

LISTADO DE EJERCICIOS 4220014

Análisis Funcional

Primer Semestre de 2012

Prof. Gabriel N. Gatica.

1. (TEOREMA DE HAHN-BANACH SOBRE $\mathbb{C}$). Sea X un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y sea $p : X \rightarrow \mathbf{R}$ tal que

$$p(\alpha x) = |\alpha|p(x) \quad \text{y} \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in X.$$

Además, sean S un subespacio de X y $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ lineal, tales que

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in S.$$

Demuestre que f puede extenderse a un funcional lineal $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$|F(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

2. (APLICACIÓN SIMPLE DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH). Sea X un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

- a) Dados un conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ de N vectores linealmente independientes de X y $\{a_1, a_2, \dots, a_N\} \subseteq \mathbb{C}$, pruebe que existe $F \in X'$ tal que $F(x_j) = a_j$ para todo $j \in \{1, \dots, N\}$.
- b) Utilice a) para probar que todo subespacio Y de dimensión finita admite un suplemento topológico.

3. Sea $\Omega := (a, b)$ un intervalo acotado de $\mathbf{R}$ y dado $m \in \mathbf{N}$ considere el espacio de Sobolev $H^m(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : v^{(j)} \in L^2(\Omega) \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}\}$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-1}(\Omega)$ también lo es.

4. Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados y sean $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(Z, X)$. Demuestre que $(AB)' = B' A'$. Suponga que A es invertible y demuestre que A' también lo es, con $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

5. (INVERSO A IZQUIERDA). Sean E, F espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $N(T) = \{0\}$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) Existe $S \in \mathcal{L}(F, E)$ tal que $ST = I : E \rightarrow E$.
- b) $R(T)$ es cerrado y posee un suplemento topológico en F .

6. (APLICACIÓN DE REFLEXIVIDAD). Sean E y F espacios de Banach y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E \rightarrow F$ lineal cerrado tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en E . Pruebe que si E es reflexivo entonces

$$N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}.$$

7. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y considere un operador NOLINEAL $T : H \rightarrow H$, FUERTEMENTE MONÓTONO y LIPSCHITZ-CONTINUO. Esto significa, respectivamente, que existen constantes $\alpha, M > 0$ tales que

$$\langle Tv - Tw, v - w \rangle \geq \alpha \|v - w\|_H^2 \quad \text{y} \quad \|Tv - Tw\|_H \leq M \|v - w\|_H \quad \forall v, w \in H.$$

- a) Dada $f \in H$, demuestre que existe un único $u \in H$ tal que $Tu = f$.
b) Sea H_n un subespacio de dimensión finita de H y considere el esquema de Galerkin asociado: Hallar $u_n \in H_n$ tal que

$$\langle Tu_n, v_n \rangle = \langle f, v_n \rangle \quad \forall v_n \in H_n.$$

Pruebe que

$$\|u - u_n\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in H_n} \|u - v_n\|_H.$$

IND.: Para **a)**, aplicar el Teorema del Punto Fijo de Banach al operador $P : H \rightarrow H$, con $Pv := v - \rho(Tv - f)$, donde ρ es un parámetro a elegir de manera conveniente.

8. Sean X, Y espacios de Banach, y sea $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal cerrado tal que $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$. Demuestre que $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

IND.: Considere $\mathcal{D}(A)$ provisto de la norma $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$.

9. (TOPOLOGÍA DÉBIL). Sean E, F espacios de Banach y sea $T : E \rightarrow (F, \sigma(F, F'))$ un operador lineal y continuo. Pruebe que $T : E \rightarrow F$ también es continuo.
10. (TOPOLOGÍA DÉBIL ESTRELLA). Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E'$. Demuestre que una base de vecindades de f con respecto a la topología $\sigma(E', E)$ está dada por conjuntos de la forma

$$V := \{g \in E' : |g(x_j) - f(x_j)| < \epsilon \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}\},$$

con $N \in \mathbb{N}$, $x_j \in E \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$ y $\epsilon > 0$.

11. (TOPOLOGÍAS Y ESPACIOS DE HILBERT). Sea E un espacio de Hilbert.

- a) Defina, con la mayor simplicidad posible, las topologías $\sigma(E, E')$ y $\sigma(E', E)$.
b) Pruebe explícitamente (sin usar el resultado más general dado en clases) que la bola unitaria cerrada de E es compacta en $\sigma(E, E')$.

12. Sea X un espacio vectorial normado y $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ un funcional lineal. Pruebe que $f \in X'$ sí y sólo sí $N(f)$ es un subespacio cerrado de X .
13. Sea X un espacio vectorial normado.
- a) Demuestre que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces la sucesión completa converge.
 - b) Sea $S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Pruebe que S es completo sí y sólo sí X es Banach.
14. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\text{div}; \Omega) := \left\{ v \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \text{div } v := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w \rangle_{H(\text{div}; \Omega)} := \int_{\Omega} v \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \text{div } v \, \text{div } w \, dx \quad \forall v, w \in H(\text{div}; \Omega).$$

- a) Demuestre que $(H(\text{div}; \Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\text{div}; \Omega)})$ es un espacio de Hilbert.
- b) Pruebe que para todo $g \in [L^2(\Omega)]^n$ existe un único $v_g \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} v_g \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \text{div } v_g \, \text{div } w \, dx = \int_{\Omega} g \cdot w \, dx \quad \forall w \in H(\text{div}; \Omega).$$

IND.: Dada $v \in [L^2(\Omega)]^n$, se dice que $\text{div } v := z \in L^2(\Omega)$ si

$$-\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} z \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

15. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\text{rot}; \Omega) := \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \text{rot } v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w \rangle_{H(\text{rot}; \Omega)} := \int_{\Omega} v \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \text{rot } v \, \text{rot } w \, dx \quad \forall v, w \in H(\text{rot}; \Omega).$$

- a) Demuestre que $(H(\text{rot}; \Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\text{rot}; \Omega)})$ es un espacio de Hilbert.
- b) Pruebe que para todo $g \in H(\text{rot}; \Omega)$ existe un único $v_g \in H(\text{rot}; \Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} v_g \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \text{rot } v_g \, \text{rot } w \, dx = \int_{\Omega} \text{rot } g \, \text{rot } w \, dx \quad \forall w \in H(\text{rot}; \Omega).$$

IND.: Notar que $v \in H(\text{rot}; \Omega)$ sí y sólo sí $(v_2, -v_1) \in H(\text{div}; \Omega)$. También, dada $v \in [L^2(\Omega)]^2$, se dice que $\text{rot } v := z \in L^2(\Omega)$ si

$$-\int_{\Omega} v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx + \int_{\Omega} v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx = \int_{\Omega} z \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

16. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ , y defina el espacio $V := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, es decir

$$V = \{v \in H^2(\Omega) : v = 0 \text{ en } \Gamma\}.$$

Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V.$$

IND.: Dada $v \in V$, defina $f = -\Delta v \in L^2(\Omega)$ y aplique el Lema de Lax-Milgram al problema de valores de contorno: $-\Delta u = f$ en Ω , $u = 0$ en Γ .

17. Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0, 1]$ provisto de la norma uniforme. Dados los polinomios $p_j \in X$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, con $p_j(t) = t^j \quad \forall t \in [0, 1]$, se define el operador $A : X \rightarrow X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^n \left\{ \int_0^1 u(t) p_j(t) dt \right\} p_j \quad \forall u \in X.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \rightarrow X'$.

IND.: Para todo $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ defina $F_j : X \rightarrow \mathbf{R}$ por $F_j(u) := \int_0^1 u(t) p_j(t) dt$ $\forall u \in X$, y observe que $F_j \in X'$.

18. Considere dos espacios vectoriales normados X e Y .

- a) Sea $A_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Demuestre que existe un operador $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y, X))$ tal que $\mathcal{T}_0 A_0 = A_0^{-1}$ y $\|\mathcal{T}_0\| = \|A_0^{-1}\|/\|A_0\|$.
- b) Pruebe que si Y es Banach y $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y', X'))$ es un operador biyectivo, entonces $\mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(Y', X'), \mathcal{L}(X, Y))$.

19. Sea $\Omega := (0, 1)$ y considere el problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} -(au')' + bu &= f & \text{en } \Omega \\ u'(0) = u'(1) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde $a(x) = x^2 + 2$, $b(x) = 2 + \sin(x)$ y $f(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$. Puede probarse que la formulación débil de (1) consiste en hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_0^1 (au'v' + buv) dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2)$$

Demuestre que existe un único $u \in H^1(\Omega)$ solución de (2).

20. Sean X, Y espacios vectoriales normados y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

a) Demuestre que $R(A)^0 = N(A')$ y que

$$N(A') = \{0\} \quad \text{si y solo si} \quad \overline{R(A)} = Y.$$

b) Pruebe que si $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$, entonces $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

21. Sea M un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado X .

a) Demuestre que $M = {}^0(M^0)$.

b) Pruebe que el aniquilador de $(\frac{X}{M})'$ coincide con M .

22. Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea $T : X' \rightarrow Y'$ un operador lineal cerrado y biyectivo. Demuestre que $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y', X')$.

23. Sean $I := [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, $f_j : I \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, j = 1, \dots, n$, funciones continuas, y considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Hallar $u := (u_1, \dots, u_n)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{du_j}{dt} = f_j(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) & y \\ u_j(t_0) = \eta_j & \forall j = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3)$$

donde $t_0, \tau, \eta_j, j = 1, \dots, n$ son constantes reales dadas y τ es positivo. Suponga además que existe $M > 0$ tal que

$$|f_j(t, z) - f_j(t, w)| \leq M \|z - w\|_\infty \quad \forall z, w \in \mathbf{R}^n, \quad \forall t \in I.$$

Demuestre que (3) tiene una única solución $u(t)$ para todo $t \in I$.

IND.: Transforme (3) en una ecuación integral de Volterra y luego aplique algún resultado apropiado sobre puntos fijos.

24. Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

25. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y considere una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de H tal que $\langle x_n, x_m \rangle = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$. Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H$. Además, dada una sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, demuestre que son equivalentes,

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge en H .

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$.

26. Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$, se define

$$L^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ medible y } \int_{\Omega} |f|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Dado un multíndice $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, y una función diferenciable u , se denota

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \text{y} \quad \partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Con estas notaciones, para cada $m \in \mathbf{N}$ se define el ESPACIO DE SOBOLEV de orden m , como

$$H^m(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \forall \alpha, |\alpha| \leq m \text{ existe } g_\alpha \in L^2(\Omega), \text{ tal que} \right. \\ \left. \int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}$$

En tal caso se escribe $\partial^\alpha u = g_\alpha$, y se define la norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Asuma que $L^2(\Omega)$ provisto del producto escalar $\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} uv dx$, es un espacio de Hilbert, y demuestre que $H^m(\Omega)$ es también un espacio de Hilbert. Muestre además que para todo $f \in (H^m(\Omega))'$ existen funciones $f_\alpha \in L^2(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, tales que $f(v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} f_\alpha \partial^\alpha v dx \quad \forall v \in H^m(\Omega)$.

