UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

LISTADO DE EJERCICIOS 4220014 / 408601

Análisis Funcional

Primer Semestre de 2013 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. (TEOREMA DE HAHN-BANACH SOBRE $\mathbb{C}$). Sea X un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y sea $p : X \to \mathbf{R}$ tal que

$$p(\alpha\, x) \,=\, |\alpha|\, p(x) \quad \text{y} \quad p(x+y) \,\leq\, p(x) \,+\, p(y) \qquad \forall\, \alpha \,\in\, \mathbb{C}\,,\ \forall\, x\,,\, y \,\in\, X\,.$$

Además, sean S un subespacio de X y $f : S \to \mathbb{C}$ lineal, tales que

$$|f(x)| \,\leq\, p(x) \qquad \forall\, x \,\in\, S\,.$$

Demuestre que f puede extenderse a un funcional lineal $F : X \to \mathbb{C}$ tal que

$$|F(x)| \,\leq\, p(x) \qquad \forall\, x \,\in\, X\,.$$

2. (APLICACIÓN SIMPLE DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH). Sea X un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

   a) Dados un conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ de N vectores linealmente independientes de X y $\{a_1, a_2, ..., a_N\} \subseteq \mathbb{C}$, pruebe que existe $F \in X'$ tal que $F(x_j) \,=\, a_j$ para todo $j \in \{1, ..., N\}$.
   b) Utilice a) para probar que todo subespacio Y de dimensión finita admite un suplemento topógico.

3. Sea $\Omega := (a, b)$ un intervalo acotado de $\mathbf{R}$ y dado $m \in \mathbf{N}$ considere el espacio de Sobolev $H^m(\Omega) := \{\, v \in L^2(\Omega) : \quad v^{(j)} \in L^2(\Omega) \quad \forall j \in \{1, ..., m\}\,\}$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también lo es.

4. Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados y sean $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(Z, X)$. Demuestre que $(AB)' \,=\, B'\, A'$. Suponga que A es invertible y demuestre que A' tambien lo es, con $(A')^{-1} \,=\, (A^{-1})'$.

5. (INVERSO A IZQUIERDA). Sean E, F espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $N(T) \,=\, \{0\}$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) Existe $S \in \mathcal{L}(F, E)$ tal que $S\,T \,=\, I : E \to E$.
   b) $R(T)$ es cerrado y posee un suplemento topológico en F.

6. (APLICACIÓN DE REFLEXIVIDAD). Sean E y F espacios de Banach y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E \to F$ lineal cerrado tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en E. Pruebe que si E es reflexivo entonces
$$N(A)^{\perp} \,=\, \overline{R(A^*)}\,.$$

7. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y considere un operador NOLINEAL $T : H \to H$, FUERTEMENTE MONÓTONO y LIPSCHITZ-CONTINUO. Esto significa, respectivamente, que existen constantes $\alpha, M > 0$ tales que
$$\langle Tv - Tw, v - w\rangle \,\geq\, \alpha\,||v-w||_H^2 \quad \text{y} \quad ||Tv - Tw||_H \,\leq\, M\,||v-w||_H \quad \forall\, v,\, w \in H\,.$$

   a) Dada $f \in H$, demuestre que existe un único $u \in H$ tal que $Tu \,=\, f$.

   b) Sea H_n un subespacio de dimensión finita de H y considere el esquema de Galerkin asociado: *Hallar* $u_n \in H_n$ *tal que*
$$\langle Tu_n, v_n\rangle \,=\, \langle f, v_n\rangle \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$
   Pruebe que
$$||u - u_n||_H \,\leq\, \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in H_n} ||u - v_n||_H\,.$$

   IND.: Para **a)**, aplicar el Teorema del Punto Fijo de Banach al operador $P : H \to H$, con $Pv \,:=\, v - \rho\,(Tv - f)$, donde ρ es un parámetro a elegir de manera conveniente.

8. Sean X, Y espacios de Banach, y sea $A : X \to Y$ un operador lineal cerrado tal que $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$. Demuestre que $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

   IND.: Considere $\mathcal{D}(A)$ provisto de la norma $||x||_A := ||x|| + ||Ax||$.

9. (TOPOLOGÍA DÉBIL). Sean E, F espacios de Banach y sea $T : E \to (F, \sigma(F, F'))$ un operador lineal y continuo. Pruebe que $T : E \to F$ también es continuo.

10. (TOPOLOGÍA DÉBIL ESTRELLA). Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E'$. Demuestre que una base de vecindades de f con respecto a la topología $\sigma(E', E)$ está dada por conjuntos de la forma
$$V \,:=\, \{\, g \in E' : \quad |g(x_j) - f(x_j)| \,<\, \epsilon \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., N\}\,\}\,,$$
    con $N \in \mathbf{N}$, $x_j \in E \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., N\}$ y $\epsilon > 0$.

11. (TOPOLOGÍAS Y ESPACIOS DE HILBERT). Sea E un espacio de Hilbert.

    a) Defina, con la mayor simplicidad posible, las topologías $\sigma(E, E')$ y $\sigma(E', E)$.

    b) Pruebe explícitamente (sin usar el resultado más general dado en clases) que la bola unitaria cerrada de E es compacta en $\sigma(E, E')$.

12. Sea X un espacio vectorial normado y $f : X \to \mathbf{R}$ un funcional lineal. Pruebe que $f \in X'$ sí y sólo sí $N(f)$ es un subespacio cerrado de X.

13. Sea X un espacio vectorial normado.

    a) Demuestre que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces la sucesión completa converge.

    b) Sea $S := \{x \in X : \quad ||x|| = 1\}$. Pruebe que S es completo sí y sólo sí X es Banach.

14. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{div};\Omega) := \Big\{ v \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\, v := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \Big\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{div};\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\, v \; \mathrm{div}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

   a) Demuestre que $(H(\mathrm{div};\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{div};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

   b) Pruebe que para todo $g \in [L^2(\Omega)]^n$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\, v_g \; \mathrm{div}\, w \, dx = \int_\Omega g \cdot w \, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

IND.: Dada $v \in [L^2(\Omega)]^n$, se dice que $\mathrm{div}\, v := z \in L^2(\Omega)$ si

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega z \, \varphi \, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

15. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{rot};\Omega) := \{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}\, v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \; \mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

   a) Demuestre que $(H(\mathrm{rot};\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

   b) Pruebe que para todo $g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v_g \; \mathrm{rot}\, w \, dx = \int_\Omega \mathrm{rot}\, g \, \mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

IND.: Notar que $v \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ sí y sólo sí $(v_2, -v_1) \in H(\mathrm{div};\Omega)$. También, dada $v \in [L^2(\Omega)]^2$, se dice que $\mathrm{rot}\, v := z \in L^2(\Omega)$ si

$$-\int_\Omega v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx + \int_\Omega v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\, dx = \int_\Omega z\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

16. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y defina el espacio $V := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, es decir

$$V \;=\; \left\{\, v \in H^2(\Omega) : \quad v \;=\; 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \,\right\}\,.$$

Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$||v||_{H^1(\Omega)} \;\leq\; C\, ||\Delta\, v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in V\,.$$

IND.: Dada $v \in V$, defina $f \;=\; -\Delta\, v \in L^2(\Omega)$ y aplique el Lema de Lax-Milgram al problema de valores de contorno: $-\Delta\, u \;=\; f$ en Ω, $u = 0$ en Γ.

17. Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dados los polinomios $p_j \in X$, $j \in \{0, 1, ..., n\}$, con $p_j(t) = t^j$ $\forall\, t \in [0,1]$, se define el operador $A : X \to X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

IND.: Para todo $j \in \{0, 1, ..., n\}$ defina $F_j : X \to \mathbf{R}$ por $F_j(u) := \displaystyle\int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt$ $\forall\, u \in X$, y observe que $F_j \in X'$.

18. Considere dos espacios vectoriales normados X e Y.

   a) Sea $A_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Demuestre que existe un operador $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y, X))$ tal que $\mathcal{T}_0 A_0 = A_0^{-1}$ y $||\mathcal{T}_0|| = ||A_0^{-1}||/||A_0||$.

   b) Pruebe que si Y es Banach y $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y', X'))$ es un operador biyectivo, entonces $\mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(Y', X'), \mathcal{L}(X, Y))$.

19. Sea $\Omega := (0,1)$ y considere el problema de valores de contorno

$$\begin{array}{rll} -(au')' + bu & = f & \text{en} \quad \Omega \\ u'(0) = u'(1) & = 0 & , \end{array} \tag{1}$$

donde $a(x) = x^2 + 2, b(x) = 2 + sen(x)$ y $f(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$. Puede probarse que la formulación débil de (1) consiste en hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_0^1 (au'v' + buv)dx = \int_0^1 fvdx \quad \forall v \in H^1(\Omega)\,. \tag{2}$$

Demuestre que existe un único $u \in H^1(\Omega)$ solución de (2).

20. Sean X, Y espacios vectoriales normados y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

   a) Demuestre que $R(A)^0 = N(A')$ y que
$$N(A') = \{0\} \quad \text{si y solo si} \quad \overline{R(A)} = Y.$$

   b) Pruebe que si $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$, entonces $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

21. Sea M un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado X.

   a) Demuestre que $M =^0 (M^0)$.

   b) Pruebe que el aniquilador de $(\frac{X}{M})'$ coincide con M.

22. Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea $T : X' \to Y'$ un operador lineal cerrado y biyectivo. Demuestre que $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y', X')$.

23. Sean $I := [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, $f_j : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, j = 1, \cdots, n$, funciones continuas, y considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Hallar $u := (u_1, \cdots, u_n)$ tal que
$$\begin{cases} \dfrac{du_j}{dt} = f_j(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)) \qquad y \\ \\ u_j(t_0) = \eta_j \qquad \forall j = 1, \cdots, n, \end{cases} \tag{3}$$
donde t_0, τ, η_j, $j = 1, \cdots, n$ son constantes reales dadas y τ es positivo. Suponga además que existe $M > 0$ tal que
$$|f_j(t, z) - f_j(t, w)| \leq M||z - w||_\infty \quad \forall\, z, w \in \mathbf{R}^n, \quad \forall\, t \in I.$$
Demuestre que (26) tiene una única solución $u(t)$ para todo $t \in I$.

   IND.: Transforme (3) en una ecuación integral de Volterra y luego aplique algún resultado apropiado sobre puntos fijos.

24. Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall\, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

25. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y considere una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de H tal que $\langle x_n, x_m \rangle = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$. Pruebe que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq ||x||^2 \quad \forall\, x \in H$. Además, dada una sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, demuestre que son equivalentes,

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge en H.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$.

26. Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$, se define

$$L^2(\Omega) \,:=\, \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R} : \quad f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^2\,dx \,<\, +\infty \right\}.$$

Dado un multíndice $\alpha \,:=\, (\alpha_1, ..., \alpha_n) \,\in\, \mathbf{N}^n$, y una función diferenciable u, se denota

$$|\alpha| \,:=\, \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \text{y} \quad \partial^\alpha u \,:=\, \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Con estas notaciones, para cada $m \in \mathbf{N}$ se define el ESPACIO DE SOBOLEV de orden m, como

$$H^m(\Omega) \,:=\, \Big\{ u \,\in\, L^2(\Omega) : \quad \forall\, \alpha,\, |\alpha| \,\leq\, m \quad \text{existe } g_\alpha \,\in\, L^2(\Omega)\,,\ \text{tal que}$$

$$\int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi\, dx \,=\, (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \,\in\, C_0^\infty(\Omega) \Big\}$$

En tal caso se escribe $\partial^\alpha u \,=\, g_\alpha$, y se define la norma

$$||u||_{H^m(\Omega)} \,:=\, \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha u||^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2}.$$

Asuma que $L^2(\Omega)$ provisto del producto escalar $\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} \,:=\, \int_\Omega uv\,dx$, es un espacio de Hilbert, y demuestre que $H^m(\Omega)$ es también un espacio de Hilbert. Muestre además que para todo $f \,\in\, (H^m(\Omega))'$ existen funciones $f_\alpha \,\in\, L^2(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, tales que $f(v) \,=\, \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega f_\alpha\, \partial^\alpha\, v\, dx \quad \forall\, v \in H^m(\Omega)$.

27. Se dice que un espacio de Banach X es UNIFORMEMENTE CONVEXO si para todo $\epsilon \,>\, 0$ existe $\delta \,>\, 0$ tal que

$$(\, x, y \,\in\, X\,,\ ||x|| \leq 1\,,\ ||y|| \leq 1 \quad \text{y} \quad ||x - y|| \,>\, \epsilon\,) \,\Rightarrow\, \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \,<\, 1 - \delta\,.$$

Demuestre que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

28. Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

   a) Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.

   b) Suponga que existe $\beta \,>\, 0$ tal que

   $$\inf_{z \,\in\, N(A)} ||x - z|| \,\leq\, \beta\, ||Ax|| \quad \forall\, x \,\in\, X\,.$$

   Demuestre que $R(A) \,=\, N(A^*)^\perp$.

   c) Pruebe que $A^* \,=\, R_X\, A'\, R_Y^{-1}$, donde $R_X \,:\, X' \to X$ y $R_Y \,:\, Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^{o}N(A') \,=\, N(A^*)^\perp$.

29. Sea X un espacio de Banach e Y un espacio vectorial normado. Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ existe $\forall x \in X$. Pruebe que existe $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $T_n(x) \to T(x) \quad \forall x \in X$.

    IND.: Aplicar TEOREMA DE BANACH-STEINHAUSS.

30. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{\, H_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1} \subset H_n \ \forall\, n \in \mathbf{N}$, y $\cup_{n\in\mathbf{N}} H_n$ es denso en H. Sea $B : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f \in H'$ existe una única sucesión $\{\, u_n(f) \,\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq H$ tal que

$$u_n(f) \in H_n \quad , \quad B(u_n(f), v_n) = f(v_n) \quad \forall\, v_n \in H_n \,,$$

    y $||u_n(f)|| \leq C_0\, ||f|| \ \forall\, n \in \mathbf{N}$, donde C_0 es una constante positiva independiente de n y de f. Suponga además que para todo $f \in H'$ existe un único $u(f) \in H$ tal que

$$B(u(f), v) = f(v) \quad \forall\, v \in H \,.$$

    Demuestre que

$$\lim_{n\to+\infty} ||u(f) - u_n(f)|| = 0 \quad \forall\, f \in H' \,.$$

    IND.: Defina la proyección de Galerkin $P_n : H \to H_n$, donde $\forall\, v \in H$, $P_n v$ denota la única solución de $B(P_n v, w_n) = B(v, w_n) \quad \forall\, w_n \in H_n$ y observe que $P_n u(f) = u_n(f)$.

31. Sea H un espacio vectorial normado real. Pruebe que si la norma de H satisface

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\, \left\{\, ||x||^2 + ||y||^2 \,\right\} \quad \forall\, x, y \in H,$$

    entonces ella proviene de un producto escalar.

32. Sean V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada simétrica y coerciva, y $A : V \to V'$ el operador lineal y acotado inducido por a. Dado $f \in V'$ y U un subconjunto de V no vacío convexo y cerrado, es sabido (por TEOREMA DE STAMPACCHIA) que existe un único $u \in U$ tal que

$$a(u, v-u) \geq f(v-u) \quad \forall\, v \in U.$$

    Ahora, sean V_h un subespacio de V de dimensión finita, U_h un subconjunto de V_h no vacío convexo y cerrado, y denote por $u_h \in U_h$ a la única solución del problema discreto:

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq f(v_h - u_h) \quad \forall\, v_h \in U_h.$$

    Además, sea H un Hilbert tal que $V \subseteq H$, y la inyección canónica $i : V \to H$ es continua y densa. Demuestre que si $Au - f \in H$, entonces existe una constante C independiente de V_h y U_h, tal que

$$||u-u_h||_V \leq C \left\{ \inf_{v_h\in U_h} \left(||u-v_h||_V^2 + ||Au-f||_H\, ||u-v_h||_H \right) \right.$$
$$\left. + \, ||Au-f||_H \inf_{v\in U} ||u_h - v||_H \right\}^{1/2}.$$

33. Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,X)$, con $||A|| < 1$. Demuestre que $(I+A)$ es invertible y que

$$(I+A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X,X)$. Muestre también que

$$||(I+A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||A||}.$$

34. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. El grafo de T se denota por G_T y se define como

$$G_T := \{(x,y) \in X \times Y : \quad x \in D(T),\ y = Tx\}$$

Suponga que $D(T)$ y G_T son subespacios cerrados de X y $X \times Y$, respectivamente. Demuestre que T es acotado sobre $D(T)$.

35. (Lema de Lax-Milgram generalizado). Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $B : H_1 \times H_2 \to \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

   a) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

   $$|B(u,v)| \leq C_1 ||u||_{H_1} ||v||_{H_2} \quad \forall\, (u,v) \in H_1 \times H_2.$$

   b) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

   $$\sup_{\substack{v \in H_2 \\ v \neq 0}} \frac{|B(u,v)|}{||v||_{H_2}} \geq C_2 ||u||_{H_1} \quad \forall\, u \in H_1,$$

   y para cada $v \in H_2$, $v \neq 0$, se tiene $\sup_{u \in H_1} |B(u,v)| > 0$.

   Demuestre que, dado $F \in H_2'$, existe un único $u \in H_1$ tal que $B(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H_2$, y además $\quad ||u||_{H_1} \leq \frac{1}{C_2} ||F||_{H_2'}$.

36. Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Un operador lineal $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ se dice una *extensión* de T si $D(T) \subseteq D(\tilde{T})$ y $Tx = \tilde{T}x \quad \forall\, x \in D(T)$.

   Definición. *Se dice que* $\overline{T} : D(\overline{T}) \subseteq X \to Y$ *es la* clausura *de* T, *si:*

   i) $\overline{T}$ *es un operador lineal cerrado*

   ii) $\overline{T}$ *es una extensión de* T

   iii) Si $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ *es cualquier operador con las propiedades* i) y ii), *entonces* $\tilde{T}$ *es una extensión de* $\overline{T}$.

Sean X, Y espacios de Banach, y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que T tiene una clausura $\overline{T}$ sí y sólo si la siguiente condición se satisface

$$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq D(T),\ x_n \to 0\ ,\ Tx_n \to y \qquad \Rightarrow \qquad y = 0.$$

37. Sea X el espacio vectorial de las funciones continuas sobre $\bar{\Omega} := [0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dados u_1, u_2, $y \in X$, considere la ecuación integral: *Hallar* $u \in X$ *tal que*

$$u(t) - \int_0^1 u_1(t)\, s^2\, u(s)\, ds - \int_0^1 u_2(t)\,(1 - \frac{3}{2}s)\, u(s)\, ds \;=\; y(t) \quad \forall\, t \in \bar{\Omega}\ . \quad (4)$$

i) Si $u_1(t) = 4t$ y $u_2(t) = 1\ \forall\, t \in \Omega$, deduzca una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (4) tenga al menos una solución.

ii) Pruebe que si $u_1(t) = t$ y $u_2(t) = 1$, entonces para cada $y \in X$ la ecuación integral (4) tiene una única solución.

38. Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados.

i) Pruebe que si $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ es de rango finito, entonces K es compacto.

ii) Demuestre que si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $K \in K(Y,Z)$, entonces KA también es compacto.

39. Sea X un espacio vectorial normado de dimensión INFINITA y sea $K \in K(X,X)$ un operador inyectivo. Demuestre que $K^{-1} \notin \mathcal{L}(X,X)$.

40. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Suponga que existen sucesiones $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X'$, $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq Y$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathbf{R}$ tales que

$$\mathop{sup}_{n\in\mathbf{N}} ||F_n||_{X'} \;<\; +\infty \quad , \quad \mathop{sup}_{n\in\mathbf{N}} ||y_n||_Y \;<\; +\infty \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \;<\; +\infty\,,$$

y además

$$A\,x \;=\; \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n\, F_n(x)\, y_n \qquad \forall\, x \in X\,.$$

Demuestre que A es compacto.

41. **i)** Sea $p > 1$ y considere el operador $K : l_p \to l_p$ definido por

$$K\,(x_1, x_2, ..., x_k, ...) \;=\; (x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_k}{k}, ...) \qquad \forall\ (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in l_p\,.$$

Demuestre que K es compacto.

ii) Sean X, Y espacios vectoriales normados y considere el conjunto

$$\mathcal{H} := \{\, F \in (\,\mathcal{L}(X,Y)\,)' : \quad F(K) = 0 \quad \forall\, K \in K(X,Y)\,\}\,.$$

Pruebe que $\mathcal{H} = (\frac{\mathcal{L}(X,Y)}{K(X,Y)})'$.

42. Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0, \pi]$ provisto de la norma uniforme. Dadas las funciones trigonométricas p_j, $q_j \in X$, $j \in \{0, 1, ..., n\}$, con $p_j(t) = \text{sen}\,(jt)$ y $q_j(t) = \cos\,(jt)$, $\forall\, t \in [0, \pi]$, se define el operador $A : X \to X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^{\pi} u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \,+\, \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^{\pi} u(t)\, q_j(t)\, dt \right\} q_j \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

43. Sean H y V dos espacios de Hilbert tales que $H \subseteq V$ y la inyección $i : H \to V$ es compacta.

a) Se dice que una forma bilineal acotada A definida sobre $H \times H$ satisface la Desigualdad de Gårding si existen $\alpha > 0$ y una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbf{R}$ tales que

$$A(v, v) \,\geq\, \alpha\, ||v||_H^2 \,-\, K(v, v) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,.$$

Dado $F \in H'$, considere el siguiente problema variacional: *Hallar* $u \in H$ *tal que*

$$A(u, v) \,=\, F(v) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,. \tag{5}$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding, entonces (5) tiene solución para cada $F \in H'$ si y solo si $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

b) Se dice que A satisface la Desigualdad de Gårding generalizada si existen $\alpha > 0$, una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbf{R}$, y un isomorfismo $S : H \to H$ tales que

$$A(v, Sv) \,\geq\, \alpha\, ||v||_H^2 \,-\, K(v, Sv) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,.$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding generalizada, entonces (5) tiene solución para cada $F \in H'$ si y solo si $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

44. Sean X e Y espacios de Banach tal que X es reflexivo. Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ es compacto si y sólo si A transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones fuertemente convergentes de Y.

45. **a)** Sea $\Omega = (0, 1)$ y $X = L^2(\Omega)$. Puede probarse que X provisto del producto escalar

$$\langle f, g \rangle \,:=\, \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx \quad \forall\, f,\, g \,\in\, X$$

es un espacio de Hilbert, y que $C_0^{\infty}(\Omega)$ es denso en $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Considere la sucesión $\{\, x_n \,\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X$ definida por $x_n(t) = \sqrt{2}\, sin(n\pi t)\ \forall\, t \in \Omega$. Demuestre que

$$||x_n|| \,=\, 1 \quad \forall\, n \,\in\, \mathbf{N} \quad , \quad \text{y que} \quad \lim_{n \to \infty} \langle \varphi, x_n \rangle \,=\, 0 \quad \forall\, \varphi \,\in\, C_0^{\infty}(\Omega)\,.$$

Concluya además que $x_n \stackrel{w}{\longrightarrow} 0$, y que x_n NO CONVERGE FUERTEMENTE a la función nula.

b) A propósito de lo anterior, demuestre que en un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita, la convergencia débil no es equivalente a la convergencia fuerte.

46. DEFINICIÓN. *Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X'$ un operador* NOLINEAL. *Se dice que T satisface la propiedad (S) si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$ tal que*

$$x_n \stackrel{w}{\longrightarrow} x \quad y \quad (T(x_n))\,(x_n - x) \,-\, (T(x))\,(x_n - x) \longrightarrow 0\ ,$$

se tiene $x_n \longrightarrow x$.

Sean H, Q, V espacios de Banach tales que $H \subseteq V$ y $\mathbf{i} : H \to V$ es compacta. Sea $X := H \times Q$, y considere una forma bilineal acotada $B : X \times X \to \mathbf{R}$ y un operador nolineal $A : H \to H'$ que satisfacen las siguientes propiedades

i) existe $C_0 > 0$ tal que

$$B((u,\lambda),(u,\lambda)) \;\geq\; C_0\,||\lambda|_Q^2 \quad \forall\,(u,\lambda) \in X\,.$$

ii) existen C_1, $C_2 > 0$ tal que para todo $u, v \in H$

$$(A(u))\,(u-v) \,-\, (A(v))\,(u-v) \;\geq\; C_1\,||u-v||_H^2 \,+\, R(u,v)\,,$$

donde

$$|R(u,v)| \;\leq\; C_2\,\{\,1 \,+\, ||u||_H \,+\, ||v||_H\,\}\,||u-v||_V\ .$$

Demuestre que el operador nolineal $T : X \to X'$ definido por

$$(T(u,\lambda))\,(v,\mu) \;:=\; (A(u))\,(v) \,+\, B((u,\lambda),(v,\mu))\ ,$$

satisface la propiedad (S).

47. **a)** Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $N(T) = \{\,0\,\}$ y $R(T) = Y$. Demuestre que X es reflexivo (separable) si y sólo si Y es reflexivo (separable).

b) Sean X, Y espacios de Banach separables. Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también es separable.

c) Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^N$ y $p \in \mathbf{R}$, $2 \leq p < \infty$, se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R} :\ f \text{ medible y } ||f||_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_\Omega |f|^p\,dx \right\}^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Puede probarse que $(L^p(\Omega), ||\cdot||_{L^p(\Omega)})$ es un espacio de Banach separable. Por otra parte, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está dado por

$$W^{1,p}(\Omega) \;:=\; \Big\{ u \,\in\, L^p(\Omega) : \quad \text{existe } g_i \,\in\, L^p(\Omega)\ , i = \overline{1,N} \text{ tal que}$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx \,=\, -\int_\Omega g_i \phi\, dx \qquad \forall\, \phi \,\in\, C_0^\infty(\Omega) \Big\}$$

En tal caso se escribe $\frac{\partial u}{\partial x_i} \,=\, g_i$, y se define la norma

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \,:=\, ||u||_{L^p(\Omega)} \,+\, \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} .$$

Puede probarse que $(\, W^{1,p}(\Omega), ||\cdot||_{W^{1,p}(\Omega)}\,)$ también es Banach. Demuestre que $W^{1,p}(\Omega)$ es separable.

48. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \,\in\, \mathcal{L}(X,Y)$. Se dice que T es DÉBILMENTE COMPACTO si para toda sucesión acotada $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ de X existe una subsucesión $\{\, x_n^{(1)} \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ tal que $\{\, T x_n^{(1)} \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge débilmente en Y. Pruebe que si X o Y es *reflexivo*, entonces todo operador $T \,\in\, \mathcal{L}(X,Y)$ es débilmente compacto.

49. Sean $a,\, b \,\in\, \mathbf{R}$ tal que $-\infty < a < b < +\infty$. Asuma que $C[a,b]$ es separable, y demuestre que para todo entero no negativo k, $C^k[a,b]$ también es separable.

50. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ. Considere el problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} \,=\, g \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega u\, dx \,=\, a_1\,, \tag{6}$$

donde $a_1 \,\in\, \mathbf{R}$, $f \,\in\, L^2(\Omega)$, y $g \,\in\, L^2(\Gamma)$ satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_\Omega f\, dx \,+\, \int_\Gamma g\, ds \,=\, 0\,.$$

Demuestre que una formulación débil de (6) consiste en: *Hallar* $(u,\lambda) \,\in\, H^1(\Omega)\times \mathbf{R}$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx \,+\, \lambda \int_\Omega v\, dx \,=\, \int_\Omega f v\, dx \,+\, \int_\Gamma g v\, ds\ ,$$

$$\mu \int_\Omega u\, dx \,=\, \mu a_1\,,$$

para todo $(v,\mu) \,\in\, H^1(\Omega)\times \mathbf{R}$. Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene única solución, la cual depende continuamente de los datos.

51. **a)** Sea X un espacio de Banach, y considere una sucesión $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}} \,\subseteq\, X$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Demuestre que $||x|| \,\leq\, \liminf\, ||x_n||$.

    b) Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, y sea $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\limsup\, ||x_n|| \,\leq\, ||x||$. Pruebe que $x_n \to x$.

52. Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : X \to Y$ un operador compacto. Demuestre que $\mathcal{R}(T)$ es separable.

    IND.: Escriba $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in X : \quad ||x|| \leq n \}$, y luego use que todo subconjunto relativamente compacto de un espacio métrico es separable.

53. Un importante resultado establece que *todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo*. En lo que sigue suponga que Ω es un abierto de $\mathbf{R}^n$ y que $p \in \mathbf{R}$ es tal que $p \geq 2$.

    a) A partir del hecho que $\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2} \; \forall \, \alpha, \beta \geq 0$, demuestre la desigualdad de *Clarkson*:

    $$\left|\left| \frac{f+g}{2} \right|\right|_{L^p(\Omega)}^p + \left|\left| \frac{f-g}{2} \right|\right|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2} \left\{ ||f||_{L^p(\Omega)}^p + ||g||_{L^p(\Omega)}^p \right\} \quad \forall \, f, g \in L^p(\Omega).$$

    b) Utilice la desigualdad anterior para probar que $L^p(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$, es uniformemente convexo y por lo tanto reflexivo. Además, deduzca que $W^{1,p}(\Omega)$ también es reflexivo.

54. Sea V un espacio de Hilbert y $a : V \times V \times V \to \mathbf{R}$ una forma trilineal tal que para todo $w \in V$, la forma bilineal $a(w; \cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbf{R}$ es acotada. Dado $F \in V'$, considere el problema: *Hallar $u \in V$ tal que*

    $$a(u; u, v) = F(v) \qquad \forall \, v \in V\,. \tag{7}$$

    Suponga que existe $\alpha > 0$ tal que

    $$a(w; v, v) \geq \alpha \, ||v||_V^2 \qquad \forall \, v, w \in V\,.$$

    Asuma además que existe una constante $C_0 > 0$ tal que para todo w_1, w_2, u, $v \in V$,

    $$|a(w_1; u, v) - a(w_2; u, v)| \leq C_0 \, ||w_1 + w_2||_V \, ||u||_V \, ||v||_V \, ||w_1 - w_2||_V\,.$$

    Encuentre una constante positiva C_1 tal que para todo $F \in V'$, $||\, F \,||_{V'} \leq C_1$, el problema (7) admite una única solución.

55. **a)** El TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER establece que: *Dado un subconjunto S compacto, convexo, y no vacío de un espacio vectorial de dimensión finita, y una aplicación continua T de S en S, entonces T tiene al menos un punto fijo.* Use este resultado de Brouwer para demostrar que si X es un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $|| \cdot ||$, y si F es una aplicación continua de X en X tal que, para algún $\mu > 0$, $\langle F(u), u \rangle \geq 0 \quad \forall \, u \in X$ con $||u|| = \mu$, entonces existe $u_0 \in X$, $||u_0|| \leq \mu$, tal que $F(u_0) = 0$.

b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. El problema de Navier-Stokes, un problema de suma importancia en mecánica de fluídos, consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$-\Delta \mathbf{u} + \sum_{j=1}^{2} u_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \tag{8}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\,dx = 0\,.$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$, y

$$Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\,dx = 0 \right\}.$$

Demuestre que la formulación débil de (8) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned} \tag{9}$$

donde $a : H \times H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$, y $f \in H'$, están definidas por

$$a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\,dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i\,dx\,,$$

$$b(\mathbf{v}, p) := -\int_\Omega p\,\nabla \cdot \mathbf{v}\,dx \quad , \quad f(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\,dx\,.$$

c) En lo que sigue considere un problema del tipo (9), no necesariamente proveniente de (8), y asuma que las siguientes hipótesis se cumplen: b es una forma bilineal acotada, b satisface la condición de Babuska-Brezzi continua, y para cada $\mathbf{w} \in H$ la aplicación $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es también una forma bilineal acotada. Sea $V := \{\mathbf{v} \in H : \quad b(\mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall\, q \in Q\}$. Demuestre que (9) puede reducirse, equivalentemente, al siguiente problema no-lineal: *hallar* $\mathbf{u} \in V$ *tal que*

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in V\,. \tag{10}$$

d) Además de lo dicho en **c)**, suponga ahora que: existe una constante $\alpha > 0$ tal que $a(\mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha\,||\mathbf{v}||^2$ para todo $\mathbf{v} \in V$; V es separable y para cada $\mathbf{v} \in V$, la aplicación $\mathbf{u} \to a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es *secuencialmente débilmente continua*, es decir

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u} \in V \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} a(\mathbf{u}_n; \mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v})\,.$$

Demuestre que el problema (10) tiene al menos una solución $\mathbf{u} \in V$.

IND.: Muestre primero que existe una sucesión $\{ \mathbf{v}_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ en V tal que para todo $m \geq 1$ el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m\}$ es linealmente independiente, y las combinaciones lineales finitas de los $\mathbf{v}_n$ constituyen un conjunto denso en V. Luego, denote por V_m al subespacio de V generado por $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m\}$, y aplique el método de Galerkin en conjunto con lo probado en parte **a)** para construir una sucesión de soluciones aproximantes.

56. Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$ y $p \in [1, +\infty)$, se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R} : \quad f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^p \, dx \, < \, +\infty \right\} .$$

Puede probarse que $L^p(\Omega)$, provisto de la norma $||f||_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_\Omega |f|^p \, dx \right\}^{1/p}$ es un espacio de Banach. Además, dados $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega |f \, g| \, dx \, \leq \, ||f||_{L^p(\Omega)} \, ||g||_{L^q(\Omega)} \, .$$

Ahora, para un multíndice $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, y una función diferenciable u, se denota $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ y $\partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Con estas notaciones, dado $m \in \mathbf{N}$ se define el ESPACIO DE SOBOLEV de orden (m, p), como

$$W^{m,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega) : \quad \forall \, \alpha, \, |\alpha| \leq m \quad \text{existe } g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ , tal que}$$

$$\int_\Omega u \, \partial^\alpha \varphi \, dx \, = \, (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \, \varphi \, dx \qquad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Big\}$$

En tal caso se escribe $\partial^\alpha u = g_\alpha$, y se define la norma

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha u||_{L^p(\Omega)}^p \right\}^{1/p} .$$

Demuestre que $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

57. Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se define el operador adjunto de Hilbert de A, y se denota A^*, como $A^* : Y \to X$, donde para cada $y \in Y$, $A^* y \in X$ es el único elemento (dado por TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ) tal que $\langle Ax, y \rangle_Y = \langle x, A^* y \rangle_X \quad \forall \, x \in X$.

   a) Pruebe que $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$, $||A^*|| = ||A||$ y que $(A^*)^* = A$.

   b) Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.

   c) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\inf_{z \in N(A)} ||x - z|| \leq \beta \, ||Ax|| \quad \forall \, x \in X$, y demuestre que $R(A) = N(A^*)^\perp$.

   d) Pruebe que $A^* = R_X \, A' \, R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \to X$ y $R_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^o N(A') = N(A^*)^\perp$.

58. Sea X un espacio vectorial normado.

   a) Sea Y un subespacio no denso de X. Demuestre que existe un funcional no nulo $F \in X'$ tal que $F(x) = 0$ para todo $x \in Y$.

   b) Sean $x_0, x_1 \in X$ tal que $x_0 \neq x_1$. Pruebe que existe una sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X'$ tal que $||F_n|| = ||x_0 - x_1||^n$ y $F_n(x_1) = F_n(x_0) + ||x_1 - x_0||^{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

59. Sea X un espacio de Hilbert con aplicación de Riesz $R_X : X' \to X$, y sean S, T, subconjuntos de X y X', respectivamente. Establezca qué relaciones existen entre S^o y $S^\perp$, y entre ${}^oT$ y $R_X(T)$.

60. Sean U un espacio vectorial normado y V un espacio de Banach. Además, sea $P : U' \to \mathcal{L}(U, V)$ un operador lineal cerrado tal que $N(P)$ es el funcional nulo sobre U y $R(P) = \mathcal{L}(U, V)$. Demuestre que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha\,||F||_{U'} \;\leq\; ||P(F)||_{\mathcal{L}(U,V)} \quad \forall\, F \,\in\, \mathcal{D}(P)\,.$$

61. Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall\, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

   Ind.: Hacer una demostración alternativa utilizando el Teorema del Grafo Cerrado en vez del Teorema de Banach-Steinhaus.

62. Sean H, Q, V y W espacios de Hilbert tales que $H \overset{c}{\hookrightarrow} V$ and $Q \overset{c}{\hookrightarrow} W$. Sean $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ formas bilineales acotadas y defina

$$B : (H \times Q) \times (H \times Q) \to \mathbf{R}$$

$$B((u,\lambda),(v,\mu)) := a(u,v) + b(v,\lambda) + b(u,\mu) \quad \forall\,(u,\lambda),\,(v,\mu) \in H \times Q\,.$$

   Suponga que existe una forma bilineal acotada $a_0 : H \times V \to \mathbf{R}$ tal que $\tilde{a} := a + a_0$ es $H-$elíptica; es decir, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\tilde{a}(v,v) \;\geq\; \alpha\,||v||_H^2 \quad \forall\, v \in H\,.$$

   También, asuma que existen una forma bilineal acotada $b_0 : V \times W \to \mathbf{R}$ y una constante $\beta > 0$ tales que $\tilde{b} := b + b_0$ verifica

$$\sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{\tilde{b}(v,\lambda)}{||v||_H} \geq \beta||\lambda||_Q \quad \forall\,\lambda \in Q\,.$$

   Demuestre que B satisface la Desigualdad de Gårding Generalizada.

63. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y sea $J : V \to \mathbf{R}$ un funcional nolineal. Se dice que J admite una derivada direccional en $v \in V$, en la dirección $\varphi \in V$, si la expresión $\frac{J(v+\epsilon\varphi)-J(v)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $DJ(v,\varphi)$. Entonces, J se dice diferenciable en el sentido de Gateaux (o G-diferenciable) en $v \in V$, si $DJ(v,\varphi)$ existe para todo $\varphi \in V$.

Ahora, si J es G-diferenciable en $v \in V$ y si $DJ(v,\cdot) \in V'$, se concluye, por el Teorema de Representación de Riesz, que existe un único elemento $z \in V$ tal que $DJ(v,\varphi) = \langle z, \varphi \rangle \ \forall\, \varphi \in V$. En tal caso, se denota $z := J'(v)$ y se llama el GRADIENTE de J en v.

Se dice que J tiene segunda diferencial en el sentido de Gateaux en $v \in V$, en las direcciones φ y $\psi \in V$, si la expresión $\frac{DJ(v+\epsilon\psi,\varphi) - DJ(v,\varphi)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $D^2J(v,\varphi,\psi)$.

a) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ y considere $V := L^2(\Omega)$. Defina $J_0 : V \to \mathbf{R}$ por

$$J_0(v) := \int_\Omega (v^2 + v)\, dx \quad \forall\, v \in V$$

y calcule $J_0'(v)$ para todo $v \in V$. Qué puede decir de $J_0'(v)$ si J_0 se restringe al espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$?

b) Suponga que J es G-diferenciable en $(v + \alpha\varphi)$, en la dirección φ, para todo $\alpha \in [0,1]$. Demuestre que existe $\beta \in (0,1)$ tal que

$$J(v+\varphi) \;=\; J(v) \;+\; DJ(v + \beta\,\varphi, \varphi)\,.$$

c) Suponga que J es α-convexo, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que para todo u, $v \in V$ y para todo $\beta \in [0,1]$:

$$J((1-\beta)\,u + \beta\,v) \;\leq\; (1-\beta)\,J(u) \;+\; \beta\,J(v) \;-\; \frac{\alpha}{2}\,\beta\,(1-\beta)\,||u-v||^2\,.$$

Además, asuma que J es G-diferenciable en todo $v \in V$. Demuestre que para todo u, $v \in V$ se tiene:

$$DJ(u, u-v) \;-\; DJ(v, u-v) \;\geq\; \alpha\,||u-v||^2$$

y

$$J(v) \;\geq\; J(u) \;+\; DJ(u, v-u) \;+\; \frac{\alpha}{2}\,||v-u||^2\,.$$

d) Suponga que J es G-diferenciable en $v \in V$ y que, dada una dirección $\varphi \in V$, $D^2J(v + \alpha\varphi, \varphi, \varphi)$ existe $\forall\, \alpha \in [0,1]$. Demuestre que hay una constante $\beta \in (0,1)$ tal que

$$J(v+\varphi) \;=\; J(v) + DJ(v,\varphi) + \frac{1}{2}\,D^2J(v + \beta\varphi, \varphi, \varphi)\,.$$

64. Sea $(H, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle)$ un espacio de Hilbert y sea V un subespacio cerrado de H. El anulador (o aniquilador) de V se denota por V^o y se define como

$$V^o := \{\, F \in H' : \quad F(x) = 0 \quad \forall\, x \in V \,\}\,.$$

Demuestre que

$$H \;=\; V \,\oplus \mathcal{R}(V^o)\,,$$

donde $\mathcal{R} : H' \to H$ denota la aplicación de Riesz.

