) \circ \mathbf{i}_n \,-\, \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H_n'} \right\} \right.$$
$$\left. +\quad \|F \circ \mathbf{i}_n \,-\, F_n\|_{H_n'} \right),$$

donde $\mathbf{A} : H \to H'$ y $\mathbf{A}_n : H_n \to H_n'$ son los operadores lineales y acotados inducidos por A y A_n, respectivamente, e $\mathbf{i}_n : H_n \to H$ es la inyección canónica, esto es $\mathbf{i}_n(v_n) = v_n \quad \forall\, v_n \in H_n$.

4.20 ([8]) *Sean Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno: $\;-\Delta\, u = f \;$ en $\;\Omega\,,\;\; u = 0\;$ en $\;\partial\Omega$. Se puede demostrar que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx \,+\, \int_\Omega u\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \,-\, \int_\Omega v\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\, dx \,=\, \int_\Omega f\, v\, dx \tag{18}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$, *donde* $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ *en* Ω *representa una incógnita adicional. Además, a partir de esta relación, y dado* $\delta \in \mathbb{R}$, *se deduce que*

$$\delta \int_\Omega (\nabla u - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla v + \boldsymbol{\tau})\, dx = 0 \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega), \tag{19}$$

y también

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \;=\; -\int_\Omega f\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,. \tag{20}$$

De este modo, sumando (18), (19) y (20), se obtiene una formulación variacional mixta modificada, la cual tiene la forma: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$ *tal que*

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) \;=\; F(\boldsymbol{\tau}, v) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H}\,, \tag{21}$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ *es una forma bilineal y* $F : \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ *es un funcional lineal. Demuestre que, eligiendo* δ *convenientemente, el problema (21) tiene una única solución* $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

4.21 *Sean* V *un espacio de Hilbert,* $a : V \times V \to \mathbf{R}$ *una forma bilineal acotada, simétrica y débilmente coerciva, y* $A : V \to V'$ *el operador lineal y acotado inducido por* a. *Dado* $f \in V'$ *y* U *un subconjunto de* V *no vacío convexo y cerrado, es sabido (por* Teorema de Stampacchia*) que existe un único* $u \in U$ *tal que*

$$a(u, v - u) \;\geq\; f(v - u) \quad \forall\, v \in U.$$

Ahora, sean V_h *un subespacio de* V *de dimensión finita,* U_h *un subconjunto de* V_h *no vacío convexo y cerrado, y denote por* $u_h \in U_h$ *a la única solución del problema discreto:*

$$a(u_h, v_h - u_h) \;\geq\; f(v_h - u_h) \quad \forall\, v_h \in U_h.$$

Además, sea H *un Hilbert tal que* $V \subseteq H$, *y la inyección canónica* $i : V \to H$ *es continua y densa. Demuestre que si* $Au - f \in H$, *entonces existe una constante* C *independiente de* V_h *y* U_h, *tal que*

$$||u - u_h||_V \;\leq\; C \left\{ \inf_{v_h \in U_h} \left(||u - v_h||_V^2 \;+\; ||Au - f||_H\, ||u - v_h||_H \right) \right.$$
$$\left. + \, ||Au - f||_H \, \inf_{v \in U} ||u_h - v||_H \right\}^{1/2}.$$

4.22 ([2]) *Sean* H_1, H_2, Q_1, Q_2 *espacios de Hilbert sobre* $\mathbb{R}$, *y sean* $a : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ *y* $b_j : H_j \times Q_j \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,2\}$, *formas bilineales acotadas con operadores inducidos* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *y* $\mathbf{B}_j \in \mathcal{L}(H_j, Q_j)$, $j \in \{1,2\}$, *respectivamente. También, sea* K_j *el espacio nulo de* $\mathbf{B}_j$, $j \in \{1,2\}$, *y sea* Π_2 *el proyector ortogonal de* H_2 *en* K_2. *Suponga que:*

i) $\Pi_2\, \mathbf{A} : K_1 \to K_2$ *es un isomorfismo.*

ii) existen β_1, $\beta_2 > 0$ *tales que*

$$\|\mathbf{B}_j^*(q)\|_{H_j} \;:=\; \sup_{\substack{v \in H_j \\ v \neq 0}} \frac{b_j(v, q)}{\|v\|_{H_j}} \;\geq\; \beta_j\, \|q\|_{Q_j} \quad \forall\, q \in Q_j, \quad \forall\, j \in \{1,2\}\,.$$

Pruebe que, dados $F \in H_2'$ y $G \in Q_1'$, existe un único $(u,p) \in H_1 \times Q_2$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) \,+\, b_2(v,p) &= F(v) \quad \forall\, v \in H_2\,, \\ b_1(u,q) &= G(q) \quad \forall\, q \in Q_1\,. \end{aligned}$$

4.23 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen constantes M, $\beta > 0$, tales que $\beta \le \kappa(x) \le M$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre, utilizando el* Lema de Lax-Milgram, *que para todo $f \in L^2(\Omega)$ y para toda constante $\delta \in \left(0, \text{mín}\left\{2\,\beta, \frac{2}{n\,M}\right\}\right)$, existe un único $u \in H^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega \left\{ \kappa\, \nabla u \cdot \nabla v \,+\, \frac{1}{\kappa}\, u\, v \,-\, \delta \sum_{i=1}^{n} u\, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} \,=\, \int_\Omega f\, v \qquad \forall\, v \,\in\, H^1(\Omega)\,,$$

y

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \,\le\, \frac{1}{\text{mín}\left\{\beta - \frac{\delta}{2}, \frac{1}{M} - \frac{n\delta}{2}\right\}}\, \|f\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

4.24 ([3]) *Sean X_1, M_1, X_2, M_2 y Q espacios de Hilbert reales, y defina el espacio producto $H := X_1 \times M_1 \times X_2 \times M_2$. A su vez, considere operadores $A_1 \in \mathcal{L}(X_1, X_1)$, $B_1 \in \mathcal{L}(X_1, M_1)$, $A_2 \in \mathcal{L}(X_2, X_2)$, $B_2 \in \mathcal{L}(X_2, M_2)$, y $B \in \mathcal{L}(H, Q)$, y defina los operadores matriciales $A : H \to H$ y $T : H \times Q \to H \times Q$ como:*

$$A \,:=\, \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & B_1^* & & \\ B_1 & 0 & & \\ \hline & & A_2 & B_2^* \\ & & B_2 & 0 \end{array}\right)$$

y

$$T \,:=\, \left(\begin{array}{cc} A & B^* \\ B & 0 \end{array}\right).$$

a) *Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen la biyectividad de T.*

b) *Establezca un esquema de Galerkin asociado al operador T y asuma hipótesis adicionales que le permitan demostrar la estimación de Cea correspondiente.*

4.25 ([1]) *Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H, \|\cdot\|_H)$ un espacio de Hilbert real y $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada con operador inducido $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H,H)$. Suponga que existen operadores $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2 \in \mathcal{L}(H,H)$ y constantes α_1, $\alpha_2 > 0$ tales que*

$$\langle \mathbf{S}_1^* \mathbf{A}(\tau), \tau\rangle_H \,\ge\, \alpha_1\, \|\tau\|_H^2 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{A}\mathbf{S}_2(\tau), \tau\rangle_H \,\ge\, \alpha_2\, \|\tau\|_H^2 \quad \forall\, \tau \,\in\, H\,.$$

a) *Pruebe que para todo $F \in H'$ existe un único $\boldsymbol{\sigma} \in H$ tal que*

$$A(\boldsymbol{\sigma}, \tau) \,=\, F(\tau) \qquad \forall\, \tau \,\in\, H\,,$$

y deduzca la existencia de $C > 0$, independiente de F, tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_H \,\le\, C\, \|F\|_{H'}\,.$$

b) *Sea* $\{H_h\}_{h>0}$ *una familia numerable de subespacios de dimensión finita de* H *tal que* $\lim\limits_{h\to 0} \operatorname{dist}(\boldsymbol{\tau}, H_h) = 0 \;\; \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H$, *y, dado* $F \in H'$, *considere el esquema de Galerkin: Hallar* $\boldsymbol{\sigma}_h \in H_h$ *tal que*

$$A(\boldsymbol{\sigma}_h, \tau_h) \,=\, F(\tau_h) \qquad \forall\, \tau_h \in H_h\,. \tag{22}$$

Suponga que para $i = 1$ *o para* $i = 2$ *(pero no para ambos), existen operadores inyectivos* $\mathbf{S}_{i,h} \in \mathcal{L}(H_h, H_h)$ *para todo* $h > 0$, *y constantes* C_i, $\delta > 0$, *independientes de* h, *tales que*

$$\|\mathbf{S}_i(\tau_h) \,-\, \mathbf{S}_{i,h}(\tau_h)\|_H \,\le\, C_i\, h^\delta \, \|\mathbf{S}_i(\tau_h)\|_H \quad \forall\, \tau_h \in H_h\,.$$

Demuestre que existe $h_0 > 0$ *tal que para todo* $h \le h_0$ *el problema (22) tiene solución única, es estable, y se verifica la estimación de Cea.*

c) *Qué puede decir sobre las hipótesis para a) y b) si* A *es simétrica ?*

4.26 ([9], [10], [11], [12]) *Sean* $(X_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{X_1})$, $(X_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{X_2})$, *e* $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ *espacios de Hilbert, defina el producto* $X := X_1 \times X_2$, *y considere operadores lineales y acotados* $\mathbf{P} : X \to X$, $\mathbf{Q} : X \to Y$, $A : X_1 \to X_1$, $B : X_1 \to X_2$, *y* $C : X_2 \to X_2$, *tales que:*

$$\mathbf{P} \,:=\, \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & -C \end{pmatrix}.$$

Sea $V := V_1 \times V_2$ *el kernel de* $\mathbf{Q}$, *donde* $V_1 \subseteq X_1$ *y* $V_2 \subseteq X_2$, *y suponga que:*

i) *existe* $\alpha > 0$ *tal que* $\langle A(x_1), x_1\rangle_{X_1} \,\ge\, \alpha\, \|x_1\|_{X_1}^2 \qquad \forall\, x_1 \in V_1$.

ii) *existe* $\beta > 0$ *tal que* $\displaystyle\sup_{x_1 \in V_1 \setminus \mathbf{0}} \frac{\langle B(x_1), x_2\rangle_{X_2}}{\|x_1\|_{X_1}} \,\ge\, \beta\, \|x_2\|_{X_2} \qquad \forall\, x_2 \in V_2$.

iii) $\langle C(x_2), x_2\rangle_{X_2} \,\ge\, 0 \qquad \forall\, x_2 \in V_2$.

iv) *existe* $\tilde\beta > 0$ *tal que* $\|\mathbf{Q}^*(y)\|_X \,\ge\, \tilde\beta\, \|y\|_Y \qquad \forall\, y \in Y$.

a) *Pruebe que para todo* $(f, g) \in X \times Y$ *existe un único* $(x, y) \in X \times Y$ *tal que*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x) \,+\, \mathbf{Q}^*(y) \quad &= \quad f\,, \\ \mathbf{Q}(x) \quad &= \quad g\,, \end{aligned} \tag{23}$$

y encuentre explícitamente una constante $C > 0$ *tal que*

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} \,\le\, C \Big\{ \, \|f\|_X \,+\, \|g\|_Y \, \Big\}.$$

b) *Defina un esquema de Galerkin para (23) y establezca condiciones suficientes que aseguren su solubilidad única y estabilidad.*

c) *Demuestre la estimación de Cea para el esquema definido en b).*

4.27 ([5], [25]) *Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y constantes κ_1, $\kappa_2 \in \mathbb{R}$, considere el problema:*

$$-\Delta u + \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \kappa_2 u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \nabla u \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{24}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal en Γ. Deduzca la formulación primal de (24) y encuentre la mayor región factible para $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2$ que asegura elipticidad de la forma bilineal resultante. A su vez, defina el esquema de Galerkin asociado y establezca la estimación de Cea correspondiente en términos de κ_1 y κ_2. Luego, reemplace el dato de Neumann por uno de Dirichlet homogéneo y pruebe en tal caso que la elipticidad indicada sólo depende de κ_2.

