

TAREAS

Teoría de Elementos Finitos (408634)

Segundo Semestre de 2016

Prof. Gabriel N. Gatica.

1. Sea Ω^- un abierto conexo y acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ , y sea Ω^+ la region anular acotada por Γ y una curva cerrada Σ cuyo interior contiene a Γ . Además, sean $\gamma_0^- : H^1(\Omega^-) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_0^+ : H^1(\Omega^+) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Sigma)$ los operadores de trazas respectivos, y denote $\Omega := \Omega^- \cup \Gamma \cup \Omega^+$.

a) Demuestre que $v \in H^1(\Omega)$ si y sólo si:

$$v \in L^2(\Omega), \quad v|_{\Omega^-} \in H^1(\Omega^-), \quad v|_{\Omega^+} \in H^1(\Omega^+), \quad \text{y} \quad \gamma_0^-(v|_{\Omega^-}) = \gamma_0^+(v|_{\Omega^+}) \text{ en } \Gamma.$$

Dados $f^- \in L^2(\Omega^-)$, $f^+ \in L^2(\Omega^+)$, $g_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y $g_\Sigma \in H^{-1/2}(\Sigma)$, considere el problema de transmisión: Hallar $(u^-, u^+) \in H^1(\Omega^-) \times H^1(\Omega^+)$ tales que

$$\begin{aligned} -\Delta u^- &= f^- \quad \text{en } \Omega^-, \quad -\Delta u^+ = f^+ \quad \text{en } \Omega^+, \\ \gamma_0^-(u^-) &= \gamma_0^+(u^+) \quad \text{en } \Gamma, \quad \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^-(\nabla u^-) - \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) = g_\Gamma \quad \text{en } \Gamma, \\ \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) &= g_\Sigma \quad \text{en } \Sigma, \quad \text{y} \quad \int_{\Omega^-} u^- + \int_{\Omega^+} u^+ = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^- : H(\text{div}; \Omega^-) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+ : H(\text{div}; \Omega^+) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Sigma)$ son los operadores de trazas normales respectivos ($\boldsymbol{\nu}$ apunta hacia Ω^+ en Γ y hacia el exterior de Ω^+ en Σ).

- b) Utilice identidades de Green en espacios de Sobolev convenientes y deduzca una formulación variacional de (1) con incógnita en un subespacio cerrado V de $H^1(\Omega)$.
- c) Identifique una condición de compatibilidad sobre los datos, y demuestre en tal caso que la formulación obtenida en b) posee una única solución, la cual depende continuamente de f^- , f^+ , g_Γ , y g_Σ .
- d) Pruebe que el esquema de Galerkin asociado es convergente para cualquier familia numerable $\{V_h\}_{h>0}$ de subespacios de dimensión finita de V tales que $\lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(v, V_h) = 0 \quad \forall v \in V$.
- e) Demuestre que la formulación obtenida en b) es equivalente a una formulación variacional mixta con incógnita en $H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$, y verifique que ella satisface las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi.

2. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ Lipschitz-continua y defina

$$\mathcal{D}(\Gamma) := \{v|_{\Gamma} : v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)\}.$$

Pruebe que $H^{1/2}(\Gamma) \subseteq \overline{\mathcal{D}(\Gamma)}^{\|\cdot\|_{0,\Gamma}}$ y $H^{1/2}(\Gamma) = \overline{\mathcal{D}(\Gamma)}^{\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}}$.

3. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ Lipschitz-continua, y considere la aplicación $||| \cdot ||| : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$|||v||| := \left\{ |v|_{1,\Omega}^2 + \|\gamma_0(v)\|_{0,\Gamma}^2 \right\}^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ es el operador de trazas usual. Utilice un argumento análogo al de la demostración de la desigualdad de Poincaré generalizada para probar que $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes en $H^1(\Omega)$.

4. Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H, \|\cdot\|_H)$ un espacio de Hilbert real y $A : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada con operador inducido $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H, H)$. Suponga que existen operadores $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in \mathcal{L}(H, H)$ y constantes $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tales que

$$\langle \mathbf{S}_1^* \mathbf{A}(\tau), \tau \rangle_H \geq \alpha_1 \|\tau\|_H^2 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{A} \mathbf{S}_2(\tau), \tau \rangle_H \geq \alpha_2 \|\tau\|_H^2 \quad \forall \tau \in H.$$

- a) Pruebe que para todo $F \in H'$ existe un único $\sigma \in H$ tal que

$$A(\sigma, \tau) = F(\tau) \quad \forall \tau \in H, \quad (2)$$

y deduzca la existencia de $C > 0$, independiente de F , tal que

$$\|\sigma\|_H \leq C \|F\|_{H'}.$$

- b) Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de H tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(\tau, H_h) = 0 \quad \forall \tau \in H$, y, dado $F \in H'$, considere el esquema de Galerkin: Hallar $\sigma_h \in H_h$ tal que

$$A(\sigma_h, \tau_h) = F(\tau_h) \quad \forall \tau_h \in H_h. \quad (3)$$

Suponga que para $i = 1$ o para $i = 2$ (pero no para ambos), existen operadores inyectivos $\mathbf{S}_{i,h} \in \mathcal{L}(H_h, H_h)$ para todo $h > 0$, y constantes $C_i, \delta > 0$, independientes de h , tales que

$$\|\mathbf{S}_i(\tau_h) - \mathbf{S}_{i,h}(\tau_h)\|_H \leq C_i h^\delta \|\mathbf{S}_i(\tau_h)\|_H \quad \forall \tau_h \in H_h.$$

Demuestre que existe $h_0 > 0$ tal que para todo $h \leq h_0$ el problema (3) tiene solución única, es estable, y se verifica la estimación de Cea.

- c) Qué puede decir sobre las hipótesis para a) y b) si A es simétrica?

5. Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X, X)$, $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es $\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \geq 0 \quad \forall y \in Y$, y que existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x \rangle_X \geq \alpha \|x\|_X^2 \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle Q(x), y \rangle_Y}{\|x\|_X} \geq \beta \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

- a) Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

- b) Sea $X_h \times Y_h$ un subespacio de dimensión finita de $X \times Y$. Defina explícitamente el esquema de Galerkin asociado y demuestre que se satisface la estimación de Céa correspondiente.

6. Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \rightarrow X$, $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es $\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \geq 0 \quad \forall y \in Y$, que $\mathbf{P}$ es NOLINEAL, y que existen constantes $M, \alpha, \beta > 0$ tales que

$$\|\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}\|_X \leq M \|x - \bar{x}\|_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x - \bar{x} \rangle_X \geq \alpha \|x - \bar{x}\|_X^2 \quad \forall x, \bar{x} \in X,$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle Q(x), y \rangle_Y}{\|x\|_X} \geq \beta \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

- a) Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

- b) Sea $X_h \times Y_h$ un subespacio de dimensión finita de $X \times Y$. Defina explícitamente el esquema de Galerkin asociado y demuestre que se satisface la estimación de Céa correspondiente.

7. a) Sea S un subespacio de un Hilbert H . Demuestre que $S^\perp = \bar{S}^\perp$.
b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ , y considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Encuentre y caracterice el subespacio V de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus V$.

8. (LEMA DE STRANG). Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H -elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H , y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere un funcional $F_n \in H'_n$ y una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \rightarrow \mathbf{R}$. Suponga también que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n , tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha} \|v_n\|_H^2 \quad \forall v_n \in H_n, \forall n \in \mathbf{N}$.

a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H \quad \text{y} \quad A_n(u_n, v_n) = F_n(v_n) \quad \forall v_n \in H_n.$$

b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_H \leq C \inf_{v_n \in H_n} & \left\{ \|u - v_n\|_H + \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|A(v_n, w_n) - A_n(v_n, w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\} \\ & + C \left\{ \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|F(w_n) - F_n(w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}. \end{aligned}$$

9. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina

$$V := \left\{ v \in H^2(\Omega) : \int_{\Omega} v p \, dx = 0 \quad \forall p \in \mathbf{P}_1(\Omega) \right\},$$

donde $\mathbf{P}_1(\Omega)$ es el espacio de polinomios de grado ≤ 1 sobre Ω . Demuestre que la norma $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ son equivalentes en V .

10. Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ y $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

a) Demuestre que $\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \quad \forall q \in Q$.

b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q$, y

pruebe que $H = R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

11. (LEMA DE AUBIN-NITSCHKE). Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y el operador identidad $\mathbf{i} : V \rightarrow H$ es continuo. Sea $A : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y V -elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \rightarrow V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface

$$A(v, \mathbf{P}(g)) = \langle g, v \rangle_H \quad \forall v \in V.$$

Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V , denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

y

$$A(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|u - u_h\|_H \leq C \|u - u_h\|_V \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{\|g\|_H} \inf_{v_h \in V_h} \|\mathbf{P}(g) - v_h\|_V \right\}.$$

12. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Dada $f \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento $u \in [H^1(\Omega)]^2$ y el tensor de esfuerzos $\sigma \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que*

$$\sigma = \mathcal{C} \mathbf{e}(u) := \lambda \text{tr} \mathbf{e}(u) I_2 + 2\mu \mathbf{e}(u) \quad \text{en } \Omega,$$

$$\text{div} \sigma = -f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \Gamma,$$

donde $\lambda, \mu > 0$ son las constantes de Lamé, I_2 es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2 \times 2}$, y $\mathbf{e}(u) := \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^\mathbf{t})$ es el tensor de deformaciones. Es fácil verificar que $\mathbf{e}(u)$ puede re-escribirse como

$$\mathbf{e}(u) = \nabla u - \gamma \quad \text{en } \Omega,$$

donde $\gamma := \frac{1}{2} (\nabla u - (\nabla u)^\mathbf{t})$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio $\mathcal{R} := \{ \eta \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2} : \eta + \eta^\mathbf{t} = 0 \}$.