27. Se dice que un espacio de Banach X es UNIFORMEMENTE CONVEXO si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$(x, y \in X, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ y } \|x - y\| > \epsilon) \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Demuestre que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

28. Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

- a) Demuestre que A^* es injectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y .
- b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{z \in N(A)} \|x - z\| \leq \beta \|Ax\| \quad \forall x \in X.$$

Demuestre que $R(A) = N(A^*)^\perp$.

- c) Pruebe que $A^* = R_X A' R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \rightarrow X$ y $R_Y : Y' \rightarrow Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^o N(A') = N(A^*)^\perp$.

29. Sea X un espacio de Banach e Y un espacio vectorial normado. Sea $\{T_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ existe $\forall x \in X$. Pruebe que existe $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $T_n(x) \rightarrow T(x) \quad \forall x \in X$.

IND.: Aplicar TEOREMA DE BANACH-STEINHAUSS.

30. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1} \subset H_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$, y $\cup_{n \in \mathbf{N}} H_n$ es denso en H . Sea $B : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f \in H'$ existe una única sucesión $\{u_n(f)\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq H$ tal que

$$u_n(f) \in H_n, \quad B(u_n(f), v_n) = f(v_n) \quad \forall v_n \in H_n,$$

y $\|u_n(f)\| \leq C_0 \|f\| \quad \forall n \in \mathbf{N}$, donde C_0 es una constante positiva independiente de n y de f . Suponga además que para todo $f \in H'$ existe un único $u(f) \in H$ tal que

$$B(u(f), v) = f(v) \quad \forall v \in H.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u(f) - u_n(f)\| = 0 \quad \forall f \in H'.$$

IND.: Defina la proyección de Galerkin $P_n : H \rightarrow H_n$, donde $\forall v \in H$, $P_n v$ denota la única solución de $B(P_n v, w_n) = B(v, w_n) \quad \forall w_n \in H_n$ y observe que $P_n u(f) = u_n(f)$.

31. Sea H un espacio vectorial normado real. Pruebe que si la norma de H satisface

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \{ \|x\|^2 + \|y\|^2 \} \quad \forall x, y \in H,$$

entonces ella proviene de un producto escalar.

32. Sean V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada simétrica y coerciva, y $A : V \rightarrow V'$ el operador lineal y acotado inducido por a . Dado $f \in V'$ y U un subconjunto de V no vacío convexo y cerrado, es sabido (por TEOREMA DE STAMPACCHIA) que existe un único $u \in U$ tal que

$$a(u, v - u) \geq f(v - u) \quad \forall v \in U.$$

Ahora, sean V_h un subespacio de V de dimensión finita, U_h un subconjunto de V_h no vacío convexo y cerrado, y denote por $u_h \in U_h$ a la única solución del problema discreto:

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq f(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in U_h.$$

Además, sea H un Hilbert tal que $V \subseteq H$, y la inyección canónica $i : V \rightarrow H$ es continua y densa. Demuestre que si $Au - f \in H$, entonces existe una constante C independiente de V_h y U_h , tal que

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V \leq C \left\{ \inf_{v_h \in U_h} \left(\|u - v_h\|_V^2 + \|Au - f\|_H \|u - v_h\|_H \right) \right. \\ \left. + \|Au - f\|_H \inf_{v \in U} \|u_h - v\|_H \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

33. Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, X)$, con $\|A\| < 1$. Demuestre que $(I + A)$ es invertible y que

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X, X)$. Muestre también que

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

34. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ un operador lineal. El grafo de T se denota por G_T y se define como

$$G_T := \{(x, y) \in X \times Y : x \in D(T), y = Tx\}$$

Suponga que $D(T)$ y G_T son subespacios cerrados de X y $X \times Y$, respectivamente. Demuestre que T es acotado sobre $D(T)$.

35. (LEMA DE LAX-MILGRAM GENERALIZADO). Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $B : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

a) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_2} \quad \forall (u, v) \in H_1 \times H_2.$$

b) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{v \in H_2 \\ v \neq 0}} \frac{|B(u, v)|}{\|v\|_{H_2}} \geq C_2 \|u\|_{H_1} \quad \forall u \in H_1,$$

y para cada $v \in H_2$, $v \neq 0$, se tiene $\sup_{u \in H_1} |B(u, v)| > 0$.

Demuestre que, dado $F \in H'_2$, existe un único $u \in H_1$ tal que $B(u, v) = F(v)$ para todo $v \in H_2$, y además $\|u\|_{H_1} \leq \frac{1}{C_2} \|F\|_{H'_2}$.

36. Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ un operador lineal. Un operador lineal $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \rightarrow Y$ se dice una *extensión* de T si $D(T) \subseteq D(\tilde{T})$ y $Tx = \tilde{T}x \quad \forall x \in D(T)$.

DEFINICIÓN. Se dice que $\bar{T} : D(\bar{T}) \subseteq X \rightarrow Y$ es la CLAUSURA de T , si:

- i) $\bar{T}$ es un operador lineal cerrado
- ii) $\bar{T}$ es una extensión de T
- iii) Si $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \rightarrow Y$ es cualquier operador con las propiedades i) y ii), entonces $\tilde{T}$ es una extensión de $\bar{T}$.

Sean X, Y espacios de Banach, y sea $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ un operador lineal. Pruebe que T tiene una clausura $\bar{T}$ sí y sólo si la siguiente condición se satisface

$$\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq D(T), \quad x_n \rightarrow 0, \quad Tx_n \rightarrow y \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

37. Sea X el espacio vectorial de las funciones continuas sobre $\bar{\Omega} := [0, 1]$ provisto de la norma uniforme. Dados $u_1, u_2, y \in X$, considere la ecuación integral: *Hallar $u \in X$ tal que*

$$u(t) - \int_0^1 u_1(t) s^2 u(s) ds - \int_0^1 u_2(t) \left(1 - \frac{3}{2}s\right) u(s) ds = y(t) \quad \forall t \in \bar{\Omega}. \quad (4)$$

- i) Si $u_1(t) = 4t$ y $u_2(t) = 1 \quad \forall t \in \Omega$, deduzca una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (4) tenga al menos una solución.
- ii) Pruebe que si $u_1(t) = t$ y $u_2(t) = 1$, entonces para cada $y \in X$ la ecuación integral (4) tiene una única solución.
38. Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados.

- i) Pruebe que si $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ es de rango finito, entonces K es compacto.
- ii) Demuestre que si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $K \in K(Y, Z)$, entonces KA también es compacto.
39. Sea X un espacio vectorial normado de dimensión INFINITA y sea $K \in K(X, X)$ un operador inyectivo. Demuestre que $K^{-1} \notin \mathcal{L}(X, X)$.

40. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Suponga que existen sucesiones $\{F_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X', \{y_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq Y, \{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathbf{R}$ tales que

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|F_n\|_{X'} < +\infty, \quad \sup_{n \in \mathbf{N}} \|y_n\|_Y < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty,$$

y además

$$Ax = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \lambda_n F_n(x) y_n \quad \forall x \in X.$$

Demuestre que A es compacto.

41. i) Sea $p > 1$ y considere el operador $K : l_p \rightarrow l_p$ definido por

$$K(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_k}{k}, \dots\right) \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_p.$$

Demuestre que K es compacto.

- ii) Sean X, Y espacios vectoriales normados y considere el conjunto

$$\mathcal{H} := \{F \in (\mathcal{L}(X, Y))' : F(K) = 0 \quad \forall K \in K(X, Y)\}.$$

Pruebe que $\mathcal{H} = (\frac{\mathcal{L}(X, Y)}{K(X, Y)})'$.

42. Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0, \pi]$ provisto de la norma uniforme. Dadas las funciones trigonométricas $p_j, q_j \in X$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, con $p_j(t) = \sin(jt)$ y $q_j(t) = \cos(jt)$, $\forall t \in [0, \pi]$, se define el operador $A : X \rightarrow X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^n \left\{ \int_0^\pi u(t) p_j(t) dt \right\} p_j + \sum_{j=0}^n \left\{ \int_0^\pi u(t) q_j(t) dt \right\} q_j \quad \forall u \in X.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \rightarrow X'$.

43. Sean H y V dos espacios de Hilbert tales que $H \subseteq V$ y la inyección $i : H \rightarrow V$ es compacta.

- a) Se dice que una forma bilineal acotada A definida sobre $H \times H$ satisface la DESIGUALDAD DE GÅRDING si existen $\alpha > 0$ y una forma bilineal acotada $K : H \times V \rightarrow \mathbf{R}$ tales que

$$A(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 - K(v, v) \quad \forall v \in H.$$

Dado $F \in H'$, considere el siguiente problema variacional: Hallar $u \in H$ tal que

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H. \quad (5)$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding, entonces (5) tiene solución para cada $F \in H'$ SI Y SOLO SI $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

- b) Se dice que A satisface la DESIGUALDAD DE GÅRDING GENERALIZADA si existen $\alpha > 0$, una forma bilineal acotada $K : H \times V \rightarrow \mathbf{R}$, y un isomorfismo $S : H \rightarrow H$ tales que

$$A(v, Sv) \geq \alpha \|v\|_H^2 - K(v, Sv) \quad \forall v \in H.$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding generalizada, entonces (5) tiene solución para cada $F \in H'$ SI Y SOLO SI $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

44. Sean X e Y espacios de Banach tal que X es reflexivo. Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ es compacto SI Y SÓLO SI A transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones fuertemente convergentes de Y .

45. a) Sea $\Omega = (0, 1)$ y $X = L^2(\Omega)$. Puede probarse que X provisto del producto escalar

$$\langle f, g \rangle := \int_\Omega f(x) g(x) dx \quad \forall f, g \in X$$

es un espacio de Hilbert, y que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Considere la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X$ definida por $x_n(t) = \sqrt{2} \sin(n\pi t) \forall t \in \Omega$. Demuestre que

$$\|x_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad , \quad \text{y que} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, x_n \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Concluya además que $x_n \xrightarrow{w} 0$, y que x_n NO CONVERGE FUERTEMENTE a la función nula.

- b) A propósito de lo anterior, demuestre que en un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita, la convergencia débil no es equivalente a la convergencia fuerte.

46. DEFINICIÓN. Sea X un espacio de Banach y $T : X \rightarrow X'$ un operador NO LINEAL. Se dice que T satisface la propiedad (S) si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X$ tal que

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad \text{y} \quad (T(x_n))(x_n - x) - (T(x))(x_n - x) \longrightarrow 0,$$

se tiene $x_n \longrightarrow x$.

Sean H, Q, V espacios de Banach tales que $H \subseteq V$ y $\mathbf{i} : H \rightarrow V$ es compacta. Sea $X := H \times Q$, y considere una forma bilineal acotada $B : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ y un operador no lineal $A : H \rightarrow H'$ que satisfacen las siguientes propiedades

- i) existe $C_0 > 0$ tal que

$$B((u, \lambda), (u, \lambda)) \geq C_0 \|\lambda\|_Q^2 \quad \forall (u, \lambda) \in X.$$

- ii) existen $C_1, C_2 > 0$ tal que para todo $u, v \in H$

$$(A(u))(u - v) - (A(v))(u - v) \geq C_1 \|u - v\|_H^2 + R(u, v),$$

donde

$$|R(u, v)| \leq C_2 \{1 + \|u\|_H + \|v\|_H\} \|u - v\|_V.$$

Demuestre que el operador no lineal $T : X \rightarrow X'$ definido por

$$(T(u, \lambda))(v, \mu) := (A(u))(v) + B((u, \lambda), (v, \mu)),$$

satisface la propiedad (S).