4.28 ([21]) *Dados H, Q_1 y Q_2 espacios de Hilbert reales, defina $Q := Q_1 \times Q_2$ y considere formas bilineales acotadas $b : H \times Q \to \mathbb{R}$, $b_1 : H \times Q_1 \to \mathbb{R}$ y $b_2 : H \times Q_2 \to \mathbb{R}$, con operadores inducidos denotados por $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$, respectivamente, tales que*

$$b(\boldsymbol{\tau}, (v, \psi)) = b_1(\boldsymbol{\tau}, v) + b_2(\boldsymbol{\tau}, \psi) \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \quad \forall\, (v, \psi) \in Q\,.$$

Pruebe en primer lugar que $\mathbf{B}(\boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{B}_1(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\tau})) \in Q \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H$. Luego, introduzca los espacios nulos $V_1 := N(\mathbf{B}_1)$ y $V_2 := N(\mathbf{B}_2)$, y demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) *existe $\beta > 0$ tal que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in H \\ \boldsymbol{\tau} \neq 0}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}, (v, \psi))}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} \geq \beta\, \|(v, \psi)\|_Q \qquad \forall\, (v, \psi) \in Q\,.$$

b) *existe $\beta > 0$ tal que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in V_1 \\ \boldsymbol{\tau} \neq 0}} \frac{b_2(\boldsymbol{\tau}, \psi)}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} \geq \beta\, \|\psi\|_{Q_2} \quad \forall\, \psi \in Q_2 \quad y \quad \sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in V_2 \\ \boldsymbol{\tau} \neq 0}} \frac{b_1(\boldsymbol{\tau}, v)}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} \geq \beta\, \|v\|_{Q_1} \quad \forall\, v \in Q_1\,.$$

Extienda el resultado anterior al caso en que b se escribe como suma de n formas bilineales acotadas $b_i : H \times Q_i \to \mathbb{R}$, con $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ espacios de Hilbert reales.

4.29 *Dados X, M y Q espacios de Hilbert reales, defina $H := X \times M$ y considere operadores $A_1 \in \mathcal{L}(X, X)$, $B_1 \in \mathcal{L}(X, M)$ y $B \in \mathcal{L}(H, Q)$. A su vez, sean $A : H \to H$ y $T : H \times Q \to H \times Q$ los operadores definidos matricialmente por*

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & B_1^* \\ B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad y \qquad T := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

a) *Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen la biyectividad de T.*

b) *Establezca un esquema de Galerkin asociado al operador T y asuma hipótesis adicionales que le permitan demostrar la estimación de Cea correspondiente.*

4.30 *Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1, $f \in L^2(\Omega)$, y constantes κ_1, $\kappa_2 \in \mathbb{R}$ con $\kappa_2 \neq 0$, considere el problema:*

$$- \Delta u + \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \kappa_2 u = f \quad en \quad \Omega, \quad u = 0 \quad en \quad \Gamma. \tag{25}$$

Defina la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} = \nabla u$ en Ω y deduzca la siguiente formulación variacional mixta de (25): Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \in H(\mathrm{div}; \Omega)$ tal que

$$\kappa_2 \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} - \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \sigma_j\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} = - \int_\Omega f\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div}; \Omega).$$

Dibuje la region $S := \Big\{ (\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \kappa_2 > 0 \ y \ |\kappa_1| < 2 \ \text{mín} \big\{ \kappa_2, \frac{1}{n} \big\} \Big\}$, y pruebe que para todo $(\kappa_1, \kappa_2) \in S$ el problema anterior tiene una única solución $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div}; \Omega)$ que depende continuamente del dato f.

4.31 *Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1, $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{K} \in [C(\bar{\Omega})]^{n \times n}$ simétrica y uniformemente definida positiva, y constantes κ_1, $\kappa_2 \in \mathbb{R}$, considere el problema:*

$$- \mathrm{div} \big(\mathbf{K} \nabla u \big) + \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \kappa_2 u = f \quad en \quad \Omega, \quad \mathbf{K} \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad en \quad \Gamma, \tag{26}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario en Γ. Deduzca la formulación primal de (26) y encuentre la mayor región factible para $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2$ que asegura, mediante el Lema de Lax-Milgram clásico, que dicha formulación tiene una única solución. A su vez, defina el esquema de Galerkin asociado y establezca la estimación de Cea en términos de $\mathbf{K}$, κ_1 y κ_2.

4.32 ([6]) *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y sean Γ_D, $\Gamma_N \subseteq \Gamma$ tales que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| > 0$ y $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Se sabe que*

$$H^{1/2}(\Gamma_*) := \Big\{ \gamma_0(w)|_{\Gamma_*} : \quad w \in H^1(\Omega) \Big\} \qquad \forall * \in \{D, N\},$$

con $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_*} := \text{ínf} \Big\{ \|w\|_{1,\Omega} : \quad w \in H^1(\Omega), \quad \gamma_0(w)|_{\Gamma_*} = \varphi \Big\}$ $\forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_*)$. A su vez, denotando por $E_{N,0} : H^{1/2}(\Gamma_N) \to L^2(\Gamma)$ el operador de extensión nula

$$E_{N,0}(\varphi) := \begin{cases} \varphi & en \quad \Gamma_N \\ 0 & en \quad \Gamma \backslash \Gamma_N \end{cases} \qquad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_N),$$

se tiene que $H^{1/2}_{00}(\Gamma_N) := \Big\{ \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_N) : \quad E_{N,0}(\varphi) \in H^{1/2}(\Gamma) \Big\}$, con norma inducida $\|\varphi\|_{1/2,00,\Gamma_N} := \|E_{N,0}(\varphi)\|_{1/2,\Gamma}$ $\forall \varphi \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$.

i) *Pruebe que para cada $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ existe un único $w_\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(w_\varphi)|_{\Gamma_D} = \varphi$ y $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_D} = \|w_\varphi\|_{1,\Omega}$.*

ii) *Dado $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, considere el problema de valores de contorno*

$$\Delta z_\varphi = 0 \ \text{ en } \ \Omega\,, \quad \gamma_0(z_\varphi)|_{\Gamma_D} \,=\, \varphi \ \text{ en } \ \Gamma_D\,, \quad \gamma_1(z_\varphi) \,=\, 0 \ \text{ en } \ \Gamma_N\,,$$

y demuestre fundadamente, utilizando una adecuada fórmula de integración por partes, que $z_\varphi = \widetilde{z}_\varphi + w_\varphi$, donde $\widetilde{z}_\varphi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ es tal que

$$\int_\Omega \nabla\widetilde{z}_\varphi \cdot \nabla v \,=\, -\int_\Omega \nabla w_\varphi \cdot \nabla v \qquad \forall\, v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\,. \tag{27}$$

Pruebe que (27) tiene solución única y concluya que $\|z_\varphi\|_{1,\Omega} \,\le\, c\,\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_D}$.

iii) *Defina el operador $E_D : H^{1/2}(\Gamma_D) \to H^{1/2}(\Gamma)$ por $E_D(\varphi) \,:=\, \gamma_0(z_\varphi)\ \forall\,\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, y pruebe que E_D es lineal y acotado.*

iv) Pruebe que $H^{1/2}(\Gamma) \,=\, E_D(H^{1/2}(\Gamma_D)) \,\oplus\, E_{N,0}(H^{1/2}_{00}(\Gamma_N))$. Equivalentemente, dado $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, demuestren que existen únicos $\psi_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ y $\psi_N \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$ tales que $\psi = E_D(\psi_D) \,+\, E_{N,0}(\psi_N)$.

v) *Deduzca a partir de iv) que, dado $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$, existen $\lambda_D \in H^{-1/2}(\Gamma_D)$ y $\lambda_N \in H^{-1/2}_{00}(\Gamma_N)$ tales que $\langle\lambda,\psi\rangle = \langle\lambda_D,\psi_D\rangle_{\Gamma_D} + \langle\lambda_N,\psi_N\rangle_{\Gamma_N}\ \forall\,\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Concluya que si $\lambda|_{\Gamma_N} = 0$, λ se identifica con un funcional en $H^{-1/2}(\Gamma_D)$.*

4.33 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y sean Γ_D, $\Gamma_N \,\subseteq\, \Gamma$ tales que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| > 0$ y $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, considere el problema de valores de contorno*

$$-\,\Delta u = f \ \text{ en } \ \Omega\,, \quad \gamma_0(u)|_{\Gamma_D} \,=\, g \ \text{ en } \ \Gamma_D\,, \quad \gamma_1(u) \,=\, 0 \ \text{ en } \ \Gamma_N\,. \tag{28}$$

i) *Utilice lo que sea necesario del Ejercicio 4.32 para probar que una formulación primal-mixta de (28) se reduce a: Hallar $(u,\lambda) \in H \times Q$ tal que*

$$\begin{aligned} a(u,v) \,+\, b(v,\lambda) \ &=\ F(v) \quad \forall\, v \in H\,,\\ b(u,\xi) \ &=\ G(\xi) \quad \forall\, \xi \in Q\,, \end{aligned} \tag{29}$$

donde $H \,:=\, H^1(\Omega)$, $Q \,:=\, H^{-1/2}(\Gamma_D)$, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales dadas por

$$a(u,v) \,:=\, \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{y} \quad b(v,\xi) \,:=\, \langle \xi, \gamma_0(v)\rangle_{\Gamma_D} \quad \forall\, u,\, v \in H,\ \forall\, \xi \in Q\,,$$

y los funcionales $F \in H'$ y $G \in Q'$ dependen de f y g, respectivamente.

ii) *Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que existe una única solución de (29), la cual depende continuamente de los datos f y g.*

iii) *Sea H_h un subespacio arbitrario de dimensión finita de H y, dada una partición $\Big\{e_1, e_2, ..., e_n\Big\}$ de Γ_D, defina*

$$Q_h \,:=\, \Big\{\xi_h \in L^2(\Gamma_D) : \quad \xi_h|_{e_j} \in P_0(e_j) \quad \forall\, j \in \{1,2,...,n\}\Big\}\,.$$

Considere el sistema de Galerkin asociado a (29), suponga que b satisface la condición inf-sup discreta con una constante $\beta > 0$ independiente de las dimensiones de H_h y Q_h, y pruebe que dicho esquema discreto posee una única solución $(u_h,\lambda_h) \in H_h \times Q_h$. Establezca además la estimación de Cea y comente si acaso el error $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ depende o no de $\mathrm{dist}(\lambda, Q_h)$.