- a) Demuestre que una formulación variacional MIXTA de este problema se reduce a: *Hallar $(\sigma, (u, \gamma)) \in H \times Q$ tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, (u, \gamma)) &= 0 \quad \forall \tau \in H, \\ b(\sigma, (v, \eta)) &= - \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \forall (v, \eta) \in Q, \end{aligned} \tag{4}$$

donde $H := \{ \tau \in H(\text{div}; \Omega) : \int_{\Omega} \text{tr}(\tau) = 0 \}$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$, y $a : [L^2(\Omega)]^{2 \times 2} \times [L^2(\Omega)]^{2 \times 2} \rightarrow \mathbf{R}$, $b : H(\text{div}; \Omega) \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\sigma, \tau) := \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \sigma : \tau \, dx - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma) \text{tr}(\tau) \, dx \quad \forall \sigma, \tau \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2},$$

$$b(\tau, (v, \eta)) := \int_{\Omega} v \cdot \text{div} \tau \, dx + \int_{\Omega} \tau : \eta \, dx \quad \forall (\tau, (v, \eta)) \in H(\text{div}; \Omega) \times Q.$$

- b) Demuestre que a y b satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi.

- c) Sea $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ un vector de parámetros positivos y considere las siguientes ecuaciones del tipo Galerkin-residuales:

$$\kappa_1 \int_{\Omega} (\mathbf{e}(u) - \mathcal{C}^{-1} \sigma) : (\mathbf{e}(v) + \mathcal{C}^{-1} \tau) = 0, \quad (5)$$

$$\kappa_2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma) \cdot \operatorname{div}(\tau) = -\kappa_2 \int_{\Omega} f \cdot \operatorname{div}(\tau), \quad (6)$$

y

$$\kappa_3 \int_{\Omega} \left(\gamma - \frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^{\mathbf{t}}) \right) : \left(\eta + \frac{1}{2}(\nabla v - (\nabla v)^{\mathbf{t}}) \right) = 0, \quad (7)$$

para todo $(\tau, v, \eta) \in H \times [H_0^1(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$. Demuestre que κ_1 , κ_2 y κ_3 pueden elegirse explícitamente, y dependiendo sólo de μ , de modo que la formulación variacional que resulta al restar la segunda de la primera ecuación en (4), y luego sumar (5), (6) y (7), satisface las hipótesis del Lema de Lax-Milgram.

13. Sea $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ una partición del intervalo $\Omega := (a, b)$. Sea H_n un espacio de funciones definidas sobre Ω y para cada $i \in \{1, \dots, n+1\}$ denote por $H_{n,i}$ el espacio de restricciones de H_n al subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

- a) Demuestre que si $H_n \subseteq C(\bar{\Omega})$ y $H_{n,i} \subseteq H^1(x_{i-1}, x_i) \ \forall i \in \{1, \dots, n+1\}$, entonces $H_n \subseteq H^1(\Omega)$.
- b) Demuestre que si $H_n \subseteq C^1(\bar{\Omega})$ y $H_{n,i} \subseteq H^2(x_{i-1}, x_i) \ \forall i \in \{1, \dots, n+1\}$, entonces $H_n \subseteq H^2(\Omega)$.

14. a) Para cada $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ encuentre el único polinomio p_j de grado ≤ 3 tal que $(p_j(0), p_j'(0), p_j(1), p_j'(1))^{\mathbf{t}} = \mathbf{e}_j^{\mathbf{t}}$, donde $\mathbf{e}_j$ es el j -ésimo vector de la base canónica de $\mathbf{R}^4$.
- b) Sea $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$ una partición UNIFORME de $\Omega := (0, 1)$. Para todo $i \in \{1, \dots, n+1\}$ y para cada $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, encuentre el polinomio $p_{i,j}$ de grado ≤ 3 tal que $(p_{i,j}(x_{i-1}), p_{i,j}'(x_{i-1}), p_{i,j}(x_i), p_{i,j}'(x_i))^{\mathbf{t}} = \mathbf{e}_j^{\mathbf{t}}$. (INDICACIÓN: Denote $h := \frac{1}{n+1}$ y utilice lo obtenido en a) en conjunto con un cambio de variable afin entre $[0, 1]$ y $[x_{i-1}, x_i]$).
- c) Para cada $i \in \{1, \dots, n+1\}$ denote por $\mathcal{P}_i$ al espacio de funciones definidas sobre $[x_{i-1}, x_i]$, generado por los polinomios $p_{i,j}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, y defina el espacio de elementos finitos

$$H_n := \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0, \quad y$$

$$v|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathcal{P}_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n+1\}\}.$$

Pruebe que $H_n \subseteq H_0^2(\Omega) := \{v \in H^2(\Omega) : v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0\}$, y defina explícitamente una base de H_1 .

d) Considere el problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} u^{(4)} &= f \quad \text{en } \Omega, \\ u(0) = u'(0) &= u(1) = u'(1) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

donde $f(x) = x$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre que la formulación débil de (8) se reduce a encontrar $u \in H_0^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u'' v'' dx = \int_{\Omega} x v dx \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \quad (9)$$

Establezca el esquema de Galerkin asociado a (9) utilizando el espacio de elementos finitos H_1 definido en c), y calcule el vector de carga respectivo.

15. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y defina el espacio $V := \{v \in H^2(\Omega) : \gamma_0 v = 0 \text{ en } \Gamma\}$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V$. Concluya que la norma $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ son equivalentes en V .

16. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1} \subset H_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$, y $\cup_{n \in \mathbf{N}} H_n$ es denso en H . Sea $B : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f \in H'$ existe una única sucesión $\{u_n(f)\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq H$ tal que

$$u_n(f) \in H_n, \quad B(u_n(f), v_n) = f(v_n) \quad \forall v_n \in H_n,$$

y $\|u_n(f)\| \leq C_0 \|f\| \quad \forall n \in \mathbf{N}$, donde C_0 es una constante positiva independiente de n y de f . Suponga además que para todo $f \in H'$ existe un único $u(f) \in H$ tal que

$$B(u(f), v) = f(v) \quad \forall v \in H.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u(f) - u_n(f)\| = 0 \quad \forall f \in H'.$$

IND.: Defina la proyección de Galerkin $P_n : H \rightarrow H_n$, donde $\forall v \in H$, $P_n v$ denota la única solución de $B(P_n v, w_n) = B(v, w_n) \quad \forall w_n \in H_n$ y observe que $P_n u(f) = u_n(f)$.

17. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ . Considere el problema de valores de contorno:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g \quad \text{en } \Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} u dx = a_1,$$

donde $a_1 \in \mathbf{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, y $g \in L^2(\Gamma)$ satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} g ds = 0.$$

Demuestre que una formulación débil de (10) consiste en: $Hallar (u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \lambda \int_{\Omega} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, ds ,$$

$$\mu \int_{\Omega} u \, dx = \mu a_1 ,$$

para todo $(v, \mu) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$. Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene única solución, la cual depende continuamente de los datos.

18. Sea $\Omega := (0, 3)$ y considere el problema de valores de contorno: $-u'' + (x+1)u = x$ en Ω , $u(0) = u(3) = 0$. Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio

$$H_2 := \{ v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \text{ y } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \text{ es un polinomio de grado } \leq 1, \forall j \in \{1, 2, 3\} \} .$$

IND.: Notar que $H_2 = \langle \{e_1, e_2\} \rangle$, donde $e_j \in H_2$ es tal que $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$.

19. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ , y sea $f \in [L^2(\Omega)]^2$. EL PROBLEMA DE STOKES consiste en encontrar el vector de velocidades $u := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluido, tales que

$$-\Delta u + \nabla p = f \quad \text{en } \Omega ,$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{en } \Omega , \tag{11}$$

$$u = 0 \quad \text{en } \Gamma , \quad \int_{\Omega} p \, dx = 0 .$$

- i) Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, dx = 0 \}$, y demuestre que la formulación débil de (11) se reduce a: *encontrar* $(u, p) \in H \times Q$ tales que:

$$\begin{aligned} A(u, v) + B(v, p) &= F(v) \quad \forall v \in H , \\ B(u, q) &= 0 \quad \forall q \in Q , \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$, $B : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(u, v) := \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx ,$$

$$B(v, p) := - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx \quad , \quad F(v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx .$$

- ii) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que esta formulación tiene una única solución.
20. i) Calcule las funciones base locales del espacio de elementos finitos V_h asociado a una triangulación $\mathcal{T}_h$ hecha de cuadrados de tipo (2).
 ii) Considere el operador Laplaciano y calcule la matriz de rigidez local para el caso particular de un cuadrado de tipo 1 con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$
21. Calcule las coordenadas baricéntricas del 3-simplex (tetraedro) K de $\mathbf{R}^3$ determinado por los vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, y calcule explícitamente las 4 funciones base de $P_2(K)$ asociadas a dichos vértices.
 (Notar que $\dim P_2(K) = \text{card } \Sigma_2 = 10$).
22. Sea Ω un rectángulo de $\mathbf{R}^2$, y sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación uniforme de $\bar{\Omega}$ hecha de cuadrados K con lados (de longitud h) paralelos a los ejes coordenados. Considere la formulación variacional en $H_0^1(\Omega)$ de la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet homogéneas, y calcule la matriz de rigidez local para el cuadrado de tipo (1) con vértices (x_1, y_1) , $(x_1 + h, y_1)$, $(x_1 + h, y_1 + h)$ y $(x_1, y_1 + h)$.
23. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ , y defina $H := H^1(\Omega)$ provisto de su producto escalar usual $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Considere un operador NO LINEAL $T : H \rightarrow H$, FUERTEMENTE MONÓTONO y LIPSCHITZ-CONTINUO. Esto significa que existen constantes $\alpha, M > 0$ tales que

$$\langle T(v) - T(w), v - w \rangle_H \geq \alpha \|v - w\|_H^2 \quad \text{y} \quad \|T(v) - T(w)\|_H \leq M \|v - w\|_H$$

para todo $v, w \in H$.

- i) Dada $f \in H$, demuestre que existe un único $u \in H$ tal que $T(u) = f$.
 ii) Sea H_h el subespacio de elementos finitos de H que resulta de una triangulación regular $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ hecha con triángulos de tipo (1), y considere el esquema de Galerkin asociado: Hallar $u_h \in H_h$ tal que

$$\langle T(u_h), v_h \rangle_H = \langle f, v_h \rangle_H \quad \forall v_h \in H_h.$$

Suponga que $u \in H^2(\Omega)$ y demuestre que existe $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|u - u_h\|_H \leq C h |u|_{H^2(\Omega)}.$$

24. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera poligonal, y sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación regular de $\bar{\Omega}$ hecha de n -simplex o n -rectángulos, todos ellos afín-equivalentes a un elemento finito de referencia $\hat{K}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{h_K : K \in \mathcal{T}_h\}$, donde h_K es el diámetro de K . Ahora, para todo $K \in \mathcal{T}_h$ se define el operador local $\Pi_K : H^1(K) \rightarrow L^2(K)$ como

$$\Pi_K(v) := \frac{1}{|K|} \int_K v(x) dx \quad \forall v \in H^1(K).$$

Además, se define el operador global $\Pi : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ como

$$\Pi(v)|_K := \Pi_K(v|_K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

a) Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\hat{K}$, tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C h |v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

b) Defina el espacio $H_h := \{v_h \in L^2(\Omega) : v_h|_K \in P_0(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$, donde $P_0(K)$ denota el espacio de funciones constantes sobre K , y pruebe que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \inf_{v_h \in H_h} \|v - v_h\|_{L^2(\Omega)} \right\} = 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

25. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ . Una formulación variacional MIXTA para la ecuación de Poisson en Ω , con dato $f \in L^2(\Omega)$, y condición de Dirichlet dada por $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, consiste en: *Hallar* $(\sigma, u) \in X \times M$ tal que

$$\begin{aligned} A(\sigma, \tau) + B(\tau, u) &= \int_{\Gamma} g \tau \cdot \nu \, ds, \\ B(\sigma, v) &= - \int_{\Omega} f v \, dx, \end{aligned} \tag{12}$$

para todo $(\tau, v) \in X \times M$, donde $X := H(\text{div}; \Omega)$, $M := L^2(\Omega)$, ν es el vector normal unitario exterior a Γ , y las formas bilineales $A : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ y $B : X \times M \rightarrow \mathbf{R}$ están definidas por

$$A(\rho, \tau) := \int_{\Omega} \rho \cdot \tau \, dx \quad \forall \rho, \tau \in X,$$

$$B(\tau, v) := \int_{\Omega} v \, \text{div} \, \tau \, dx \quad \forall (\tau, v) \in X \times M.$$

a) Demuestre que A y B satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi, y concluya que existe $C_0 > 0$ tal que

$$\|(\rho, w)\|_{X \times M} \leq C_0 \sup_{\substack{(\tau, v) \in X \times M \\ \|(\tau, v)\| \leq 1}} \{ A(\rho, \tau) + B(\tau, w) + B(\rho, v) \} \tag{13}$$

para todo $(\rho, w) \in X \times M$.

b) El siguiente objetivo es deducir una ESTIMACIÓN DE ERROR A-POSTERIORI para (12). Para ello, sea $\{\mathcal{T}_h : h \in \mathbf{I}\}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$, donde $\mathbf{I}$ es un conjunto finito de parámetros dado por $\{h_1, \dots, h_m\}$, con $h_j \geq h_{j+1} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{h_K : K \in \mathcal{T}_h\}$, donde h_K es el diámetro de K . Sea $X_h \times M_h$ un subespacio de elementos finitos de $X \times M$, asociado a la triangulación $\mathcal{T}_h$, y sea $(\sigma_h, u_h) \in X_h \times M_h$ la solución del esquema de Galerkin correspondiente para la formulación (12).

i) Pruebe que existe un único $\bar{\sigma} \in X$ tal que

$$\langle \bar{\sigma}, \tau \rangle_X = A(\sigma - \sigma_h, \tau) + B(\tau, u - u_h) \quad \forall \tau \in X.$$

ii) Defina $\mathbf{J}(\tau) := \frac{1}{2} \|\tau\|_X^2 - \langle \bar{\sigma}, \tau \rangle_X \quad \forall \tau \in X$, y demuestre que

$$-\frac{1}{2} \|\bar{\sigma}\|_X^2 = \min_{\tau \in X} \mathbf{J}(\tau).$$

iii) Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ defina $(\sigma_{h,K}, u_{h,K}) := (\sigma_h, u_h)|_K$, $X_K := H(\text{div}; K)$, $M_K := L^2(K)$, y denote por $A_K : X_K \times X_K \rightarrow \mathbf{R}$ y $B_K : X_K \times M_K \rightarrow \mathbf{R}$, respectivamente, las restricciones de A y B al elemento K . Además, sea $\varphi_h \in H^{1/2}(\cup_{K \in \mathcal{T}_h} \partial K)$ una aproximación de u sobre las fronteras de los elementos K tal que $\varphi_h = g$ en Γ . Entonces, pruebe que existe un único $\hat{\sigma}_K \in X_K$ tal que

$$\langle \hat{\sigma}_K, \tau \rangle_{X_K} = -A_K(\sigma_{h,K}, \tau) - B_K(\tau, u_{h,K}) - \int_{\partial K} \varphi_h \tau \cdot \nu \, ds \quad \forall \tau \in X_K.$$

iv) Defina

$$\mathbf{J}_K(\tau) := \frac{1}{2} \|\tau\|_{X_K}^2 + A_K(\sigma_{h,K}, \tau) + B_K(\tau, u_{h,K}) + \int_{\partial K} \varphi_h \tau \cdot \nu \, ds$$

para todo $\tau \in X_K$, y pruebe que

$$-\frac{1}{2} \|\hat{\sigma}_K\|_{X_K}^2 = \min_{\tau \in X_K} \mathbf{J}_K(\tau).$$

v) Use i), ii), iii) y iv) para demostrar que

$$\|\bar{\sigma}\|_X^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\hat{\sigma}_K\|_{X_K}^2.$$

vi) Aplique (13) y v) para concluir que existe $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|(\sigma, u) - (\sigma_h, u_h)\|_{X \times M} \leq C \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2},$$

donde

$$\eta_K^2 := \|\hat{\sigma}_K\|_{X_K}^2 + \|f + \text{div } \sigma_h\|_{L^2(K)}^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

26. Sean $\Omega =]a, b[$, $\varphi \in L^2(\Omega)$ tal que $\int_{\Omega} \varphi \, dx = 0$, y considere el problema de valores de contorno: $-z'' = \varphi$, $z'(a) = z'(b) = 0$, $\int_{\Omega} z \, dx = 0$. Defina el espacio $\tilde{H}^1(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} w \, dx = 0\}$, deduzca una formulación variacional asociada con incógnita y funciones test en $\tilde{H}^1(\Omega)$, y demuestre que ella tiene una única solución.

