UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

LISTADO DE EJERCICIOS 408635

Tópicos de Elementos Finitos I

Primer Semestre de 2005 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{div};\Omega) \,:=\, \Big\{ v \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\, v \,:=\, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \,\in\, L^2(\Omega) \Big\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{div};\Omega)} \,:=\, \int_\Omega v\cdot w\, dx \,+\, \int_\Omega \mathrm{div}\, v \;\mathrm{div}\, w\, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

   a) Demuestre que $(H(\mathrm{div};\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{div};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

   b) Pruebe que para todo $g \in [L^2(\Omega)]^n$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g\cdot w\, dx \,+\, \int_\Omega \mathrm{div}\, v_g \;\mathrm{div}\, w\, dx \,=\, \int_\Omega g\cdot w\, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

2. Sea $\Omega \,:=\, (0,1)\times(0,1) \,\subseteq\, \mathbf{R}^2$ y considere el espacio de Hilbert $(H(\mathrm{div};\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde

$$H(\mathrm{div};\Omega) \,:=\, \{\, \boldsymbol{\tau} \,\in\, [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \,\in\, L^2(\Omega)\,\}$$

y

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau}\rangle \,:=\, \int_\Omega \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dx \,+\, \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\zeta})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \qquad \forall\, \boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\tau} \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

Además, sea S el subespacio de $H(\mathrm{div};\Omega)$ dado por

$$S := \{\boldsymbol{\tau} : \; \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma\, x_1, \beta + \gamma\, x_2)\; \forall\, x := (x_1, x_2) \,\in\, \Omega;\; \text{con } \alpha,\, \beta,\, \gamma \,\in\, \mathbf{R}\,\}\,,$$

y sea $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ definida por $\quad \boldsymbol{\sigma}(x) \,=\, (x_1 x_2, x_1 + x_2) \quad \forall\, x := (x_1, x_2) \,\in\, \Omega$. Aplique el teorema de caracterización respectivo y encuentre la mejor aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$ por elementos de S, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

3. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{rot};\Omega) \,:=\, \{\, v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}\, v \,:=\, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \,-\, \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \,\in\, L^2(\Omega)\,\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)} \,:=\, \int_\Omega v\cdot w\, dx \,+\, \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \;\mathrm{rot}\, w\, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

a) Demuestre que $(H(\mathrm{rot};\Omega);\langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que para todo $g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w\, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v_g \,\mathrm{rot}\, w\, dx = \int_\Omega \mathrm{rot}\, g\, \mathrm{rot}\, w\, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

4. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ y sea $\mathcal{T} := \{T_1, T_2, ..., T_N\}$ una triangularización de Ω, es decir:

   i) $\bar{T}_j$ es un triángulo con interior no-vacío $\quad \forall\, j \in \{1,...,N\}$,

   ii) $T_i \cap T_j = \phi \quad \forall\, i \neq j$, y

   iii) $\bar{\Omega} = \cup\{\, \bar{T}_j : \quad j \in \{1,...,N\}\,\}$.

   a) Defina el subespacio de $[L^2(\Omega)]^2$

$$H := \{\, \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j) \quad \forall\, j \in \{1,...,N\}\,\}\,,$$

   provisto de la norma

$$\|\boldsymbol{\tau}\| := \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} + \sum_{j=1}^{N} \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{L^2(T_j)} \right\}^{1/2} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,$$

   y demuestre que $(H, \|\cdot\|)$ es un espacio de Hilbert real.
   Indicación: note que la pertenencia local $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j)$ está dada en el sentido distribucional, lo cual significa que existe $z_j \in L^2(T_j)$ tal que

$$-\int_{T_j} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx = \int_{T_j} z_j\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(T_j)\,.$$

   En este caso se escribe $z_j = \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})$ en T_j (distribucionalmente).

   b) Pruebe que existe un único $\boldsymbol{\sigma} \in H$ tal que $\|\boldsymbol{\sigma}\| \leq |\Omega|^{1/2}$ y

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \sum_{j=1}^{N} \int_{T_j} (\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) - 1\,)\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,.$$

5. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert **complejo**, y sean $u\,,\ v \in H$, $u \neq v$, tales que $\|u\| = \|v\|$. Defina $w := u - v$ y considere la proyección ortogonal $\mathbf{P} : H \to S^\perp$, donde S es el subespacio generado por w. Demuestre que

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{P}(v) = \frac{u+v}{2} + \left\{ \frac{\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(\langle u, v\rangle)}{\|w\|^2} \right\} w\,.$$

   Qué sucede cuando H es un Hilbert **real** ? Interprete gráficamente.

6. Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere un funcional $F_n \in H_n'$ y una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbf{R}$. Suponga también que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha}\, \|v_n\|_H^2 \quad \forall\, v_n \in H_n, \forall\, n \in \mathbf{N}$.

   a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

   $$A(u,v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in H \qquad \text{y} \qquad A_n(u_n, v_n) \,=\, F_n(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

   b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

   $$\|u - u_n\|_H \,\leq\, C \left(\inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H \,+\, \|\mathbf{A}(v_n) \circ \mathbf{i}_n \,-\, \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H_n'} \right\} \right.$$
   $$\left. +\, \|F \circ \mathbf{i}_n \,-\, F_n\|_{H_n'} \right),$$

   donde $\mathbf{A} : H \to H'$ y $\mathbf{A}_n : H_n \to H_n'$ son los operadores lineales y acotados inducidos por A y A_n, respectivamente, e $\mathbf{i}_n : H_n \to H$ es la inyección canónica, esto es $\mathbf{i}_n(v_n) = v_n \quad \forall\, v_n \in H_n$.

7. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $P \in \mathcal{L}(H,H)$, no trivial. Se dice que P es un **proyector** si satisface $P^2 = P$. En tal caso se dice que P es un **proyector ortogonal** si además verifica que $\langle u, v\rangle = 0 \quad \forall\, u \in R(P), \quad \forall\, v \in N(P)$.

   a) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector entonces $H \,=\, N(P) \oplus R(P)$ y $\|P\| \,\geq\, 1$.

   b) Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

      i) P es un proyector ortogonal.

      ii) $R(P) \,=\, N(P)^\perp$.

      iii) P es autoadjunto

   c) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector ortogonal entonces $\|P\| \,=\, 1$.

8. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno: $\quad -\Delta\, u \,=\, f \;$ en $\;\Omega\,, \quad u \,=\, 0 \;$ en $\;\partial\Omega$. Se puede demostrar que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

   $$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dx \,+\, \int_\Omega u\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \,-\, \int_\Omega v\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\, dx \,=\, \int_\Omega f\, v\, dx \tag{1}$$

   para todo $(\boldsymbol{\tau}, v) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω representa una incógnita adicional. Además, a partir de esta relación, y dado $\delta \in \mathbf{R}$, se deduce que

   $$\delta \int_\Omega (\nabla u - \boldsymbol{\sigma})\cdot(\nabla v + \boldsymbol{\tau})\, dx = 0 \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega), \tag{2}$$

y también

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \;=\; -\int_\Omega f \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \,\in\, H(\operatorname{div};\Omega)\,. \tag{3}$$

De este modo, sumando (1), (2) y (3), se obtiene una formulación variacional mixta modificada, la cual tiene la forma: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) \;=\; F(\boldsymbol{\tau}, v) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \,\in\, \mathbf{H}\,, \tag{4}$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es una forma bilineal y $F \,:\, \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es un funcional lineal.

Demuestre que, eligiendo δ convenientemente, el problema (4) tiene una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H} := H(\operatorname{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Indicación: La norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$, es decir existe $c > 0$ tal que $\quad c\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \,\leq\, |v|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$.

9. Sean $n \in \mathbf{N}$ y $X := \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$, el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, provisto del producto escalar $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(A^t\, B)$ $\forall\, A,\, B \in X$.

   a) Demuestre que $X \,=\, X_{\mathtt{sim}} \oplus X_{\mathtt{asim}}$, donde

   $$X_{\mathtt{sim}} \,=\, \{\, A \in X : \quad A^t \,=\, A\,\} \quad \text{y} \quad X_{\mathtt{asim}} \,=\, \{\, A \in X : \quad A^t \,=\, -\,A\,\}\,.$$

   b) Sea $C := (c_{ij})_{n\times n} \in X$ tal que $\quad c_{ij} \,=\, 1 \;\; \forall\, i \geq j \;$ y $\; c_{ij} \,=\, 0 \;\; \forall\, i < j$. Encuentre las mejores aproximaciones de C por matrices de $X_{\mathtt{sim}}$ y $X_{\mathtt{asim}}$, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

10. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Dada $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento* $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ *y el tensor de esfuerzos* $\boldsymbol{\sigma} \in H(\operatorname{div};\Omega)$ *tal que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\,)\mathbf{e}(\mathbf{u})\, \mathbf{I}_2 + 2\mu\, \mathbf{e}(\mathbf{u}) \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

donde λ, $\mu > 0$ son las constantes de Lamé, $\mathbf{I}_2$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\,(\nabla\, \mathbf{u} + (\nabla\, \mathbf{u})^{\mathbf{T}})$ es el tensor de deformaciones. Es fácil verificar que $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ puede re-escribirse como

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \nabla\, \mathbf{u} \,-\, \gamma \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

donde $\gamma := \frac{1}{2}\,(\nabla\, \mathbf{u} - (\nabla\, \mathbf{u})^{\mathbf{T}})$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio $\mathcal{R} := \{\, \eta \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \quad \eta + \eta^{\mathbf{T}} = 0\,\}$.

a) Demuestre que una formulación variacional **mixta** de este problema se reduce a: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \gamma)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \gamma)) &= 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, (v, \eta)) &= -\int_\Omega \mathbf{f} \cdot v\, dx \quad \forall\, (v, \eta) \in Q\,, \end{aligned}$$

donde $H := H(\mathrm{div}; \Omega)$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{2\mu} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}\, dx - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \int_\Omega \mathrm{tr}\,(()\boldsymbol{\sigma})\, \mathrm{tr}\,(()\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,$$

$$b(\boldsymbol{\tau}, (v, \eta)) := \int_\Omega v \cdot \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta\, dx \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, (v, \eta)) \in H \times Q\,.$$

b) Demuestre que a y b satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi.

11. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert y sea $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(H, H)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : H \to H$, y tal que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. El objetivo de este ejercicio es probar que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$, para cuyo efecto se pide proceder como se indica a continuación.

    a) Sea S un subespacio de dimensión 2 de H y sea $Q \in \mathcal{L}(S, S)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : S \to S$, y tal que $Q^2 = Q$. Pruebe que $S = R(Q) \oplus R(\mathbf{I} - Q)$ y concluya que existen vectores no nulos $p,\ q,\ r,\ s \in S$ que satisfacen $\langle p, q \rangle = \langle r, s \rangle = 1$, tales que

    $$Q(v) = \langle q, v \rangle\, p \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{I} - Q)(v) = \langle s, v \rangle\, r \qquad \forall\, v \in S\,.$$

    b) A partir de la identidad $v = Q(v) + (\mathbf{I} - Q)(v) \quad \forall\, v \in S$, deduzca que $\|p\|^2\, \|q\|^2 = \|r\|^2\, \|s\|^2 = 1 - \langle p, r \rangle\, \langle q, s \rangle$ y concluya así que

    $$\|Q\|_{\mathcal{L}(S,S)} = \|\mathbf{I} - Q\|_{\mathcal{L}(S,S)}.$$

    c) Dado $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$, considere el subespacio S generado por los vectores x y $\mathbf{P}(x)$ y defina $Q := \mathbf{P}|_S$. Demuestre que $Q \in \mathcal{L}(S, S)$, observe que la dimensión de S es ≤ 2, y luego pruebe, usando b), que $\|(\mathbf{I} - \mathbf{P})(x)\| \leq \|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

    d) Concluya, a partir de c), que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

12. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ.

    a) Considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ con norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y semi-norma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$. Defina la aplicación

    $$|||v||| := \left\{ |v|^2_{H^1(\Omega)} + \left(\int_\Omega v\, dx \right)^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\,|||v|||\;\leq\;\|v\|_{H^1(\Omega)}\;\leq\;C_2\,|||v|||\quad\forall\,v\in H^1(\Omega)\,.$$