4.34 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave Γ, y sean*

$$H = \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega) := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{N\times N} : \ \mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^N \right\} \ \text{y} \ Q := [L^2(\Omega)]^N ,$$

los espacios de Hilbert con productos interiores y normas inducidas denotadas, respectivamente, por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{div},\Omega}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{0,\Omega}$, $\|\cdot\|_{\mathbf{div},\Omega}$ y $\|\cdot\|_{0,\Omega}$. Considere el operador $P : H \to H$ que a cada $\boldsymbol{\sigma} \in H$ le asigna $P(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}$, donde $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{u}}) \in H \times Q$ es solución del problema

$$\begin{aligned} \int_\Omega \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} &= 0 && \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H ,\\ \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\,\bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} && \forall\, \mathbf{v} \in Q . \end{aligned} \tag{30}$$

a) *Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que P está bien definido y que $P \in \mathcal{L}(X)$.*

b) *Defina el subespacio cerrado de H dado por*

$$V := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in H : \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Omega \right\},$$

y pruebe que $V = N(P)$, $P^2 = P$, y $H = V \oplus R(P)$.

c) *Deduzca a partir de b) que $V^\perp = R(P)$ (ortogonalidad en H), y muestre que existe una constante $C \geq 1$ tal que*

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div},\Omega} \leq C\, \|\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in V^\perp ,$$

concluyendo así que $\|\cdot\|_{\mathbf{div},\Omega}$ y $\|\mathbf{div}\,\cdot\|_{0,\Omega}$ son equivalentes en $V^\perp$.

4.35 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ tal que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ and $|\Gamma_D| > 0$, y sea $\boldsymbol{\nu}$ el vector normal a Γ. Dados $\mathbf{f} \in [C(\bar{\Omega})]^n$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, el problema de Darcy con presión dependiente de la porosidad consiste en encontrar la velocidad $\mathbf{u}$ y la presión p de un fluido, tales que:*

$$\begin{gathered} \mathbf{u} = p\,\mathbf{f} + \nabla p \quad \text{en} \quad \Omega , \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega ,\\ p = g \quad \text{en} \quad \Gamma_D , \quad \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_N . \end{gathered} \tag{31}$$

a) *Demuestre que la formulación variacional mixta de (31) se reduce a: Hallar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ tal que*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v},p) &= \langle \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu}, g\rangle_D + \int_\Omega p\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} && \forall\, \mathbf{v} \in H ,\\ \mathbf{b}(\mathbf{u},q) &= 0 && \forall\, q \in Q , \end{aligned} \tag{32}$$

donde $H := \left\{ \mathbf{v} \in H(\mathrm{div};\Omega) : \quad \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_N \right\}$, $Q := L^2(\Omega)$, $\mathbf{a} : H \times H \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{b} : H \times Q \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales dadas por

$$\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}(\mathbf{v},q) := \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{v} \qquad \forall\, \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in H , \quad \forall\, q \in Q ,$$

y $\langle\cdot,\cdot\rangle_D$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma_D)$ y $H^{1/2}(\Gamma_D)$.

b) *Demuestre que (32) puede re-escribirse, equivalentemente, como una ecuación de punto fijo de la forma* $(\mathbf{u}, p) = T(\mathbf{u}, p)$*, donde, gracias a la Teoría de Babuška-Brezzi,* $T : H \times Q \to H \times Q$ *es un operador no-lineal bien definido. De hecho, utilice el principio de superposición para darse cuenta que en realidad* T *es una aplicación afín. Luego, aplique el Teorema del Punto Fijo de Banach para concluir que si* $\|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega} := \sup_{x\in\Omega} \|\mathbf{f}(x)\|$ *es suficientemente pequeño, entonces el problema (32) tiene una única solucion. Pruebe en tal caso que existe* $C > 0$*, dependiente de* $\|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega}$*, tal que*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{div},\Omega} + \|p\|_{0,\Omega} \leq C \, \|g\|_{1/2,\Gamma_D} .$$

5. Operadores Compactos

5.1 *Sea* X *el espacio vectorial de las funciones continuas sobre* $\bar{\Omega} := [0,1]$ *provisto de la norma uniforme. Dados* u_1, u_2, $y \in X$*, considere la ecuación integral: Hallar* $u \in X$ *tal que*

$$u(t) - \int_0^1 u_1(t)\, s^2\, u(s)\, ds - \int_0^1 u_2(t)\, (1 - \frac{3}{2} s)\, u(s)\, ds = y(t) \quad \forall\, t \in \bar{\Omega} . \qquad (33)$$

i) *Si* $u_1(t) = 4t$ *y* $u_2(t) = 1\ \forall\, t \in \Omega$*, deduzca una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (33) tenga al menos una solución.*

ii) *Pruebe que si* $u_1(t) = t$ *y* $u_2(t) = 1$*, entonces para cada* $y \in X$ *la ecuación integral (33) tiene una única solución.*

5.2 *Sean* X, Y, Z *espacios vectoriales normados.*

i) *Pruebe que si* $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ *es de rango finito, entonces* K *es compacto.*

ii) *Demuestre que si* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *y* $K \in K(Y, Z)$*, entonces* KA *también es compacto.*

5.3 *Sea* X *un espacio vectorial normado de dimensión* INFINITA *y sea* $K \in K(X, X)$ *un operador inyectivo. Demuestre que* $K^{-1} \notin \mathcal{L}(X, X)$*.*

5.4 *Sean* X *e* Y *espacios de Banach y sea* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$*. Suponga que existen sucesiones* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X'$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *tales que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||F_n||_{X'} < +\infty \quad , \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} ||y_n||_Y < +\infty \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty ,$$

y además

$$A\, x = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n\, F_n(x)\, y_n \qquad \forall\, x \in X .$$

Demuestre que A *es compacto.*

5.5 *Sea* $p > 1$ *y considere el operador* $K : l_p \to l_p$ *definido por*

$$K\, (x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_k}{k}, ...) \qquad \forall\, (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in l_p .$$

Demuestre que K *es compacto.*

5.6 ([14]) *Sean H y V dos espacios de Hilbert tales que $H \subseteq V$ y la inyección $i : H \to V$ es compacta.*

a) *Se dice que una forma bilineal acotada A definida sobre $H \times H$ satisface la* Desigualdad de Gårding *si existen $\alpha > 0$ y una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbb{R}$ tales que*

$$A(v,v) \,\geq\, \alpha\,||v||_H^2 \,-\, K(v,v) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,.$$

Dado $F \in H'$, considere el siguiente problema variacional: Hallar $u \in H$ tal que

$$A(u,v) \,=\, F(v) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,. \tag{34}$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Gårding, entonces (34) tiene solución para cada $F \in H'$ si y sólo si *$u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.*

b) *Se dice que A satisface la* Desigualdad de Gårding generalizada *si existen $\alpha > 0$, una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbb{R}$, y un isomorfismo $S : H \to H$ tales que*

$$A(v, Sv) \,\geq\, \alpha\,||v||_H^2 \,-\, K(v, Sv) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,.$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding generalizada, entonces (34) tiene solución para cada $F \in H'$ si y sólo si *$u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.*

5.7 *Sea $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua y defina el operador integral $\mathbf{K} : C[0,1] \to C[0,1]$ por*

$$\mathbf{K}(u)(t) \,:=\, \int_0^1 K(t,s)\,u(s)\,ds \qquad \forall\, t \,\in\, [0,1]\,, \quad \forall\, u \,\in\, C[0,1]\,.$$

Aplique el Teorema de Arzelá - Ascoli para probar que $\mathbf{K}$ es compacto.

5.8 ([15], [16]) *Sea Ω un dominio poligonal convexo de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, y dado $f \in L^2(\Omega)$, considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:*

$$\Delta u \,+\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{35}$$

i) Introduzca la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω y pruebe que una formulación variacional mixta de (35) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \,-\, \int_\Omega \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \,=\, -\int_\Omega f\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)\,. \tag{36}$$

ii) Defina el operador $P : H(\mathrm{div};\Omega) \to [L^2(\Omega)]^2$ que a cada $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ le asigna $P(\boldsymbol{\tau}) := \nabla\, z$, donde $z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ es la única solución del problema:

$$\Delta\, z \,=\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad z \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,.$$

Pruebe que P es un proyector compacto, y concluya que (cf. Ejercicio 3.21)

$$H(\mathrm{div};\Omega) = P(H(\mathrm{div};\Omega)) \oplus (I - P)(H(\mathrm{div};\Omega))\,.$$

iii) *Utilice la descomposición anterior de* $H(\text{div};\Omega)$ *para demostrar que (36) se reduce, equivalentemente, a: Hallar* $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div};\Omega)$ *tal que*

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) \,+\, K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) \,=\, F(\boldsymbol{\tau}) \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div};\Omega)\,,$$

donde

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) := -\int_\Omega P(\boldsymbol{\sigma})\cdot P(\boldsymbol{\tau}) - \int_\Omega \text{div}\, P(\boldsymbol{\sigma})\,\text{div}\, P(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega (I-P)(\boldsymbol{\sigma})\cdot(I-P)(\boldsymbol{\tau})\,,$$

$$K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) := 2\int_\Omega P(\boldsymbol{\sigma})\cdot P(\boldsymbol{\tau}) \,+\, \int_\Omega P(\boldsymbol{\sigma})\cdot(I-P)(\boldsymbol{\tau}) \,+\, \int_\Omega (I-P)(\boldsymbol{\sigma})\cdot P(\boldsymbol{\tau})\,,$$

y F *es el funcional definido por el lado derecho de (36).*

iv) *Sean* $\mathbf{A} : H(\text{div};\Omega) \to H(\text{div};\Omega)$ *y* $\mathbb{K} : H(\text{div};\Omega) \to H(\text{div};\Omega)$ *los operadores lineales y acotados asociados a las formas bilineales* A *y* K*, respectivamente. Demuestre que* $\mathbf{A}$ *es biyectivo y que* $\mathbb{K}$ *es compacto.*