47. a) Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $N(T) = \{0\}$ y $R(T) = Y$. Demuestre que X es reflexivo (separable) si y sólo si Y es reflexivo (separable).

b) Sean X, Y espacios de Banach separables. Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también es separable.

c) Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^N$ y $p \in \mathbf{R}$, $2 \leq p < \infty$, se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ medible y } \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_{\Omega} |f|^p dx \right\}^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Puede probarse que $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ es un espacio de Banach separable. Por otra parte, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está dado por

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \text{ existe } g_i \in L^p(\Omega), i = \overline{1, N} \text{ tal que} \right.$$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \}$$

En tal caso se escribe $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, y se define la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Puede probarse que $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ también es Banach. Demuestre que $W^{1,p}(\Omega)$ es separable.

48. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se dice que T es DÉBILMENTE COMPACTO si para toda sucesión acotada $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de X existe una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n \in \mathbf{N}}$ tal que $\{Tx_n^{(1)}\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge débilmente en Y . Pruebe que si X o Y es *reflexivo*, entonces todo operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es débilmente compacto.
49. Sean $a, b \in \mathbf{R}$ tal que $-\infty < a < b < +\infty$. Asuma que $C[a, b]$ es separable, y demuestre que para todo entero no negativo k , $C^k[a, b]$ también es separable.
50. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ . Considere el problema de valores de contorno:

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{en } \Gamma, \quad \int_{\Omega} u dx = a_1, \quad (6)$$

donde $a_1 \in \mathbf{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, y $g \in L^2(\Gamma)$ satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} g ds = 0.$$

Demuestre que una formulación débil de (6) consiste en: *Hallar $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ tal que*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v ds,$$

$$\mu \int_{\Omega} u dx = \mu a_1,$$

para todo $(v, \mu) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$. Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene única solución, la cual depende continuamente de los datos.

51. a) Sea X un espacio de Banach, y considere una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Demuestre que $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- b) Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$. Pruebe que $x_n \rightarrow x$.

52. Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador compacto. Demuestre que $\mathcal{R}(T)$ es separable.

IND.: Escriba $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \|x\| \leq n\}$, y luego use que todo subconjunto relativamente compacto de un espacio métrico es separable.

53. Un importante resultado establece que *todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo*. En lo que sigue suponga que Ω es un abierto de $\mathbf{R}^n$ y que $p \in \mathbf{R}$ es tal que $p \geq 2$.

- a) A partir del hecho que $\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2} \forall \alpha, \beta \geq 0$, demuestre la desigualdad de Clarkson:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2} \left\{ \|f\|_{L^p(\Omega)}^p + \|g\|_{L^p(\Omega)}^p \right\} \quad \forall f, g \in L^p(\Omega).$$

- b) Utilice la desigualdad anterior para probar que $L^p(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$, es uniformemente convexo y por lo tanto reflexivo. Además, deduzca que $W^{1,p}(\Omega)$ también es reflexivo.

54. Sea V un espacio de Hilbert y $a : V \times V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ una forma trilineal tal que para todo $w \in V$, la forma bilineal $a(w; \cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ es acotada. Dado $F \in V'$, considere el problema: Hallar $u \in V$ tal que

$$a(u; u, v) = F(v) \quad \forall v \in V. \quad (7)$$

Suponga que existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(w; v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v, w \in V.$$

Asuma además que existe una constante $C_0 > 0$ tal que para todo $w_1, w_2, u, v \in V$,

$$|a(w_1; u, v) - a(w_2; u, v)| \leq C_0 \|w_1 + w_2\|_V \|u\|_V \|v\|_V \|w_1 - w_2\|_V.$$

Encuentre una constante positiva C_1 tal que para todo $F \in V'$, $\|F\|_{V'} \leq C_1$, el problema (7) admite una única solución.

55. a) El TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER establece que: *Dado un subconjunto S compacto, convexo, y no vacío de un espacio vectorial de dimensión finita, y una aplicación continua T de S en S , entonces T tiene al menos un punto fijo*. Use este resultado de Brouwer para demostrar que si X es un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $\|\cdot\|$, y si F es una aplicación continua de X en X tal que, para algún $\mu > 0$, $\langle F(u), u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in X$ con $\|u\| = \mu$, entonces existe $u_0 \in X$, $\|u_0\| \leq \mu$, tal que $F(u_0) = 0$.

- b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ , y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. EL PROBLEMA DE NAVIER-STOKES, un problema de suma importancia en mecánica de flúidos, consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un flúido, tales que

$$-\Delta \mathbf{u} + \sum_{j=1}^2 u_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma, \quad \int_{\Omega} p \, dx = 0.$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$, y

$$Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\}.$$

Demuestre que la formulación débil de (8) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q, \end{aligned} \quad (9)$$

donde $a : H \times H \times H \rightarrow \mathbf{R}$, $b : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$, y $f \in H'$, están definidas por

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx, \\ b(\mathbf{v}, p) &:= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad f(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx. \end{aligned}$$

- c) En lo que sigue considere un problema del tipo (9), no necesariamente proveniente de (8), y asuma que las siguientes hipótesis se cumplen: b es una forma bilineal acotada, b satisface la condición de Babuska-Brezzi continua, y para cada $\mathbf{w} \in H$ la aplicación $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es también una forma bilineal acotada. Sea $V := \{ \mathbf{v} \in H : b(\mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall q \in Q \}$. Demuestre que (9) puede reducirse, equivalentemente, al siguiente problema no-lineal: *hallar* $\mathbf{u} \in V$ *tal que*

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (10)$$

- d) Además de lo dicho en c), suponga ahora que: existe una constante $\alpha > 0$ tal que $a(\mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|^2$ para todo $\mathbf{v} \in V$; V es separable y para cada $\mathbf{v} \in V$, la aplicación $\mathbf{u} \rightarrow a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es *secuencialmente débilmente continua*, es decir

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u} \in V \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a(\mathbf{u}_n; \mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Demuestre que el problema (10) tiene al menos una solución $\mathbf{u} \in V$.

IND.: Muestre primero que existe una sucesión $\{\mathbf{v}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ en V tal que para todo $m \geq 1$ el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ es linealmente independiente, y las combinaciones lineales finitas de los $\mathbf{v}_n$ constituyen un conjunto denso en V . Luego, denote por V_m al subespacio de V generado por $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$, y aplique el método de Galerkin en conjunto con lo probado en parte **a)** para construir una sucesión de soluciones aproximantes.

56. Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$ y $p \in [1, +\infty)$, se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ medible y } \int_{\Omega} |f|^p dx < +\infty \right\}.$$

Puede probarse que $L^p(\Omega)$, provisto de la norma $\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_{\Omega} |f|^p dx \right\}^{1/p}$ es un espacio de Banach. Además, dados $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene la desigualdad de Hölder

$$\int_{\Omega} |f g| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Ahora, para un multíndice $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, y una función diferenciable u , se denota $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ y $\partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Con estas notaciones, dado $m \in \mathbf{N}$ se define el ESPACIO DE SOBOLEV de orden (m, p) , como

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha, |\alpha| \leq m \text{ existe } g_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tal que} \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}$$

En tal caso se escribe $\partial^\alpha u = g_\alpha$, y se define la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right\}^{1/p}.$$

Demuestre que $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

57. Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se define el operador adjunto de Hilbert de A , y se denota A^* , como $A^* : Y \rightarrow X$, donde para cada $y \in Y$, $A^*y \in X$ es el único elemento (dado por TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ) tal que $\langle Ax, y \rangle_Y = \langle x, A^*y \rangle_X \quad \forall x \in X$.

- a) Pruebe que $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$, $\|A^*\| = \|A\|$ y que $(A^*)^* = A$.
- b) Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y .
- c) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\inf_{z \in N(A)} \|x - z\| \leq \beta \|Ax\| \quad \forall x \in X$, y demuestre que $R(A) = N(A^*)^\perp$.
- d) Pruebe que $A^* = R_X A' R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \rightarrow X$ y $R_Y : Y' \rightarrow Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^oN(A') = N(A^*)^\perp$.

58. Sea X un espacio vectorial normado.

- a) Sea Y un subespacio no denso de X . Demuestre que existe un funcional no nulo $F \in X'$ tal que $F(x) = 0$ para todo $x \in Y$.
- b) Sean $x_0, x_1 \in X$ tal que $x_0 \neq x_1$. Pruebe que existe una sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X'$ tal que $\|F_n\| = \|x_0 - x_1\|^n$ y $F_n(x_1) = F_n(x_0) + \|x_1 - x_0\|^{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

59. Sea X un espacio de Hilbert con aplicación de Riesz $R_X : X' \rightarrow X$, y sean S, T , subconjuntos de X y X' , respectivamente. Establezca qué relaciones existen entre S° y $S^\perp$, y entre ${}^\circ T$ y $R_X(T)$.

60. Sean U un espacio vectorial normado y V un espacio de Banach. Además, sea $P : U' \rightarrow \mathcal{L}(U, V)$ un operador lineal cerrado tal que $N(P)$ es el funcional nulo sobre U y $R(P) = \mathcal{L}(U, V)$. Demuestre que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha \|F\|_{U'} \leq \|P(F)\|_{\mathcal{L}(U, V)} \quad \forall F \in \mathcal{D}(P).$$

61. Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

IND.: Hacer una demostración alternativa utilizando el TEOREMA DEL GRAFO CERRADO en vez del TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS.

62. Sean H, Q, V y W espacios de Hilbert tales que $H \xrightarrow{c} V$ and $Q \xrightarrow{c} W$. Sean $a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}, b : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ formas bilineales acotadas y defina

$$B : (H \times Q) \times (H \times Q) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$B((u, \lambda), (v, \mu)) := a(u, v) + b(v, \lambda) + b(u, \mu) \quad \forall (u, \lambda), (v, \mu) \in H \times Q.$$

Suponga que existe una forma bilineal acotada $a_0 : H \times V \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $\tilde{a} := a + a_0$ es H -elíptica; es decir, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\tilde{a}(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H.$$

También, asuma que existen una forma bilineal acotada $b_0 : V \times W \rightarrow \mathbf{R}$ y una constante $\beta > 0$ tales que $\tilde{b} := b + b_0$ verifica

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\tilde{b}(v, \lambda)}{\|v\|_H} \geq \beta \|\lambda\|_Q \quad \forall \lambda \in Q.$$

Demuestre que B satisface la DESIGUALDAD DE GÄRDING GENERALIZADA.

63. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sea $J : V \rightarrow \mathbf{R}$ un funcional no lineal. Se dice que J admite una derivada direccional en $v \in V$, en la dirección $\varphi \in V$, si la expresión $\frac{J(v+\epsilon\varphi)-J(v)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$. El valor de este límite se denota $DJ(v, \varphi)$. Entonces, J se dice diferenciable en el sentido de GATEAUX (o G -diferenciable) en $v \in V$, si $DJ(v, \varphi)$ existe para todo $\varphi \in V$.

Ahora, si J es G -diferenciable en $v \in V$ y si $DJ(v, \cdot) \in V'$, se concluye, por el Teorema de Representación de Riesz, que existe un único elemento $z \in V$ tal que $DJ(v, \varphi) = \langle z, \varphi \rangle \forall \varphi \in V$. En tal caso, se denota $z := J'(v)$ y se llama el GRADIENTE de J en v .

Se dice que J tiene segunda diferencial en el sentido de Gateaux en $v \in V$, en las direcciones φ y $\psi \in V$, si la expresión $\frac{DJ(v+\epsilon\psi, \varphi) - DJ(v, \varphi)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$. El valor de este límite se denota $D^2J(v, \varphi, \psi)$.

- a) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ y considere $V := L^2(\Omega)$. Defina $J_0 : V \rightarrow \mathbf{R}$ por

$$J_0(v) := \int_{\Omega} (v^2 + v) dx \quad \forall v \in V$$

y calcule $J'_0(v)$ para todo $v \in V$. Qué puede decir de $J'_0(v)$ si J_0 se restringe al espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$?

- b) Suponga que J es G -diferenciable en $(v + \alpha\varphi)$, en la dirección φ , para todo $\alpha \in [0, 1]$. Demuestre que existe $\beta \in (0, 1)$ tal que

$$J(v + \varphi) = J(v) + DJ(v + \beta\varphi, \varphi).$$

- c) Suponga que J es α -convexo, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que para todo $u, v \in V$ y para todo $\beta \in [0, 1]$:

$$J((1 - \beta)u + \beta v) \leq (1 - \beta)J(u) + \beta J(v) - \frac{\alpha}{2}\beta(1 - \beta)\|u - v\|^2.$$

Además, asuma que J es G -diferenciable en todo $v \in V$. Demuestre que para todo $u, v \in V$ se tiene:

$$DJ(u, u - v) - DJ(v, u - v) \geq \alpha\|u - v\|^2$$

y

$$J(v) \geq J(u) + DJ(u, v - u) + \frac{\alpha}{2}\|v - u\|^2.$$

- d) Suponga que J es G -diferenciable en $v \in V$ y que, dada una dirección $\varphi \in V$, $D^2J(v + \alpha\varphi, \varphi, \varphi)$ existe $\forall \alpha \in [0, 1]$. Demuestre que hay una constante $\beta \in (0, 1)$ tal que

$$J(v + \varphi) = J(v) + DJ(v, \varphi) + \frac{1}{2}D^2J(v + \beta\varphi, \varphi, \varphi).$$

64. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sea V un subespacio cerrado de H . El anulador (o aniquilador) de V se denota por V° y se define como

$$V^\circ := \{ F \in H' : F(x) = 0 \quad \forall x \in V \}.$$

Demuestre que

$$H = V \oplus \mathcal{R}(V^\circ),$$

donde $\mathcal{R} : H' \rightarrow H$ denota la aplicación de Riesz.

65. Sea X un espacio vectorial normado y sea $x_0 \in X$ tal que $|F(x_0)| \leq C_0$ para todo $F \in X'$ con $\|F\|_{X'} = 1$. Demuestre que $\|x_0\| \leq C_0$.

66. Sea H un espacio de Hilbert y sea $B : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

i) B es simétrica, es decir

$$B(u, v) = B(v, u) \quad \forall (u, v) \in H \times H.$$

ii) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u, v)| \leq C_1 \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall (u, v) \in H \times H.$$

iii) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|B(u, v)|}{\|v\|_H} \geq C_2 \|u\|_H \quad \forall u \in H.$$

Demuestre que, dado $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que $B(u, v) = F(v)$ para todo $v \in H$, y además, $\|u\|_H \leq \frac{1}{C_2} \|F\|_{H'}$.

67. Sea V un subespacio de un Hilbert $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y defina

$$V^\perp := \{y \in Y : \langle y, z \rangle = 0 \quad \forall z \in V\}.$$

Si $\bar{V}$ denota la clausura de V , demuestre que $\bar{V}^\perp = V^\perp$. Concluya que V es denso en Y si y sólo si $V^\perp = \{0\}$.

68. Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}^n$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-1}(\Omega)$ también es compacta, para todo entero $m \geq 2$.

69. Sean X y M espacios de Hilbert y sean $a : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$, $b : X \times M \rightarrow \mathbf{R}$ dos formas bilineales acotadas. Suponga además que a es simétrica y semi-definida positiva sobre X . Dados $F \in X'$, $G \in M'$ se define el operador $\mathcal{J} : X \times M \rightarrow \mathbf{R}$,

$$\mathcal{J}(v, \mu) := \frac{1}{2} a(v, v) + b(v, \mu) - F(v) - G(\mu).$$

Considere entonces los siguientes problemas variacionales:

Hallar $(u, \lambda) \in X \times M$ tal que

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= F(v) \quad \forall v \in X, \\ b(u, \mu) &= G(\mu) \quad \forall \mu \in M. \end{aligned} \tag{11}$$

Hallar $(u, \lambda) \in X \times M$ tal que

$$\mathcal{J}(u, \mu) \leq \mathcal{J}(u, \lambda) \leq \mathcal{J}(v, \lambda) \quad \forall (v, \mu) \in X \times M. \tag{12}$$

Demuestre que (u, λ) es solución de (11) si y sólo si (u, λ) es solución de (12).

70. Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X, X)$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \geq 0 \quad \forall y \in Y,$$

y que existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x \rangle_X \geq \alpha \|x\|_X^2 \quad \forall x \in X$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y \rangle_Y}{\|x\|_X} \geq \beta \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $\|\mathbf{P}\|$, α , β y $\|\mathbf{Q}\|$, tal que

$$\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\| \leq C \{ \|f\| + \|g\| \}.$$

IND.: Transforme a una ecuación equivalente en Y y luego aplique el Lema de Lax-Milgram.

71. Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \rightarrow X$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \geq 0 \quad \forall y \in Y,$$

que $\mathbf{P}$ es NOLINEAL, y que existen constantes $M, \alpha, \beta > 0$ tales que

$$\|\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}\|_X \leq M \|x - \bar{x}\|_X, \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x - \bar{x} \rangle_X \geq \alpha \|x - \bar{x}\|_X^2 \quad \forall x, \bar{x} \in X,$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y \rangle_Y}{\|x\|_X} \geq \beta \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de M , α , β y $\|\mathbf{Q}\|$, tal que

$$\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\| \leq C \{ \|f\| + \|g\| + \|\mathbf{P}(0)\| \}.$$

72. Sea $\Omega := (0, 3)$ y considere el problema de valores de contorno: $-u'' + (x+1)u = x$ en Ω , $u(0) = u(3) = 0$. Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio

$$H_2 := \{v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \text{ y } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \text{ es un polinomio de grado } \leq 1, \forall j \in \{1, 2, 3\}\}.$$

IND.: Notar que $H_2 = \langle \{e_1, e_2\} \rangle$, donde $e_j \in H_2$ es tal que $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$.

73. **a)** Sea S un subconjunto de un Hilbert H y sea M el subespacio cerrado generado por S . Pruebe que $S^\perp$ es un subespacio cerrado de H , $M^\perp = S^\perp$, y $M = (S^\perp)^\perp$.
b) Sea V un subespacio de un Hilbert H . Demuestre que $H = \overline{V} \oplus V^\perp$.

74. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ , y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. EL PROBLEMA DE STOKES consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluido, tales que

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma, \quad \int_{\Omega} p \, dx = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\}$. Demuestre que la formulación débil de (13) se reduce a: encontrar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ tales que:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, p) &= F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H, \\ B(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$, $B : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx,$$

$$B(\mathbf{v}, p) := - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx, \quad F(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx.$$

75. **a)** Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de HILBERT. Dados $n \in \mathbf{N}$, $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq H$ y $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \subseteq H'$, se define el operador $A : H \rightarrow H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^n F_j(u) p_j \quad \forall u \in H.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H, H)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A^* : H \rightarrow H$.

b) Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el espacio de HILBERT $L^2(0, 1)$ provisto del producto escalar

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u(t) v(t) dt \quad \forall u, v \in H.$$

Dados los polinomios $p_j \in H$, $j \in \{1, \dots, n\}$, con $p_j(t) = t^j \forall t \in (0, 1)$, se define el operador $A : H \rightarrow H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^1 u(t) p_j(t) dt \right\} p_j \quad \forall u \in H.$$

Demuestre que A es lineal, acotado y AUTOADJUNTO, esto es $A \in \mathcal{L}(H, H)$ y $A = A^*$.

76. Sean X e Y espacios de Banach, y sea $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal cerrado con dominio $D(A)$ e imagen $R(A)$. Demuestre que son equivalentes:

- a) El operador A es inyectivo, y A^{-1} es acotado sobre $R(A)$.
- b) Existe una constante positiva C tal que $\|Ax\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in D(A)$.
- c) $R(A)$ es cerrado en Y , y A es inyectivo.

77. Sea M un subespacio cerrado de un Hilbert H . Por el Teorema de Proyección, cada $x \in H$ puede escribirse únicamente en la forma $x = y + z$, con $y \in M$ y $z \in M^\perp$. El punto $y \in M$ se llama la PROYECCIÓN de x en M , y el operador $P : X \rightarrow M$, $Px = y$, se llama la proyección sobre M . También se denota $P := P_M$ y se dice que P es una proyección.

- i) Pruebe que si P es una proyección, entonces P es autoadjunto, $P^2 = P$, y $\|P\| = 1$ si $P \neq 0$.
- ii) Pruebe que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es autoadjunto y $P^2 = P$, entonces P es una proyección sobre algún subespacio cerrado de H .

78. a) Sea S un subespacio de un Hilbert H . Demuestre que $S^\perp = \bar{S}^\perp$.

b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ , y considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Encuentre y caracterice el subespacio V de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus V$.

79. Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H -elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H , y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \rightarrow \mathbf{R}$ tal que la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es uniformemente elíptica. Esto significa que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n , tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha} \|v_n\|_H^2 \forall v_n \in H_n, \forall n \in \mathbf{N}$.

- a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H$$

y

$$A_n(u_n, v_n) = F(v_n) \quad \forall v_n \in H_n.$$

- b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$\|u - u_n\|_H \leq C \inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H + \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|A(v_n, w_n) - A_n(v_n, w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}.$$

80. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua para la cual existen constantes $M, \beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Defina el conjunto

$$S := \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1\},$$

y demuestre que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ existe un único $g \in S$ tal que

$$\int_{\Omega} \kappa(x) \|\nabla u(x) - \nabla g(x)\|_{\mathbf{R}^n}^2 dx = \min_{v \in S} \int_{\Omega} \kappa(x) \|\nabla u(x) - \nabla v(x)\|_{\mathbf{R}^n}^2 dx.$$

81. Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ y $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

a) Demuestre que
$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \quad \forall q \in Q.$$

b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que
$$\sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q,$$
 y pruebe que $H = R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

82. Sean X, Y espacios de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\mathcal{R}(A) = Y$, y sea $V = N(A)$. Dado el operador de proyección ortogonal $P : X \rightarrow V$, considere $B : Y \rightarrow X$ tal que $B(y) = x - P(x)$ para todo $y \in Y$, donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$.