Ind.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que $\forall\,k\in\mathbf{N}$ existe $v_k\in H^1(\Omega)$ tal que $\|v_k\|_{H^1(\Omega)} > k\,|||v_k|||$. Recuerde que la inclusión de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, y que si $w\in L^2(\Omega)$ es tal que $\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \quad \forall\,i\in\{1,...,n\}$, entonces necesariamente w es constante en Ω.

b) Considere el problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\,u\;=\;f\quad\text{en}\quad\Omega\,,\qquad\frac{\partial u}{\partial\nu}\;=\;0\quad\text{en}\quad\Gamma\,,\qquad\int_\Omega u\,dx\;=\;0\,,$$

donde $f\;\in\;L^2(\Omega)$ es tal que $\displaystyle\int_\Omega f\,dx\;=\;0$, y demuestre que su formulación débil se reduce a: Hallar $(u,\lambda)\;\in\;H^1(\Omega)\times\mathbf{R}$ tal que

$$\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\,dx\;+\;\lambda\int_\Omega v\,dx\;=\;\int_\Omega f v\,dx\qquad\forall\,v\in H^1(\Omega)\,,$$

$$\mu\int_\Omega u\,dx\;=\;0\qquad\forall\,\mu\in\mathbf{R}\,.$$

Utilice la teoría de Babuška-Brezzi para probar que este problema tiene solución única, la cual depende continuamente de f.

13. Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}^n$. Asuma que la inyección $i\;:\;H^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i\;:\;H^m(\Omega)\to H^{m-1}(\Omega)$ también es compacta, para todo entero $m\geq 2$.

14. Sea $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y considere un operador NOLINEAL $T\;:\;H\to H$, FUERTEMENTE MONÓTONO y LIPSCHITZ-CONTINUO. Esto significa, respectivamente, que existen constantes $\alpha, M > 0$ tales que

$$\langle Tv-Tw,v-w\rangle\;\geq\;\alpha\,||v-w||_H^2\quad\text{y}\quad||Tv-Tw||_H\;\leq\;M\,||v-w||_H\quad\forall\,v,\,w\,\in H\,.$$

a) Dada $f\in H$, demuestre que existe un único $u\in H$ tal que $Tu\;=\;f$.

b) Sea H_n un subespacio de dimensión finita de H y considere el esquema de Galerkin asociado: *Hallar* $u_n\in H_n$ *tal que* $\langle Tu_n,v_n\rangle\;=\;\langle f,v_n\rangle\;\forall\;v_n\in H_n$. Pruebe que

$$||u-u_n||_H\;\leq\;\frac{M}{\alpha}\inf_{v_n\in H_n}||u-v_n||_H\,.$$

15. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y defina el espacio $V\;:=\;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, es decir

$$V\;=\;\left\{\,v\in H^2(\Omega):\quad v\;=\;0\quad\text{en}\quad\Gamma\,\right\}\,.$$

Demuestre que existe una constante $C>0$ tal que

$$||v||_{H^1(\Omega)}\;\leq\;C\,||\Delta\,v||_{L^2(\Omega)}\quad\forall\,v\in V\,.$$

16. Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$, se define

$$L^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R} : \quad f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^2 \, dx < +\infty \right\}.$$

Dado un multíndice $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, y una función diferenciable u, se denota

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \text{y} \quad \partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Con estas notaciones, para cada $m \in \mathbf{N}$ se define el **espacio de Sobolev** de orden m, como

$$H^m(\Omega) := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad \forall\, \alpha,\, |\alpha| \leq m \quad \text{existe } g_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ , tal que}$$

$$\int_\Omega u \, \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \, \varphi \, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Big\}$$

En tal caso se escribe $\partial^\alpha u = g_\alpha$, y se define la norma

$$||u||_{H^m(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha u||^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2}.$$

Asuma que $L^2(\Omega)$ provisto del producto escalar $\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega uv \, dx$, es un espacio de Hilbert, y demuestre que $H^m(\Omega)$ es también un espacio de Hilbert. Muestre además que para todo $f \in (H^m(\Omega))'$ existen funciones $f_\alpha \in L^2(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, tales que $f(v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega f_\alpha \, \partial^\alpha v \, dx \quad \forall\, v \in H^m(\Omega)$.

17. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{ H_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1} \subset H_n \;\forall\, n \in \mathbf{N}$, y $\cup_{n \in \mathbf{N}} H_n$ es denso en H. Sea $B : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f \in H'$ existe una única sucesión $\{ u_n(f) \}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq H$ tal que

$$u_n(f) \in H_n \quad , \quad B(u_n(f), v_n) = f(v_n) \quad \forall\, v_n \in H_n,$$

y $||u_n(f)|| \leq C_0 \, ||f|| \;\forall\, n \in \mathbf{N}$, donde C_0 es una constante positiva independiente de n y de f. Suponga además que para todo $f \in H'$ existe un único $u(f) \in H$ tal que

$$B(u(f), v) = f(v) \quad \forall\, v \in H.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \to +\infty} ||u(f) - u_n(f)|| = 0 \quad \forall\, f \in H'.$$

18. (Lema de Lax-Milgram generalizado). Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $B : H_1 \times H_2 \to \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

   a) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u, v)| \leq C_1 ||u||_{H_1} ||v||_{H_2} \quad \forall\, (u, v) \in H_1 \times H_2.$$

b) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{v \in H_2 \\ v \neq 0}} \frac{|B(u,v)|}{||v||_{H_2}} \geq C_2 ||u||_{H_1} \quad \forall\, u \in H_1,$$

y para cada $v \in H_2$, $v \neq 0$, se tiene $\sup\limits_{u \in H_1} |B(u,v)| > 0$.

Demuestre que, dado $F \in H_2'$, existe un único $u \in H_1$ tal que $B(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H_2$, y además $||u||_{H_1} \leq \frac{1}{C_2} ||F||_{H_2'}$.