IND. *Defina el operador* $S(\boldsymbol{\tau}) := (I - 2\,P)(\boldsymbol{\tau})$ *y considere la expresión* $A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau}))$ *para probar que* A *satisface la condición inf-sup continua.*

5.9

a) *Sean* X *e* Y *espacios de Hilbert y sea* $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ *tal que* K *transforma sucesiones débilmente convergentes de* X *en sucesiones convergentes de* Y*. Pruebe que* K *es compacto.*

b) *Sea* X *un espacio de Hilbert y sean* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $x \in X$, *tales que* $x_n \overset{w}{\to} x$ *y* $\|x_n\| \to \|x\|$*. Pruebe que* $x_n \to x$.

c) *Sean* X *e* Y *espacios de Hilbert y sea* $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ *un operador compacto. Aplique a) y b) para probar que* $K^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ *también es compacto.*

5.10 ([13]) *Sea* X *un espacio de Banach y* $T : X \to X'$ *un operador* NOLINEAL*. Se dice que* T *satisface la propiedad* (S) *si para toda sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ *tal que*

$$x_n \overset{w}{\longrightarrow} x \quad y \quad (T(x_n))\,(x_n - x) \,-\, (T(x))\,(x_n - x) \longrightarrow 0\;,$$

se tiene $x_n \longrightarrow x$*. Ahora, sean* H, Q, V *espacios de Banach tales que* $H \subseteq V$ *y* $\mathbf{i} : H \to V$ *es compacta. Sea* $X := H \times Q$*, y considere una forma bilineal acotada* $B : X \times X \to \mathbb{R}$ *y un operador nolineal* $A : H \to H'$ *que satisfacen las siguientes propiedades*

i) *existe* $C_0 > 0$ *tal que*

$$B((u,\lambda),(u,\lambda)) \,\geq\, C_0\,||\lambda|_Q^2 \quad \forall\,(u,\lambda) \,\in\, X\,.$$

ii) *existen* C_1, $C_2 > 0$ *tal que para todo* $u, v \in H$

$$(A(u))\,(u-v) \,-\, (A(v))\,(u-v) \,\geq\, C_1\,||u-v||_H^2 \,+\, R(u,v)\,,$$

donde

$$|R(u,v)| \,\leq\, C_2\,\{\,1 \,+\, ||u||_H \,+\, ||v||_H\,\}\,||u-v||_V\;.$$

Demuestre que el operador nolineal $T : X \to X'$ *definido por*

$$(T(u,\lambda))(v,\mu) := (A(u))(v) + B((u,\lambda),(v,\mu)) ,$$

satisface la propiedad (S).

5.11 *Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$. *Asuma que la inyección* $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *es compacta y demuestre que la inyección* $i : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ *también es compacta, para todo entero* $m \geq 2$.

5.12 ([24], [25]) *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera de clase* $C^{0,1}$, *y considere el espacio de Sobolev* $H^2(\Omega)$, *con producto escalar* $\langle \cdot,\cdot \rangle_{H^2(\Omega)}$, *norma inducida* $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$, *y semi-norma* $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$. *Además, sea* $P_1(\Omega)$ *el espacio de polinomios sobre* Ω *de grado* ≤ 1 *con base* $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ *donde* $p_0(x) = 1$ *y* $p_i(x) = x_i \; \forall\, i \in \{1, ..., n\}$, $\forall\, x := (x_1, ..., x_n)^{\mathtt{t}} \in \Omega$.

a) [Desigualdad de Poincaré generalizada]. *Defina la aplicación*

$$|||v||| := \left\{ |v|^2_{H^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{n} |\langle v, p_i \rangle_{H^2(\Omega)}|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega) ,$$

y demuestre que existen $C_1, C_2 > 0$ *tales que*

$$C_1\, |||v||| \leq \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C_2\, |||v||| \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) .$$

Ind.: *Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *existe* $v_n \in H^2(\Omega)$ *tal que* $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} > n\, |||v_n|||$. *Luego, defina* $w_n := \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}}$, *observe que* $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$, *note que* $|||w_n||| < \frac{1}{n}$, *y aplique el hecho que la inclusión de* $H^2(\Omega)$ *en* $H^1(\Omega)$ *es compacta.*

b) [Lema de Deny-Lions]. *Considere el espacio cuociente* $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ *con norma*

$$\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \inf_{p \in P_1(\Omega)} \|v - p\|_{H^2(\Omega)} ,$$

y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega) .$$

Demuestre que $|\cdot|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ *está bien definida y que existe* $C > 0$ *tal que*

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \leq \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$$

$$\leq C\, |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega) .$$

Ind.: *Note que para todo* $p \in P_1(\Omega)$ *y para todo* α *con* $|\alpha| = 2$ *se tiene* $\partial^\alpha p = 0$. *Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.*

c) [Lema de Bramble-Hilbert]. *Sea* $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ *tal que* $\Pi(p) = p \;\forall\, p \in P_1(\Omega)$. *Demuestre que existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega) .$$

Ind.: *Note que* $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v - p) \;\forall\, p \in P_1(\Omega)$, *y luego aplique el Lema de Deny-Lions.*

5.13 *Aplique el análisis sobre alternativa de Fredholm y método de Galerkin para estudiar la solubilidad discreta del problema de valores de contorno:*

$$u'' + k\,u = f \quad \text{en} \quad \Omega :=]0,1[\,, \quad u'(0) = a\,, \quad u'(1) = b\,,$$

con $f \in L^2(\Omega)$, $k \in \mathbb{R}^+$ *y* $a, b \in \mathbb{R}$.

5.14 *Sean* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio de Hilbert real y* $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal acotada cuyo operador inducido* $A \in \mathcal{L}(H)$ *es biyectivo. Dados un conjunto de vectores* $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\} \subseteq H$ *y* $F \in H'$, *considere la formulación variacional: Hallar* $u \in H$ *tal que*

$$a(u,v) - \sum_{j=1}^{N} \langle u, u_j\rangle\, \langle v, u_j\rangle = F(v) \qquad \forall\, v \in H\,. \tag{37}$$

Deduzca una condición necesaria y suficiente sobre $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\}$ *que garantice que para cada* $F \in H'$ *el problema (37) tiene una única solución.*

5.15 *Sea* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio de Hilbert real, y sean* $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *y* $b : H \times H \to \mathbb{R}$ *formas bilineales acotadas tales que* a *es* H*-elíptica y* b *es simétrica. Dados un conjunto de vectores* $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\} \subseteq H$ *y* $F \in H'$, *considere la formulación variacional: Hallar* $u \in H$ *tal que*

$$a(u,v) + \sum_{j=1}^{N} a(u, u_j)\, b(v, u_j) = F(v) \qquad \forall\, v \in H\,. \tag{38}$$

Deduzca una condición necesaria y suficiente sobre $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\}$ *que garantice que para cada* $F \in H'$ *el problema (38) tiene una única solución. En particular, qué ocurre si existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $b(u_i, u_j) = c\,\delta_{ij} \quad \forall\, i, j \in \{1, 2, ..., N\}$ *? Por otro lado, qué podría concluir si* $a = b$ *?*

6. Reflexividad y Separabilidad

6.1 *Dado un espacio vectorial normado* X, *demuestre que existen un espacio vectorial normado* $\widetilde{X}$ *y un espacio de Banach* Y, *tales que* X *es isomorfo a* $\widetilde{X}$, $\widetilde{X} \subseteq Y$, $\|x\|_Y = \|x\|_{\widetilde{X}} \quad \forall\, x \in \widetilde{X}$, *y* $\widetilde{X}$ *es denso en* Y.

6.2

a) *Sean* X, Y *espacios de Banach y suponga que existe un operador* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *biyectivo. Demuestre que* X *es reflexivo (separable) si y sólo si* Y *es reflexivo (separable).*

b) *Sean* X, Y *espacios de Banach separables (reflexivos). Demuestre que el espacio producto* $X \times Y$ *también es separable (reflexivo).*

c) *Dado un abierto* Ω *de* $\mathbb{R}^N$ *y* $p \in \mathbb{R}$, $2 \le p < \infty$, *se define*

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} :\ f \text{ medible y } ||f||_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_\Omega |f|^p\, dx \right\}^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Puede probarse que $(L^p(\Omega), ||\cdot||_{L^p(\Omega)})$ *es un espacio de Banach separable. Por otra parte, el espacio de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *está dado por*

$$W^{1,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega) : \quad \text{existe } g_i \in L^p(\Omega)\ , i = \overline{1,N} \text{ tal que}$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega g_i \phi \, dx \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega) \Big\}$$

En tal caso se escribe $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, *y se define la norma*

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} := ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} .$$

Puede probarse que $(W^{1,p}(\Omega), ||\cdot||_{W^{1,p}(\Omega)})$ *también es Banach. Demuestre que el espacio* $W^{1,p}(\Omega)$ *es separable.*

6.3 *Sean* X, Y *espacios de Banach y sea* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Se dice que* T *es* DÉBILMENTE COMPACTO *si para toda sucesión acotada* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de* X *existe una subsucesión* $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\{Tx_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débilmente en* Y. *Pruebe que si* X *o* Y *es reflexivo, entonces todo operador* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *es débilmente compacto.*

6.4 *Sean* a, $b \in \mathbb{R}$ *tal que* $-\infty < a < b < +\infty$. *Asuma que* $C[a,b]$ *es separable, y demuestre que para todo entero no negativo* k, $C^k[a,b]$ *también es separable.*

6.5 *Sean* X, Y *espacios vectoriales normados y* $T : X \to Y$ *un operador compacto. Demuestre que* $\mathcal{R}(T)$ *es separable.*
IND.: *Escriba* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in X : \quad ||x|| \le n \}$, *y luego use que todo subconjunto relativamente compacto de un espacio métrico es separable.*

6.6 *Un importante resultado establece que todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo. En lo que sigue suponga que* Ω *es un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y que* $p \in \mathbb{R}$ *es tal que* $p \ge 2$.

a) *A partir del hecho que* $\alpha^p + \beta^p \le (\alpha^2+\beta^2)^{p/2}\ \forall\, \alpha, \beta \ge 0$, *demuestre la desigualdad de Clarkson:*

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \le \frac{1}{2}\left\{ ||f||_{L^p(\Omega)}^p + ||g||_{L^p(\Omega)}^p \right\} \quad \forall\, f, g \in L^p(\Omega).$$

b) *Utilice la desigualdad anterior para probar que* $L^p(\Omega)$, $2 \le p < \infty$, *es uniformemente convexo y por lo tanto reflexivo. Además, deduzca que* $W^{1,p}(\Omega)$ *también es reflexivo.*