27. (LEMA DE FORTIN). Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_H} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q. \quad (14)$$

Sean $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q , respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe un operador $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ tal que $b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) = 0 \quad \forall q_n \in Q_n$. Suponga que la familia $\{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H, H_n)} \leq C$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de n , tal que

$$\sup_{\substack{v_n \in H_n \\ v_n \neq 0}} \frac{b(v_n, q_n)}{\|v_n\|_H} \geq \beta^* \|q_n\|_Q \quad \forall q_n \in Q_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

28. Sea $\Omega :=]a, b[$ y para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca una partición

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Además, denote $h := \max \left\{ x_j - x_{j-1} : j \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}$, defina el espacio

$$V_h := \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \mathbf{P}_0([x_{j-1}, x_j]) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \right\},$$

y considere el operador $\Pi_h : L^2(\Omega) \rightarrow V_h$ que a cada $v \in L^2(\Omega)$ le asigna su mejor aproximación $\Pi_h(v) \in V_h$ con respecto al producto escalar de $L^2(\Omega)$. Demuestre que existe una constante $C > 0$, independiente de n y de h , tal que

$$\|v - \Pi_h(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C h |v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

29. Sean $\Omega :=]0, 1[$, $f \in L^2(\Omega)$, $\kappa \in]0, 2[$, y considere el problema de valores de contorno:

$$u'' + \kappa u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (15)$$

Además, para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca la partición uniforme

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1,$$

con $x_j - x_{j-1} = \frac{1}{n+1} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, y defina el espacio

$$H_n := \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) : v|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \mathbf{P}_1([x_{j-1}, x_j]) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n+1\} \right. \\ \left. y \quad v(0) = v(1) = 0 \right\}.$$

- a) Establezca la formulación variacional de (15) y demuestre que ella posee una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$.
- b) Denote por $u_n \in H_n$ la solución (cuando ella existe) del esquema de Galerkin asociado y pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} = 0$.
30. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno:

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \Gamma.$$

- a) Demuestre que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \tau \, dx + \int_{\Omega} u \, \text{div}(\tau) \, dx - \int_{\Omega} v \, \text{div}(\sigma) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (16)$$

para todo $(\tau, v) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$.

- b) Dados $\delta_1, \delta_2 > 0$, fundamente la introducción de las ecuaciones

$$\delta_1 \int_{\Omega} (\nabla u - \sigma) \cdot (\nabla v + \tau) \, dx = 0 \quad \forall (\tau, v) \in \mathbf{H} := H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad (17)$$

$$\delta_2 \int_{\Omega} \text{div}(\sigma) \, \text{div}(\tau) \, dx = -\delta_2 \int_{\Omega} f \, \text{div}(\tau) \, dx \quad \forall \tau \in H(\text{div}; \Omega), \quad (18)$$

luego sume (16), (17) y (18), y obtenga una formulación variacional mixta modificada: Hallar $(\sigma, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\sigma, u), (\tau, v)) = F(\tau, v) \quad \forall (\tau, v) \in \mathbf{H}, \quad (19)$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}$ es una forma bilineal y $F : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}$ es un funcional lineal. Entonces, demuestre que, eligiendo δ_1 y δ_2 convenientemente, el problema (19) posee una única solución, la cual depende continuamente del dato f .

31. Demuestre que $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{R}_+^n})$ es denso en $H^1(\mathbf{R}_+^n)$.
32. Sean $\hat{K} = [0, 1]$, $K = [x_{j-1}, x_j]$, $h_j := x_j - x_{j-1} > 0$, y considere la aplicación afín $F : \hat{K} \rightarrow K$ definida por

$$F(\hat{x}) = h_j \hat{x} + x_{j-1} \quad \forall \hat{x} \in \hat{K}.$$

- (a) Dado un entero $r \geq 0$, demuestre que $v \in H^r(K)$ sí y sólo sí $\hat{v} := v \circ F \in H^r(\hat{K})$, y en tal caso pruebe que

$$|\hat{v}|_{H^r(\hat{K})} = h_j^{r-1/2} |v|_{H^r(K)}.$$

- (b) Sean m, k enteros tal que $0 \leq m \leq k+1$, y sea $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^m(\hat{K}))$ tal que $\hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p} \quad \forall \hat{p} \in \mathbf{P}_k$, donde $\mathbf{P}_k$ es el espacio de polinomios de grado $\leq k$. Además, sea Π el operador definido por

$$\Pi v = (\hat{\Pi}\hat{v}) \circ F^{-1} \quad \forall v \in H^{k+1}(K).$$

Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\hat{K}$ y $\hat{\Pi}$, tal que

$$\|v - \Pi v\|_{H^m(K)} \leq C h_j^{k+1-m} |v|_{H^{k+1}(K)}.$$

33. Sea Ω un dominio poligonal convexo de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ , y dado $f \in L^2(\Omega)$, considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:

$$\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (20)$$

- i) Introduzca la incógnita auxiliar $\sigma := \nabla u$ en Ω y pruebe que una formulación variacional mixta de (20) se reduce a: Hallar $\sigma \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \tau - \int_{\Omega} \text{div}(\sigma) \text{div}(\tau) = - \int_{\Omega} f \text{div}(\tau) \quad \forall \tau \in H(\text{div}; \Omega). \quad (21)$$

- ii) Defina el operador $P : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$ que a cada $\tau \in H(\text{div}; \Omega)$ le asigna $P(\tau) := \nabla z$, donde $z \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución del problema de valores de contorno: $\Delta z = \text{div}(\tau)$ en Ω , $z = 0$ en Γ . Pruebe que P es compacto y que $H(\text{div}; \Omega) = P(H(\text{div}; \Omega)) \oplus (I - P)(H(\text{div}; \Omega))$.
- iii) Utilice la descomposición anterior de $H(\text{div}; \Omega)$ para demostrar que (21) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $\sigma \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que

$$A(\sigma, \tau) + K(\sigma, \tau) = F(\tau) \quad \forall \tau \in H(\text{div}; \Omega), \quad (22)$$

donde A y B son formas bilineales acotadas cuyos operadores inducidos $\mathbf{A} : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow H(\text{div}; \Omega)$ y $\mathbf{K} : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow H(\text{div}; \Omega)$ son biyectivo y compacto, respectivamente, y F es el funcional dado a la derecha de (21).

IND. Defina el operador $S(\tau) := (I - 2P)(\tau)$ y considere la expresión $A(\tau, S(\tau))$ para probar que A satisface las condiciones inf-sup continuas.

- iv) Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia de subespacios de dimensión finita de $H(\text{div}; \Omega)$ tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(\tau, H_h) = 0$ para todo $\tau \in H(\text{div}; \Omega)$, y considere el esquema de Galerkin perturbado: Hallar $\sigma_h \in H_h$ tal que

$$A(\sigma_h, \tau_h) = F(\tau_h) \quad \forall \tau_h \in H_h. \quad (23)$$

Suponga que existen operadores lineales $\mathcal{E}_h : [H^1(\Omega)]^2 \rightarrow H_h$ tales que

$$\text{div}(\mathcal{E}_h P(\tau_h)) = \text{div}(\tau_h) \quad \forall \tau_h \in H_h,$$

y

$$\|\tau - \mathcal{E}_h(\tau)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq C h \|\tau\|_{[H^1(\Omega)]^2} \quad \forall \tau \in [H^1(\Omega)]^2.$$

Demuestre que existe $h_0 > 0$ tal que $\forall h \leq h_0$ el problema (23) tiene solución única, la cual es estable y convergente con constantes independientes de h .

IND. Defina el operador $S_h(\tau) := (I - 2\mathcal{E}_h P)(\tau_h)$ y considere la expresión $A(\tau, S_h(\tau)) = A(\tau, S(\tau)) - A(\tau, S(\tau) - S_h(\tau))$ para probar que A satisface las condiciones inf-sup discretas.

v) Qué se puede decir del esquema de Galerkin respectivo para (22)?.

34. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. El objetivo de este problema es demostrar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 \geq \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2, \quad (24)$$

donde $\mathbf{e}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t \right\}$. Para tal efecto, proceda como sigue.

i) Dados $\sigma := (\sigma_{ij})$ y $\tau := (\tau_{ij})$ en $\mathbf{R}^{2 \times 2}$, se define el producto tensorial

$$\sigma : \tau := \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij} \tau_{ij} \quad \text{y se introducen los subespacios}$$

$$\mathbf{R}_{sim}^{2 \times 2} := \{ \tau \in \mathbf{R}^{2 \times 2} : \tau^t = \tau \} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}_{asim}^{2 \times 2} := \{ \tau \in \mathbf{R}^{2 \times 2} : \tau^t = -\tau \}.$$

Pruebe que $\sigma : \tau = 0 \quad \forall \sigma \in \mathbf{R}_{sim}^{2 \times 2}, \quad \forall \tau \in \mathbf{R}_{asim}^{2 \times 2}$.

ii) Note que $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{e}(\mathbf{v}) + \mathbf{w}(\mathbf{v})$, con $\mathbf{w}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^t \right\}$, y recuerde que $\|\tau\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 = \int_{\Omega} \tau : \tau \quad \forall \tau \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2}$, para probar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 - \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{v})^t$$

y

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 + \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}}^2 = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}.$$

iii) Deduzca la identidad $\nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{v})^t = \operatorname{div} \left\{ \nabla \mathbf{v} \mathbf{v} - \operatorname{div}(\mathbf{v}) \mathbf{v} \right\} + (\operatorname{div}(\mathbf{v}))^2$ y concluya la desigualdad (24).