65. Sea X un espacio vectorial normado y sea $x_0 \in X$ tal que $|\,F(x_0)\,| \le C_0$ para todo $F \in X'$ con $||F||_{X'} = 1$. Demuestre que $||x_0|| \le C_0$.

66. Sea H un espacio de Hilbert y sea $B : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

    i) B es simétrica, es decir

$$B(u,v) \,=\, B(v,u) \quad \forall\,(u,v) \in H \times H\,.$$

    ii) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u,v)| \le C_1 ||u||_H ||v||_H \quad \forall\,(u,v) \in H \times H.$$

    iii) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\underset{\substack{v \in H \\ v \neq 0}}{sup} \frac{|B(u,v)|}{||v||_H} \ge C_2\, ||u||_H \quad \forall\, u \in H\,.$$

    Demuestre que, dado $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que $B(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H$, y además, $||u||_H \le \frac{1}{C_2} ||F||_{H'}$.

67. Sea V un subespacio de un Hilbert $(Y, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle)$ y defina

$$V^{\perp} := \{y \in Y : \quad \langle y, z\rangle = 0 \quad \forall\, z \in V\}\,.$$

    Si $\overline{V}$ denota la clausura de V, demuestre que $\overline{V}^{\perp} = V^{\perp}$. Concluya que V es denso en Y sí y sólo sí $V^{\perp} = \{0\}$.

68. Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}^n$. Asuma que la inyección $i\,:\, H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i\,:\, H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también es compacta, para todo entero $m \ge 2$.

69. Sean X y M espacios de Hilbert y sean $a\,:\, X \times X \to \mathbf{R}$, $b\,:\, X \times M \to \mathbf{R}$ dos formas bilineales acotadas. Suponga además que a es simétrica y semi-definida positiva sobre X. Dados $F \in X'$, $G \in M'$ se define el operador $\mathcal{J}\,:\, X \times M \to \mathbf{R}$,

$$\mathcal{J}(v,\mu) \,:=\, \frac{1}{2}\, a(v,v) \,+\, b(v,\mu) \,-\, F(v) \,-\, G(\mu)\,.$$

    Considere entonces los siguientes problemas variacionales:

    Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(u,v) \,+\, b(v,\lambda) \,=&\quad F(v) \quad \forall\, v \,\in\, X\,, \\ b(u,\mu) \,=&\quad G(\mu) \quad \forall\, \mu \,\in\, M\,. \end{aligned} \tag{11}$$

    Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\mathcal{J}(u,\mu) \,\le\, \mathcal{J}(u,\lambda) \,\le\, \mathcal{J}(v,\lambda) \qquad \forall\,(v,\mu) \,\in\, X \times M\,. \tag{12}$$

    Demuestre que (u,λ) es solución de (11) si y sólo si (u,λ) es solución de (12).

70. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X,X)$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$

y que existen constantes α, $\beta > 0$ tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x\rangle_X \;\geq\; \alpha\,||x||_X^2 \qquad \forall\, x \in X$$

y

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $||\mathbf{P}||$, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \;\leq\; C\;\{\, ||f|| + ||g||\,\}\,.$$

IND.: Transforme a una ecuación equivalente en Y y luego aplique el Lema de Lax-Milgram.

71. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \to X$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$

que $\mathbf{P}$ es NOLINEAL, y que existen constantes M, α, $\beta > 0$ tales que

$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \;\leq\; M\,||x-\bar{x}||_X \quad,\quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x-\bar{x}\rangle_X \;\geq\; \alpha\,||x-\bar{x}||_X^2 \quad \forall\, x,\,\bar{x} \in X\,,$$

y

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de M, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \;\leq\; C\;\{\, ||f|| + ||g|| + ||\mathbf{P}(0)||\,\}\,.$$

72. Sea $\Omega := (0,3)$ y considere el problema de valores de contorno: $-u'' + (x+1)\,u = x$ en Ω, $u(0) = u(3) = 0$. Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio

$$H_2 := \{\, v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \quad \text{y} \quad v\,|_{[x_j, x_{j-1}]} \text{ es un polinomio de grado } \leq 1\,, \forall\, j \in \{1,2,3\}\,\}\,.$$

IND.: Notar que $H_2 = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$, donde $e_j \in H_2$ es tal que $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo i, $j \in \{1,2\}$.

73. **a)** Sea S un subconjunto de un Hilbert H y sea M el subespacio cerrado generado por S. Pruebe que $S^\perp$ es un subespacio cerrado de H, $M^\perp = S^\perp$, y $M = (S^\perp)^\perp$.

b) Sea V un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $H = \overline{V} \oplus V^\perp$.

74. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. EL PROBLEMA DE STOKES consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$\begin{aligned} -\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\,dx = 0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q\,dx = 0 \right\}$. Demuestre que la formulación débil de (13) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{v},p) &= F(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H\,, \\ B(\mathbf{u},q) &= 0 \quad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \to \mathbf{R}$, $B : H \times Q \to \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\,dx\,,$$

$$B(\mathbf{v},p) := -\int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v}\,dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,dx\,.$$

75. **a)** Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de HILBERT. Dados $n \in \mathbf{N}$, $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq H$ y $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subseteq H'$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} F_j(u)\,p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H,H)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A^* : H \to H$.

b) Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el espacio de HILBERT $L^2(0,1)$ provisto del producto escalar

$$\langle u, v\rangle := \int_0^1 u(t)\,v(t)\,dt \qquad \forall\, u\,,\ v \in H\,.$$

Dados los polinomios $p_j \in H$, $j \in \{1, ..., n\}$, con $p_j(t) = t^j\ \forall\, t \in (0,1)$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\,p_j(t)\,dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que A es lineal, acotado y AUTOADJUNTO, esto es $A \in \mathcal{L}(H, H)$ y $A = A^*$.

76. Sean X e Y espacios de Banach, y sea $A : X \to Y$ un operador lineal cerrado con dominio $D(A)$ e imagen $R(A)$. Demuestre que son equivalentes:

a) El operador A es inyectivo, y A^{-1} es acotado sobre $R(A)$.

b) Existe una constante positiva C tal que $\|Ax\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in D(A)$.

c) $R(A)$ es cerrado en Y, y A es inyectivo.

77. Sea M un subespacio cerrado de un Hilbert H. Por el Teorema de Proyección, cada $x \in H$ puede escribirse únicamente en la forma $x = y + z$, con $y \in M$ y $z \in M^{\perp}$. El punto $y \in M$ se llama la PROYECCIÓN de x en M, y el operador $P := X \to M, \quad Px = y$, se llama la proyección sobre M. También se denota $P := P_M$ y se dice que P es una proyección.

i) Pruebe que si P es una proyección, entonces P es autoadjunto, $P^2 = P$, y $\|P\| = 1$ si $P \neq 0$.

ii) Pruebe que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es autoadjunto y $P^2 = P$, entonces P es una proyección sobre algún subespacio cerrado de H.

78. **a)** Sea S un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $S^{\perp} = \bar{S}^{\perp}$.

b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Encuentre y caracterice el subespacio V de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus V$.

79. Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbf{R}$ tal que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente elíptica. Esto significa que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha}\,\|v_n\|_H^2$ $\forall\, v_n \in H_n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u, v) \;=\; F(v) \qquad \forall\, v \in H$$

y

$$A_n(u_n, v_n) \;=\; F(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$\|u - u_n\|_H \;\le\; C \inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H \;+\; \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|A(v_n, w_n) - A_n(v_n, w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}.$$

80. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbf{R}$ una función continua para la cual existen constantes M, $\beta > 0$, tales que $\beta \le \kappa(x) \;\le\; M$ para todo $x \in \Omega$. Defina el conjunto

$$S \;:=\; \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \;\le\; 1 \right\},$$

y demuestre que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ existe un único $g \in S$ tal que

$$\int_\Omega \kappa(x)\, \|\nabla u(x) - \nabla g(x)\|^2_{\mathbf{R}^n}\, dx \;=\; \min_{v \in S} \int_\Omega \kappa(x)\, \|\nabla u(x) - \nabla v(x)\|^2_{\mathbf{R}^n}\, dx\,.$$

81. Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ y $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

a) Demuestre que $\displaystyle \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \;=\; \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \;\ge\; \beta\, \|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$, y pruebe que $\quad H \;=\; R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

82. Sean X, Y espacios de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\mathcal{R}(A) = Y$, y sea $V = N(A)$. Dado el operador de proyección ortogonal $P : X \to V$, considere $B : Y \to X$ tal que $B(y) = x - P(x)$ para todo $y \in Y$, donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$.

a) Demuestre que B está bien definido y que B es una biyección lineal y acotada de Y en $V^\perp$. Pruebe, además, que B es un *inverso a derecha* de A, esto es $AB(y) = y$ para todo $y \in Y$.

b) Defina $A_0 : V^\perp \to Y$ como $A_0(x) = A(x)$ para todo $x \in V^\perp$, es decir $A_0 = A|_{V^\perp}$, y pruebe que $A_0^{-1} = B$.

c) Extienda los resultados anteriores al caso en que $\mathcal{R}(A)$ es un subespacio CERRADO propio de Y.

83. (Lema de Aubin-Nitsche). Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y el operador identidad $\mathbf{i} : V \to H$ es continuo. Sea $A : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y V-elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \to V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface

$$A(v, \mathbf{P}(g)) \,=\, \langle g, v\rangle_H \quad \forall\, v \in V\,.$$

Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V, denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in V\,,$$

y

$$A(u_h, v_h) \,=\, F(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$||u - u_h||_H \,\leq\, C\, ||u - u_h||_V \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{v_h \in V_h} ||\mathbf{P}(g) - v_h||_V \right\}.$$

84. Dados $\Omega := (0,1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$-\,u'' \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) \,=\, 0\,, \quad u'(1) \,=\, 1\,. \tag{14}$$

a) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional mixta de (14) se reduce a: *Hallar* $(\sigma, (u, \varphi)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, (u, \varphi)) \,&=\, F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma, (v, \psi)) \,&=\, G((v, \psi)) \quad \forall\, (v, \psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{15}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) &:= \int_\Omega \sigma\, \tau\, dx \qquad \forall\, \sigma,\, \tau \in H\,, \\ b(\tau, (v, \psi)) &:= \int_\Omega v\, \tau'\, dx \,+\, \psi\, \tau(1) \quad \forall\, (\tau, (v, \psi)) \in H \times Q\,. \end{aligned}$$

b) Defina los funcionales F y G, y aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (15) tiene una única solución.

85. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert complejo, y sean $u\,,\ v \in H$, $u \neq v$, tales que $\|u\| \,=\, \|v\|$. Defina $w := u - v$ y considere la proyección ortogonal $\mathbf{P} : H \to S^\perp$, donde S es el subespacio generado por w. Demuestre que

$$\mathbf{P}(u) \,=\, \mathbf{P}(v) \,=\, \frac{u+v}{2} \,+\, \left\{ \frac{\mathbf{i}\, \mathrm{Im}(\langle u, v\rangle)}{\|w\|^2} \right\} w\,.$$

Qué sucede cuando H es un Hilbert real ? Interprete gráficamente.

86. Sean $\Omega =]a,b[$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno

$$u^{(4)} \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) \,=\, 0\,. \tag{16}$$

i) Defina la incógnita auxiliar $\sigma := u''$ en Ω y demuestre que una formulación variacional MIXTA de (16) se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx \,+\, \int_\Omega u'\,\tau'\,dx \,&=\, 0 \qquad \forall\,\tau \in H^1(\Omega)\,, \\ \int_\Omega v'\,\sigma'\,dx \,&=\, -\int_\Omega f\,v\,dx \qquad \forall\,v \in H_0^1(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

ii) Aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (17) tiene una única solución que depende continuamente del dato f.

87. (LEMA DE FORTIN). Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} \,\geq\, \beta\,\|q\|_Q \qquad \forall\,q \in Q\,. \tag{18}$$

Sean $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ tal que

$$b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) \,=\, 0 \qquad \forall\,q_n \in Q_n\,.$$

Suponga que la familia de operadores $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H,H_n)} \,\leq\, C$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de n, tal que

$$\sup_{\substack{v_n\in H_n\\ v_n\neq 0}} \frac{b(v_n,q_n)}{\|v_n\|_H} \,\geq\, \beta^*\,\|q_n\|_Q \qquad \forall\,q_n \in Q_n\,, \quad \forall\,n \in \mathbf{N}\,.$$

88. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i$ $\forall\,i \in \{1, ..., n\}$, $\forall\,x := (x_1, ..., x_n)^{\mathbf{T}} \in \Omega$.

a) (DESIGUALDAD DE POINCARÉ GENERALIZADA). Defina la aplicación

$$|||v||| \,:=\, \left\{ |v|^2_{H^2(\Omega)} \,+\, \sum_{i=0}^{n} |\,\langle v, p_i\rangle_{H^2(\Omega)}\,|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\,v \in H^2(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\, |||v||| \;\leq\; \|v\|_{H^2(\Omega)} \;\leq\; C_2\, |||v||| \quad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,.$$

IND.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que $\forall\, n \in \mathbf{N}$ existe $v_n \in H^2(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} > n\, |||v_n|||$. Luego, defina $w_n := \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}}$, observe que $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$, note que $|||w_n||| < \frac{1}{n}$, y aplique el hecho que la inclusión de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ es compacta.

b) (LEMA DE DENY-LIONS). Considere el espacio cuociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma $\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \inf\limits_{p\in P_1(\Omega)} \|v - p\|_{H^2(\Omega)}$, y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \;:=\; |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

Demuestre que $|\cdot|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \;\leq\; \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$$

$$\leq\; C\; |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \,\in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

IND.: Note que para todo $p \in P_1(\Omega)$ y para todo α con $|\alpha| = 2$ se tiene $\partial^\alpha p = 0$. Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.

c) (LEMA DE BRAMBLE-HILBERT). Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p\ \forall\, p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \;\leq\; C\, |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \,\in\, H^2(\Omega)\,.$$

IND.: Note que $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v - p)\ \forall\, p \in P_1(\Omega)$, y luego aplique el Lema de Deny-Lions.

89. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ y sea $\mathcal{T} := \{T_1, T_2, ..., T_N\}$ una triangularización de Ω, es decir:

i) $\bar{T}_j$ es un triángulo con interior no-vacío $\quad \forall\, j \in \{1, ..., N\}$,

ii) $T_i \cap T_j \,=\, \phi \quad \forall\, i \neq j$, y

iii) $\bar{\Omega} \,=\, \cup\,\{\, \bar{T}_j : \quad j \in \{1, ..., N\}\,\}$.

a) Defina el subespacio de $[L^2(\Omega)]^2$

$$H \;:=\; \{\, \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \,\in\, L^2(T_j) \quad \forall\, j \,\in\, \{1, ..., N\}\,\}\,,$$

provisto de la norma

$$\|\boldsymbol{\tau}\| \;:=\; \left\{\, \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \;+\; \sum_{j=1}^{N} \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{L^2(T_j)} \right\}^{1/2} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,$$

y demuestre que $(H, \|\cdot\|)$ es un espacio de Hilbert real.
IND.: note que la pertenencia local $\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j)$ está dada en el sentido distribucional, lo cual significa que existe $z_j \in L^2(T_j)$ tal que

$$- \int_{T_j} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx \;=\; \int_{T_j} z_j \, \varphi \, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(T_j)\,.$$

En este caso se escribe $z_j = \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})$ en T_j (distribucionalmente).

b) Pruebe que existe un único $\boldsymbol{\sigma} \in H$ tal que $\|\boldsymbol{\sigma}\| \,\le\, |\Omega|^{1/2}$ y

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx \,+\, \sum_{j=1}^{N} \int_{T_j} (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \,-\, 1) \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx \;=\; 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,.$$

90. Sea $\Omega \,:=\, (0,1)\times(0,1) \,\subseteq\, \mathbf{R}^2$ y considere el espacio de Hilbert $(H(\operatorname{div};\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde

$$H(\operatorname{div};\Omega) \;:=\; \{\, \boldsymbol{\tau} \,\in\, [L^2(\Omega)]^2 : \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \,\in\, L^2(\Omega) \,\}$$

y

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle \;:=\; \int_\Omega \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx \,+\, \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\zeta}) \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx \qquad \forall\, \boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\tau} \,\in\, H(\operatorname{div};\Omega)\,.$$

Además, sea S el subespacio de $H(\operatorname{div};\Omega)$ dado por

$$S := \{\boldsymbol{\tau} : \; \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma\, x_1, \beta + \gamma\, x_2) \;\forall\, x := (x_1, x_2) \,\in\, \Omega;\; \text{con } \alpha,\, \beta,\, \gamma \,\in\, \mathbf{R}\,\}\,,$$

y sea $\boldsymbol{\sigma} \in H(\operatorname{div};\Omega)$ definida por $\quad \boldsymbol{\sigma}(x) \,=\, (x_1 x_2, x_1 + x_2) \quad \forall\, x := (x_1, x_2) \,\in\, \Omega$. Aplique el teorema de caracterización respectivo y encuentre la mejor aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$ por elementos de S, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

91. Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere un funcional $F_n \in H_n'$ y una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbf{R}$. Suponga también que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \,\ge\, \tilde{\alpha}\, \|v_n\|_H^2 \quad \forall\, v_n \in H_n, \forall\, n \in \mathbf{N}$.

a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u,v) \;=\; F(v) \quad \forall\, v \in H \qquad \text{y} \qquad A_n(u_n, v_n) \;=\; F_n(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$\|u - u_n\|_H \,\le\, C \left(\inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H \,+\, \|\mathbf{A}(v_n) \circ \mathbf{i}_n \,-\, \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H_n'} \right\} \right. \\ \left. +\; \|F \circ \mathbf{i}_n \,-\, F_n\|_{H_n'} \right),$$

donde $\mathbf{A} : H \to H'$ y $\mathbf{A}_n : H_n \to H_n'$ son los operadores lineales y acotados inducidos por A y A_n, respectivamente, e $\mathbf{i}_n : H_n \to H$ es la inyección canónica, esto es $\mathbf{i}_n(v_n) = v_n \quad \forall\; v_n \,\in\, H_n$.

92. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $P \in \mathcal{L}(H,H)$, no trivial. Se dice que P es un PROYECTOR si satisface $P^2 = P$. En tal caso se dice que P es un PROYECTOR ORTOGONAL si además verifica que $\langle u, v\rangle = 0 \quad \forall\, u \in R(P), \quad \forall\, v \in N(P)$.

   a) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector entonces $H = N(P) \oplus R(P)$ y $\|P\| \geq 1$.

   b) Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

      i) P es un proyector ortogonal.
      ii) $R(P) = N(P)^{\perp}$.
      iii) P es autoadjunto

   c) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector ortogonal entonces $\|P\| = 1$.

93. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno: $\quad -\Delta\, u = f \;$ en $\; \Omega\,, \quad u = 0 \;$ en $\; \partial\Omega$. Se puede demostrar que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega u\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx - \int_\Omega v\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx \tag{19}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω representa una incógnita adicional. Además, a partir de esta relación, y dado $\delta \in \mathbf{R}$, se deduce que

$$\delta \int_\Omega (\nabla u - \boldsymbol{\sigma})\cdot(\nabla v + \boldsymbol{\tau})\, dx = 0 \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega), \tag{20}$$

y también

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx = -\int_\Omega f\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,. \tag{21}$$

De este modo, sumando (19), (20) y (21), se obtiene una formulación variacional mixta modificada, la cual tiene la forma: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) = F(\boldsymbol{\tau}, v) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H}\,, \tag{22}$$

donde $A : \mathbf{H}\times\mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es una forma bilineal y $F : \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es un funcional lineal.

Demuestre que, eligiendo δ convenientemente, el problema (22) tiene una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

IND.: La norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$, es decir existe $c > 0$ tal que

$$c\,\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq |v|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

94. Sean $n \in \mathbf{N}$ y $X := \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$, el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, provisto del producto escalar $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^t\, B)$ $\forall\, A,\, B \in X$.

   a) Demuestre que $X = X_{\mathtt{sim}} \oplus X_{\mathtt{asim}}$, donde

   $$X_{\mathtt{sim}} = \{\, A \in X : \quad A^t = A \,\} \quad \text{y} \quad X_{\mathtt{asim}} = \{\, A \in X : \quad A^t = -\, A \,\}\,.$$

   b) Sea $C := (c_{ij})_{n\times n} \in X$ tal que $\quad c_{ij} = 1 \;\; \forall\, i \geq j \;$ y $\quad c_{ij} = 0 \;\; \forall\, i < j$. Encuentre las mejores aproximaciones de C por matrices de $X_{\mathtt{sim}}$ y $X_{\mathtt{asim}}$, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

95. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H.

   a) Sea $y \in H$ y suponga que existe $\tilde{y} \in H$ tal que

   $$\langle A(x), y\rangle = \langle x, \tilde{y}\rangle \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\,.$$

   Demuestre que dicho $\tilde{y}$ es único.

   b) Considere el conjunto

   $$\mathcal{D}(\tilde{A}) := \{ y \in H : \text{ existe } \tilde{y} \in H \text{ tal que } \langle A(x), y\rangle = \langle x, \tilde{y}\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\}\,,$$

   y defina el operador $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \to H$ dado por $\tilde{A}(y) := \tilde{y} \quad \forall\, y \in H$. Demuestre que $\tilde{A}$ es lineal y cerrado.

96. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(H,H)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : H \to H$, y tal que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. El objetivo de este ejercicio es probar que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$, para cuyo efecto proceda como se indica:

   a) Sea S un subespacio de dimensión 2 de H y sea $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S,S)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : S \to S$, y tal que $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}$. Pruebe que $S = R(\mathbf{Q}) \oplus R(\mathbf{I} - \mathbf{Q})$ y concluya que existen vectores no nulos $p,\, q,\, r,\, s \in S$ que satisfacen $\langle p, q\rangle = \langle r, s\rangle = 1$, tales que

   $$\mathbf{Q}(v) = \langle q, v\rangle\, p \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) = \langle s, v\rangle\, r \qquad \forall\, v \in S\,.$$

   b) A partir de la identidad $\; v = \mathbf{Q}(v) + (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) \quad \forall\, v \in S$, deduzca que $\|p\|^2\, \|q\|^2 = \|r\|^2\, \|s\|^2 = 1 - \langle p, r\rangle\, \langle q, s\rangle$ y concluya así que

   $$\|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S,S)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S,S)}.$$

   c) Dado $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$, considere el subespacio S generado por los vectores x y $\mathbf{P}(x)$ y defina $\mathbf{Q} := \mathbf{P}|_S$. Demuestre que $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S,S)$, observe que la dimensión de S es ≤ 2, y luego pruebe, usando b), que $\|(\mathbf{I} - \mathbf{P})(x)\| \leq \|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

   d) Concluya, a partir de c), que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

97. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ.

a) Considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ con norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y semi-norma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$. Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|_{H^1(\Omega)}^2 + \left(\int_\Omega v\,dx \right)^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\,|||v||| \,\le\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \,\le\, C_2\,|||v||| \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

IND.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que $\forall\, k \in \mathbf{N}$ existe $v_k \in H^1(\Omega)$ tal que $\|v_k\|_{H^1(\Omega)} > k\,|||v_k|||$. Recuerde que la inclusión de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, y que si $w \in L^2(\Omega)$ es tal que $\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \quad \forall\, i \in \{1, ..., n\}$, entonces necesariamente w es constante en Ω.

b) Considere el problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \int_\Omega u\,dx \,=\, 0\,,$$

donde $f \,\in\, L^2(\Omega)$ es tal que $\displaystyle\int_\Omega f\,dx \,=\, 0$, y demuestre que su formulación débil se reduce a: Hallar $(u,\lambda) \,\in\, H^1(\Omega)\times\mathbf{R}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx \,+\, \lambda\int_\Omega v\,dx \,=\, \int_\Omega f v\,dx \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

$$\mu \int_\Omega u\,dx \,=\, 0 \qquad \forall\, \mu \in \mathbf{R}\,.$$

Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene solución única, la cual depende continuamente de f.

98. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ una base de un subespacio U de X.

a) Demuestre que existen $F_1, F_2, ..., F_n \,\in\, X'$ tales que $F_j(x_i) \,=\, \delta_{ij} \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\}$.

b) Pruebe que $X \,=\, U \,\oplus\, V$, donde $V \,:=\, {}^\circ\{F_1, F_2, ..., F_n\}$.

99. Dado $p \geq 1$, considere el espacio vectorial normado

$$\ell_p(\mathbb{C}) \,:=\, \Big\{\, \mathbf{x} \,:=\, \{x_n\}_{n\in N} : \quad x_n \in \mathbb{C} \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad \text{y} \quad \sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^p \,<\, +\infty \,\Big\}\,,$$

provisto de la suma y multiplicación por escalar usuales, y cuya norma está dada por $\quad \|\mathbf{x}\| \,:=\, \left\{ \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^p \right\}^{1/p}$. Demuestre que $\ell_p(\mathbb{C})$ es separable.

100. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $J : V \to \mathbf{R}$ un funcional NO-LINEAL. Se dice que J es CONTINUO (resp. DÉBILMENTE CONTINUO) si para toda sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq V$ tal que $v_n \to v \in V$ (resp. $v_n \overset{w}{\to} v \in V$) se tiene que

$$J(v_n) \;\to\; J(v) \;\in\; \mathbf{R}\,.$$

a) Determine cual de estos dos conceptos de continuidad implica al otro.

Un subconjunto U de V se dice DÉBILMENTE COMPACTO si toda sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de U posee una subsucesión débilmente convergente en U.

b) Pruebe que si U es un subconjunto compacto de V y $J : V \to \mathbf{R}$ es continuo (o bien si U es un subconjunto débilmente compacto de V y $J : V \to \mathbf{R}$ es débilmente continuo), entonces existe $u \in U$ tal que

$$J(u) \;=\; \min_{v\in U} J(v)\,.$$

Un subconjunto U de V se dice DÉBILMENTE CERRADO si el límite de toda sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de U que converge débilmente, pertenece a U.

c) Demuestre que si V es reflexivo, U es un subconjunto acotado y débilmente cerrado de V, y $J : V \to \mathbf{R}$ es débilmente continuo, entonces existe $u \in U$ tal que

$$J(u) \;=\; \min_{v\in U} J(v)\,.$$

101. (OPERADOR NORMAL). Sea H un Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Se dice que $A \in \mathcal{L}(H, H)$ es un operador normal si $A^* A \;=\; A\, A^*$. Pruebe en este caso que:

a) $\lambda \in VP(A)$ si y sólo si $\bar{\lambda} \in VP(A^*)$. Concluya además que $N(A - \lambda I) \;=\; N(A^* - \bar{\lambda} I)$.

b) Si $\lambda,\, \mu \,\in\, VP(A)$, $\lambda \neq \mu$, entonces $N(A - \lambda I) \;\perp\; N(A^* - \mu I)$.