6.7 *Dado* $p \ge 1$, *considere el espacio vectorial normado*

$$\ell_p(\mathbb{C}) := \{ \mathbf{x} := \{x_n\}_{n\in N} : \quad x_n \in \mathbb{C} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad y \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty \},$$

provisto de la suma y multiplicación por escalar usuales, y cuya norma está dada por $\|\mathbf{x}\| := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p \right\}^{1/p}$. *Demuestre que* $\ell_p(\mathbb{C})$ *es separable.*

6.8 *Dado un abierto* Ω *de* $\mathbb{R}^n$, *considere el espacio de Hilbert* $(H(\mathrm{div};\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, *donde*

$$H(\mathrm{div};\Omega) := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega) \Big\},$$

y

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \int_\Omega \Big\{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} \Big\} \qquad \forall\, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega).$$

Asuma que $L^2(\Omega)$ *es separable y demuestre que* $H(\mathrm{div};\Omega)$ *también lo es.*

6.9 *Dados* X *e* Y *espacios de Banach reales y* $\mathcal{A} : X \times Y \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal acotada, defina los operadores* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(X, Y')$ *y* $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(Y, X')$ *por*

$$\mathbf{A}(x)(y) := \mathcal{A}(x,y) \quad y \quad \mathbf{B}(y)(x) := \mathcal{A}(x,y) \qquad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y.$$

a) *Defina explícitamente los operadores adjuntos* $\mathbf{A}'$ *y* $\mathbf{B}'$, *y demuestre que* $\mathbf{B} = \mathbf{A}' \circ J_Y$ *y* $\mathbf{A} = \mathbf{B}' \circ J_X$, *donde* $J_Y : Y \to Y''$ *y* $J_X : X \to X''$ *son las inyecciones respectivas.*

b) *Demuestre que considerando cualquiera de los pares de hipótesis* i)-ii) *o* iii)-iv) *dados a continuación, y asumiendo que* Y *es reflexivo, se tiene que* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ *y* $\mathbf{B}$ *son biyectivos.*

   i) *existe* $\alpha > 0$ *tal que* $\displaystyle\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{A}(x,y)}{\|x\|} \geq \alpha\, \|y\| \quad \forall\, y \in Y,$

   ii) $\displaystyle\sup_{y \in Y} \mathcal{A}(x,y) > 0 \qquad \forall\, x \in X,\ x \neq \mathbf{0},$

   iii) *existe* $\alpha > 0$ *tal que* $\displaystyle\sup_{\substack{y \in Y \\ y \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{A}(x,y)}{\|y\|} \geq \alpha\, \|x\| \quad \forall\, x \in X,$

   iv) $\displaystyle\sup_{x \in X} \mathcal{A}(x,y) > 0 \qquad \forall\, y \in Y,\ y \neq \mathbf{0},$

c) *Demuestre que considerando cualquiera de los pares de hipótesis* i)-ii) *o* iii)-iv) *dados en* b), *y asumiendo que* X *es reflexivo, se tiene que* $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ *y* $\mathbf{A}$ *son biyectivos.*

6.10 *Sea* M *un subespacio cerrado propio de un Banach reflexivo* X *y sea* $x_0 \in X - M$. *Aplique la segunda forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach para probar que existe* $F \in M^o$ *tal que* $\|F\| = 1$ *y* $|F(x_0)| \leq \mathrm{dist}(x_0, M)$.

6.11 *Pruebe que si* X *e* Y *son Banach y* $A : X \to (Y, \boldsymbol{\sigma}(Y, Y'))$ *es lineal y continuo, entonces* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

6.12 *Dados* $f_0 \in X'$, $\varepsilon > 0$ *y un conjunto finito* $\mathcal{M} \subseteq X$, *se define*

$$V(f_0, \varepsilon; \mathcal{M}) := \Big\{ f \in X' : \quad |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in \mathcal{M} \Big\},$$

o bien, equivalentemente,

$$V(f_0, \varepsilon; \mathcal{M}) := \Big\{ f \in X' : \quad |J(x)(f - f_0)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in \mathcal{M} \Big\}.$$

Demuestre que todos los conjuntos $V(f_0, \varepsilon; \mathcal{M})$ *con* ε *y* $\mathcal{M}$ *variables, constituyen una base de vecindades de* $\{f_0\}$ *para la topología* $\boldsymbol{\sigma}(X', X)$.

6.13 *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X'. Entonces se tienen las siguientes implicaciones:*

i) $f_n \xrightarrow{\omega^*} f \Leftrightarrow J(x)(f_n) = f_n(x) \longrightarrow J(x)(f) = f(x) \quad \forall\, x \in X.$

ii) $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\omega^*} f.$

iii) $f_n \xrightarrow{\omega} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\omega^*} f.$

iv) $\left\{ f_n \xrightarrow{\omega^*} f \quad y \quad x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \right\} \Rightarrow f_n(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$

6.14 *Probar que si Z es un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado X, entonces*

$$\boldsymbol{\sigma}(Z, Z') = \boldsymbol{\sigma}(X, X')|_Z := \Big\{ A \cap Z : \quad A \in \boldsymbol{\sigma}(X, X') \Big\}.$$

6.15 *Sea X un Banach tal que X' es separable. Entonces $\bar{B}_X(\mathbf{0}, 1)$ es metrizable con respecto a $\boldsymbol{\sigma}(X, X')$. Recíprocamente, si $\bar{B}_X(\mathbf{0}, 1)$ es metrizable para $\boldsymbol{\sigma}(X, X')$, entonces X' es separable.*

7. Nociones de Teoría Espectral

7.1 *Sean X un Banach complejo y $A, B \in \mathcal{L}(X, X)$ tales que $0 \in \rho(A)$ y*

$$||A - B|| < \frac{1}{||A^{-1}||}\,.$$

Muestre que $0 \in \rho(B)$ y

$$||B^{-1}|| \;\leq\; \frac{||A^{-1}||}{(1 - ||A^{-1}||\; ||A - B||)}$$

7.2 *Sean X un Hilbert complejo y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X. Demuestre que $\lambda \in \rho(A^*)$ si y sólo si $(A^* - \lambda I)$ es inyectivo y existe $C > 0$ tal que $\|(A^* - \lambda I)^{-1}(x)\| \leq C\,\|x\| \quad \forall\, x \in X$.*

7.3 *Sean X un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(X, X)$ un operador compacto autoadjunto.*

i) Pruebe que existe una sucesión $\{\, A_n \,\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, X)$ de operadores de rango finito tal que

$$\lim_{n\to\infty} ||A - A_n||_{\mathcal{L}(X,X)} \;=\; 0.$$

ii) Demuestre que la ecuación $A\,u = f$ admite una solución u si y sólo si

$$\sum_{\lambda\in\sigma_p(A)} \frac{|f_\lambda|^2}{|\lambda|^2} \;<\; \infty\,, \quad \text{donde} \quad f \;=\; \sum_{\lambda\in\sigma_p(A)} f_\lambda\,, \quad \text{con} \quad f_\lambda \in E_\lambda(A)\,.$$

iii) Dados $\mu \notin \sigma(A)$ y $f \in X$, resuelva la ecuación: $\mu\, u - A\, u = f$, en términos de una base Hilbertiana de X.

iv) Aplique el resultado anterior a la ecuación integral siguiente:

$$u \in X \qquad , \qquad 3u(x) - \int_\Omega K(x,t)\, u(t)\, dt \;=\; f(x) \quad \forall\, x \in \Omega$$

donde $\Omega := (0,1)$, $X := L^2(\Omega)$, $f \in X$, *y* K *es la función sobre* $\Omega \times \Omega$ *definida por*

$$K(x,t) := \begin{cases} x(1-t) & si \quad t \leq x\,, \\ t(1-x) & si \quad t > x\,. \end{cases}$$

7.4 *Sea* X *el espacio de Hilbert complejo* $L^2(\Omega)$, *con* $\Omega :=]0,1[$, *y considere el operador lineal* $K : X \to X$ *definido por*

$$(K\,u)(t) := \int_0^1 k(t,s)\, u(s)\, ds \qquad \forall\, t \in \Omega\,, \quad \forall\, u \in X\,,$$

donde $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ *está dada por* $k(t,s) := \text{mín}\{t,s\} \quad \forall\,(t,s) \in \Omega \times \Omega$.

i) *Muestre que* K *es autoadjunto y luego utilice una base ortonormal de* $L^2(\Omega)$ *para concluir que* K *es compacto.*

ii) *Encuentre el espectro de* K. *Para este efecto, proceda como se indica a continuación. Dado* $\lambda \in \sigma_p(K)$ *y* $v \in N(K - \lambda\, I) \setminus 0$, *derive dos veces la ecuación* $K(v) - \lambda\, v = 0$ *y obtenga el problema de valores de contorno:*

$$\lambda\, v'' + v = 0 \quad en \quad \Omega\,, \quad v'(1) = v(0) = 0\,.$$

Observe así que $\lambda \neq 0$. *Luego, multiplique la ecuación diferencial por* $\bar{v}$, *integre sobre* Ω, *y deduzca de la identidad resultante que* $\lambda > 0$. *Entonces, demuestre que la solución de la ecuación diferencial está dada por:*

$$v(t) := C_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad \forall\, t \in \Omega\,,$$

y use las condiciones de contorno para probar que los valores propios de K *están dados por* $\lambda_j := \frac{4}{\pi^2\,(2\,j-1)^2}$ $\forall\, j \in \mathbb{N}$, *con funciones propias*

$$v_j(t) := \sin\left(\frac{\pi(2\,j-1)\,t}{2}\right) \qquad \forall\, t \in \Omega\,.$$

iii) *Concluya que* $\|K\| = \frac{4}{\pi^2}$.

7.5 *Sea* H *un Hilbert sobre* $\mathbb{C}$. *Se dice que* $A \in \mathcal{L}(H,H)$ *es un operador normal si* A *y* A^* *conmutan, esto es* $A^*\, A = A\, A^*$. *Pruebe en este caso que:*

a) $\lambda \in \sigma_p(A)$ *si y sólo si* $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$. *Concluya además que*

$$E_\lambda(A) := N(A - \lambda I) \;=\; E_{\bar{\lambda}}(A^*) := N(A^* - \bar{\lambda} I)\,.$$

b) Si λ, $\mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$, *entonces* $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A^*)$.

7.6 *Sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq L^2(-1,1) \to L^2(-1,1)$ el operador definido por*

$$(\, A\, u\,)\,(x) \;=\; x\, u(x) \,+\, \theta \int_{-1}^{1} u(t)\, dt\,,$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$. Obtenga la mayor información posible sobre el espectro de A.