19. Sean H y V dos espacios de Hilbert tales que $H \subseteq V$ y la inyección $i : H \to V$ es compacta.

a) Se dice que una forma bilineal acotada A definida sobre $H \times H$ satisface la Desigualdad de Gårding si existen $\alpha > 0$ y una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbf{R}$ tales que

$$A(v,v) \,\geq\, \alpha \, ||v||_H^2 \,-\, K(v,v) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,.$$

Dado $F \in H'$, considere el siguiente problema variacional: *Hallar $u \in H$ tal que*

$$A(u,v) \;=\; F(v) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,. \tag{5}$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding, entonces (5) tiene solución para cada $F \in H'$ **si y solo si** $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

b) Se dice que A satisface la Desigualdad de Gårding generalizada si existen $\alpha > 0$, una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbf{R}$, y un isomorfismo $S : H \to H$ tales que

$$A(v, Sv) \,\geq\, \alpha \, ||v||_H^2 \,-\, K(v, Sv) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,.$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding generalizada, entonces (5) tiene solución para cada $F \in H'$ **si y solo si** $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

20. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ. Considere el problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \,=\, g \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \int_\Omega u\, dx \,=\, a_1\,, \tag{6}$$

donde $a_1 \in \mathbf{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, y $g \in L^2(\Gamma)$ satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_\Omega f\, dx \,+\, \int_\Gamma g\, ds \,=\, 0\,.$$

Demuestre que una formulación débil de (6) consiste en: *Hallar* $(u,\lambda) \in H^1(\Omega)\times \mathbf{R}$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \,+\, \lambda \int_\Omega v\, dx \,=\, \int_\Omega f v\, dx \,+\, \int_\Gamma g v \, ds \ ,$$

$$\mu \int_\Omega u\, dx \,=\, \mu a_1 \, ,$$

para todo $(v,\mu) \in H^1(\Omega)\times \mathbf{R}$. Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene única solución, la cual depende continuamente de los datos.

21. Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$ y $p \in [1,+\infty)$, se define

$$L^p(\Omega) \,:=\, \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R} : \quad f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^p\, dx \,<\, +\infty \right\} .$$

Puede probarse que $L^p(\Omega)$, provisto de la norma $||f||_{L^p(\Omega)} \,:=\, \left\{\int_\Omega |f|^p\, dx\right\}^{1/p}$ es un espacio de Banach. Además, dados $f\in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, se tiene la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega |f\, g|\, dx \,\leq\, ||f||_{L^p(\Omega)}\, ||g||_{L^q(\Omega)} \,.$$

Ahora, para un multíndice $\alpha \,:=\, (\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, y una función diferenciable u, se denota $|\alpha| \,:=\, \sum_{i=1}^n \alpha_i$ y $\partial^\alpha u \,:=\, \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Con estas notaciones, dado $m\in\mathbf{N}$ se define el ESPACIO DE SOBOLEV de orden (m,p), como

$$W^{m,p}(\Omega) \,:=\, \Big\{ u \,\in\, L^p(\Omega) : \quad \forall\, \alpha,\, |\alpha| \,\leq\, m \quad \text{existe } g_\alpha \,\in\, L^p(\Omega)\ , \text{ tal que}$$

$$\int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi\, dx \,=\, (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \,\in\, C_0^\infty(\Omega) \Big\}$$

En tal caso se escribe $\partial^\alpha u \,=\, g_\alpha$, y se define la norma

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} \,:=\, \left\{ \sum_{|\alpha|\leq m} ||\partial^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right\}^{1/p} .$$

Demuestre que $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

22. Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se define el operador adjunto de Hilbert de A, y se denota A^*, como $A^* : Y \to X$, donde para cada $y\in Y$, $A^* y \in X$ es el único elemento (dado por TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ) tal que

$$\langle Ax, y\rangle_Y \,=\, \langle x, A^* y\rangle_X \quad \forall\, x \,\in\, X\,.$$

a) Pruebe que $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$, $||A^*|| = ||A||$ y que $(A^*)^* = A$.

b) Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.

c) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{z \in N(A)} ||x - z|| \leq \beta \, ||Ax|| \quad \forall\, x \in X\,,$$

y demuestre que $R(A) = N(A^*)^{\perp}$.

d) Pruebe que $A^* = R_X \, A' \, R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \to X$ y $R_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^o N(A') = N(A^*)^{\perp}$.

23. Sean H, Q, V y W espacios de Hilbert tales que $H \stackrel{c}{\hookrightarrow} V$ and $Q \stackrel{c}{\hookrightarrow} W$. Sean $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ formas bilineales acotadas y defina

$$B : (H \times Q) \times (H \times Q) \to \mathbf{R}$$

$$B((u, \lambda), (v, \mu)) := a(u, v) + b(v, \lambda) + b(u, \mu) \quad \forall\, (u, \lambda),\, (v, \mu) \in H \times Q\,.$$

Suponga que existe una forma bilineal acotada $a_0 : H \times V \to \mathbf{R}$ tal que $\tilde{a} := a + a_0$ es $H-$elíptica; es decir, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\tilde{a}(v, v) \;\geq\; \alpha \, ||v||_H^2 \quad \forall\, v \in H\,.$$

También, asuma que existen una forma bilineal acotada $b_0 : V \times W \to \mathbf{R}$ y una constante $\beta > 0$ tales que $\tilde{b} := b + b_0$ verifica

$$\mathop{sup}_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\tilde{b}(v, \lambda)}{||v||_H} \geq \beta ||\lambda||_Q \quad \forall\, \lambda \in Q\,.$$

Demuestre que B satisface la Desigualdad de Gårding Generalizada.

24. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sea $J : V \to \mathbf{R}$ un funcional nolineal. Se dice que J admite una derivada direccional en $v \in V$, en la dirección $\varphi \in V$, si la expresión $\frac{J(v+\epsilon\varphi) - J(v)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $DJ(v, \varphi)$. Entonces, J se dice diferenciable en el sentido de Gateaux (o G-diferenciable) en $v \in V$, si $DJ(v, \varphi)$ existe para todo $\varphi \in V$. Ahora, si J es G-diferenciable en $v \in V$ y si $DJ(v, \cdot) \in V'$, se concluye, por el Teorema de Representación de Riesz, que existe un único elemento $z \in V$ tal que $DJ(v, \varphi) = \langle z, \varphi \rangle \; \forall\, \varphi \in V$. En tal caso, se denota $z := J'(v)$ y se llama el gradiente de J en v.