102. (VALORES PROPIOS DE Δ). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Lipschitz-continua. Demuestre que existen una base Hilbertiana $\{\, e_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ de $L^2(\Omega)$, y una sucesión $\{\, \lambda_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ de números reales con $\lambda_n \;>\; 0$, y $\lambda_n \;\to\; +\infty$ cuando $n \;\to\; +\infty$, tales que $e_n \;\in\; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, y $-\,\Delta\, e_n \;=\; \lambda_n\, e_n$ en Ω. Se dice aquí que los λ_n son los valores propios del Laplaciano (con condición de Dirichlet), y que las e_n son las funciones propias asociadas.

103. (ESPECTRO AUTOADJUNTO). Sean H un Hilbert complejo y $A \;\in\; \mathcal{L}(H, H)$ un operador autoadjunto. Dado un subespacio cerrado S de H invariante con respecto a A, denote por $\sigma(A, S)$ y $\sigma(A, S^\perp)$ los espectros de las restricciones $A|_S$ y $A|_{S^\perp}$, respectivamente. Demuestre que $\sigma(A) \;=\; \sigma(A, S) \cup \sigma(A, S^\perp)$.

104. Sea $X := C([0,1])$ provisto de la norma uniforme

$$\|u\| := \max\{\,|u(t)| : \quad t \in [0,1]\,\} \qquad \forall\, u \in X\,,$$

y dado $f \in X$, fijo, defina el funcional lineal $F : X \to \mathbf{R}$ como

$$F(u) := \int_0^1 u(t)\, f(t)\, dt \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Demuestre que $F \in X'$ y $\|F\| = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt$.

INDICACIÓN: Para cada $n \in \mathbf{N}$ considere $x_n \in X$ dada por $x_n(t) := u_n(f(t))$ $\forall\, t \in [0,1]$, donde $u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es la función continua

$$u_n(t) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 1/n\,, \\ -1 & \text{si} \quad t \leq -1/n\,, \\ n\,t & \text{si} \quad -1/n \leq t \leq 1/n\,, \end{cases}$$

y luego use x_n para probar que $\quad \|F\| \geq \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt - \frac{1}{n}$.

105. Dados $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$, $b \neq \mathbf{0}$, defina el conjunto solución

$$S(A,b) := \{\, x \in \mathbf{R}^n : \quad A\,x = b\,\}\,.$$

Suponga que $S(A,b) \neq \phi$ y pruebe que existe $z \in \mathbf{R}^n$ tal que

$$\inf_{x\,\in\, S(A,b)} \langle z, x\rangle_{\mathbf{R}^n} > 0\,.$$

106. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert real y sea $A \in \mathcal{L}(H,H)$ el operador inducido por una forma bilineal y acotada $a : H \times H \to \mathbf{R}$. Además, sea Π la proyección ortogonal de H sobre un subespacio cerrado S, y suponga que existe $\alpha > 0$ tal que $\quad a(v,v) \geq \alpha\,\langle v, v\rangle \qquad \forall\, v \in S$. Demuestre que $\Pi A : S \to S$ es una biyección lineal.

107. Sean U, V y W subespacios de un espacio de Hilbert H. Pruebe que

a) $(U^\perp)^\perp = \bar{U}$.

b) $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$.

c) $\overline{V^\perp + W^\perp} = (\overline{V} \cap \overline{W})^\perp$.

108. Sea $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ una función continua y defina el operador integral $\mathbf{K} : C[0,1] \to C[0,1]$ por

$$\mathbf{K}(u)(t) := \int_0^1 K(t,s)\, u(s)\, ds \qquad \forall\, t \in [0,1]\,, \quad \forall\, u \in C[0,1]\,.$$

Aplique el Teorema de Arzelá - Ascoli para probar que $\mathbf{K}$ es compacto.

109. Este ejercicio debe resolverse sin aplicar el Teorema de Hahn-Banach, en ninguna de sus formas.

   i) Sea S un subespacio de un espacio vectorial normado X sobre $\mathbf{R}$ y sea $f \in S'$. Construya explícitamente un funcional lineal y acotado $g : \bar{S} \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $g(x) = f(x) \quad \forall\, x \in S$ y $\|g\|_{\bar{S}'} = \|f\|_S$.

   ii) Sea S un subespacio de un espacio de Hilbert X sobre $\mathbf{R}$ y sea $f \in S'$. Demuestre que existe $F \in X'$ tal que $F(x) = f(x) \quad \forall\, x \in S$ y $\|F\|_{X'} = \|f\|_S$.

110. Sea S un subespacio cerrado propio de un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ sobre el cuerpo $\mathbf{R}$. Aplique el TEOREMA DE HAHN-BANACH (SEGUNDA VERSIÓN GEOMÉTRICA) para demostrar que existe $F \in X'$ tal que $F \neq \Theta$ y $F(x) = 0$ para todo $x \in S$.

111. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sean $V_1, V_2, ..., V_N$ subespacios cerrados mutuamente ortogonales de H, esto es $v_i \perp v_j \ \forall\, v_i \in V_i, \ \forall\, v_j \in V_j, \ \forall\, i \neq j$. Demuestre que $\mathbf{I} - \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \cdots + \mathbb{P}_N$, donde $\mathbb{P} : H \longrightarrow V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp} \cap \cdots \cap V_N^{\perp}$ y $\mathbb{P}_j : H \longrightarrow V_j$ son los proyectores ortogonales respectivos.

112. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ y considere el espacio de Hilbert $V := [L^2(\Omega)]^{n \times n}$ sobre $\mathbf{R}$ con el producto escalar $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}$, donde

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} := \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}\, \tau_{ij} \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma} := (\sigma_{ij})_{n\times n}\,, \quad \boldsymbol{\tau} := (\tau_{ij})_{n\times n} \in V\,.$$

A su vez, defina el subespacio $U := \{\, \alpha\, \mathbb{A} + \beta\, \mathbb{B} : \quad \alpha\,, \beta \in \mathbf{R} \,\} = \langle\, \{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}\, \rangle$, donde $\mathbb{A} := (a_{ij})_{n\times n}$ y $\mathbb{B} := (b_{ij})_{n\times n}$ están definidos por

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = i-1 \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}\,.$$

Encuentre $U^{\perp}$ y defina explícitamente los proyectores ortogonales sobre U y $U^{\perp}$. Qué sucede con estos proyectores si U se reemplaza por $\langle\, \{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbf{I}\}\, \rangle$, donde $\mathbf{I}$ es el tensor identidad de V ?

113. Sean $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)_2$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ con normas inducidas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, respectivamente, y sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ tal que $\|T(x)\|_2 = \|x\|_1$ $\forall\, x \in H_1$. Demuestre que $\langle T(x), T(y)\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1 \quad \forall\, x,\, y \in H_1$.

   IND. Considere las expresiones nulas $\|T(x+y)\|^2 - \|x+y\|^2$ y $\|T(x+iy)\|^2 - \|x+iy\|^2$.

114. Sea $\ell_2(\mathbb{C}) := \left\{ \mathbf{u} := \{u_n\}_{n\in\mathbf{N}} : \ u_n \in \mathbb{C}, \ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \right\}$, provisto del producto escalar $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n\, \bar{v}_n \quad \forall\, \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in \ell_2(\mathbb{C})$. Demuestre que $(\ell_2(\mathbb{C}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es Hilbert sobre $\mathbb{C}$.

115. Dado Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, defina el operador $A : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ por $A(u) := \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_j \right\} v_j \quad \forall\, u \in H^1(\Omega)\,$, donde $\{u_1, u_2, ..., u_N\} \subseteq H^1(\Omega)$ y $\{v_1, v_2, ..., v_N\} \subseteq L^2(\Omega)$. Demuestre que A es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto A^*.

116. Sea $X := C[0,1]$ provisto de la norma uniforme, y sean $\{p_j\}_{j\in\mathbf{N}}$, $\{q_j\}_{j\in\mathbf{N}} \subseteq X$ tales que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} p_j(s)\, q_j(t)$ converge uniformemente a una funcion continua $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$, es decir

$$\lim_{N\to+\infty} \left\{ \max_{(s,t)\in[0,1]\times[0,1]} \left| K(s,t) \,-\, \sum_{j=1}^{N} p_j(s)\, q_j(t) \right| \right\} \,=\, 0\,.$$

A su vez, sea $F_j \in X'$ definido por $F_j(u) := \int_0^1 q_j(t)\, u(t)\, dt \quad \forall\, u \in X$. Pruebe que para todo $G \in X'$, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} G(p_j)\, F_j$ es convergente en X'. Identifique el valor del límite respectivo en términos del adjunto de un operador conveniente.

117. Dado Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, defina el operador $A : H^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ por $A(u) := \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \Delta u\, \Delta u_j \right\} v_j \quad \forall\, u \in H^2(\Omega)\,$, donde $\{u_1, u_2, ..., u_N\} \subseteq H^2(\Omega)$ y $\{v_1, v_2, ..., v_N\} \subseteq H^1(\Omega)$. Demuestre que A es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto A^*.

118. Sea Ω un dominio poligonal convexo de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ, y dado $f \in L^2(\Omega)$, considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:

$$\Delta u \,+\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{23}$$

i) Introduzca la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω y pruebe que una formulación variacional mixta de (23) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} \,-\, \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \,=\, -\int_\Omega f\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,. \tag{24}$$

ii) Defina el operador $P : H(\mathrm{div};\Omega) \to [L^2(\Omega)]^2$ que a cada $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ le asigna $P(\boldsymbol{\tau}) := \nabla z$, donde $z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ es la única solución del problema: $\Delta z = \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})$ en Ω, $z = 0$ en Γ. Pruebe que P es un proyector compacto, y concluya que

$$H(\mathrm{div};\Omega) = P(H(\mathrm{div};\Omega)) \oplus (I - P)(H(\mathrm{div};\Omega))\,.$$

iii) Utilice la descomposición anterior de $H(\text{div};\Omega)$ para demostrar que (24) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div};\Omega)$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) + K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) = F(\boldsymbol{\tau}) \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div};\Omega)\,, \tag{25}$$

donde

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) := -\int_\Omega P(\boldsymbol{\sigma})\cdot P(\boldsymbol{\tau}) - \int_\Omega \operatorname{div} P(\boldsymbol{\sigma}) \operatorname{div} P(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega (I-P)(\boldsymbol{\sigma})\cdot(I-P)(\boldsymbol{\tau})\,,$$

$$K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) := 2\int_\Omega P(\boldsymbol{\sigma})\cdot P(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega P(\boldsymbol{\sigma})\cdot(I-P)(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega (I-P)(\boldsymbol{\sigma})\cdot P(\boldsymbol{\tau})\,,$$

y F es el funcional definido por el lado derecho de (24).

iv) Sean $\mathbf{A} : H(\text{div};\Omega) \to H(\text{div};\Omega)$ y $\mathbf{K} : H(\text{div};\Omega) \to H(\text{div};\Omega)$ los operadores lineales y acotados asociados a las formas bilineales A y K, respectivamente. Demuestre que $\mathbf{A}$ es biyectivo y que $\mathbf{K}$ es compacto.

IND. Defina el operador $S(\boldsymbol{\tau}) := (I - 2\,P)(\boldsymbol{\tau})$ y considere la expresión $A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau}))$ para probar que A satisface la condición inf-sup continua.

119. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $A : H \to H$ un operador lineal tal que $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle \quad \forall\, x,\, y \in H$. Pruebe que A es acotado.

120. Sea X un espacio vectorial normado. Un subespacio W de X' se dice SATURADO si para todo $F \in X' - W$ existe $x \in {}^oW$ tal que $F(x) \neq 0$.

a) Pruebe que si X es reflexivo y W es un subespacio cerrado de X', entonces W es saturado.

b) Pruebe que un subespacio W de X' es saturado sí y sólo sí $W = ({}^oW)^o$.

Un subconjunto W de X' se dice DÉBILMENTE* CERRADO si el límite de toda sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de W que converge débilmente *, pertenece a W.

c) Pruebe que si un subespacio W de X' es saturado entonces él es débilmente* cerrado.

121. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $A \in \mathcal{L}(H,H)$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un VALOR PROPIO de A si existe $x \neq \theta$ tal que $Ax = \lambda\, x$.

a) Pruebe que $|\lambda| \leq \|A\|$.

b) Pruebe que si A es autoadjunto, entonces $\lambda \in \mathbf{R}$.

c) Pruebe que si A es autoadjunto, y $\mu \neq \lambda$ es otro valor propio de A, entonces $N(\lambda\mathbf{I} - A) \perp N(\mu\mathbf{I} - A)$.

122. a) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que K transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones convergentes de Y. Pruebe que K es compacto.

b) Sea X un espacio de Hilbert y sean $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$, $x \in X$, tales que $x_n \stackrel{w}{\to} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$. Pruebe que $x_n \to x$.

c) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador compacto. Aplique a) y b) para probar que $K^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ también es compacto.

123. Sean V y W subespacios cerrados de un Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, y sean $P : H \to V$ y $Q : H \to W$ los proyectores ortogonales respectivos. Demuestre que

$$\langle (Q-P)(x), x\rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in H \quad \text{si y sólo si} \quad V \subseteq W\,.$$

124. Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbf{R}$ y sea $\mathbf{a} : X \times X \to \mathbf{R}$ tal que

i) $\mathbf{a}(x,x) \geq 0 \quad \forall\, x \in X$.

ii) $\mathbf{a}(x,y) = \mathbf{a}(y,x) \quad \forall\, x,\, y \in X$.

iii) $\mathbf{a}(\alpha\, x + \beta\, z, y) = \alpha\,\mathbf{a}(x,y) + \beta\,\mathbf{a}(z,y) \quad \forall\,\alpha,\,\beta \in \mathbf{R}, \quad \forall\, x,\, y,\, z \in X$.