- a) Demuestre que B está bien definido y que B es una biyección lineal y acotada de Y en $V^\perp$. Pruebe, además, que B es un *inverso a derecha* de A , esto es $AB(y) = y$ para todo $y \in Y$.
- b) Defina $A_0 : V^\perp \rightarrow Y$ como $A_0(x) = A(x)$ para todo $x \in V^\perp$, es decir $A_0 = A|_{V^\perp}$, y pruebe que $A_0^{-1} = B$.
- c) Extienda los resultados anteriores al caso en que $\mathcal{R}(A)$ es un subespacio CERRADO propio de Y .

83. (LEMA DE AUBIN-NITSCHKE). Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y el operador identidad $\mathbf{i} : V \rightarrow H$ es continuo. Sea $A : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y V -elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \rightarrow V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface

$$A(v, \mathbf{P}(g)) = \langle g, v \rangle_H \quad \forall v \in V.$$

Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V , denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

y

$$A(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|u - u_h\|_H \leq C \|u - u_h\|_V \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{\|g\|_H} \inf_{v_h \in V_h} \|\mathbf{P}(g) - v_h\|_V \right\}.$$

84. Dados $\Omega := (0, 1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$-u'' = f \quad \text{en } \Omega, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 1. \quad (14)$$

- a) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional MIXTA de (14) se reduce a: *Hallar $(\sigma, (u, \varphi)) \in H \times Q$ tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, (u, \varphi)) &= F(\tau) \quad \forall \tau \in H, \\ b(\sigma, (v, \psi)) &= G((v, \psi)) \quad \forall (v, \psi) \in Q, \end{aligned} \quad (15)$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$, $b : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) &:= \int_{\Omega} \sigma \tau \, dx \quad \forall \sigma, \tau \in H, \\ b(\tau, (v, \psi)) &:= \int_{\Omega} v \tau' \, dx + \psi \tau(1) \quad \forall (\tau, (v, \psi)) \in H \times Q. \end{aligned}$$

- b) Defina los funcionales F y G , y aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (15) tiene una única solución.

85. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert COMPLEJO, y sean $u, v \in H$, $u \neq v$, tales que $\|u\| = \|v\|$. Defina $w := u - v$ y considere la proyección ortogonal $\mathbf{P} : H \rightarrow S^\perp$, donde S es el subespacio generado por w . Demuestre que

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{P}(v) = \frac{u + v}{2} + \left\{ \frac{\mathbf{i} \operatorname{Im}(\langle u, v \rangle)}{\|w\|^2} \right\} w.$$

Qué sucede cuando H es un Hilbert REAL? Interprete gráficamente.

86. Sean $\Omega =]a, b[$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno

$$u^{(4)} = f \quad \text{en } \Omega, \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0. \quad (16)$$

i) Defina la incógnita auxiliar $\sigma := u''$ en Ω y demuestre que una formulación variacional MIXTA de (16) se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \tau \, dx + \int_{\Omega} u' \tau' \, dx &= 0 \quad \forall \tau \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} v' \sigma' \, dx &= - \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (17)$$

ii) Aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (17) tiene una única solución que depende continuamente del dato f .

87. (LEMA DE FORTIN). Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_H} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q. \quad (18)$$

Sean $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q , respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ tal que

$$b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) = 0 \quad \forall q_n \in Q_n.$$

Suponga que la familia de operadores $\{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H, H_n)} \leq C$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de n , tal que

$$\sup_{\substack{v_n \in H_n \\ v_n \neq 0}} \frac{b(v_n, q_n)}{\|v_n\|_H} \geq \beta^* \|q_n\|_Q \quad \forall q_n \in Q_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

88. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i \, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall x := (x_1, \dots, x_n)^T \in \Omega$.

a) (DESIGUALDAD DE POINCARÉ GENERALIZADA). Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|_{H^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^n |\langle v, p_i \rangle_{H^2(\Omega)}|^2 \right\}^{1/2} \quad \forall v \in H^2(\Omega),$$

y demuestre que existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 |||v||| \leq \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C_2 |||v||| \quad \forall v \in H^2(\Omega).$$

IND.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que $\forall n \in \mathbf{N}$ existe $v_n \in H^2(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} > n |||v_n|||$. Luego, defina $w_n := \frac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}}$, observe que $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$, note que $|||w_n||| < \frac{1}{n}$, y aplique el hecho que la inclusión de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ es compacta.

- b) (LEMA DE DENY-LIONS). Considere el espacio cociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma $\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \inf_{p \in P_1(\Omega)} \|v - p\|_{H^2(\Omega)}$, y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega).$$

Demuestre que $|\cdot|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \leq \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$$

$$\leq C |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \quad \forall [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega).$$

IND.: Note que para todo $p \in P_1(\Omega)$ y para todo α con $|\alpha| = 2$ se tiene $\partial^\alpha p = 0$. Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.

- c) (LEMA DE BRAMBLE-HILBERT). Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p \quad \forall p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq C |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega).$$

IND.: Note que $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v - p) \quad \forall p \in P_1(\Omega)$, y luego aplique el Lema de Deny-Lions.

89. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ y sea $\mathcal{T} := \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ una triangularización de Ω , es decir:

- i) $\bar{T}_j$ es un triángulo con interior no-vacío $\quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$,
- ii) $T_i \cap T_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$, y
- iii) $\bar{\Omega} = \cup \{\bar{T}_j : j \in \{1, \dots, N\}\}$.

- a) Defina el subespacio de $[L^2(\Omega)]^2$

$$H := \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j) \quad \forall j \in \{1, \dots, N\} \},$$

provisto de la norma

$$\|\boldsymbol{\tau}\| := \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \sum_{j=1}^N \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{L^2(T_j)}^2 \right\}^{1/2} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H,$$

y demuestre que $(H, \|\cdot\|)$ es un espacio de Hilbert real.

IND.: note que la pertenencia local $\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j)$ está dada en el sentido distribucional, lo cual significa que existe $z_j \in L^2(T_j)$ tal que

$$-\int_{T_j} \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx = \int_{T_j} z_j \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(T_j).$$

En este caso se escribe $z_j = \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})$ en T_j (distribucionalmente).

b) Pruebe que existe un único $\boldsymbol{\sigma} \in H$ tal que $\|\boldsymbol{\sigma}\| \leq |\Omega|^{1/2}$ y

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx + \sum_{j=1}^N \int_{T_j} (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) - 1) \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H.$$

90. Sea $\Omega := (0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbf{R}^2$ y considere el espacio de Hilbert $(H(\operatorname{div}; \Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde

$$H(\operatorname{div}; \Omega) := \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(\Omega) \}$$

y

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \int_{\Omega} \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\zeta}) \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx \quad \forall \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div}; \Omega).$$

Además, sea S el subespacio de $H(\operatorname{div}; \Omega)$ dado por

$$S := \{ \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma x_1, \beta + \gamma x_2) \, \forall x := (x_1, x_2) \in \Omega; \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \},$$

y sea $\boldsymbol{\sigma} \in H(\operatorname{div}; \Omega)$ definida por $\boldsymbol{\sigma}(x) = (x_1 x_2, x_1 + x_2) \, \forall x := (x_1, x_2) \in \Omega$. Aplique el teorema de caracterización respectivo y encuentre la mejor aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$ por elementos de S , con respecto a la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

91. Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H -elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H , y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere un funcional $F_n \in H'_n$ y una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \rightarrow \mathbf{R}$. Suponga también que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n , tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha} \|v_n\|_H^2 \, \forall v_n \in H_n, \forall n \in \mathbf{N}$.

a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H \quad \text{y} \quad A_n(u_n, v_n) = F_n(v_n) \quad \forall v_n \in H_n.$$

b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$\|u - u_n\|_H \leq C \left(\inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H + \|\mathbf{A}(v_n) \circ \mathbf{i}_n - \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H'_n} \right\} + \|F \circ \mathbf{i}_n - F_n\|_{H'_n} \right),$$

donde $\mathbf{A} : H \rightarrow H'$ y $\mathbf{A}_n : H_n \rightarrow H'_n$ son los operadores lineales y acotados inducidos por A y A_n , respectivamente, e $\mathbf{i}_n : H_n \rightarrow H$ es la inyección canónica, esto es $\mathbf{i}_n(v_n) = v_n \, \forall v_n \in H_n$.

92. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert y sea $P \in \mathcal{L}(H, H)$, no trivial. Se dice que P es un PROYECTOR si satisface $P^2 = P$. En tal caso se dice que P es un PROYECTOR ORTOGONAL si además verifica que $\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in R(P), \quad \forall v \in N(P)$.

a) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es un proyector entonces $H = N(P) \oplus R(P)$ y $\|P\| \geq 1$.

b) Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) P es un proyector ortogonal.
- ii) $R(P) = N(P)^\perp$.
- iii) P es autoadjunto

c) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es un proyector ortogonal entonces $\|P\| = 1$.

93. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno: $-\Delta u = f$ en Ω , $u = 0$ en $\partial\Omega$. Se puede demostrar que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \tau \, dx + \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\tau) \, dx - \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\sigma) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (19)$$

para todo $(\tau, v) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $\sigma := \nabla u$ en Ω representa una incógnita adicional. Además, a partir de esta relación, y dado $\delta \in \mathbf{R}$, se deduce que

$$\delta \int_{\Omega} (\nabla u - \sigma) \cdot (\nabla v + \tau) \, dx = 0 \quad \forall (\tau, v) \in \mathbf{H} := H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad (20)$$

y también

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma) \operatorname{div}(\tau) \, dx = - \int_{\Omega} f \operatorname{div}(\tau) \, dx \quad \forall \tau \in H(\text{div}; \Omega). \quad (21)$$

De este modo, sumando (19), (20) y (21), se obtiene una formulación variacional mixta modificada, la cual tiene la forma: Hallar $(\sigma, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\sigma, u), (\tau, v)) = F(\tau, v) \quad \forall (\tau, v) \in \mathbf{H}, \quad (22)$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}$ es una forma bilineal y $F : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}$ es un funcional lineal.