Se dice que J tiene segunda diferencial en el sentido de Gateaux en $v \in V$, en las direcciones φ y $\psi \in V$, si la expresión $\frac{DJ(v+\epsilon\psi, \varphi) - DJ(v, \varphi)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $D^2 J(v, \varphi, \psi)$.

a) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ y considere $V := L^2(\Omega)$. Defina $J_0 : V \to \mathbf{R}$ por

$$J_0(v) \;:=\; \int_\Omega (v^2 + v)\, dx \quad \forall\, v \in V$$

y calcule $J_0'(v)$ para todo $v \in V$. Qué puede decir de $J_0'(v)$ si J_0 se restringe al espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$?

b) Suponga que J es G-diferenciable en $(v+\alpha\varphi)$, en la dirección φ, para todo $\alpha \in [0,1]$. Demuestre que existe $\beta \in (0,1)$ tal que

$$J(v+\varphi) \;=\; J(v) \;+\; DJ(v+\beta\,\varphi,\varphi)\,.$$

c) Suponga que J es α-convexo, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que para todo u, $v \in V$ y para todo $\beta \in [0,1]$:

$$J((1-\beta)\,u+\beta\,v) \;\leq\; (1-\beta)\,J(u) \;+\; \beta\,J(v) \;-\; \frac{\alpha}{2}\,\beta\,(1-\beta)\,||u-v||^2\,.$$

Además, asuma que J es G-diferenciable en todo $v \in V$. Demuestre que para todo u, $v \in V$ se tiene:

$$DJ(u,u-v) \;-\; DJ(v,u-v) \;\geq\; \alpha\,||u-v||^2$$

y

$$J(v) \;\geq\; J(u) \;+\; DJ(u,v-u) \;+\; \frac{\alpha}{2}\,||v-u||^2\,.$$

d) Suponga que J es G-diferenciable en $v \in V$ y que, dada una dirección $\varphi \in V$, $D^2J(v+\alpha\varphi,\varphi,\varphi)$ existe $\forall\,\alpha \in [0,1]$. Demuestre que hay una constante $\beta \in (0,1)$ tal que

$$J(v+\varphi) \;=\; J(v) + DJ(v,\varphi) + \frac{1}{2}\,D^2J(v+\beta\varphi,\varphi,\varphi)\,.$$

25. Sea H un espacio de Hilbert y sea $B : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

i) B es simétrica, es decir

$$B(u,v) \;=\; B(v,u) \quad \forall\,(u,v) \in H \times H\,.$$

ii) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u,v)| \leq C_1||u||_H||v||_H \quad \forall\,(u,v) \in H \times H.$$

iii) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\mathop{sup}_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{|B(u,v)|}{||v||_H} \geq C_2\,||u||_H \quad \forall\,u \in H\,.$$

Demuestre que, dado $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que $B(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H$, y además, $||u||_H \leq \frac{1}{C_2}||F||_{H'}$.

26. Sean X y M espacios de Hilbert y sean $a : X \times X \to \mathbf{R}$, $b : X \times M \to \mathbf{R}$ dos formas bilineales acotadas. Suponga además que a es simétrica y semi-definida positiva sobre X. Dados $F \in X'$, $G \in M'$ se define el operador $\mathcal{J} : X \times M \to \mathbf{R}$,

$$\mathcal{J}(v,\mu) \;:=\; \frac{1}{2}\,a(v,v) \;+\; b(v,\mu) \;-\; F(v) \;-\; G(\mu)\,.$$

Considere entonces los siguientes problemas variacionales:

Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= F(v) \quad \forall\, v \in X\,, \\ b(u,\mu) &= G(\mu) \quad \forall\, \mu \in M\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ *tal que*

$$\mathcal{J}(u,\mu) \le \mathcal{J}(u,\lambda) \le \mathcal{J}(v,\lambda) \qquad \forall\,(v,\mu) \in X \times M\,. \tag{8}$$

Demuestre que (u,λ) es solución de (7) si y sólo si (u,λ) es solución de (8).

27. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X,X)$, $Q \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es
$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\ge\; 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$
y que existen constantes α, $\beta > 0$ tales que
$$\langle \mathbf{P}x, x\rangle_X \;\ge\; \alpha\,||x||_X^2 \qquad \forall\, x \in X$$
y
$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle Q(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\ge\; \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$
Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x},\tilde{y}) \in X \times Y$ tal que
$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$
También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $||\mathbf{P}||$, α, β y $||Q||$, tal que
$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \;\le\; C\,\{\,||f|| + ||g||\,\}\,.$$

28. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \to X$, $Q \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es
$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\ge\; 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$
que $\mathbf{P}$ es **nolineal**, y que existen constantes M, α, $\beta > 0$ tales que
$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \le M\,||x-\bar{x}||_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x-\bar{x}\rangle_X \ge \alpha\,||x-\bar{x}||_X^2 \quad \forall\, x,\,\bar{x} \in X\,,$$
y
$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle Q(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\ge\; \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de M, α, β y $||Q||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \le C \{ ||f|| + ||g|| + ||\mathbf{P}(0)|| \} .$$

29. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. El Problema de Stokes consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$\begin{gathered} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma, \qquad \int_\Omega p\, dx = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q\, dx = 0 \right\}$. Demuestre que la formulación débil de (9) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, p) &= F(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H, \\ B(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall\, q \in Q, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \to \mathbf{R}$, $B : H \times Q \to \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx,$$

$$B(\mathbf{v}, p) := -\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx.$$

30. Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ y $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

   a) Demuestre que $\displaystyle \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

   b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \ge \beta \|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$, y pruebe que $H = R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

31. Sean X, Y espacios de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\mathcal{R}(A) = Y$, y sea $V = N(A)$. Dado el operador de proyección ortogonal $P : X \to V$, considere $B : Y \to X$ tal que $B(y) = x - P(x)$ para todo $y \in Y$, donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$.

a) Demuestre que B está bien definido y que B es una biyección lineal y acotada de Y en $V^{\perp}$. Pruebe, además, que B es un *inverso a derecha* de A, esto es $AB(y) = y$ para todo $y \in Y$.

b) Defina $A_0 : V^{\perp} \to Y$ como $A_0(x) = A(x)$ para todo $x \in V^{\perp}$, es decir $A_0 = A|_{V^{\perp}}$, y pruebe que $A_0^{-1} = B$.

c) Extienda los resultados anteriores al caso en que $\mathcal{R}(A)$ es un subespacio **cerrado** propio de Y.