7.7 *Sean $\Omega := (0,1)$, $p \in C^1(\bar{\Omega})$ y $q \in C(\bar{\Omega})$, con $p(x) \geq \alpha > 0 \;\forall\, x \in \Omega$. Demuestre que existen una base Hilbertiana $\{\, e_n\,\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ y una sucesión $\{\, \lambda_n\,\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales con $\lambda_n > 0$, y $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, tales que $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, y*

$$-(pe_n')' \,+\, qe_n \;=\; \lambda_n e_n \quad \text{en} \quad \Omega\,.$$

7.8 *Sea H un espacio de Hilbert separable. Se dice que $T : H \to H$ es un operador de* Hilbert-Schmidt *si existe una base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H tal que*

$$|||\, T\, |||^2 \;:=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2 \;<\; \infty\,.$$

Sean p y q como en el problema anterior. Demuestre que el operador lineal $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ que a cada $f \in L^2(\Omega)$ le asigna la única solución $u := Tf$ de

$$-(pu')' \,+\, qu \;=\; f \quad \text{en} \quad \Omega \;:=\; (0,1)$$

$$u(0) \;=\; u(1) \;=\; 0$$

es un operador de Hilbert Schmidt.

7.9 *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ un Hilbert ($\mathbb{C}$), y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H y A es autoadjunto. Demuestre que $\mathcal{D}(A)$ provisto con el producto escalar $\langle u,v\rangle_{\mathcal{D}(A)} := \langle u,v\rangle_H + \langle Au, Av\rangle_H$, es un espacio de Hilbert. Suponga ahora que $\mathbf{i} : \mathcal{D}(A) \to H$ es una inyección compacta, y que $A^{-1} \in \mathcal{L}(H, \mathcal{D}(A))$. Demuestre que*

i) $\sigma(A) \;=\; \sigma_p(A) \;\subseteq\; \mathbb{R}$.

ii) *Los elementos de $\sigma_p(A)$ pueden ordenarse en una sucesión $\{\, \lambda_n\,\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|\lambda_n| \to \infty$, cuando $n \to \infty$.*

iii) *Los espacios propios $E_{\lambda_n} := N(A - \lambda_n I)$ son de dimensión finita, ortogonales dos a dos, y $H \;=\; \oplus\{\, E_{\lambda_n} : \quad n \in \mathbb{N}\,\}$.*

7.10 *Sea H un Hilbert complejo no trivial, y sea $A \in \mathcal{L}(H,H)$ un operador biyectivo tal que $A^* = A^{-1}$ (*operador unitario*). Demuestre que $||A|| = 1$, y concluya que*

$$\sigma(A) \;\subseteq\; \{\, \lambda \,\in\, \mathbb{C} : \quad |\lambda| \;=\; 1\,\}\,.$$

7.11 *Sean X un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(X,X)$ un operador autoadjunto. Demuestre que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene $\quad X \;=\; N(A - \lambda I) \oplus \overline{R(A - \lambda I)}\,$.*

7.12 [Valores propios de Δ]. *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Lipschitz-continua. Demuestre que existen una base Hilbertiana $\{\, e_n\,\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$, y una sucesión $\{\, \lambda_n\,\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales con $\lambda_n > 0$, y $\lambda_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$, tales que $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, y $-\Delta\, e_n \;=\; \lambda_n\, e_n$ en Ω. Se dice aquí que los λ_n son los valores propios del Laplaciano (con condición de Dirichlet), y que las e_n son las funciones propias asociadas.*

7.13 [Espectro autoadjunto]. *Sean H un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(H, H)$ un operador autoadjunto. Dado un subespacio cerrado S de H invariante con respecto a A, denote por $\sigma(A, S)$ y $\sigma(A, S^\perp)$ los espectros de las restricciones $A|_S$ y $A|_{S^\perp}$, respectivamente. Demuestre que $\sigma(A) = \sigma(A, S) \cup \sigma(A, S^\perp)$.*

7.14 *Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert $(\mathbb{C})$ y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador lineal con $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ tal que A es autoadjunto. Entonces, $\lambda \in \boldsymbol{\sigma}(A)$ si y sólo si existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_\lambda(x_n)\| = 0$.*

7.15 *Sean X un Hilbert complejo y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X. Pruebe que*

$$\left\{ \overline{\lambda} : \quad \lambda \in \boldsymbol{\sigma}_r(A) \right\} \subseteq \boldsymbol{\sigma}_p(A^*) .$$

En particular, considere el espacio $X := L^2(\Omega)$, con $\Omega :=]0,1[$, y demuestre que $\boldsymbol{\sigma}_r(A) = \emptyset$, donde $A : X \to X$ está definido por

$$(A\,u)(t) := \int_0^1 (t^2\, s + s^2\, t)\, u(s)\, ds \qquad \forall\, t \in \Omega\,, \quad \forall\, u \in X\,.$$

8. Teoría de Distribuciones

8.1 *Pruebe que las siguientes son distribuciones sobre $\mathbb{R}$:*

i) $$\langle u, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - 2\, \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right\} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

ii) $$\langle u, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

iii) $$\langle u, \varphi\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\, ln\,(\varepsilon) \right\} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

8.2

i) *Pruebe que $VP(\frac{1}{x}) : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\langle VP(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

es una distribución sobre $\mathbb{R}$.

ii) *Demuestre que $(log\,|x|)' = VP(\frac{1}{x})$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

8.3 *Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f \in C_0^k(\Omega)$. Demuestre que para cada α, $|\alpha| \le k$,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\Omega} |\, \partial^\alpha\, (f_\varepsilon - f)\,(x)\,| = 0\,.$$

8.4 *Sea* $\Omega = (0,1) \times (0,1)$*, y para cada* $n \geq 3$ *defina los conjuntos*

$$\Omega_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right) .$$

Construya una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\geq 3} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$*, tal que* $f_n = 1$ *en* Ω_n *para todo* $n \geq 3$, $|\partial^\alpha f_n(x)| \leq C_\alpha n^{|\alpha|}\ \forall x \in \Omega$*, y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n (2 - f_n)\, dx = 1 .$$

8.5 *Para cada* $\varepsilon \in (0,1)$ *considere* $u_\varepsilon \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

$$\operatorname{sop} u_\varepsilon \subseteq \bar{B}(0,\varepsilon) \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon(x)\, dx = 1 \quad , \quad y \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x)|\, dx < \infty .$$

Pruebe que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon\, \varphi\, dx = \varphi(0) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

8.6 *Demuestre que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{1 + n^2x^2}\, \varphi(x)\, dx = \pi\, \varphi(0) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

8.7 *Sean* $X_1, X_2, ..., X_m$ *abiertos de* $\mathbb{R}^n$*, y sea* K *un compacto contenido en* $\cup_{j=1}^m X_j$*. Pruebe que existen funciones* $\varphi_j \in C_0^\infty(X_j)$ *tales que*

$$0 \leq \varphi_j \leq 1 \quad y \quad \sum_{j=1}^m \varphi_j^2(x) = 1 \quad \text{en una vecindad de } K .$$

8.8 *Sea* $u \in L^p_{loc}(\Omega)$*,* $p > 1$*, y suponga que existe* $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega v\, \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

Demuestre que $\partial^\alpha u_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x), \forall\, x \in \Omega, \forall\, \varepsilon < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$*. Además, pruebe que para todo compacto* $K \subseteq \Omega$ *existe una sucesión* $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq C^{|\alpha|}(\Omega)$ *tal que*

$$||\varphi_j - u||_{L^p(K)} \to 0 \quad y \quad ||\partial^\alpha \varphi_j - v||_{L^p(K)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad j \to \infty .$$

8.9

i) *Demuestre que la inyección* $\mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ *es densa.*

ii) *Sean* $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ *y* $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ *tales que* $\operatorname{sop} u \cap \operatorname{sop} \varphi = \phi$*. Demuestre que* $\langle u, \varphi\rangle = 0$.

8.10 *Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y sean* $x_0, x_1 \in \Omega$ *tales que* $x_0 \neq x_1$*. Suponga que* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *y sop* $u \subseteq \{x_0, x_1\}$.

i) *Demuestre que existen enteros no negativos* N_0, N_1*, y constantes* $c_\alpha, d_\beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq N_0$, $|\beta| \leq N_1$*, tales que* $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq N_0} c_\alpha \langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi\rangle + \sum_{|\beta|\leq N_1} d_\beta \langle \partial^\beta \delta_{x_1}, \varphi\rangle .$$

ii) *Extienda el resultado anterior al caso en que* $\operatorname{sop} u \subseteq \{x_0, x_1, ..., x_N\}$, *con* $x_i \neq x_j$ *para todo* $i \neq j \in \{1, 2, ..., N\}$.

8.11

i) *Sea* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *donde* Ω *es el abierto de* $\mathbb{R}^2$ *definido por*

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, a < x < b \, , c < y < d \} .$$

Si $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ *en* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *pruebe que existe una constante* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$\langle u, \varphi \rangle = \lambda \int_\Omega \varphi \, dx \, , \qquad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

ii) *Sea* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *donde* Ω *es el abierto de* $\mathbb{R}^3$ *definido por*

$$\Omega = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, a < x < b \, , c < y < d \, , e < z < f \} .$$

Si $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ *en* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *qué puede decir acerca de la distribución* u?.

8.12 *Recuerde la definición de convergencia de distribuciones y demuestre que*

$$\frac{j}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{j^2 x^2}{2}} \to \delta \quad \text{cuando} \quad j \to \infty .$$

IND.: *Notar que* $\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

8.13 *Sean* $u \in L^p(\Omega)$ *y* $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq W^{m,p}(\Omega)$, *tal que* $||u_k||_{W^{m,p}(\Omega)} \leq M$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$. *Demuestre que si* $u_k \stackrel{k \to \infty}{\to} u$ *en* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *entonces* $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

8.14 *Sean* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ *y* $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *una sucesión acotada de* $H^m(\Omega)$ *tal que* $u_k \stackrel{k \to \infty}{\to} u$ *en* $\mathcal{D}'(\Omega)$. *Demuestre que* $u \in H^m(\Omega)$.

8.15 *Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$, *y sean* $g \in C^\infty(\Omega)$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Se define la distribución* $gu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *como* $\langle gu, \varphi \rangle := \langle u, g\varphi \rangle \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. *Demuestre que para todo multi-índice* α *se tiene la* FÓRMULA DE LEIBNIZ:

$$\partial^\alpha \, (g \, u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta g \, \partial^{\alpha - \beta} \, u \, .$$

8.16 *Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}$, *y considere el operador* $L \, v := v' + v \ \ \forall \, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Pruebe que si* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *y* $L \, u = f \in C^\infty(\Omega)$, *entonces* $u \in C^\infty(\Omega)$. *Así,* $L \, u = f$ *en el sentido clásico, y la suavidad de* f *se transmite a la solución* u.