Demuestre que, eligiendo δ convenientemente, el problema (22) tiene una única solución $(\sigma, u) \in \mathbf{H} := H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

IND.: La norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$, es decir existe $c > 0$ tal que

$$c \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq |v|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

94. Sean $n \in \mathbf{N}$ y $X := \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{R})$, el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, provisto del producto escalar $\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^t B)$ $\forall A, B \in X$.

a) Demuestre que $X = X_{\text{sim}} \oplus X_{\text{asim}}$, donde

$$X_{\text{sim}} = \{A \in X : A^t = A\} \quad \text{y} \quad X_{\text{asim}} = \{A \in X : A^t = -A\}.$$

b) Sea $C := (c_{ij})_{n \times n} \in X$ tal que $c_{ij} = 1 \quad \forall i \geq j$ y $c_{ij} = 0 \quad \forall i < j$. Encuentre las mejores aproximaciones de C por matrices de X_{sim} y X_{asim} , con respecto a la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

95. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \rightarrow H$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H .

a) Sea $y \in H$ y suponga que existe $\tilde{y} \in H$ tal que

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, \tilde{y} \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Demuestre que dicho $\tilde{y}$ es único.

b) Considere el conjunto

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) := \{y \in H : \text{existe } \tilde{y} \in H \text{ tal que } \langle A(x), y \rangle = \langle x, \tilde{y} \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)\},$$

y defina el operador $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \rightarrow H$ dado por $\tilde{A}(y) := \tilde{y} \quad \forall y \in \mathcal{D}(\tilde{A})$. Demuestre que $\tilde{A}$ es lineal y cerrado.

96. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert y sea $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(H, H)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : H \rightarrow H$, y tal que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. El objetivo de este ejercicio es probar que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)}$, para cuyo efecto proceda como se indica:

a) Sea S un subespacio de dimensión 2 de H y sea $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S, S)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : S \rightarrow S$, y tal que $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}$. Pruebe que $S = R(\mathbf{Q}) \oplus R(\mathbf{I} - \mathbf{Q})$ y concluya que existen vectores no nulos $p, q, r, s \in S$ que satisfacen $\langle p, q \rangle = \langle r, s \rangle = 1$, tales que

$$\mathbf{Q}(v) = \langle q, v \rangle p \quad \text{y} \quad (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) = \langle s, v \rangle r \quad \forall v \in S.$$

b) A partir de la identidad $v = \mathbf{Q}(v) + (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) \quad \forall v \in S$, deduzca que $\|p\|^2 \|q\|^2 = \|r\|^2 \|s\|^2 = 1 - \langle p, r \rangle \langle q, s \rangle$ y concluya así que

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S, S)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S, S)}.$$

c) Dado $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$, considere el subespacio S generado por los vectores x y $\mathbf{P}(x)$ y defina $\mathbf{Q} := \mathbf{P}|_S$. Demuestre que $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S, S)$, observe que la dimensión de S es ≤ 2 , y luego pruebe, usando b), que $\|(\mathbf{I} - \mathbf{P})(x)\| \leq \|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)}$.

d) Concluya, a partir de c), que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)}$.

97. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ .

- a) Considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ con norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y semi-norma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$. Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|_{H^1(\Omega)}^2 + \left(\int_{\Omega} v \, dx \right)^2 \right\}^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

y demuestre que existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 |||v||| \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 |||v||| \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

IND.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que $\forall k \in \mathbf{N}$ existe $v_k \in H^1(\Omega)$ tal que $\|v_k\|_{H^1(\Omega)} > k |||v_k|||$. Recuerde que la inclusión de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, y que si $w \in L^2(\Omega)$ es tal que $\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$, entonces necesariamente w es constante en Ω .

- b) Considere el problema de valores de contorno:

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad \int_{\Omega} u \, dx = 0,$$

donde $f \in L^2(\Omega)$ es tal que $\int_{\Omega} f \, dx = 0$, y demuestre que su formulación débil se reduce a: Hallar $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \lambda \int_{\Omega} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

$$\mu \int_{\Omega} u \, dx = 0 \quad \forall \mu \in \mathbf{R}.$$

Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene solución única, la cual depende continuamente de f .

98. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base de un subespacio U de X .

- a) Demuestre que existen $F_1, F_2, \dots, F_n \in X'$ tales que $F_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$.
- b) Pruebe que $X = U \oplus V$, donde $V := {}^{\circ}\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$.

99. Dado $p \geq 1$, considere el espacio vectorial normado

$$\ell_p(\mathbb{C}) := \{ \mathbf{x} := \{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} : x_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbf{N} \text{ y } \sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^p < +\infty \},$$

provisto de la suma y multiplicación por escalar usuales, y cuya norma está dada

$$\|\mathbf{x}\| := \left\{ \sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^p \right\}^{1/p}. \text{ Demuestre que } \ell_p(\mathbb{C}) \text{ es separable.}$$

100. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $J : V \rightarrow \mathbf{R}$ un funcional NO-LINEAL. Se dice que J es CONTINUO (resp. DÉBILMENTE CONTINUO) si para toda sucesión $\{v_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq V$ tal que $v_n \rightarrow v \in V$ (resp. $v_n \xrightarrow{w} v \in V$) se tiene que

$$J(v_n) \rightarrow J(v) \in \mathbf{R}.$$

- a) Determine cual de estos dos conceptos de continuidad implica al otro.

Un subconjunto U de V se dice DÉBILMENTE COMPACTO si toda sucesión $\{v_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de U posee una subsucesión débilmente convergente en U .

- b) Pruebe que si U es un subconjunto compacto de V y $J : V \rightarrow \mathbf{R}$ es continuo (o bien si U es un subconjunto débilmente compacto de V y $J : V \rightarrow \mathbf{R}$ es débilmente continuo), entonces existe $u \in U$ tal que

$$J(u) = \min_{v \in U} J(v).$$

Un subconjunto U de V se dice DÉBILMENTE CERRADO si el límite de toda sucesión $\{v_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de U que converge débilmente, pertenece a U .

- c) Demuestre que si V es reflexivo, U es un subconjunto acotado y débilmente cerrado de V , y $J : V \rightarrow \mathbf{R}$ es débilmente continuo, entonces existe $u \in U$ tal que

$$J(u) = \min_{v \in U} J(v).$$

101. (OPERADOR NORMAL). Sea H un Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Se dice que $A \in \mathcal{L}(H, H)$ es un operador normal si $A^* A = A A^*$. Pruebe en este caso que:

- a) $\lambda \in VP(A)$ si y sólo si $\bar{\lambda} \in VP(A^*)$. Concluya además que $N(A - \lambda I) = N(A^* - \bar{\lambda} I)$.
- b) Si $\lambda, \mu \in VP(A)$, $\lambda \neq \mu$, entonces $N(A - \lambda I) \perp N(A^* - \mu I)$.

102. (VALORES PROPIOS DE Δ). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Lipschitz-continua. Demuestre que existen una base Hilbertiana $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de $L^2(\Omega)$, y una sucesión $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de números reales con $\lambda_n > 0$, y $\lambda_n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$, tales que $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, y $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$ en Ω . Se dice aquí que los λ_n son los valores propios del Laplaciano (con condición de Dirichlet), y que las e_n son las funciones propias asociadas.

103. (ESPECTRO AUTOADJUNTO). Sean H un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(H, H)$ un operador autoadjunto. Dado un subespacio cerrado S de H invariante con respecto a A , denote por $\sigma(A, S)$ y $\sigma(A, S^\perp)$ los espectros de las restricciones $A|_S$ y $A|_{S^\perp}$, respectivamente. Demuestre que $\sigma(A) = \sigma(A, S) \cup \sigma(A, S^\perp)$.

104. Sea $X := C([0, 1])$ provisto de la norma uniforme

$$\|u\| := \max \{ |u(t)| : t \in [0, 1] \} \quad \forall u \in X,$$

y dado $f \in X$, fijo, defina el funcional lineal $F : X \rightarrow \mathbf{R}$ como

$$F(u) := \int_0^1 u(t) f(t) dt \quad \forall u \in X.$$

Demuestre que $F \in X'$ y $\|F\| = \int_0^1 |f(t)| dt$.

INDICACIÓN: Para cada $n \in \mathbf{N}$ considere $x_n \in X$ dada por $x_n(t) := u_n(f(t))$ $\forall t \in [0, 1]$, donde $u_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es la función continua

$$u_n(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 1/n, \\ -1 & \text{si } t \leq -1/n, \\ nt & \text{si } -1/n \leq t \leq 1/n, \end{cases}$$

y luego use x_n para probar que $\|F\| \geq \int_0^1 |f(t)| dt - \frac{1}{n}$.

105. Dados $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$, $b \neq \mathbf{0}$, defina el conjunto solución

$$S(A, b) := \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = b\}.$$

Suponga que $S(A, b) \neq \emptyset$ y pruebe que existe $z \in \mathbf{R}^n$ tal que

$$\inf_{x \in S(A, b)} \langle z, x \rangle_{\mathbf{R}^n} > 0.$$

106. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert real y sea $A \in \mathcal{L}(H, H)$ el operador inducido por una forma bilineal y acotada $a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$. Además, sea Π la proyección ortogonal de H sobre un subespacio cerrado S , y suponga que existe $\alpha > 0$ tal que $a(v, v) \geq \alpha \langle v, v \rangle \quad \forall v \in S$. Demuestre que $\Pi A : S \rightarrow S$ es una biyección lineal.

107. Sean U, V y W subespacios de un espacio de Hilbert H . Pruebe que

- a) $(U^\perp)^\perp = \bar{U}$.
- b) $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$.
- c) $\overline{V^\perp + W^\perp} = (\bar{V} \cap \bar{W})^\perp$.

108. Sea $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua y defina el operador integral $\mathbf{K} : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ por

$$\mathbf{K}(u)(t) := \int_0^1 K(t, s) u(s) ds \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall u \in C[0, 1].$$

Aplique el Teorema de Arzelá - Ascoli para probar que $\mathbf{K}$ es compacto.

109. Este ejercicio debe resolverse sin aplicar el Teorema de Hahn-Banach, en ninguna de sus formas.

i) Sea S un subespacio de un espacio vectorial normado X sobre $\mathbf{R}$ y sea $f \in S'$. Construya explícitamente un funcional lineal y acotado $g : \bar{S} \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $g(x) = f(x) \quad \forall x \in S$ y $\|g\|_{\bar{S}'} = \|f\|_S$.

ii) Sea S un subespacio de un espacio de Hilbert X sobre $\mathbf{R}$ y sea $f \in S'$. Demuestre que existe $F \in X'$ tal que $F(x) = f(x) \quad \forall x \in S$ y $\|F\|_{X'} = \|f\|_S$.

110. Sea S un subespacio cerrado propio de un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ sobre el cuerpo $\mathbf{R}$. Aplique el TEOREMA DE HAHN-BANACH (SEGUNDA VERSIÓN GEOMÉTRICA) para demostrar que existe $F \in X'$ tal que $F \neq \Theta$ y $F(x) = 0$ para todo $x \in S$.

111. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sean $V_1, V_2, \dots, V_N$ subespacios cerrados mutuamente ortogonales de H , esto es $v_i \perp v_j \quad \forall v_i \in V_i, \forall v_j \in V_j, \forall i \neq j$. Demuestre que $\mathbf{I} - \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \dots + \mathbb{P}_N$, donde $\mathbb{P} : H \rightarrow V_1^\perp \cap V_2^\perp \cap \dots \cap V_N^\perp$ y $\mathbb{P}_j : H \rightarrow V_j$ son los proyectores ortogonales respectivos.

112. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ y considere el espacio de Hilbert $V := [L^2(\Omega)]^{n \times n}$ sobre $\mathbf{R}$ con el producto escalar $\langle \sigma, \tau \rangle := \int_{\Omega} \sigma : \tau$, donde

$$\sigma : \tau := \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \tau_{ij} \quad \forall \sigma := (\sigma_{ij})_{n \times n}, \quad \tau := (\tau_{ij})_{n \times n} \in V.$$

A su vez, defina el subespacio $U := \{\alpha \mathbb{A} + \beta \mathbb{B} : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} = \langle \{\mathbb{A}, \mathbb{B}\} \rangle$, donde $\mathbb{A} := (a_{ij})_{n \times n}$ y $\mathbb{B} := (b_{ij})_{n \times n}$ están definidos por

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad \text{y} \quad b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}.$$

Encuentre $U^\perp$ y defina explícitamente los proyectores ortogonales sobre U y $U^\perp$. Qué sucede con estos proyectores si U se reemplaza por $\langle \{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbf{I}\} \rangle$, donde $\mathbf{I}$ es el tensor identidad de V ?

113. Sean $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ y $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ con normas inducidas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, respectivamente, y sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ tal que $\|T(x)\|_2 = \|x\|_1 \quad \forall x \in H_1$. Demuestre que $\langle T(x), T(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1 \quad \forall x, y \in H_1$.

IND. Considere las expresiones nulas $\|T(x+y)\|^2 - \|x+y\|^2$ y $\|T(x+iy)\|^2 - \|x+iy\|^2$.

114. Sea $\ell_2(\mathbb{C}) := \left\{ \mathbf{u} := \{u_n\}_{n \in \mathbf{N}} : u_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \right\}$, provisto del producto

escalar $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} u_n \bar{v}_n \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ell_2(\mathbb{C})$. Demuestre que $(\ell_2(\mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es

Hilbert sobre $\mathbb{C}$.

115. Dado Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, defina el operador $A : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ por

$$A(u) := \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_j \right\} v_j \quad \forall u \in H^1(\Omega), \text{ donde } \{u_1, u_2, \dots, u_N\} \subseteq H^1(\Omega)$$

y $\{v_1, v_2, \dots, v_N\} \subseteq L^2(\Omega)$. Demuestre que A es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto A^* .

116. Sea $X := C[0, 1]$ provisto de la norma uniforme, y sean $\{p_j\}_{j \in \mathbf{N}}, \{q_j\}_{j \in \mathbf{N}} \subseteq X$ tales que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} p_j(s) q_j(t)$ converge uniformemente a una función continua $K : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$, es decir

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \max_{(s,t) \in [0,1] \times [0,1]} \left| K(s,t) - \sum_{j=1}^N p_j(s) q_j(t) \right| \right\} = 0.$$

A su vez, sea $F_j \in X'$ definido por $F_j(u) := \int_0^1 q_j(t) u(t) dt \quad \forall u \in X$. Pruebe que para todo $G \in X'$, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} G(p_j) F_j$ es convergente en X' . Identifique el valor del límite respectivo en términos del adjunto de un operador conveniente.

117. Dado Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, defina el operador $A : H^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ por

$$A(u) := \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Omega} \Delta u \Delta u_j \right\} v_j \quad \forall u \in H^2(\Omega), \text{ donde } \{u_1, u_2, \dots, u_N\} \subseteq H^2(\Omega)$$

y $\{v_1, v_2, \dots, v_N\} \subseteq H^1(\Omega)$. Demuestre que A es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto A^* .

118. Sea Ω un dominio poligonal convexo de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ , y dado $f \in L^2(\Omega)$, considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:

$$\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (23)$$

i) Introduzca la incógnita auxiliar $\sigma := \nabla u$ en Ω y pruebe que una formulación variacional mixta de (23) se reduce a: Hallar $\sigma \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \tau - \int_{\Omega} \text{div}(\sigma) \text{div}(\tau) = - \int_{\Omega} f \text{div}(\tau) \quad \forall \tau \in H(\text{div}; \Omega). \quad (24)$$

ii) Defina el operador $P : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$ que a cada $\tau \in H(\text{div}; \Omega)$ le asigna $P(\tau) := \nabla z$, donde $z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ es la única solución del problema: $\Delta z = \text{div}(\tau)$ en Ω , $z = 0$ en Γ . Pruebe que P es un proyector compacto, y concluya que

$$H(\text{div}; \Omega) = P(H(\text{div}; \Omega)) \oplus (I - P)(H(\text{div}; \Omega)).$$

- iii) Utilice la descomposición anterior de $H(\operatorname{div}; \Omega)$ para demostrar que (24) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $\sigma \in H(\operatorname{div}; \Omega)$ tal que

$$A(\sigma, \tau) + K(\sigma, \tau) = F(\tau) \quad \forall \tau \in H(\operatorname{div}; \Omega), \quad (25)$$

donde

$$A(\sigma, \tau) := - \int_{\Omega} P(\sigma) \cdot P(\tau) - \int_{\Omega} \operatorname{div} P(\sigma) \operatorname{div} P(\tau) + \int_{\Omega} (I - P)(\sigma) \cdot (I - P)(\tau),$$

$$K(\sigma, \tau) := 2 \int_{\Omega} P(\sigma) \cdot P(\tau) + \int_{\Omega} P(\sigma) \cdot (I - P)(\tau) + \int_{\Omega} (I - P)(\sigma) \cdot P(\tau),$$

y F es el funcional definido por el lado derecho de (24).

- iv) Sean $\mathbf{A} : H(\operatorname{div}; \Omega) \rightarrow H(\operatorname{div}; \Omega)$ y $\mathbf{K} : H(\operatorname{div}; \Omega) \rightarrow H(\operatorname{div}; \Omega)$ los operadores lineales y acotados asociados a las formas bilineales A y K , respectivamente. Demuestre que $\mathbf{A}$ es biyectivo y que $\mathbf{K}$ es compacto.

IND. Defina el operador $S(\tau) := (I - 2P)(\tau)$ y considere la expresión $A(\tau, S(\tau))$ para probar que A satisface la condición inf-sup continua.

119. Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $A : H \rightarrow H$ un operador lineal tal que $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A(y) \rangle \quad \forall x, y \in H$. Pruebe que A es acotado.

120. Sea X un espacio vectorial normado. Un subespacio W de X' se dice SATURADO si para todo $F \in X' - W$ existe $x \in {}^oW$ tal que $F(x) \neq 0$.

- a) Pruebe que si X es reflexivo y W es un subespacio cerrado de X' , entonces W es saturado.
b) Pruebe que un subespacio W de X' es saturado sí y sólo sí $W = ({}^oW)^o$.

Un subconjunto W de X' se dice DÉBILMENTE* CERRADO si el límite de toda sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de W que converge débilmente*, pertenece a W .

- c) Pruebe que si un subespacio W de X' es saturado entonces él es débilmente* cerrado.

121. Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $A \in \mathcal{L}(H, H)$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un VALOR PROPIO de A si existe $x \neq \theta$ tal que $Ax = \lambda x$.

- a) Pruebe que $|\lambda| \leq \|A\|$.
b) Pruebe que si A es autoadjunto, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.
c) Pruebe que si A es autoadjunto, y $\mu \neq \lambda$ es otro valor propio de A , entonces $N(\lambda \mathbf{I} - A) \perp N(\mu \mathbf{I} - A)$.

122. a) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que K transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones convergentes de Y . Pruebe que K es compacto.

- b) Sea X un espacio de Hilbert y sean $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X$, $x \in X$, tales que $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Pruebe que $x_n \rightarrow x$.
- c) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operador compacto. Aplique a) y b) para probar que $K^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ también es compacto.

123. Sean V y W subespacios cerrados de un Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, y sean $P : H \rightarrow V$ y $Q : H \rightarrow W$ los proyectores ortogonales respectivos. Demuestre que

$$\langle (Q - P)(x), x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H \quad \text{si y sólo si} \quad V \subseteq W.$$

124. Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbf{R}$ y sea $\mathbf{a} : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ tal que

- i) $\mathbf{a}(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in X$.
- ii) $\mathbf{a}(x, y) = \mathbf{a}(y, x) \quad \forall x, y \in X$.
- iii) $\mathbf{a}(\alpha x + \beta z, y) = \alpha \mathbf{a}(x, y) + \beta \mathbf{a}(z, y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \forall x, y, z \in X$.

Pruebe que

$$|\mathbf{a}(x, y)| \leq \frac{\epsilon}{2} \mathbf{a}(x, x) + \frac{1}{2\epsilon} \mathbf{a}(y, y) \quad \forall x, y \in X, \quad \forall \epsilon > 0.$$

125. Sea $\Omega :=]0, 1]^2 \subseteq \mathbf{R}^2$ y considere el espacio de Hilbert $(H(\text{rot}; \Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde

$$H(\text{rot}; \Omega) := \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \text{rot } v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$\langle v, w \rangle := \int_{\Omega} v \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \text{rot } v \, \text{rot } w \, dx \quad \forall v, w \in H(\text{rot}; \Omega).$$

Además, sea S el subespacio de $H(\text{rot}; \Omega)$ dado por

$$S := \{ \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma x_2, \beta - \gamma x_1) \quad \forall x := (x_1, x_2) \in \Omega; \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \},$$

y sea $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{rot}; \Omega)$ definida por $\boldsymbol{\sigma}(x) = (x_1, x_2) \quad \forall x := (x_1, x_2) \in \Omega$. Encuentre $S^\perp$ y defina explícitamente los proyectores ortogonales sobre S y $S^\perp$. Además, encuentre la mejor aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$ por elementos de $S^\perp$, con respecto a la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

126. Sean U y V subespacios cerrados de un espacio vectorial normado X , y suponga que existe $r > 0$ tal que

$$r \sup_{\substack{x \in \overline{U+V} \\ \|x\| \leq 1}} F(x) \leq \sup_{\substack{x \in U \\ \|x\| \leq 1}} F(x) + \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \leq 1}} F(x) \quad \forall F \in X'.$$

Razone por contradicción y aplique la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach para concluir que

$$B_{\overline{U+V}}(\theta, r) \subseteq \overline{B_U(\theta, 1) + B_V(\theta, 1)}.$$

127. Sean X e Y Banach. Se dice que un operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ admite una clausura si existe un operador lineal $B : \mathcal{D}(B) \subseteq X \rightarrow Y$ tal que B es una extensión de A y $\overline{G(B)} = \overline{G(A)}$. Demuestre que A admite una clausura si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $(x_n, A(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\mathbf{0}, y)$, con $y \in Y$, se tiene necesariamente que $y = \mathbf{0}$.
128. El presente ejercicio apunta a aplicar la teoría desarrollada para el análisis de la función spline de interpolación a otras dos situaciones distintas, pero con características similares.