32. (Lema de Aubin-Nitsche). Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y el operador identidad $\mathbf{i} : V \to H$ es continuo. Sea $A : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y V-elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \to V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface

$$A(v, \mathbf{P}(g)) \;=\; \langle g, v \rangle_H \quad \forall\, v \in V\,.$$

Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V, denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) \;=\; F(v) \quad \forall\, v \in V\,,$$

y

$$A(u_h, v_h) \;=\; F(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$||u - u_h||_H \;\leq\; C\, ||u - u_h||_V \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{v_h \in V_h} ||\mathbf{P}(g) - v_h||_V \right\}.$$

33. Dados $\Omega := (0, 1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$-\,u'' \;=\; f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) \;=\; 0\,, \quad u'(1) \;=\; 1\,. \tag{10}$$

a) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (10) se reduce a: *Hallar* $(\sigma, (u, \varphi)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, (u, \varphi)) \;&=\; F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma, (v, \psi)) \;&=\; G((v, \psi)) \quad \forall\, (v, \psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{11}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) &:= \int_{\Omega} \sigma\, \tau\, dx \qquad \forall\, \sigma,\, \tau \in H\,, \\ b(\tau, (v, \psi)) &:= \int_{\Omega} v\, \tau'\, dx \;+\; \psi\, \tau(1) \quad \forall\, (\tau, (v, \psi)) \in H \times Q\,. \end{aligned}$$

b) Defina los funcionales F y G, y aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (11) tiene una única solución.

34. Sean $\Omega =]a,b[$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno

$$u^{(4)} \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) \,=\, 0\,. \tag{12}$$

i) Defina la incógnita auxiliar $\sigma := u''$ en Ω y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (12) se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx \,+\, \int_\Omega u'\,\tau'\,dx \,&=\, 0 \qquad \forall\,\tau \in H^1(\Omega)\,, \\ \int_\Omega v'\,\sigma'\,dx \,&=\, -\int_\Omega f\,v\,dx \qquad \forall\,v \in H_0^1(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

ii) Aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (13) tiene una única solución que depende continuamente del dato f.

35. (Lema de Fortin). Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} \,\geq\, \beta\,\|q\|_Q \qquad \forall\,q \in Q\,. \tag{14}$$

Sean $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ tal que

$$b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) \,=\, 0 \qquad \forall\,q_n \in Q_n\,.$$

Suponga que la familia de operadores $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H,H_n)} \,\leq\, C$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de n, tal que

$$\sup_{\substack{v_n\in H_n\\ v_n\neq 0}} \frac{b(v_n,q_n)}{\|v_n\|_H} \,\geq\, \beta^*\,\|q_n\|_Q \qquad \forall\,q_n \in Q_n\,, \quad \forall\,n \in \mathbf{N}\,.$$

36. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i$ $\forall\,i \in \{1, ..., n\}$, $\forall\,x := (x_1, ..., x_n)^{\mathbf{T}} \in \Omega$.

a) (Desigualdad de Poincaré generalizada). Defina la aplicación

$$|||v||| \,:=\, \left\{ |v|^2_{H^2(\Omega)} \,+\, \sum_{i=0}^{n} |\,\langle v, p_i\rangle_{H^2(\Omega)}\,|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\,v \in H^2(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\,|||v||| \;\leq\; \|v\|_{H^2(\Omega)} \;\leq\; C_2\,|||v||| \quad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,.$$

Ind.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que $\forall\, n \in \mathbf{N}$ existe $v_n \in H^2(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} > n\,|||v_n|||$. Luego, defina $w_n := \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}}$, observe que $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$, note que $|||w_n||| < \frac{1}{n}$, y aplique el hecho que la inclusión de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ es compacta.

b) (Lema de Deny-Lions). Considere el espacio cuociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma $\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \inf\limits_{p\in P_1(\Omega)} \|v-p\|_{H^2(\Omega)}$, y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \;:=\; |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\,[v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

Demuestre que $|\cdot|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \;\leq\; \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$$

$$\leq\;\; C\;|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \qquad \forall\,[v] \;\in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

Ind.: Note que para todo $p \in P_1(\Omega)$ y para todo α con $|\alpha| = 2$ se tiene $\partial^\alpha p = 0$. Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.

c) (Lema de Bramble-Hilbert). Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p\;\forall\, p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \;\leq\; C\,|v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \;\in\; H^2(\Omega)\,.$$

Ind.: Note que $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v-p)\;\forall\, p \in P_1(\Omega)$, y luego aplique el Lema de Deny-Lions.

37. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ. Una formulación variacional **mixta** para la ecuación de Poisson en Ω, con dato $f \in L^2(\Omega)$, y condición de Dirichlet dada por $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, consiste en: *Hallar* $(\sigma, u) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} A(\sigma,\tau) \;+\; B(\tau,u) \;&=\;\; \textstyle\int_\Gamma g\,\tau\cdot\nu\,ds\,,\\ B(\sigma,v) \;&=\;\; -\textstyle\int_\Omega f\,v\,dx\,, \end{aligned} \tag{1}$$

para todo $(\tau, v) \in X \times M$, donde $X := H(\mathrm{div};\Omega)$, $M := L^2(\Omega)$, ν es el vector normal unitario exterior a Γ, y las formas bilineales $A : X \times X \to \mathbf{R}$ y $B : X \times M \to \mathbf{R}$ están definidas por

$$A(\rho,\tau) := \int_\Omega \rho\cdot\tau\,dx \quad \forall \rho,\,\tau \in X\,,$$

$$B(\tau,v) := \int_\Omega v\,\mathrm{div}\,\tau\,dx \quad \forall(\tau,v) \in X \times M\,.$$

a) Demuestre que A y B satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi, y concluya que existe $C_0 > 0$ tal que

$$||(\rho, w)||_{X\times M} \,\leq\, C_0 \sup_{\substack{(\tau,v)\in X\times M \\ ||(\tau,v)||\,\leq\,1}} \{\, A(\rho,\tau) + B(\tau,w) + B(\rho,v)\,\} \tag{2}$$

para todo $(\rho, w) \in X \times M$.