8.17 *Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}$, *y considere el operador* $L \, v := v' + gv \ \ \forall \, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *donde* $g \in C^\infty(\Omega)$. *Demuestre que si* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *y* $L \, u = f \in C(\Omega)$, *entonces* $u \in C^1(\Omega)$, *y así* $L \, u = f$ *en el sentido clásico.*

8.18 *Sea* $L\,u := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\forall\, u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, *el* Operador de Ondas *en el plano. Pruebe que* $L\,E = \delta$ *en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, *donde*

$$E(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ |x| < t\,, \\ 0 & si\ |x| > t\,, \end{cases} \qquad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2\,.$$

8.19 *Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *tal que* $\langle u, \varphi \rangle \geq 0$ *para toda función no-negativa* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Pruebe que* u *es una distribución de orden 0.*

8.20 *Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *que incluye al vector nulo, y sea* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *tal que* $x_j\,u = 0$ *en* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *para todo* $j \in \{1, 2, ..., n\}$. *Pruebe que existe una constante* C *tal que* $u = C\,\delta$.

8.21 *Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\lim_{j\to\infty} \int_K |f_j(x)|\,dx = 0$$

para todo compacto $K \subseteq \Omega$. *Pruebe que* $\partial^\alpha f_j \to 0$ *en* $\mathcal{D}'(\Omega)$ $\forall\,\alpha$.

8.22

i) *Sea* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *y* K *un compacto contenido en* Ω. *Pruebe que existe una función* $f \in C(\Omega)$ *y un multi-índice* α *tales que*

$$\langle u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)\,\partial^\alpha \varphi(x)\,dx \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)\,.$$

ii) *Sean* V *y* Ω *abiertos de* $\mathbb{R}^n$, *y* K *compacto tales que* $K \subset V \subset \Omega$. *Sea* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *de orden* N *con* $\operatorname{sop} u = K$. *Aplique i) para demostrar que existe un número finito de funciones* $f_\beta \in C(\Omega)$, *cuyos soportes están contenidos en* V, *tales que*

$$u = \sum_\beta \partial^\beta f_\beta\,.$$

8.23 *Pruebe que si* $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *converge a cero en* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, *entonces para cada* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $u * \varphi_j$ *converge a cero en* $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

8.24 *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, *y* f^ε *su regularizada. Pruebe que:*

i) $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, *donde* $\Omega_\varepsilon := \{\, x \in \Omega : \quad \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon \,\}$.

ii) $f^\varepsilon(x) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} f(x)$ *para casi todos los* $x \in \Omega$.

iii) *si* $f \in C(\Omega)$, *entonces* $f^\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\to} f$ *uniformemente sobre compactos de* Ω.

iv) *si* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, *entonces* $f^\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\to} f$ *en* $L^p_{loc}(\Omega)$.

8.25 *Sea* u *una forma lineal sobre* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Pruebe que* u *es continua (distribución temperada) si y sólo si existen* $C > 0$ *y un entero no-negativo* N *tales que*

$$|\,\langle u, \varphi \rangle\,| \leq C \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leq N} \left\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\,x^\alpha\,\partial^\beta \varphi(x)\,| \right\} \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

8.26 *Demuestre que para toda $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para todo multi-índice α, y para cada $h \in \mathbb{R}^n$, se tiene*

i) $\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \widehat{u}$ *ii)* $\widehat{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{u}$

iii) $\widehat{\tau_h u} = e^{-\imath \xi \cdot h} \widehat{u}$ *iv)* $\widehat{e^{\imath x \cdot h} u} = \tau_h \widehat{u}$

Deduzca, a partir de estas identidades, que $\widehat{D^\alpha \delta} = \xi^\alpha$ *y* $\widehat{x^\alpha} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \delta$*, probando primero que* $\widehat{\delta} = 1$

8.27 *Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ tal que $x_1 u_n = \big(x_2 - \frac{1}{n}\big) u_n = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ y $\langle u_n, 1\rangle = \dfrac{n-1}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Justifique la coherencia de estas hipótesis y encuentre, si es posible, el limite distribucional de u_n cuando $n \longrightarrow +\infty$.*

9. Espacios de Sobolev

9.1 *Probar que la norma usual de $H^m(\Omega)$ y la norma de $H^s(\Omega)$ dada en términos de la transformada de Fourier son equivalentes para $s = m \in \mathbb{N}$.*

9.2 *Sea Ω^- un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, y sea Ω^+ la region anular acotada por Γ y una curva cerrada Σ cuyo interior contiene a Γ. Además, sean $\gamma_0^- : H^1(\Omega^-) \to H^{1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_0^+ : H^1(\Omega^+) \to H^{1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Sigma)$ los operadores de trazas respectivos, y denote $\Omega := \Omega^- \cup \Gamma \cup \Omega^+$.*

a) *Demuestre que $v \in H^1(\Omega)$ si y sólo si:*

$$v \in L^2(\Omega)\,,\ v|_{\Omega^-} \in H^1(\Omega^-)\,,\ v|_{\Omega^+} \in H^1(\Omega^+)\,,\ \text{ y }\ \gamma_0^-(v|_{\Omega^-}) = \gamma_0^+(v|_{\Omega^+}) \text{ en } \Gamma\,.$$

Dados $f^- \in L^2(\Omega^-)$, $f^+ \in L^2(\Omega^+)$, $g_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y $g_\Sigma \in H^{-1/2}(\Sigma)$, considere el problema de transmisión: Hallar $(u^-, u^+) \in H^1(\Omega^-) \times H^1(\Omega^+)$ tales que

$$\begin{gathered} -\Delta u^- = f^- \quad \text{en} \quad \Omega^-\,, \quad -\Delta u^+ = f^+ \quad \text{en} \quad \Omega^+\,, \\ \gamma_0^-(u^-) = \gamma_0^+(u^+) \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^-(\nabla u^-) - \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) = g_\Gamma \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \\ \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) = g_\Sigma \quad \text{en} \quad \Sigma\,, \quad \text{y} \quad \int_{\Omega^-} u^- + \int_{\Omega^+} u^+ = 0\,, \end{gathered} \tag{39}$$

donde $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^- : H(\mathrm{div}\,;\Omega^-) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+ : H(\mathrm{div}\,;\Omega^+) \to H^{-1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Sigma)$ son los operadores de trazas normales respectivos ($\boldsymbol{\nu}$ apunta hacia Ω^+ en Γ y hacia el exterior de Ω^+ en Σ).

b) *Utilice identidades de Green en espacios de Sobolev convenientes y deduzca una formulación variacional de (39) con incógnita en un subespacio cerrado V de $H^1(\Omega)$.*

c) *Identifique una condición de compatibilidad sobre los datos, y demuestre en tal caso que la formulación obtenida en b) posee una única solución, la cual depende continuamente de f^-, f^+, g_Γ, y g_Σ.*

d) *Pruebe que el esquema de Galerkin asociado es convergente para cualquier familia numerable* $\{V_h\}_{h>0}$ *de subespacios de dimensión finita de* V *tales que* $\lim\limits_{h\to 0} \operatorname{dist}(v, V_h) = 0 \quad \forall\, v \in V$.

e) *Demuestre que la formulación obtenida en b) es equivalente a una formulación variacional mixta con incógnita en* $H^1(\Omega)\times\mathbb{R}$, *y verifique que ella satisface las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi.*

9.3 *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera* Γ *de clase* C^1 *y defina*

$$\mathcal{D}(\Gamma) \,:=\, \{\, v\,|_\Gamma : \quad v \,\in\, C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,\}\,.$$

Pruebe que $H^{1/2}(\Gamma) \,\subseteq\, \overline{\mathcal{D}(\Gamma)}^{\|\cdot\|_{0,\Gamma}}$ *y* $H^{1/2}(\Gamma) \,=\, \overline{\mathcal{D}(\Gamma)}^{\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}}$.

9.4 *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera* Γ *de clase* C^1, *y considere la aplicación* $|||\cdot||| : H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$|||v||| \,:=\, \Big\{\, |v|_{1,\Omega}^2 \,+\, \|\gamma_0(v)\|_{0,\Gamma}^2 \Big\}^{1/2} \qquad \forall\, v\in H^1(\Omega)\,,$$

donde $\gamma_0 : H^1(\Omega)\to H^{1/2}(\Gamma)$ *es el operador de trazas usual. Utilice un argumento análogo al de la demostración de la desigualdad de Poincaré generalizada para probar que* $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ *y* $|||\cdot|||$ *son equivalentes en* $H^1(\Omega)$.

9.5 *Demuestre que* $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *es denso en* $H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

9.6 *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^2$ *con frontera* Γ *de clase* C^1. *El objetivo de este problema es demostrar que*

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}}^2 \,\geq\, \frac{1}{2}\,|\mathbf{v}|_{[H^1(\Omega)]^2}^2 \qquad \forall\,\mathbf{v}\,\in\,[H_0^1(\Omega)]^2\,, \tag{40}$$

donde $\mathbf{e}(\mathbf{v}) \,:=\, \dfrac{1}{2}\Big\{\nabla\mathbf{v} \,+\, (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}\Big\}$. *Para tal efecto, proceda como sigue.*

i) *Dados* $\boldsymbol{\sigma} \,:=\, (\sigma_{ij})$ *y* $\boldsymbol{\tau} \,:=\, (\tau_{ij})$ *en* $\mathbb{R}^{2\times 2}$, *se define el producto tensorial* $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \,:=\, \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}\,\tau_{ij}$ *y se introducen los subespacios*

$$\mathbb{R}^{2\times 2}_{sim} := \{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{R}^{2\times 2} : \quad \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{t}} = \boldsymbol{\tau}\} \quad y \quad \mathbb{R}^{2\times 2}_{asim} := \{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{R}^{2\times 2} : \quad \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{t}} = -\boldsymbol{\tau}\}\,.$$

Pruebe que $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \,=\, 0 \quad \forall\,\boldsymbol{\sigma}\,\in\,\mathbb{R}^{2\times 2}_{sim}, \quad \forall\,\boldsymbol{\tau}\,\in\,\mathbb{R}^{2\times 2}_{asim}$.

ii) *Note que* $\nabla\mathbf{v} \,=\, \mathbf{e}(\mathbf{v}) \,+\, \mathbf{w}(\mathbf{v})\,$, *con* $\mathbf{w}(\mathbf{v}) \,:=\, \dfrac{1}{2}\Big\{\nabla\mathbf{v} \,-\, (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}\Big\}$, *y recuerde que* $\|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}}^2 \,=\, \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} \quad \forall\,\boldsymbol{\tau}\,\in\,[L^2(\Omega)]^{2\times 2}$, *para probar que*

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}}^2 \,-\, \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}}^2 \,=\, \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}$$

y

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}}^2 \,+\, \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}}^2 \,=\, \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{v}\,.$$

iii) *Deduzca la identidad* $\nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{v})^{\mathtt{t}} \,=\, \mathrm{div}\left\{ \nabla \mathbf{v}\,\mathbf{v} \,-\, \mathrm{div}\,(\mathbf{v})\,\mathbf{v} \right\} + (\mathrm{div}\,(\mathbf{v}))^2$ *y concluya la desigualdad (40).*