35. Sean $(X_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{X_1})$, $(X_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{X_2})$, e $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert, defina el producto $X := X_1 \times X_2$, y considere operadores lineales y acotados $\mathbf{P} : X \rightarrow X$, $\mathbf{Q} : X \rightarrow Y$, $A : X_1 \rightarrow X_1$, $B : X_1 \rightarrow X_2$, y $C : X_2 \rightarrow X_2$, tales que:

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & -C \end{pmatrix}.$$

Sea $V := V_1 \times V_2$ el kernel de $\mathbf{Q}$, donde $V_1 \subseteq X_1$ y $V_2 \subseteq X_2$, y suponga que:

- i) existe $\alpha > 0$ tal que $\langle A(x_1), x_1 \rangle_{X_1} \geq \alpha \|x_1\|_{X_1}^2 \quad \forall x_1 \in V_1.$
- ii) existe $\beta > 0$ tal que $\sup_{x_1 \in V_1 \setminus \{0\}} \frac{\langle B(x_1), x_2 \rangle_{X_2}}{\|x_1\|_{X_1}} \geq \beta \|x_2\|_{X_2} \quad \forall x_2 \in V_2.$
- iii) $\langle C(x_2), x_2 \rangle_{X_2} \geq 0 \quad \forall x_2 \in V_2.$
- iv) existe $\tilde{\beta} > 0$ tal que $\|\mathbf{Q}^*(y)\|_X \geq \tilde{\beta} \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$

a) Pruebe que para todo $(f, g) \in X \times Y$ existe un único $(x, y) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x) + \mathbf{Q}^*(y) &= f, \\ \mathbf{Q}(x) &= g, \end{aligned} \tag{25}$$

y encuentre explícitamente una constante $C > 0$ tal que

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} \leq C \left\{ \|f\|_X + \|g\|_Y \right\}.$$

- b) Defina un esquema de Galerkin para (25) y establezca condiciones suficientes que aseguren su solubilidad única y estabilidad.
- c) Demuestre la estimación de Cea para el esquema definido en b).

36. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall x := (x_1, \dots, x_n)^T \in \Omega$.

a) Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|_{H^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^n |\langle v, p_i \rangle_{H^2(\Omega)}|^2 \right\}^{1/2} \quad \forall v \in H^2(\Omega),$$

y demuestre que existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 |||v||| \leq \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C_2 |||v||| \quad \forall v \in H^2(\Omega).$$

b) Considere el espacio cociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma $\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \inf_{p \in P_1(\Omega)} \|v - p\|_{H^2(\Omega)}$, y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega).$$

Demuestre que $|\cdot|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \leq |||v|||_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$$

$$\leq C |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \quad \forall [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega).$$

- c) Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p \ \forall p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq C |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega).$$

37. Sea T un triángulo de $\mathbf{R}^2$ con diámetro h_T y sea $\widehat{T}$ el triángulo canónico con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. A su vez, sea $F_T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ una aplicación afín invertible tal que $F_T(\widehat{T}) = T$, y defina $\psi_T := \widehat{\psi} \circ F_T^{-1}$, donde $\widehat{\psi}$ es la función burbuja de $\widehat{T}$. Además, sea $\mathcal{P}_0$ el proyector ortogonal de $L^2(T)$ en $\mathbb{P}_0(T)$, el espacio de polinomios constantes sobre T , con respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle := \int_T \psi_T f g \quad \forall f, g \in L^2(T).$$

Aplice los lemas de Bramble-Hilbert y Deny-Lions para demostrar que existe $C > 0$, independiente de T , tal que:

$$\|v - \mathcal{P}_0(v)\|_{0,T} \leq C h_T |v|_{1,T} \quad \forall v \in H^1(T).$$

Dado $s \in]0, 1[$, utilice argumentos de interpolación de espacios normados y el hecho que $(L^2(T), H^1(T))_{s,2} = H^s(T)$, para probar que existe $C_s > 0$, independiente de T , tal que

$$\|v - \mathcal{P}_0(v)\|_{0,T} \leq C_s h_T^s \|v\|_{s,T} \quad \forall v \in H^s(T).$$

38. Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ e $(Y_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$, espacios de Hilbert, y considere el espacio $Y = Y_1 \times Y_2$ provisto del producto escalar

$$\langle z, y \rangle_Y := \langle z_1, y_1 \rangle_1 + \langle z_2, y_2 \rangle_2 \quad \forall z := (z_1, z_2), y = (y_1, y_2) \in Y.$$

Entonces, dados $B_j \in \mathcal{L}(X, Y_j)$, $j \in \{1, 2\}$, defina el operador $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ por $B(x) := (B_1(x), B_2(x)) \ \forall x \in X$. Demuestre que B es sobreyectivo si y sólo si:

- i) B_1 y B_2 son sobreyectivos.
- ii) $X = N(B_1) + N(B_2)$.

39. Este problema constituye una versión particular del Lema de Peetre-Tartar.

- (a) Sean $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ y $(X_3, \|\cdot\|_3)$, espacios de Banach, y considere operadores $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ y $B \in \mathcal{L}(X_1, X_3)$, tales que B es compacto. Además, suponga que existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \leq c \left\{ \|A(x)\|_2 + \|B(x)\|_3 \right\} \quad \forall x \in X_1.$$

Demuestre que $N(A)$ es de dimensión finita, y luego razone por contradicción para probar que existe $C > 0$ tal que

$$\text{dist}(x, N(A)) \leq C \|A(x)\|_2 \quad \forall x \in X_1.$$

- (b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ y considere la descomposición: $H^1(\Omega) = \tilde{H}^1(\Omega) \oplus \mathbb{P}_0(\Omega)$, donde $\mathbb{P}_0(\Omega)$ es el espacio de las funciones constantes sobre Ω y

$$\tilde{H}^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v = 0 \right\}.$$

Pruebe que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq |v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega). \quad (26)$$

- (c) Aplique (a), (26), y el teorema de trazas, para demostrar que existen constantes $C_1, C_2 > 0$, tales que

$$C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq |v|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (27)$$

INDICACIÓN: para la desigualdad (27) inferior defina operadores A y B apropiados utilizando los espacios $X_1 := H^1(\Omega)$, $X_2 := [L^2(\Omega)]^2 \times L^2(\Gamma)$ y $X_3 := \mathbb{P}_0(\Omega)$.

40. Sean Ω un abierto acotado y convexo de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ , $f \in L^2(\Omega)$, y $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ la única solución de: $-\Delta u = f$ en Ω , $u = 0$ en Γ . Dada una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de $\bar{\Omega}$ hecha de triángulos K y lados e , se definen los espacios de LAGRANGE y de CROUZEIX-RAVIART, respectivamente, como sigue:

$$X_h := \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) : v|_K \in \mathbf{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad v = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \right\},$$

$$V_h := \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_K \in \mathbf{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad v \text{ es continua en los puntos medios de los lados } e \in \mathcal{T}_h, \quad v = 0 \text{ en los puntos medios de los lados } e \subseteq \Gamma \right\}.$$

- a) Defina $\|v_h\|_h := \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{1,K}^2 \right\}^{1/2} \quad \forall v_h \in V_h$, pruebe que $\|\cdot\|_h$ es una norma sobre V_h , y concluya que existe un único $u_h \in V_h$ tal que

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h = F(v_h) := \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in V_h.$$

- b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|u - u_h\|_h \leq C \left\{ \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h \setminus 0} \frac{|a_h(u, w_h) - F(w_h)|}{\|w_h\|_h} \right\}. \quad (28)$$

c) Integre por partes en cada $K \in \mathcal{T}_h$ y pruebe que

$$\begin{aligned} a_h(u, w_h) - F(w_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} w_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \subseteq \partial K} \int_e \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} (w_h - \mathcal{P}_{0,e}(w_h)) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \subseteq \partial K} \int_e (\nabla u - \nabla \Pi_h(u)) \cdot \boldsymbol{\nu} (w_h - \mathcal{P}_{0,e}(w_h)) \quad \forall w_h \in V_h, \end{aligned} \quad (29)$$

donde $\Pi_h : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow X_h$ es el operador de interpolación global de Lagrange y $\mathcal{P}_{0,e} : L^2(e) \rightarrow \mathbf{P}_0(e)$ es el proyector ortogonal.

d) Deduzca a partir de (28) y (29) que existe $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|u - u_h\|_h \leq C h |u|_{2,\Omega}.$$

41. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ y sea $f \in [L^2(\Omega)]^2$. El problema de elasticidad lineal plana asociado a un sólido que ocupa Ω , y que está sometido a la fuerza f , consiste en encontrar el desplazamiento u tal que:

$$\operatorname{div} \left\{ \lambda \operatorname{tr} \mathbf{e}(u) I + 2\mu \mathbf{e}(u) \right\} = -f \quad \text{en } \Omega \quad \text{y} \quad u = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma, \quad (30)$$

donde $\lambda, \mu > 0$ son las constantes de Lamé, tr denota el operador de trazas matricial, $\mathbf{e}(u)$ es el tensor de deformaciones, e I es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2 \times 2}$.

a) Demuestre que la formulación variacional de (30) se reduce a: Hallar $u \in [H_0^1(\Omega)]^2$ tal que

$$\int_{\Omega} \left\{ \lambda \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(\mathbf{v}) + 2\mu \mathbf{e}(u) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \right\} = \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2,$$

y pruebe que ella tiene solución única, la cual depende continuamente de f .

b) Utilice triángulos de tipo (1) para definir detalladamente un esquema de Galerkin asociado, pruebe que tiene solución única, establezca su convergencia e indique la razón de convergencia respectiva.