Pruebe que

$$|\,\mathbf{a}(x,y)\,| \leq \frac{\epsilon}{2}\,\mathbf{a}(x,x) + \frac{1}{2\,\epsilon}\,\mathbf{a}(y,y) \qquad \forall\, x,\, y \in X\,, \quad \forall\,\epsilon > 0\,.$$

125. Sea $\Omega :=]0,1[^2 \subseteq \mathbf{R}^2$ y considere el espacio de Hilbert $(H(\mathrm{rot};\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde

$$H(\mathrm{rot};\Omega) := \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}\, v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$\langle v, w\rangle := \int_\Omega v \cdot w\, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v\; \mathrm{rot}\, w\, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

Además, sea S el subespacio de $H(\mathrm{rot};\Omega)$ dado por

$$S := \{\boldsymbol{\tau} : \ \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma\, x_2, \beta - \gamma\, x_1)\ \forall\, x := (x_1, x_2) \in \Omega;\ \text{con } \alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbf{R}\}\,,$$

y sea $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ definida por $\boldsymbol{\sigma}(x) = (x_1, x_2) \ \ \forall\, x := (x_1,x_2) \in \Omega$. Encuentre $S^\perp$ y defina explícitamente los proyectores ortogonales sobre S y $S^\perp$. Además, encuentre la mejor aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$ por elementos de $S^\perp$, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

126. Sean U y V subespacios cerrados de un espacio vectorial normado X, y suponga que existe $r > 0$ tal que

$$r \sup_{\substack{x\in\overline{U+V}\\ \|x\|\leq 1}} F(x) \leq \sup_{\substack{x\in U\\ \|x\|\leq 1}} F(x) + \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|\leq 1}} F(x) \qquad \forall\, F \in X'\,.$$

Razone por contradicción y aplique la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach para concluir que

$$B_{\overline{U+V}}(\theta, r) \subseteq \overline{B_U(\theta,1) + B_V(\theta,1)}\,.$$

127. Sean X e Y Banach. Se dice que un operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ admite una clausura si existe un operador lineal $B : \mathcal{D}(B) \subseteq X \to Y$ tal que B es una extensión de A y $G(B) = \overline{G(A)}$. Demuestre que A admite una clausura si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $(x_n, A(x_n)) \overset{n\to\infty}{\to} (\mathbf{0}, y)$, con $y \in Y$, se tiene necesariamente que $y = \mathbf{0}$.

128. El presente ejercicio apunta a aplicar la teoría desarrollada para el análisis de la función spline de interpolación a otras dos situaciones distintas, pero con características similares.

a) Sean $\Omega :=]a, b[$, $n \in \mathbf{N}$, y considere la partición $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$. Además, sean $m \in \mathbf{N}$ y $\alpha,\ \beta > 0$. Luego, dado $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \ldots, z_n)^{\mathtt{t}} \in \mathbf{R}^n$, se pide analizar la solubilidad del siguiente problema: Hallar $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in H^m(\Omega)\times H^m(\Omega)$ tal que $u_1(t_i) - u_2(t_i) = z_i \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, y de modo que

$$\begin{aligned} &\alpha \int_\Omega (u_1^{(m)}(t))^2\, dt \,+\, \beta \int_\Omega (u_2^{(m)}(t))^2\, dt \\ = &\min_{\substack{\mathbf{v}:=(v_1,v_2)\in H^m(\Omega)\times H^m(\Omega)\\ v_1(t_i)\,-\,v_2(t_i)\,=\,z_i\ \forall\, i}} \left\{ \alpha \int_\Omega (v_1^{(m)}(t))^2\, dt \,+\, \beta \int_\Omega (v_2^{(m)}(t))^2\, dt \right\} \end{aligned}$$

Se genera algún cambio en su análisis si la condición de interpolación se reemplaza por $v_1(t_i) = v_2(t_i) = z_i\ \forall\, i$? Explique y fundamente.

b) Sea S un subespacio de dimensión finita N de un Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, y sea $\{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$ una base de S. Además, sea $\Pi : H \to S^\perp$ el proyector ortogonal. Demuestre que para cada $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \ldots, z_N)^{\mathtt{t}} \in \mathbf{R}^N$ existe un único $u \in H$ tal que $\langle u, p_i\rangle_H = z_i \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, y de modo que

$$\|\Pi(u)\|_H \;=\; \min_{\substack{v\in H\\ \langle v,p_i\rangle_H \,=\, z_i\ \forall\, i}} \|\Pi(v)\|_H$$

Deduzca un algoritmo para calcular u.

129. Sea G un subespacio de un espacio vectorial normado X, y sea N un subespacio del dual de un espacio de Banach reflexivo Y. Demuestre que:

a) $\operatorname{dist}(f, G^o) \;=\; \sup\limits_{\substack{x\in\overline{G}\\ \|x\|\le 1}} |f(x)| \qquad \forall\, f \in X'$.

b) $\overline{N} \;=\; ({}^oN)^o$.

c) $\operatorname{dist}(y, {}^oN) \;=\; \sup\limits_{\substack{g\in\overline{N}\\ \|g\|\le 1}} |g(y)| \qquad \forall\, y \in Y$.

d) $\operatorname{dist}(g, \overline{N}) \;=\; \sup\limits_{\substack{y\in {}^oN\\ \|y\|\le 1}} |g(y)| \qquad \forall\, g \in Y'$.

130. Sea Ω un dominio convexo y acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y sean $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1(\Omega)}$ los productos escalares de $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente.

a) Pruebe que para todo $r \in L^2(\Omega)$ existe un único $z \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\langle z, w\rangle_{H^1(\Omega)} \;=\; \langle r, w\rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, w \in H^1(\Omega)\,.$$

b) Deduzca que z es la única solución débil del problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta z \,+\, z \;=\; r \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla z \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal sobre Γ, y **observe** (no lo demuestre) que la convexidad de Ω garantiza que $z \in H^2(\Omega)$.

c) Defina un operador lineal apropiado y demuestre, utilizando el Teorema del Grafo Cerrado, que existe $C > 0$ tal que

$$\|z\|_{H^2(\Omega)} \;\le\; C\,\|r\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, r \in L^2(\Omega)\,.$$

131. Sean H_1, H_2, Q_1, Q_2 espacios de Hilbert sobre $\mathbf{R}$, y sean $a : H_1 \times H_2 \to \mathbf{R}$ y $b_j : H_j \times Q_j \to \mathbf{R}$, $j \in \{1,2\}$, formas bilineales acotadas con operadores inducidos $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ y $\mathbf{B}_j \in \mathcal{L}(H_j, Q_j)$, $j \in \{1,2\}$, respectivamente. También, sea K_j el espacio nulo de $\mathbf{B}_j$, $j \in \{1,2\}$, y sea Π_2 el proyector ortogonal de H_2 en K_2. Suponga que:

i) $\Pi_2\,\mathbf{A} : K_1 \to K_2$ es un isomorfismo.

ii) existen $\beta_1,\, \beta_2 \,>\, 0$ tales que

$$\|\mathbf{B}_j^*(q)\|_{H_j} \;:=\; \sup_{\substack{v\in H_j\\ v\neq 0}} \frac{b_j(v,q)}{\|v\|_{H_j}} \;\ge\; \beta_j\,\|q\|_{Q_j} \quad \forall\, q \in Q_j, \quad \forall\, j \in \{1,2\}\,.$$

Pruebe que, dados $F \in H_2'$ y $G \in Q_1'$, existe un único $(u,p) \in H_1 \times Q_2$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) \,+\, b_2(v,p) \;&=\; F(v) \quad \forall\, v \in H_2\,,\\ b_1(u,q) \;&=\; G(q) \quad \forall\, q \in Q_1\,. \end{aligned}$$

132. a) Dado $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbf{R}$ con aplicación de Riesz $\mathcal{R} : X' \to X$, defina $[\,\cdot,\cdot\,] : X' \times X' \to \mathbf{R}$ por

$$[F, G] \;:=\; \langle \mathcal{R}(F), \mathcal{R}(G)\rangle \qquad \forall\, F,\, G \,\in\, X'\,,$$

y pruebe que $(X', [\,\cdot,\cdot\,])$ es un espacio de Hilbert.

b) Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbf{R}$ y denote por X'' al dual del dual X', es decir

$$X'' \;:=\; \Big\{\, \mathcal{F} : X' \to \mathbf{R} : \quad \mathcal{F} \text{ es lineal y acotado} \,\Big\}\,.$$

Demuestre que para cada $x \in X$ el funcional $J(x) : X' \to \mathbf{R}$ definido por $J(x)(F) \;:=\; F(x) \quad \forall\, F \in X'$ es un elemento de X'', y que la aplicación resultante $J : X \to X''$ es inyectiva e isométrica. Luego, utilice a) para probar que si X es un Hilbert entonces J es biyectiva.

133. Sea S un subespacio vectorial de un espacio vectorial normado X tal que $\overline{S} \neq X$. Demuestre (DE DOS MANERAS DISTINTAS) que existe $F \in X'$ tal que $\|F\| \neq 0$ y $F(x) = 0 \quad \forall x \in S$.

134. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbf{R}$ una función continua para la cual existen constantes M, $\beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre, utilizando algún resultado de dualidad, que para todo $f \in L^2(\Omega)$ existe un único $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \left\{ \kappa \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{\kappa} u\, v \right\} = \int_\Omega f\, v \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

y

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\{ \frac{M}{\min\left\{\beta, \frac{1}{M}\right\}} \right\}^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

135. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}$, considere los espacios de Hilbert reales dados por $X := L^2(\Omega)$ e $Y := \mathbf{R}^{2\times 2}$ provistos de los productos escalares

$$\langle u, v\rangle_X := \int_\Omega u\, v \quad \forall\, u,\, v \in X\,, \qquad \langle A, B\rangle_Y := \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}\, B) \quad \forall\, A,\, B \in Y\,,$$

y defina el operador $\mathcal{A} : X \to Y$ por

$$\mathcal{A}(u) := \begin{pmatrix} \int_\Omega u & \int_\Omega x\, u \\ \int_\Omega x\, u & \int_\Omega x^2\, u \end{pmatrix} \qquad \forall\, u \in X\,.$$

i) Demuestre que $\mathcal{A}$ es lineal y acotado y calcule explícitamente el operador adjunto $\mathcal{A}^*$ y los espacios $N(\mathcal{A})$, $R(\mathcal{A})$, $N(\mathcal{A}^*)$ y $R(\mathcal{A}^*)$.

ii) Encuentre un subespacio cerrado S de X tal que $\mathcal{A}|_S : S \to R(\mathcal{A})$ sea biyectivo.

iii) Defina $\tilde{Y} := \{B \in Y : \quad B^{\mathrm{t}} = -B\}$ y demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|\mathcal{A}^*(A)\|_X \geq C \inf_{B\in\tilde{Y}} \|A - B\|_Y \quad \forall\, A \in Y\,.$$

iv) Reemplace $X := L^2(\Omega)$ por $X := H^1(\Omega)$ con su producto escalar habitual, y recalcule el operador adjunto $\mathcal{A}^*$.

136. Sean X, Y_1 e Y_2 espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, y sean $A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subseteq X \to Y_1$ y $A_2 : \mathcal{D}(A_2) \subseteq X \to Y_2$ operadores lineales cerrados. Considere el espacio producto $Y := Y_1 \times Y_2$ y demuestre que el operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, definido por $A(x) := (A_1(x), A_2(x))\ \forall\, x \in \mathcal{D}(A) := \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_2)$, también es cerrado. Recíprocamente, suponga que $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es lineal cerrado, y que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $\{A_i(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ es convergente en Y_i, $i \in \{1,2\}$, existe una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ para la cual $\{A_j(x_n^{(1)})\}_{n\in\mathbf{N}}$ es convergente en Y_j, $\forall\, j \in \{1,2\}$. Demuestre en tal caso que para cada $i \in \{1,2\}$, $A_i|_{\mathcal{D}(A)}$ es cerrado.

137. Determine, **justificadamente**, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) Todo operador lineal, acotado y biyectivo de un Banach X en un Banach Y es compacto.

ii) Dados H y Q espacios de Hilbert se tiene que $A \in \mathcal{L}(H, Q)$ es biyectivo si y sólo si $A^* \in \mathcal{L}(Q, H)$ es biyectivo.

iii) Existen operadores compactos que no son cerrados.

iv) Dados X e Y espacios de Banach, el inverso de un operador lineal, cerrado y biyectivo $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, también es cerrado.

v) Dados X e Y espacios de Banach, el inverso de un operador lineal, cerrado y biyectivo $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, es acotado.

vi) Dados X e Y espacios de Banach, Y de dimensión finita, y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, el rango del operador adjunto $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$ es cerrado.

138. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ lineal tal que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Con el objeto de definir el operador adjunto $A' : \mathcal{D}(A') \subseteq Y' \to X'$, se introduce el subespacio de Y' dado por

$$\mathcal{D}(A') := \Big\{ G \in Y' : \quad \text{existe } c > 0 \text{ tal que } \quad |G(A(x))| \le c\,\|x\| \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A) \Big\}.$$

a) Dado $G \in \mathcal{D}(A')$, defina el funcional $f : \mathcal{D}(A) \to \mathbf{R}$ por $f(x) := G(A(x))$ $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$, y demuestre que existe un único $F \in X'$ tal que $F|_{\mathcal{D}(A)} = f$.

b) De acuerdo al análisis en a), defina $A' : \mathcal{D}(A') \subseteq Y' \to X'$ por $A'(G) := F$ $\forall\, G \in \mathcal{D}(A')$, y pruebe que A' es lineal y cerrado.

c) Suponga ahora que A es cerrado, en cuyo caso se sabe que $N(A) = {}^{o}R(A')$, y demuestre que si X es reflexivo entonces $N(A)^{o} = \overline{R(A')}$.