- a) Sean $\Omega :=]a, b[$, $n \in \mathbf{N}$, y considere la partición $a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$. Además, sean $m \in \mathbf{N}$ y $\alpha, \beta > 0$. Luego, dado $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \dots, z_n)^t \in \mathbf{R}^n$, se pide analizar la solubilidad del siguiente problema: Hallar $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$ tal que $u_1(t_i) - u_2(t_i) = z_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, y de modo que

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} (u_1^{(m)}(t))^2 dt + \beta \int_{\Omega} (u_2^{(m)}(t))^2 dt \\ &= \min_{\substack{\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \\ v_1(t_i) - v_2(t_i) = z_i \quad \forall i}} \left\{ \alpha \int_{\Omega} (v_1^{(m)}(t))^2 dt + \beta \int_{\Omega} (v_2^{(m)}(t))^2 dt \right\} \end{aligned}$$

Se genera algún cambio en su análisis si la condición de interpolación se reemplaza por $v_1(t_i) = v_2(t_i) = z_i \quad \forall i$? Explique y fundamente.

- b) Sea S un subespacio de dimensión finita N de un Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$, y sea $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ una base de S . Además, sea $\Pi : H \rightarrow S^\perp$ el proyector ortogonal. Demuestre que para cada $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \dots, z_N)^t \in \mathbf{R}^N$ existe un único $u \in H$ tal que $\langle u, p_i \rangle_H = z_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$, y de modo que

$$\|\Pi(u)\|_H = \min_{\substack{v \in H \\ \langle v, p_i \rangle_H = z_i \quad \forall i}} \|\Pi(v)\|_H$$

Deduzca un algoritmo para calcular u .

129. Sea G un subespacio de un espacio vectorial normado X , y sea N un subespacio del dual de un espacio de Banach reflexivo Y . Demuestre que:

- a) $\text{dist}(f, G^\circ) = \sup_{\substack{x \in \overline{G} \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| \quad \forall f \in X'.$
- b) $\overline{N} = ({}^\circ N)^\circ.$
- c) $\text{dist}(y, {}^\circ N) = \sup_{\substack{g \in \overline{N} \\ \|g\| \leq 1}} |g(y)| \quad \forall y \in Y.$
- d) $\text{dist}(g, \overline{N}) = \sup_{\substack{y \in {}^\circ N \\ \|y\| \leq 1}} |g(y)| \quad \forall g \in Y'.$

130. Sea Ω un dominio convexo y acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ , y sean $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ los productos escalares de $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente.

a) Pruebe que para todo $r \in L^2(\Omega)$ existe un único $z \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\langle z, w \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle r, w \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

b) Deduzca que z es la única solución débil del problema de valores de contorno:

$$-\Delta z + z = r \quad \text{en } \Omega, \quad \nabla z \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en } \Gamma,$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal sobre Γ , y **observe** (no lo demuestre) que la convexidad de Ω garantiza que $z \in H^2(\Omega)$.

c) Defina un operador lineal apropiado y demuestre, utilizando el Teorema del Grafo Cerrado, que existe $C > 0$ tal que

$$\|z\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|r\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall r \in L^2(\Omega).$$

131. Sean H_1, H_2, Q_1, Q_2 espacios de Hilbert sobre $\mathbf{R}$, y sean $a : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbf{R}$ y $b_j : H_j \times Q_j \rightarrow \mathbf{R}$, $j \in \{1, 2\}$, formas bilineales acotadas con operadores inducidos $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ y $\mathbf{B}_j \in \mathcal{L}(H_j, Q_j)$, $j \in \{1, 2\}$, respectivamente. También, sea K_j el espacio nulo de $\mathbf{B}_j$, $j \in \{1, 2\}$, y sea Π_2 el proyector ortogonal de H_2 en K_2 . Suponga que:

i) $\Pi_2 \mathbf{A} : K_1 \rightarrow K_2$ es un isomorfismo.

ii) existen $\beta_1, \beta_2 > 0$ tales que

$$\|\mathbf{B}_j^*(q)\|_{H_j} := \sup_{\substack{v \in H_j \\ v \neq 0}} \frac{b_j(v, q)}{\|v\|_{H_j}} \geq \beta_j \|q\|_{Q_j} \quad \forall q \in Q_j, \quad \forall j \in \{1, 2\}.$$

Pruebe que, dados $F \in H'_2$ y $G \in Q'_1$, existe un único $(u, p) \in H_1 \times Q_2$ tal que

$$a(u, v) + b_2(v, p) = F(v) \quad \forall v \in H_2,$$

$$b_1(u, q) = G(q) \quad \forall q \in Q_1.$$

132. a) Dado $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbf{R}$ con aplicación de Riesz $\mathcal{R} : X' \rightarrow X$, defina $[\cdot, \cdot] : X' \times X' \rightarrow \mathbf{R}$ por

$$[F, G] := \langle \mathcal{R}(F), \mathcal{R}(G) \rangle \quad \forall F, G \in X',$$

y pruebe que $(X', [\cdot, \cdot])$ es un espacio de Hilbert.

b) Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbf{R}$ y denote por X'' al dual del dual X' , es decir

$$X'' := \left\{ \mathcal{F} : X' \rightarrow \mathbf{R} : \mathcal{F} \text{ es lineal y acotado} \right\}.$$

Demuestre que para cada $x \in X$ el funcional $J(x) : X' \rightarrow \mathbf{R}$ definido por $J(x)(F) := F(x) \quad \forall F \in X'$ es un elemento de X'' , y que la aplicación resultante $J : X \rightarrow X''$ es inyectiva e isométrica. Luego, utilice a) para probar que si X es un Hilbert entonces J es biyectiva.

133. Sea S un subespacio vectorial de un espacio vectorial normado X tal que $\overline{S} \neq X$. Demuestre (DE DOS MANERAS DISTINTAS) que existe $F \in X'$ tal que $\|F\| \neq 0$ y $F(x) = 0 \quad \forall x \in S$.

134. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua para la cual existen constantes $M, \beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre, utilizando algún resultado de dualidad, que para todo $f \in L^2(\Omega)$ existe un único $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \left\{ \kappa \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{\kappa} u v \right\} = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

y

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\{ \frac{M}{\min \left\{ \beta, \frac{1}{M} \right\}} \right\}^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

135. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}$, considere los espacios de Hilbert reales dados por $X := L^2(\Omega)$ e $Y := \mathbf{R}^{2 \times 2}$ provistos de los productos escalares

$$\langle u, v \rangle_X := \int_{\Omega} u v \quad \forall u, v \in X, \quad \langle A, B \rangle_Y := \text{tr}(A^t B) \quad \forall A, B \in Y,$$

y defina el operador $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ por

$$\mathcal{A}(u) := \begin{pmatrix} \int_{\Omega} u & \int_{\Omega} x u \\ \int_{\Omega} x u & \int_{\Omega} x^2 u \end{pmatrix} \quad \forall u \in X.$$

- i) Demuestre que $\mathcal{A}$ es lineal y acotado y calcule explícitamente el operador adjunto $\mathcal{A}^*$ y los espacios $N(\mathcal{A})$, $R(\mathcal{A})$, $N(\mathcal{A}^*)$ y $R(\mathcal{A}^*)$.
- ii) Encuentre un subespacio cerrado S de X tal que $\mathcal{A}|_S : S \rightarrow R(\mathcal{A})$ sea biyectivo.
- iii) Defina $\tilde{Y} := \{B \in Y : B^t = -B\}$ y demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|\mathcal{A}^*(A)\|_X \geq C \inf_{B \in \tilde{Y}} \|A - B\|_Y \quad \forall A \in Y.$$

- iv) Reemplace $X := L^2(\Omega)$ por $X := H^1(\Omega)$ con su producto escalar habitual, y recalcula el operador adjunto $\mathcal{A}^*$.

136. Sean X , Y_1 e Y_2 espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, y sean $A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subseteq X \rightarrow Y_1$ y $A_2 : \mathcal{D}(A_2) \subseteq X \rightarrow Y_2$ operadores lineales cerrados. Considere el espacio producto $Y := Y_1 \times Y_2$ y demuestre que el operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$, definido por $A(x) := (A_1(x), A_2(x)) \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) := \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_2)$, también es cerrado. Recíprocamente, suponga que $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ es lineal cerrado, y que para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $\{A_i(x_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ es convergente en Y_i , $i \in \{1, 2\}$, existe una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ para la cual $\{A_j(x_n^{(1)})\}_{n \in \mathbf{N}}$ es convergente en Y_j , $\forall j \in \{1, 2\}$. Demuestre en tal caso que para cada $i \in \{1, 2\}$, $A_i|_{\mathcal{D}(A)}$ es cerrado.

137. Determine, **justificadamente**, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- i) Todo operador lineal, acotado y biyectivo de un Banach X en un Banach Y es compacto.
- ii) Dados H y Q espacios de Hilbert se tiene que $A \in \mathcal{L}(H, Q)$ es biyectivo si y sólo si $A^* \in \mathcal{L}(Q, H)$ es biyectivo.
- iii) Existen operadores compactos que no son cerrados.
- iv) Dados X e Y espacios de Banach, el inverso de un operador lineal, cerrado y biyectivo $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$, también es cerrado.
- v) Dados X e Y espacios de Banach, el inverso de un operador lineal, cerrado y biyectivo $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$, es acotado.
- vi) Dados X e Y espacios de Banach, Y de dimensión finita, y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, el rango del operador adjunto $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$ es cerrado.

138. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ lineal tal que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Con el objeto de definir el operador adjunto $A' : \mathcal{D}(A') \subseteq Y' \rightarrow X'$, se introduce el subespacio de Y' dado por

$$\mathcal{D}(A') := \left\{ G \in Y' : \text{ existe } c > 0 \text{ tal que } |G(A(x))| \leq c \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \right\}.$$

- a) Dado $G \in \mathcal{D}(A')$, defina el funcional $f : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathbf{R}$ por $f(x) := G(A(x))$ $\forall x \in \mathcal{D}(A)$, y demuestre que existe un único $F \in X'$ tal que $F|_{\mathcal{D}(A)} = f$.
- b) De acuerdo al análisis en a), defina $A' : \mathcal{D}(A') \subseteq Y' \rightarrow X'$ por $A'(G) := F$ $\forall G \in \mathcal{D}(A')$, y pruebe que A' es lineal y cerrado.
- c) Suponga ahora que A es cerrado, en cuyo caso se sabe que $N(A) = {}^o R(A')$, y demuestre que si X es reflexivo entonces $N(A)^o = \overline{R(A')}$.

139. a) Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ biyectivo. Demuestre que X es reflexivo (separable) si y sólo si Y es reflexivo (separable).
- b) Sean X, Y espacios de Banach separables (reflexivos). Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también es separable (reflexivo).
- c) Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$, considere el espacio de Hilbert $(H(\text{div}; \Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde

$$H(\text{div}; \Omega) := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^n : \text{div } \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega) \right\},$$

y

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \int_{\Omega} \left\{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \text{div } \boldsymbol{\sigma} \text{div } \boldsymbol{\tau} \right\} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega).$$

Asuma que $L^2(\Omega)$ es separable y demuestre que $H(\text{div}; \Omega)$ también lo es.