42. Sea Ω un abierto acotado y conexo de $\mathbf{R}^n$ de clase $C^{0,1}$, y sea $H^{-1}(\Omega)$ (resp. $[H^{-1}(\Omega)]^n$) el dual de $H_0^1(\Omega)$ (resp. $[H_0^1(\Omega)]^n$). Utilizando que $C_0^\infty(\Omega)$ (resp. $[C_0^\infty(\Omega)]^n$) es denso en $H_0^1(\Omega)$ (resp. $[H_0^1(\Omega)]^n$), las aplicaciones identidad $i : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ y gradiente $\nabla : L^2(\Omega) \rightarrow [\mathcal{D}'(\Omega)]^n$ se extienden por densidad a operadores $i : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ y $\nabla : L^2(\Omega) \rightarrow [H^{-1}(\Omega)]^n$, respectivamente. En tal caso, se puede probar que existe $c_1 > 0$, que depende sólo de Ω , tal que

$$\|p\|_{0,\Omega} \leq c_1 \left\{ \|p\|_{-1,\Omega} + \|\nabla p\|_{-1,\Omega} \right\} \quad \forall p \in L^2(\Omega).$$

a) Considere el operador $B := \mathcal{R} \nabla$, donde $\mathcal{R} : [H^{-1}(\Omega)]^n \rightarrow [H_0^1(\Omega)]^n$ es la aplicación de Riesz asociada, y demuestre que el rango de B es cerrado en $[H_0^1(\Omega)]^n$.

- b) Identifique el operador adjunto $B^* : [H_0^1(\Omega)]^n \rightarrow L^2(\Omega)$ y utilice resultados clásicos de análisis funcional para probar que $\text{div} : V^\perp \rightarrow L_0^2(\Omega)$ es un isomorfismo, donde $V := \left\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n : \text{div } \mathbf{v} = 0 \right\}$, $[H_0^1(\Omega)]^n = V \oplus V^\perp$, y $L_0^2(\Omega) := \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_\Omega p = 0 \right\}$.

IND.: Una versión particular del Lema de Peetre-Tartar establece que, dados $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ y $B \in \mathcal{L}(X, Z)$, con X, Y y Z espacios de Banach, tales que para algún $c > 0$ se tiene que $\|x\| \leq c \left\{ \|A(x)\| + \|B(x)\| \right\} \quad \forall x \in X$, entonces necesariamente $N(B)$ es de dimensión finita y existe $C > 0$ tal que $\text{dist}(x, N(B)) \leq C \|B(x)\| \quad \forall x \in X$.

43. Dados Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y constantes $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbf{R}$, considere el problema:

$$-\Delta u + \kappa_1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} + \kappa_2 u = f \quad \text{en } \Omega, \quad \nabla u \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{en } \Gamma, \quad (31)$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal en Γ . Deduzca la formulación primal de (31) y encuentre la mayor región factible para $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbf{R}^2$ que asegura elipticidad de la forma bilineal resultante. A su vez, defina el esquema de Galerkin asociado y establezca la estimación de Cea correspondiente en términos de κ_1 y κ_2 . Luego, reemplace el dato de Neumann por uno de Dirichlet homogéneo y pruebe en tal caso que la elipticidad indicada sólo depende de κ_2 .

44. El propósito de este ejercicio es introducir un esquema de Galerkin no usual para el problema de valores de contorno:

$$-u'' + 3u' = f \quad \text{en } \Omega :=]0, 2[, \quad u(0) = u(2) = 0, \quad (32)$$

donde $f \in L^2(\Omega)$. Para este efecto, proceda según se indica a continuación:

- a) Para cada $j \in \{1, 2, 3\}$ encuentre y dibuje el único polinomio p_j de grado ≤ 2 tal que $(p_j(0), p_j(1), p'_j(1/3)) = \mathbf{e}_j$, donde $\mathbf{e}_j$ es el j -ésimo vector de la base canónica de $\mathbf{R}^3$.
- b) Sea $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 2$ una partición UNIFORME de $\Omega :=]0, 2[$ y denote $h := \frac{2}{n+1}$. Dado $i \in \{1, \dots, n+1\}$, utilice lo obtenido en a) y el cambio de variables $[x_{i-1}, x_i] \ni x = x_{i-1} + th, \quad t \in [0, 1]$, para encontrar los polinomios $p_{i,j}$ de grado ≤ 2 , $j \in \{1, 2, 3\}$, tales que $(p_{i,j}(x_{i-1}), p_{i,j}(x_i), p'_{i,j}(\tilde{x}_i)) = \mathbf{e}_j$, donde $\tilde{x}_i := x_{i-1} + \frac{1}{3}h$.
- c) Para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca el espacio de elementos finitos

$$H_n := \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) : v(0) = v(2) = 0, \text{ y } v|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathcal{P}_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n+1\} \right\},$$

donde $\mathcal{P}_i := \langle p_{i,1}, p_{i,2}, p_{i,3} \rangle$, e identifique en particular una base de H_1 .

d) Utilice H_n para definir el esquema de Galerkin asociado a (32), demuestre que este sistema discreto tiene solución única, y calcule la matriz de rigidez correspondiente para $n = 1$.

e) Qué ocurre en a) y b) si en vez de $1/3$ y $\tilde{x}_i := x_{i-1} + \frac{1}{3}h$ se considera $1/2$ y $\tilde{x}_i := x_{i-1} + \frac{1}{2}h$? Qué ocurre si se elige cualquier $r \in]0, 1[$, $r \neq 1/2$, y $\tilde{x}_i := x_{i-1} + rh$?

45. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, y $\mathbf{K} \in [C(\overline{\Omega})]^{n \times n}$ un tensor simétrico y uniformemente definido positivo. Se puede probar que la formulación variacional mixta del problema: $-\operatorname{div}\{\mathbf{K} \nabla u\} = f$ en Ω , $u = g$ en Γ , consiste en hallar un par $(\sigma, u) \in H(\operatorname{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \mathbf{K}^{-1} \sigma \cdot \tau + \int_{\Omega} u \operatorname{div} \tau - \int_{\Omega} v \operatorname{div} \sigma = \int_{\Omega} f v + \langle \tau \cdot \mathbf{n}, g \rangle$$

para todo $(\tau, v) \in H(\operatorname{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal en Γ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$. Luego, dados $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$, agregue las ecuaciones

$$\delta_1 \int_{\Omega} (\nabla u - \sigma) \cdot \nabla v = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \delta_2 \int_{\Gamma} u v = \delta_2 \int_{\Gamma} g v \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

$$\delta_3 \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma \operatorname{div} \tau = -\delta_3 \int_{\Omega} f \operatorname{div} \tau \quad \forall \tau \in H(\operatorname{div}; \Omega),$$

y demuestre que, eligiendo convenientemente estas constantes, la forma bilineal resultante es $H(\operatorname{div}; \Omega) \times H^1(\Omega)$ -elíptica.

46. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ y sea $f \in [L^2(\Omega)]^2$. A su vez, sean $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de Ω y k un entero ≥ 1 . Defina para cada $h > 0$ el espacio

$$X_h^k := \left\{ \mathbf{v}_h \in [C(\overline{\Omega})]^2 : \mathbf{v}_h|_K \in [\mathbb{P}_k(K)]^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \cap [H_0^1(\Omega)]^2,$$

y considere el siguiente esquema de Galerkin para el problema de elasticidad lineal plana asociado a un sólido que ocupa la region Ω y que está sujeto a la fuerza representada por f : Hallar $\mathbf{u}_h \in X_h^k$ tal que

$$\int_{\Omega} \left\{ 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}_h) : \mathbf{e}(\mathbf{v}_h) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \right\} = \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h^k, \quad (33)$$

donde $\lambda, \mu > 0$ son las constantes de Lamé respectivas y, dado $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2$, $\mathbf{e}(\mathbf{v})$ denota el tensor de deformaciones (o parte simétrica de $\nabla \mathbf{v}$).

a) Pruebe que (33) tiene solución única y establezca la razón de convergencia correspondiente.

- b) Denote por $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ la solución del problema continuo respectivo y demuestre, utilizando el interpolante de Clément $\mathbf{I}_h : [L^2(\Omega)]^2 \rightarrow X_h^1 \subseteq X_h^k$, que existe $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \leq C \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2},$$

donde

$$\eta_K^2 := h_K^2 \|f + \mathbf{div} \sigma_h\|_{0,K}^2 + \sum_{e \subseteq \partial K} h_e \|[\sigma_h]_e\|_{0,e}^2,$$

$$\sigma_h := 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}_h) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}_h \mathbb{I},$$

h_K es el diámetro de K , h_e es la longitud del lado e de $\mathcal{T}_h$, $[\sigma_h]_e$ denota el salto de discontinuidad de σ_h a través de e , e $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2 \times 2}$.