139. a) Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ biyectivo. Demuestre que X es reflexivo (separable) si y sólo si Y es reflexivo (separable).

b) Sean X, Y espacios de Banach separables (reflexivos). Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también es separable (reflexivo).

c) Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$, considere el espacio de Hilbert $(H(\mathrm{div}; \Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde

$$H(\mathrm{div}; \Omega) := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega) \Big\},$$

y

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \int_\Omega \Big\{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} \Big\} \qquad \forall\, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div}; \Omega).$$

Asuma que $L^2(\Omega)$ es separable y demuestre que $H(\mathrm{div}; \Omega)$ también lo es.

140. Sean X un Hilbert sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbf{R}$ o $\mathbb{C}$) y $F : X \to \mathbb{K}$ un funcional lineal tal que su espacio nulo $N(F) := \Big\{ x \in X : \quad F(x) = 0 \Big\}$ no es denso en X. Pruebe que $F \in X'$ y concluya así que $N(F)$ es un subespacio cerrado propio de X.

141. Sean X un espacio vectorial normado y $\Big\{ F, F_1, F_2, \cdots, F_N \Big\}$ funcionales lineales sobre X tales que $\bigcap_{1=1}^{N} N(F_i) \subseteq N(F)$. Aplique la segunda forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach para probar que existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ tales que $F = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, F_i$. Explique cómo se simplifica la demostración anterior, sin usar ninguna versión del Teorema de Hahn-Banach sino sólo argumentos de ortogonalidad, en el caso particular en que X es un Hilbert y ninguno de los espacios nulos de los funcionales involucrados es denso en X.

142. Dados X, Y y Z espacios de Banach, considere operadores $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ y $B : \mathcal{D}(B) \subseteq X \to Z$ lineales tales que $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$, A es cerrado y B admite una clausura. Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|B(x)\| \,\le\, C \Big\{ \, \|A(x)\| \,+\, \|x\| \, \Big\} \qquad \forall \, x \in \mathcal{D}(A) \, .$$

143. Sean $\Omega \;:=] - \pi, \pi[$ y $(H^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega})$ el espacio de Sobolev de orden 1. A su vez, sea $n \in \mathbf{N}$ y considere los conjuntos de funciones $\{p_0, p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ y $\{q_0, q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ definidos por $p_k(t) := \mathrm{sen}(kt)$ y $q_k(t) := \cos(kt) \quad \forall \, t \in [-\pi, \pi], \quad \forall \, k \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Entonces, dado $\mathbf{z} := (z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n)^{\mathtt{t}} \in \mathbf{R}^{n+1}$, se pide analizar la solubilidad del siguiente problema: Hallar $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ tal que $\langle u_1, p_k \rangle_{1,\Omega} \,+\, \langle u_2, q_k \rangle_{1,\Omega} \,=\, z_k \quad \forall \, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, y de modo que

$$\int_\Omega (u_1'(t))^2 \, dt \,+\, \int_\Omega (u_2'(t))^2 \, dt$$
$$= \min_{\substack{\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \\ \langle v_1, p_k \rangle_{1,\Omega} + \langle v_2, q_k \rangle_{1,\Omega} \,=\, z_k \;\forall\, k}} \left\{ \int_\Omega (v_1'(t))^2 \, dt \,+\, \int_\Omega (v_2'(t))^2 \, dt \right\}$$

144. El presente ejercicio apunta a caracterizar la sobreyectividad de un operador cuyo rango está contenido en un espacio producto, en términos de la sobreyectividad de sus respectivas componentes.

   a) Recuerde primero que, dados m, $n \in \mathbf{N}$ y un operador lineal $\mathcal{B} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$, el Teorema de las Dimensiones establece que $n \,=\, \dim N(\mathcal{B}) \,+\, \dim R(\mathcal{B})$. Luego, suponga que $m = m_1 + m_2$ y que $\mathcal{B}(x) \,=\, (\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)) \quad \forall \, x \in \mathbf{R}^n$, donde $\mathcal{B}_i : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^{m_i}$ es lineal para cada $i \in \{1, 2\}$, y demuestre que $\mathcal{B}$ es sobreyectivo si y sólo si

   i) $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son sobreyectivos. ii) $\mathbf{R}^n \,=\, N(\mathcal{B}_1) \,+\, N(\mathcal{B}_2)$.

b) Sean U y V subespacios cerrados de un Hilbert $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $U^{\perp} \subseteq U + V$. ii) $X = U + V$. iii) $U^{\perp} + V^{\perp} \subseteq U + V$.

c) Sean X, Y_1 e Y_2 espacios de Hilbert arbitrarios y defina $Y := Y_1 \times Y_2$. Luego, sea $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\mathcal{B}(x) = (\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)) \quad \forall\, x \in X$, donde $\mathcal{B}_i \in \mathcal{L}(X, Y_i) \quad \forall\, i \in \{1, 2\}$, y demuestre que $\mathcal{B}$ es sobreyectivo si y sólo si

i) $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son sobreyectivos. ii) $X = N(\mathcal{B}_1) + N(\mathcal{B}_2)$.

145. Sea X un espacio vectorial normado. Un subespacio W de X' se dice SATURADO si para todo $F \in X' - W$ existe $x \in {}^{o}W$ tal que $F(x) \neq 0$. Equivalentemente, un subespacio W de X' es saturado sí y sólo sí $W = ({}^{o}W)^{o}$. El objetivo de este ejercicio es probar que un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si todo subespacio cerrado de X' es saturado. Para la primera implicación recuerde un resultado dado en clases, y para la segunda proceda como sigue:

i) Considere $\mathcal{F} \in X''$, $\mathcal{F} \neq \mathbf{0}$, defina $W := \Big\{F \in X' : \quad \mathcal{F}(F) = 0\Big\}$, y pruebe que existen $G \in X' - W$ y $x_1 \in {}^{o}W$ tal que $G(x_1) \neq 0$.

ii) Demuestre que $X' = W \oplus \langle\{G\}\rangle$, defina $\mathcal{H} \in X''$ por

$$\mathcal{H}(F) := G(x_1)\,\mathcal{F}(F) - \mathcal{F}(G)\,F(x_1) \qquad \forall\, F \in X',$$

y utilice la descomposición de X' para concluir que $\mathcal{H}$ es el funcional nulo.

iii) Deduzca a partir de ii) que $\mathcal{F} = J(\beta\, x_1)$, con $\beta := \frac{\mathcal{F}(G)}{G(x_1)}$.

146. a) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que K transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones convergentes de Y. Pruebe que K es compacto.

b) Sea X un espacio de Hilbert y sean $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$, $x \in X$, tales que $x_n \stackrel{w}{\to} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$. Pruebe que $x_n \to x$.

c) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operador compacto. Aplique a) y b) para probar que $K^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ también es compacto.

147. Este problema constituye una versión particular del Lema de Peetre-Tartar.

a) Sean X, Y y Z, espacios de Banach, y considere operadores $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $B \in \mathcal{L}(X, Z)$, tales que B es compacto. Además, suponga que existe $c > 0$ tal que

$$\|x\| \leq c\Big\{\|A(x)\| + \|B(x)\|\Big\} \qquad \forall\, x \in X.$$

Demuestre que $N(A)$ es de dimensión finita, y luego razone por contradicción para probar que existe $C > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(x, N(A)) \leq C\,\|A(x)\| \qquad \forall\, x \in X.$$

b) Dado Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, es fácil ver que se tiene la descomposición $H^1(\Omega) = \tilde{H}^1(\Omega) \oplus \mathbb{P}_0(\Omega)$, donde $\mathbb{P}_0(\Omega)$ es el espacio de polinomios constantes sobre Ω y $\tilde{H}^1(\Omega) := \Big\{ v \in H^1(\Omega) : \quad \int_\Omega v = 0 \Big\}$. Además, se sabe (no lo demuestre) que la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y la semi-norma $|\cdot|_{1,\Omega}$ son equivalentes en $\tilde{H}^1(\Omega)$. Aplique a), esta equivalencia y el teorema de trazas, para demostrar que existen constantes C_1, $C_2 > 0$, tales que

$$C_1 \|v\|_{1,\Omega}^2 \,\leq\, |v|_{1,\Omega}^2 \,+\, \|v\|_{0,\Gamma}^2 \,\leq\, C_2 \|v\|_{1,\Omega}^2 \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,. \tag{26}$$

148. Sean A, B, C : $\ell_2(\mathbf{R}) \to \ell_2(\mathbf{R})$ los operadores definidos, para cada sucesión $\mathbf{x} := \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in \ell_2(\mathbf{R})$, por $A(\mathbf{x}) := \big\{\frac{x_{n+1}}{n}\big\}_{n\in\mathbf{N}}$, $B(\mathbf{x}) := \{0\} \cup \big\{\frac{x_{n-1}}{n-1}\big\}_{n\geq 2}$, y $C(\mathbf{x}) := \big\{\frac{x_n}{n}\big\}_{n\in\mathbf{N}}$. Demuestre que $0 \in \sigma_p(A) \cap \sigma_r(B) \cap \sigma_c(C)$.

149. Sean H_1, H_2, Q_1, Q_2 espacios de Hilbert sobre $\mathbf{R}$, y sean $a : H_1 \times H_2 \to \mathbf{R}$ y $b_j : H_j \times Q_j \to \mathbf{R}$, $j \in \{1,2\}$, formas bilineales acotadas con operadores inducidos $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ y $\mathbf{B}_j \in \mathcal{L}(H_j, Q_j)$, $j \in \{1,2\}$, respectivamente. También, sea K_j el espacio nulo de $\mathbf{B}_j$, $j \in \{1,2\}$, y sea Π_2 el proyector ortogonal de H_2 en K_2. Suponga que:

   i) $\Pi_2\, \mathbf{A} : K_1 \to K_2$ es un isomorfismo.

   ii) existen β_1, $\beta_2 > 0$ tales que

$$\|\mathbf{B}_j^*(q)\|_{H_j} \,:=\, \sup_{\substack{v\in H_j\\ v\neq 0}} \frac{b_j(v,q)}{\|v\|_{H_j}} \,\geq\, \beta_j \, \|q\|_{Q_j} \quad \forall\, q \in Q_j, \quad \forall\, j \in \{1,2\}\,.$$

   Pruebe que, dados $F \in H_2'$ y $G \in Q_1'$, existe un único $(u,p) \in H_1 \times Q_2$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) \,+\, b_2(v,p) &= F(v) \quad \forall\, v \in H_2\,,\\ b_1(u,q) &= G(q) \quad \forall\, q \in Q_1\,. \end{aligned}$$

   Además, deduzca condiciones del tipo inf-sup que sean equivalentes a i).

150. Sean Ω un abierto de $\mathbf{R}^n$ y $p : \Omega \to \mathbf{R}$ una función medible y positiva. Entonces se define el espacio ponderado

$$E(p) \,:=\, \Big\{ u : \Omega \to \mathbf{R} \text{ medible} : \quad p^{1/2}\, u \,\in\, L^2(\Omega) \Big\}$$

   provisto de la norma $\|u\|_{E(p)} \,:=\, \|p^{1/2}\, u\|_{0,\Omega} \quad \forall\, u \in E(p)$.

   a) Dadas funciones p, $q : \Omega \to \mathbf{R}$ medibles y positivas, y un parámetro $\delta \in]0,1[$, demuestre que el espacio de interpolación $(E(p), E(q))_{\delta,2}$ coincide con $E(r)$, donde $r := p^{1-\delta}\, q^\delta$. Concluya, además, que

$$|||u|||_{\delta,2} \,=\, C_{\delta,2}\, \|u\|_{E(r)} \quad \forall\, u \in E(r)\,, \quad \text{con} \quad C_{\delta,2} := \left\{ \frac{\pi\,(1-\delta)\,\delta}{\operatorname{sen} \pi\, \delta} \right\}^{1/2}.$$

b) Para cada $t \in \mathbf{R}$ considere $p_t : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definida por $p_t(\xi) := (1 + \|\xi\|^2)^t$ $\forall \xi \in \mathbf{R}^n$, y observe, considerando $\Omega = \mathbf{R}^n$, que la transformada de Fourier $\mathcal{F} : H^t(\mathbf{R}^n) \to E(p_t)$ y su inversa $\mathcal{F}^{-1} : E(p_t) \to H^t(\mathbf{R}^n)$ son isometrías. Luego, utilizando a), demuestre que para cada s_0, $s_1 \in \mathbf{R}$ y $\delta \in]0,1[$, se tiene, con $s := (1-\delta)\, s_0 + \delta\, s_1$, que $\mathcal{F} : (H^{s_0}(\mathbf{R}^n), H^{s_1}(\mathbf{R}^n))_{\delta,2} \to E(p_s)$ y $\mathcal{F}^{-1} : E(p_s) \to (H^{s_0}(\mathbf{R}^n), H^{s_1}(\mathbf{R}^n))_{\delta,2}$ son biyecciones continuas. Concluya, a partir de esto último, que $(H^{s_0}(\mathbf{R}^n), H^{s_1}(\mathbf{R}^n))_{\delta,2} = H^s(\mathbf{R}^n)$ y que

$$\|u\|_{s,\mathbf{R}^n} \;=\; C_{\delta,2}^{-1}\, |||u|||_{\delta,2} \qquad \forall\, u \,\in\, H^s(\mathbf{R}^n)\,.$$