b) El siguiente objetivo es deducir una **estimación de error a-posteriori** para (1). Para ello, sea $\{\mathcal{T}_h : \quad h \in \mathtt{I}\}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$, donde $\mathtt{I}$ es un conjunto finito de parámetros dado por $\{h_1, ..., h_m\}$, con $h_j \geq h_{j+1}\ \forall\, j \in \{1, ..., m\}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{\, h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h\,\}$, donde h_K es el diámetro de K. Sea $X_h \times M_h$ un subespacio de elementos finitos de $X \times M$, asociado a la triangulación $\mathcal{T}_h$, y sea $(\sigma_h, u_h) \in X_h \times M_h$ la solución del esquema de Galerkin correspondiente para la formulación (1).

i) Pruebe que existe un único $\bar{\sigma} \in X$ tal que

$$\langle \bar{\sigma}, \tau\rangle_X \,=\, A(\sigma - \sigma_h, \tau) + B(\tau, u - u_h) \quad \forall\, \tau \in X\,.$$

ii) Defina $\mathbf{J}(\tau) := \frac{1}{2}\,||\tau||_X^2 \,-\, \langle \bar{\sigma}, \tau\rangle_X \quad \forall\, \tau \in X$, y demuestre que

$$-\frac{1}{2}\,||\bar{\sigma}||_X^2 \,=\, \min_{\tau\in X} \mathbf{J}(\tau)\,.$$

iii) Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ defina $(\sigma_{h,K}, u_{h,K}) := (\sigma_h, u_h)\,|_K$, $X_K := H(\mathrm{div}; K)$, $M_K := L^2(K)$, y denote por $A_K : X_K \times X_K \to \mathbf{R}$ y $B_K : X_K \times M_K \to \mathbf{R}$, respectivamente, las restricciones de A y B al elemento K. Además, sea $\varphi_h \in H^{1/2}(\cup_{K\in\mathcal{T}_h} \partial K)$ una aproximación de u sobre las fronteras de los elementos K tal que $\varphi_h = g$ en Γ. Entonces, pruebe que existe un único $\hat{\sigma}_K \in X_K$ tal que

$$\langle \hat{\sigma}_K, \tau\rangle_{X_K} = -A_K(\sigma_{h,K}, \tau) - B_K(\tau, u_{h,K}) - \int_{\partial K} \varphi_h\, \tau\cdot\nu\, ds \quad \forall\, \tau \in X_K\,.$$

iv) Defina

$$\mathbf{J}_K(\tau) := \frac{1}{2}\,||\tau||_{X_K}^2 + A_K(\sigma_{h,K}, \tau) + B_K(\tau, u_{h,K}) + \int_{\partial K} \varphi_h\, \tau\cdot\nu\, ds$$

para todo $\tau \in X_K$, y pruebe que

$$-\frac{1}{2}\,||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \,=\, \min_{\tau\in X_K} \mathbf{J}_K(\tau)\,.$$

v) Use **i), ii), iii)** y **iv)** para demostrar que

$$||\bar{\sigma}||_X^2 \,\leq\, \sum_{K\in\mathcal{T}_h} ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2\,.$$

vi) Aplique (2) y **v)** para concluir que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$||(\sigma, u) - (\sigma_h, u_h)||_{X\times M} \,\leq\, C \left\{ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2},$$

donde

$$\eta_K^2 := ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \,+\, ||f + \operatorname{div}\sigma_h||_{L^2(K)}^2 \quad \forall\, K\in\mathcal{T}_h\,.$$

38. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal y sea $\mathcal{T}_h$ una triangularización de $\bar{\Omega}$. Dado $K\in\mathcal{T}_h$, sea $\boldsymbol{\nu}_K$ el vector normal a ∂K y denote por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial K}$ la paridad dual entre $H^{-1/2}(\partial K)$ y $H^{1/2}(\partial K)$.

(a) Defina los espacios

$$X \,:=\, \Big\{ v\in L^2(\Omega): \quad v|_K\in H^1(K) \quad \forall\, K\in\mathcal{T}_h \Big\},$$

$$Z \,:=\, \Big\{ \boldsymbol{\lambda} \,:=\, (\lambda_K)_{K\in\mathcal{T}_h} \in \Pi_{K\in\mathcal{T}_h} H^{-1/2}(\partial K): \quad \exists\, \boldsymbol{\tau}\in H(\operatorname{div};\Omega) \text{ tal que } \quad \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K \,=\, \lambda_K \quad \text{en} \quad \partial K \quad \forall\, K\in\mathcal{T}_h \Big\},$$

y demuestre que

$$H_0^1(\Omega) \,:=\, \Big\{ v\in X: \quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle\lambda_K, v|_K\rangle_{\partial K} \,=\, 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\lambda}\,\in\, Z \Big\}.$$