47. Dada una familia regular de triangularizaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de un dominio poliédrico Ω de $\mathbf{R}^n$ y un entero $k \geq 1$, considere para cada $h > 0$ los proyectores ortogonales $\mathbf{P}_{1,h}^k : H^1(\Omega) \rightarrow X_h^k$ (con respecto al producto interior de $H^1(\Omega)$) y $\mathbf{P}_h^k : L^2(\Omega) \rightarrow X_h^k$ (con respecto al producto interior de $L^2(\Omega)$), donde $X_h^k := \left\{ v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$.

- a) Pruebe que existen constantes $C_1, C_2 > 0$, independientes de h , tales que

$$\|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} \leq C_1 h^l |v|_{l+1,\Omega} \quad \forall v \in H^{l+1}(\Omega), \quad \forall l \in \{0, 1, \dots, k\}, \quad \text{y}$$

$$\|v - \mathbf{P}_h^k(v)\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^{l+1} |v|_{l+1,\Omega} \quad \forall v \in H^{l+1}(\Omega), \quad \forall l \in \{1, \dots, k\}.$$

- b) Use la teoría de interpolación de espacios de Sobolev para probar, a partir de a), que existen constantes $C_3, C_4 > 0$, independientes de h , tales que

$$\|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} \leq C_3 h^s \|v\|_{s+1,\Omega} \quad \forall v \in H^{s+1}(\Omega), \quad \forall s \in [0, k], \quad \text{y}$$

$$\|v - \mathbf{P}_h^k(v)\|_{0,\Omega} \leq C_4 h^s \|v\|_{s,\Omega} \quad \forall v \in H^s(\Omega), \quad \forall s \in [0, k+1].$$

- c) Suponga ahora que Ω es convexo, y sea $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^2(\Omega))$ el operador que a cada $r \in L^2(\Omega)$ le asigna la única solución $T(r) \in H^2(\Omega)$ del problema: $-\Delta T(r) + T(r) = r$ en Ω , $\nabla T(r) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ en $\partial\Omega$, donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal a $\partial\Omega$. Luego, empleando la formulación débil que define a $T(r)$ y el argumento de dualidad (“*truco de Aubin-Nitsche*”) dado por la identidad

$$\|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{0,\Omega} = \sup_{\substack{r \in L^2(\Omega) \\ r \neq 0}} \frac{\langle r, v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v) \rangle_{0,\Omega}}{\|r\|_{0,\Omega}},$$

demuestre que

$$\|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{0,\Omega} \leq \tilde{C} h \|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

y concluya luego que

$$\|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{0,\Omega} \leq \widehat{C} h^{l+1} |v|_{l+1,\Omega} \quad \forall v \in H^{l+1}(\Omega), \quad \forall l \in \{0, 1, \dots, k\},$$

con $\widetilde{C}, \widehat{C} > 0$, independientes de h, v y k .

- d) Además de la convexidad de Ω , suponga también que $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ es quasi-uniforme, y demuestre, utilizando las propiedades de $\mathbf{P}_{1,h}^k$ y $\mathbf{P}_h^k$, y algunas estimaciones obtenidas en clases y en las partes anteriores de este problema, que existen $c_1, c_2 > 0$, independientes de h , tales que

$$c_1 \|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} \leq \|v - \mathbf{P}_h^k(v)\|_{1,\Omega} \leq c_2 \|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

IND.: Para la desigualdad que involucra a c_2 pruebe primero que

$$\|v - \mathbf{P}_h^k(v)\|_{1,\Omega} \leq \|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{P}_h^k\{v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\}\|_{1,\Omega}.$$

48. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de un dominio poligonal Ω de $\mathbf{R}^2$, y para cada $h > 0$ considere el espacio de elementos finitos

$$X_h := \left\{ v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Además, sea $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ el conjunto de vértices de $\mathcal{T}_h$, y sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ la base correspondiente de X_h , es decir, dado $j \in \{1, \dots, N\}$, φ_j es la única función en X_h tal que $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$. A su vez, para cada $j \in \{1, \dots, N\}$ se introduce el macro-elemento $w_j := \text{sop } \varphi_j = \cup\{K \in \mathcal{T}_h : x_j \in K\}$, y dado $K \in \mathcal{T}_h$ se denota por ψ_K su función burbuja respectiva. Luego, para cada $j \in \{1, \dots, N\}$ se considera el proyector ortogonal $S_j : L^2(w_j) \rightarrow \mathbb{P}_0(w_j)$ con respecto al producto escalar ponderado

$$\langle\langle v, z \rangle\rangle_{0,w_j} := \sum_{K \subseteq w_j} \int_K \psi_K v z \quad \forall v, z \in L^2(w_j),$$

y se introduce un interpolante de Clément alternativo $J_h : L^2(\Omega) \rightarrow X_h$ dado por $J_h(v) := \sum_{j=1}^N S_j(v) \varphi_j \quad \forall v \in L^2(\Omega)$. Demuestre, siguiendo básicamente el mismo análisis de clases, que existen $C_1, C_2 > 0$, independientes de h , tales que

$$\|v - J_h(v)\|_{0,K} \leq C_1 h_K |v|_{1,w_K} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

y

$$\|v - J_h(v)\|_{0,e} \leq C_2 h_K^{1/2} |v|_{1,w_e} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \forall \text{lado } e \text{ de } K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

donde

$$w_K := \cup\{w_j : x_j \in K\} \quad \text{y} \quad w_e := \cup\{w_j : x_j \in e\}.$$

49. Dados Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1 , $f \in L^2(\Omega)$, y constantes $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbf{R}$ con $\kappa_2 \neq 0$, considere el problema:

$$-\Delta u + \kappa_1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} + \kappa_2 u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (34)$$

Defina la incógnita auxiliar $\sigma = \nabla u$ en Ω y deduzca la siguiente formulación variacional mixta de (34): Hallar $\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que

$$\kappa_2 \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau + \int_{\Omega} \text{div } \sigma \text{div } \tau - \kappa_1 \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \sigma_j \text{div } \tau = - \int_{\Omega} f \text{div } \tau \quad \forall \tau \in H(\text{div}; \Omega).$$

Dibuje la region $S := \left\{ (\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbf{R}^2 : \kappa_2 > 0 \text{ y } |\kappa_1| < 2 \min \left\{ \kappa_2, \frac{1}{n} \right\} \right\}$, y pruebe que para todo $(\kappa_1, \kappa_2) \in S$ el problema anterior tiene una única solución $\sigma \in H(\text{div}; \Omega)$ que depende continuamente del dato f .

50. Encuentre el único polinomio b_K de grado ≤ 4 que se anula en la frontera del tetraedro K de vértices $(0, 1, 2)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 3)$ y $(0, 0, 0)$, y que vale $1/2$ en el baricentro respectivo.
51. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y sean $\Gamma_D, \Gamma_N \subseteq \Gamma$ tales que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| \neq 0$ y $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Se sabe que

$$H^{1/2}(\Gamma_*) := \left\{ \gamma_0(w)|_{\Gamma_*} : w \in H^1(\Omega) \right\} \quad \forall * \in \{D, N\},$$

con $\|\varphi\|_{1/2, \Gamma_*} := \inf \left\{ \|w\|_{1, \Omega} : w \in H^1(\Omega), \gamma_0(w)|_{\Gamma_*} = \varphi \right\} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_*)$. A su vez, denotando por $E_{N,0} : H^{1/2}(\Gamma_N) \rightarrow L^2(\Gamma)$ el operador de extensión nula

$$E_{N,0}(\varphi) := \begin{cases} \varphi & \text{en } \Gamma_N \\ 0 & \text{en } \Gamma \setminus \Gamma_N \end{cases} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_N),$$

se tiene que $H_{00}^{1/2}(\Gamma_N) := \left\{ \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_N) : E_{N,0}(\varphi) \in H^{1/2}(\Gamma) \right\}$, con norma inducida $\|\varphi\|_{1/2, 00, \Gamma_N} := \|E_{N,0}(\varphi)\|_{1/2, \Gamma} \quad \forall \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_N)$.

- i) Pruebe que para cada $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ existe un único $w_\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(w_\varphi)|_{\Gamma_D} = \varphi$ y $\|\varphi\|_{1/2, \Gamma_D} = \|w_\varphi\|_{1, \Omega}$.
- ii) Dado $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, considere el problema de valores de contorno

$$\Delta z_\varphi = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad \gamma_0(z_\varphi)|_{\Gamma_D} = \varphi \quad \text{en } \Gamma_D, \quad \gamma_1(z_\varphi) = 0 \quad \text{en } \Gamma_N, \quad (35)$$

y demuestre fundadamente, utilizando una adecuada fórmula de integración por partes, que $z_\varphi = \tilde{z}_\varphi + w_\varphi$, donde $\tilde{z}_\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ es tal que

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{z}_\varphi \cdot \nabla v = - \int_{\Omega} \nabla w_\varphi \cdot \nabla v \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega). \quad (36)$$

Pruebe que (36) tiene solución única y concluya que $\|z_\varphi\|_{1, \Omega} \leq c \|\varphi\|_{1/2, \Gamma_D}$.