9.7 ([20]) *Este problema constituye una versión particular del Lema de Peetre-Tartar.*

a) *Sean* $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ *y* $(X_3, \|\cdot\|_3)$, *espacios de Banach, y considere operadores* $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ *y* $B \in \mathcal{L}(X_1, X_3)$, *tales que* B *es compacto. Además, suponga que existe* $c > 0$ *tal que*

$$\|x\|_1 \,\le\, c \left\{ \|A(x)\|_2 \,+\, \|B(x)\|_3 \right\} \qquad \forall\, x \in X_1\,.$$

Demuestre que $N(A)$ *es de dimensión finita, y luego razone por contradicción para probar que existe* $C > 0$ *tal que*

$$\mathrm{dist}(x, N(A)) \,\le\, C\,\|A(x)\|_2 \qquad \forall\, x \in X_1\,.$$

b) *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera suave* Γ *y considere la descomposición:* $H^1(\Omega) \,=\, \tilde{H}^1(\Omega) \oplus \mathbb{P}_0(\Omega)$, *donde* $\mathbb{P}_0(\Omega)$ *es el espacio de las funciones constantes sobre* Ω *y*

$$\tilde{H}^1(\Omega) \,:=\, \left\{ v \in H^1(\Omega) : \quad \int_\Omega v \,=\, 0 \right\}\,.$$

Pruebe que existe $\alpha > 0$ *tal que*

$$\alpha\,\|v\|_{H^1(\Omega)} \,\le\, |v|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in \tilde{H}^1(\Omega)\,. \tag{41}$$

c) *Aplique* a), *(41), y el teorema de trazas, para demostrar que existen constantes* C_1, C_2 > 0, *tales que*

$$C_1\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \,\le\, |v|^2_{H^1(\Omega)} \,+\, \|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \,\le\, C_2\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,. \tag{42}$$

Indicación*: para la desigualdad (42) inferior defina operadores* A *y* B *apropiados utilizando los espacios* $X_1 := H^1(\Omega)$, $X_2 := [L^2(\Omega)]^2 \times L^2(\Gamma)$ *y* $X_3 := \mathbb{P}_0(\Omega)$.

9.8 ([20]) *Sea* Ω *un abierto acotado y conexo de* $\mathbb{R}^n$ *de clase* C^1, *y sea* $H^{-1}(\Omega)$ *(resp.* $[H^{-1}(\Omega)]^n$*) el dual de* $H^1_0(\Omega)$ *(resp.* $[H^1_0(\Omega)]^n$*). Utilizando que* $C^\infty_0(\Omega)$ *(resp.* $[C^\infty_0(\Omega)]^n$*) es denso en* $H^1_0(\Omega)$ *(resp.* $[H^1_0(\Omega)]^n$*), las aplicaciones identidad* $i : L^2(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ *y gradiente* $\nabla : L^2(\Omega) \to [\mathcal{D}'(\Omega)]^n$ *se extienden por densidad a operadores* $i : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ *y* $\nabla : L^2(\Omega) \to [H^{-1}(\Omega)]^n$, *respectivamente. En tal caso, se puede probar que existe* $c_1 > 0$, *que depende sólo de* Ω, *tal que*

$$\|p\|_{0,\Omega} \,\le\, c_1 \left\{ \|p\|_{-1,\Omega} \,+\, \|\nabla p\|_{-1,\Omega} \right\} \quad \forall\, p \in L^2(\Omega)\,.$$

a) *Considere el operador* $B \,:=\, \mathcal{R}\,\nabla$, *donde* $\mathcal{R} : [H^{-1}(\Omega)]^n \to [H^1_0(\Omega)]^n$ *es la aplicación de Riesz asociada, y demuestre que el rango de* B *es cerrado en* $[H^1_0(\Omega)]^n$.

b) *Identifique el operador adjunto* $B^* : [H^1_0(\Omega)]^n \to L^2(\Omega)$ *y utilice el Ejercicio 9.7 para probar que* $\mathrm{div} : W^\perp \to L^2_0(\Omega)$ *es un isomorfismo, donde*

$$W := \left\{ \mathbf{v} \in [H^1_0(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \right\}, \qquad [H^1_0(\Omega)]^n = W \,\oplus\, W^\perp\,,$$

y

$$L^2_0(\Omega) := \left\{ p \in L^2(\Omega) : \ \int_\Omega p = 0 \right\}\,.$$

9.9 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave Γ y sea $w\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ una función que satisface las hipótesis:*

i) *$w > 0$ casi en todas partes.*

ii) *$1/w \in L^1_{loc}(\Omega)$; esto es, dado cualquier abierto Ω_0 tal que $\overline{\Omega}_0$ es un compacto contenido en Ω, $1/w \in L^1(\Omega_0)$.*

a) *Demuestre que $L^2_w(\Omega) := \Big\{u\colon \Omega \to \mathbb{R} : \quad u$ es medible y $\int_\Omega |f|^2 w < \infty\Big\}$ equipado con el producto interior*

$$\langle u, v\rangle_{L^2_w(\Omega)} := \int_\Omega u\, v\, w$$

es un espacio de Hilbert.

b) *Demuestre que $H^1_w(\Omega) := \Big\{u \in L^2_w(\Omega) : \quad \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2_w(\Omega) \quad \forall\, i \in \{1, 2, ..., N\}\Big\}$ equipado con la norma*

$$\|u\|_{H^1_w(\Omega)} := \left\{\|u\|^2_{L^2_w(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2_w(\Omega)}\right\}^{1/2}$$

es un espacio de Hilbert.

9.10 *Sean Ω, w, $L^2_w(\Omega)$ y $H^1_w(\Omega)$ como en el Ejercicio 9.9 y sea $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}^N$ tal que $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. Asuma además la siguiente hipótesis adicional para w:*

iii) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, la inyección de $H^1_w(\Omega_n)$ en $L^2_w(\Omega_n)$ es compacta.*

Demuestre que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

a) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|u\|^2_{L^2_w(\Omega)} \le \varepsilon \|u\|^2_{H^1_w(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2_w(\Omega_m)} \quad \forall\, u \in H^1_w(\Omega)\,.$$

b) *La inyección de $H^1_w(\Omega)$ en $L^2_w(\Omega)$ es compacta.*

Referencias

[1] Babuška, I. and Aziz, A.K., *Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method.* In: The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations (Proc. Sympos., University of Maryland, Baltimore, USA, 1972), pp. 1-359. Academic Press, New York, 1972.

[2] Bernardi, C., Canuto, C. and Maday, Y., *Generalized inf-sup conditions for Chebyshev spectral approximation of the Stokes problem.* SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 25, 6, pp. 1237-1271, (1998).

[3] Brezzi, F. and Fortin, M., Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer-Verlag, 1991.

[4] Buffa, A., *Remarks on the discretization of some non-coercive operator with applications to heterogeneous Maxwell equations*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 43, 1, pp. 1-18, (2005).

[5] Ciarlet, P., The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, 1978.

[6] Galvis, J. and Sarkis, M., *Non-matching mortar discretization analysis for the coupling Stokes-Darcy equations*. Electronic Transactions on Numerical Analysis, vol. 26, pp. 350-384, (2007).

[7] Gatica, G.N., *On the coerciveness property of the biharmonic operator*. Proyecciones, vol. 10, 17, pp. 27-34, (1991).

[8] Gatica, G.N., *Analysis of a new augmented mixed finite element method for linear elasticity allowing RT_0-P_1-P_0 approximations*. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 40, 1, pp. 1-28, (2006).

[9] Gatica, G.N. and Gatica, L.F., *On the a-priori and a-posteriori error analysis of a two-fold saddle point approach for nonlinear incompressible elasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 68, 8, pp. 861-892, (2006).

[10] Gatica, G.N., Gatica, L.F. and Stephan, E.P., *A dual-mixed finite element method for nonlinear incompressible elasticity with mixed boundary conditions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, 35-36, pp. 3348-3369, (2007).

[11] Gatica, G.N. and Heuer, N., *A dual-dual formulation for the coupling of mixed-FEM and BEM in hyperelasticity*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 38, 2, pp. 380-400, (2000).

[12] Gatica, G.N., Heuer, N. and Meddahi, S., *On the numerical analysis of nonlinear two-fold saddle point problems*. IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 23, 2, pp. 301-330, (2003).

[13] Gatica, G.N. and Hsiao, G.C., *The coupling of boundary integral and finite element methods for nonmonotone nonlinear problems*. Numerical Functional Analysis and Optimization, vol. 13, 5&6, pp. 431-447, (1992).

[14] Gatica, G.N. and Hsiao, G.C., *A Gårding's inequality for variational problems with constraints*. Applicable Analysis, vol. 54, 1-2, pp. 73-90, (1994).

[15] Gatica, G.N., Márquez, A. and Meddahi, S., *Analysis of the coupling of primal and dual-mixed finite element methods for a two-dimensional fluid-solid interaction problem*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 45, 5, pp. 2072-2097, (2007).

[16] Gatica, G.N., Márquez, A. and Meddahi, S., *A new coupling of mixed finite element and boundary element methods for an exterior Helmholtz problem in the plane.* Advances in Computational Mathematics, vol. 30, 3, pp, 281-301, (2009).

[17] Gatica, G.N. and Sayas, F.-J., *Characterizing the inf-sup condition on product spaces.* Numerische Mathematik, vol. 109, 2, pp. 209-231, (2008).

[18] Gatica, G.N. and Wendland, W.L., *Coupling of mixed finite elements and boundary elements for linear and nonlinear elliptic problems.* Applicable Analysis, vol. 63, pp. 39-75, (1996).

[19] Gatica, G.N. and Wendland, W.L., *Coupling of mixed finite elements and boundary elements for a hyperelastic interface problem.* SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 34, 6, pp. 2335-2356, (1997).

[20] Girault, V. and Raviart, P.-A., Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms. Springer-Verlag, 1986.

[21] Howell, J.S. and Walkington, N.J., *Inf-sup conditions for twofold saddle point problems.* Numerische Mathematik, vol. 118, 4, pp. 663-693, (2011).

[22] Hsiao, G.C., *A modified Galerkin scheme for elliptic equations with natural boundary conditions.* Numerical Mathematics and Applications (Oslo, 1985), 193-197, IMACS Trans. Sci. Comput.-85, I, North Holland, Amsterdam, 1986.

[23] Johnson, C., Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[24] Kufner, A., John, O. and Fučík, S., Function Spaces. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids; Mechanics: Analysis. Noordhoff International Publishing, Leyden; Academia, Prague, 1977. xv+454 pp.

[25] Quarteroni, A. and Valli, A., Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer-Verlag, 1994.

[26] Raviart, P.-A. and Thomas, J.-M., Introduction á L'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles. Masson, 1983.

[27] Xu, J. and Zikatanov, L., *Some observations on Babuška and Brezzi theories.* Numerische Mathematik, vol. 94, 1, pp. 195202, (2003).