(b) Defina los espacios

$$\tilde{X} \,:=\, \Big\{ \boldsymbol{\tau}\in[L^2(\Omega)]^2: \quad \boldsymbol{\tau}|_K\in H(\operatorname{div};K) \quad \forall\, K\in\mathcal{T}_h \Big\},$$

$$\tilde{Z} \,:=\, \Big\{ \boldsymbol{\xi} \,:=\, (\xi_K)_{K\in\mathcal{T}_h} \in \Pi_{K\in\mathcal{T}_h} H^{1/2}(\partial K): \quad \exists\, v\in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } \quad v \,=\, \xi_K \quad \text{en} \quad \partial K \quad \forall\, K\in\mathcal{T}_h \Big\},$$

y demuestre que

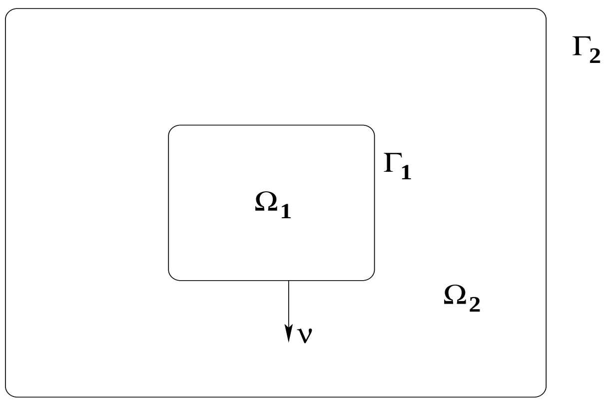
$$H(\operatorname{div};\Omega) \,:=\, \Big\{ \boldsymbol{\tau}\in\tilde{X}: \quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K, \xi_K\rangle_{\partial K} \,=\, 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\xi}\,\in\,\tilde{Z} \Big\}.$$

39. Sean H_h y Q_h subespacios de dimensión finita de espacios de Hilbert H y Q, respectivamente, y sean $\mathbf{a}: H\times H\to\mathbf{R}$ y $\mathbf{b}: H\times Q\to\mathbf{R}$ formas bilineales acotadas que satisfacen las hipótesis de las versiones continua y discreta del Teorema de Babuška-Brezzi, con constantes independientes de h. Sean $(\boldsymbol{\sigma}, u)\in H\times Q$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h)\in H_h\times Q_h$ las únicas soluciones de los problemas de punto-silla continuo y discreto, respectivamente, asociados a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Suponga que el kernel discreto de $\mathbf{b}$ está contenido en su kernel continuo y demuestre que existe $C>0$, independiente de h, tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_H \,\leq\, C \inf_{\boldsymbol{\tau}_h\in H_h} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_H\,.$$

40. Sea Ω_1 un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ_1, y sea Ω_2 la region anular acotada por Γ_1 y por una curva cerrada Γ_2 cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_1$ (ver figura). Entonces, dados $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, $g_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, y $g_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, interesa el siguiente PROBLEMA DE TRANSMISIÓN: Hallar $(u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ tales que

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= f_1 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \quad -\Delta u_2 = f_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \\ u_1 - u_2 &= g_1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1\,, \quad u_2 = g_2 \quad \text{en} \quad \Gamma_2\,. \end{aligned} \tag{15}$$



(a) Demuestre que una FORMULACIÓN VARIACIONAL MIXTA-DUAL de (15) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2) \in H(\text{div};\Omega_1) \times H(\text{div};\Omega_2)$, $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\xi \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_{\Omega_i} \sigma_i \cdot \tau_i \, dx + \int_{\Omega_i} u_i \, \text{div} \tau_i \, dx \right\} + \langle \tau_1 \cdot \nu - \tau_2 \cdot \nu, \xi \rangle_{\Gamma_1} &= F(\boldsymbol{\tau})\,, \\ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} v_i \, \text{div} \sigma_i \, dx + \langle \sigma_1 \cdot \nu - \sigma_2 \cdot \nu, \lambda \rangle_{\Gamma_1} &= G(\mathbf{v}, \lambda)\,, \end{aligned} \tag{16}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2) \in H(\text{div};\Omega_1) \times H(\text{div};\Omega_2)$, $\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, donde

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \langle \tau_1 \cdot \nu, g_1 \rangle_{\Gamma_1} + \langle \tau_2 \cdot \nu, g_2 \rangle_{\Gamma_2} \quad \text{y} \quad G(\mathbf{v}, \lambda) := -\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} f_i \, v_i \, dx\,.$$

(b) Defina el funcional de la energía complementaria y el operador Lagrangiano asociado a las ecuaciones de punto silla (16), e identifique los multiplicadores de Lagrange correspondientes.

(c) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que el problema (16) posee una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \xi)$ en los espacios indicados.

41. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ Lipschitz continua, y sean $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$ tal que $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{g}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ. El **problema de Stokes generalizado** consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{aligned} \alpha\,\mathbf{u} - \nu\,\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{en } \Omega\,, \\ \mathrm{div}\mathbf{u} &= 0 && \text{en } \Omega\,, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{en } \Gamma\,, \end{aligned} \tag{17}$$

donde $\nu > 0$ es la viscosidad del fluido y α es un parámetro positivo.

(a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\mathbf{t} := \nabla\mathbf{u}$ y $\boldsymbol{\sigma} := \nu\,\nabla\mathbf{u} - p\,\mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y pruebe que una formulación variacional mixta de (17) se reduce a: Hallar $(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \xi) \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^2 \times H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \nu\int_\Omega \mathbf{t}:\mathbf{s} + \alpha\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{s} - \int_\Omega \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{v} - \int_\Omega p\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{s}) &= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,, \\ -\int_\Omega \boldsymbol{\tau}:\mathbf{t} - \int_\Omega \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{u} \qquad + \quad \xi\int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau}) &= -\,\langle \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}, \mathbf{g}\rangle\,, \\ -\int_\Omega q\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{t}) + \eta\int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\sigma}) &= 0\,, \end{aligned} \tag{18}$$

para todo $(\mathbf{s}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, q, \eta) \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^2 \times H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$.

(b) Defina espacios de Hilbert y operadores (formas bilineales) convenientes y pruebe que (18) puede reformularse en base a una estructura dual-dual.

(c) Utilice lo indicado en (b) para demostrar que (18) tiene una única solución y que existe una constante $C(\alpha, \nu) > 0$ tal que

$$\|(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \xi)\| \;\leq\; C(\alpha, \nu)\;\{\,\|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|\,\}\,.$$

(d) Extienda el análisis en (c) al caso discreto y **deduzca** espacios de elementos finitos que garanticen que el esquema de Galerkin asociado a (18) tiene una única solución.

(e) Asuma la regularidad necesaria de la solución exacta y demuestre la estimación de error a-priori correspondiente (razón de convergencia).