- iii) Defina el operador $E_D : H^{1/2}(\Gamma_D) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ por $E_D(\varphi) := \gamma_0(z_\varphi) \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, y pruebe que E_D es lineal y acotado.
- iv) Pruebe que $H^{1/2}(\Gamma) = E_D(H^{1/2}(\Gamma_D)) \oplus E_{N,0}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_N))$. Equivalentemente, dado $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, demuestren que existen únicos $\psi_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ y $\psi_N \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_N)$ tales que $\psi = E_D(\psi_D) + E_{N,0}(\psi_N)$.
- v) Deduzca a partir de iv) que, dado $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$, existen $\lambda_D \in H^{-1/2}(\Gamma_D)$ y $\lambda_N \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_N)$ tales que $\langle \lambda, \psi \rangle = \langle \lambda_D, \psi_D \rangle_{\Gamma_D} + \langle \lambda_N, \psi_N \rangle_{\Gamma_N} \quad \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Concluya que si $\lambda|_{\Gamma_N} = 0$, λ se identifica con un funcional en $H^{-1/2}(\Gamma_D)$.
52. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y sean $\Gamma_D, \Gamma_N \subseteq \Gamma$ tales que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| \neq 0$ y $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, considere el problema de valores de contorno

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad \gamma_0(u)|_{\Gamma_D} = g \text{ en } \Gamma_D, \quad \gamma_1(u) = 0 \text{ en } \Gamma_N. \quad (37)$$

- i) Utilice lo que sea necesario del ejercicio anterior para probar que una formulación primal-mixta de (37) se reduce a: Hallar $(u, \lambda) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= F(v) \quad \forall v \in H, \\ b(u, \xi) &= G(\xi) \quad \forall \xi \in Q, \end{aligned} \quad (38)$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := H^{-1/2}(\Gamma_D)$, $a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ y $b : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ son las formas bilineales dadas por

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{y} \quad b(v, \xi) := \langle \xi, \gamma_0(v) \rangle_{\Gamma_D} \quad \forall u, v \in H, \quad \forall \xi \in Q,$$

y los funcionales $F \in H'$ y $G \in Q'$ dependen de f y g , respectivamente.

- ii) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que existe una única solución de (38), la cual depende continuamente de los datos f y g .
- iii) Sea H_h un subespacio arbitrario de dimensión finita de H y, dada una partición $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de Γ_D , defina

$$Q_h := \left\{ \xi_h \in L^2(\Gamma_D) : \quad \xi_h|_{e_j} \in P_0(e_j) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

Considere el sistema de Galerkin asociado a (38), suponga que b satisface la condición inf-sup discreta con una constante $\beta > 0$ independiente de las dimensiones de H_h y Q_h , y pruebe que dicho esquema discreto posee una única solución $(u_h, \lambda_h) \in H_h \times Q_h$. Establezca además la estimación de Cea y comente si acaso el error $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ depende o no de $\text{dist}(\lambda, Q_h)$.

53. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera poliédrica, y sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación regular de $\bar{\Omega}$ hecha de n -simplex o n -rectángulos, todos ellos afín-equivalentes a un elemento finito de referencia $\hat{K}$. Como es usual, el parámetro h está dado por

$h := \max\{h_K : K \in \mathcal{T}_h\}$, donde h_K es el diámetro de K . Ahora, para todo $K \in \mathcal{T}_h$ se define el operador local $\Pi_K : H^1(K) \rightarrow L^2(K)$ como

$$\Pi_K(v) := \frac{1}{|K|} \int_K v \quad \forall v \in H^1(K).$$

Además, se define el operador global asociado $\Pi : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ como

$$\Pi(v)|_K := \Pi_K(v|_K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall v \in H^1(\Omega).$$

Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\widehat{K}$, tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C h |v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

54. Sean K_1 y K_2 triángulos adyacentes de $\mathbf{R}^2$ con diámetros h_1 y h_2 , respectivamente, y para cada $j \in \{1, 2\}$ considere el proyector ortogonal $\Pi_j : L^2(K_j) \rightarrow P_0(K_j)$. Defina el operador $\Pi : L^2(K_1 \cup K_2) \rightarrow P_0(K_1 \cup K_2)$ por

$$\Pi(v) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \Pi_j(v|_{K_j}) \quad \forall v \in L^2(K_1 \cup K_2),$$

y muestre que existen $C_1, C_2 > 0$, independientes de K_1 y K_2 , tales que

$$\|v - \Pi(v)\|_{0, K_j} \leq C_j h_j |v|_{1, K_1 \cup K_2} \quad \forall j \in \{1, 2\}, \quad \forall v \in H^1(K_1 \cup K_2).$$

Además, enuncie y demuestre el resultado que extiende lo anterior al caso de n triángulos “*adyacentes dos a dos*” de $\mathbf{R}^2$.

55. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de un dominio poligonal Ω de $\mathbf{R}^2$, y para cada $h > 0$ considere el espacio

$$X_h := \left\{ v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Además, sea $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ el conjunto de vértices de $\mathcal{T}_h$, y sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ la base correspondiente de X_h , es decir, dado $j \in \{1, \dots, N\}$, φ_j es la única función en X_h tal que $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$. A su vez, para cada $j \in \{1, \dots, N\}$ se introduce el macro-elemento $w_j := \text{sop } \varphi_j = \cup\{K \in \mathcal{T}_h : x_j \in K\}$, y se define el operador $S_j : L^2(w_j) \rightarrow P_0(w_j)$ dado por

$$S_j(v) := \frac{1}{n_j} \sum_{K \subseteq w_j} S_{j,K}(v|_K) \quad \forall v \in L^2(w_j),$$

donde n_j es el número de triángulos de w_j y $S_{j,K} : L^2(K) \rightarrow P_0(K)$ es el proyector ortogonal. Defina el interpolante de Clément alternativo $J_h : L^2(\Omega) \rightarrow X_h$ dado

por $J_h(v) := \sum_{j=1}^N S_j(v) \varphi_j \quad \forall v \in L^2(\Omega)$, y demuestre que existen $C_1, C_2 > 0$,

independientes de h , tales que

$$\|v - J_h(v)\|_{0,K} \leq C_1 h_K |v|_{1, w_K} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

y

$$\|v - J_h(v)\|_{0,e} \leq C_2 h_K^{1/2} |v|_{1,w_e} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \forall \text{lado } e \text{ de } K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

donde

$$w_K := \cup \{w_j : x_j \in K\} \quad \text{y} \quad w_e := \cup \{w_j : x_j \in e\}.$$

56. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera poliédrica, y sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de $\bar{\Omega}$ hecha de n -simplex K con diámetro h_K , todos ellos afín-equivalentes a un elemento finito de referencia $\hat{K}$. Suponga también que dicha familia es *quasi-uniforme*, esto es existe $c > 0$, independiente de h , tal que

$$h := \max \{h_K : K \in \mathcal{T}_h\} \leq c \min \{h_K : K \in \mathcal{T}_h\},$$

y, dado $k \geq 1$, defina el espacio de elementos finitos de Lagrange

$$X_h^k := \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) : v|_K \in P_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Pruebe que existe $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq C h^{-1} \|v\|_{0,\Omega} \quad \forall v \in X_h^k. \quad (39)$$

BONUS TRACK (0.5 PUNTOS). Utilice la teoría de interpolación de espacios de Sobolev para probar que existe $C > 0$, independiente de h , tal que $\|v\|_{\delta,\Omega} \leq C h^{-\delta} \|v\|_{0,\Omega} \quad \forall v \in X_h^k, \quad \forall \delta \in [0, 1]$.

57. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ , y dado $f \in L^2(\Omega)$, sea $u \in H_0^1(\Omega)$ la única solución débil del problema de Poisson: $-\Delta u = f$ en Ω , $u = 0$ en Γ . A su vez, sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de $\bar{\Omega}$ hecha de triángulos K con diámetro h_K . Entonces, dado $k \in \mathbf{N}$, defina el espacio de elementos finitos

$$X_{h,0}^k := \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) : v|_K \in P_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad v = 0 \quad \text{en } \Gamma \right\},$$

asuma la existencia de un interpolante de Clément $I_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow X_{h,0}^k$ con las mismas propiedades de aproximación del visto en clases, y considere el esquema de Galerkin: Hallar $u_h \in X_{h,0}^k$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in X_{h,0}^k. \quad (40)$$

- i) Demuestre que existe $\alpha > 0$, dependiente sólo de Ω , tal que

$$\alpha \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \sup_{w \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{S_h(w)}{\|w\|_{1,\Omega}},$$

$$\text{donde } S_h(w) := \int_{\Omega} f (w - I_h(w)) - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla (w - I_h(w)).$$

- ii) Sea $\mathcal{E}_h(\Omega)$ el conjunto de lados interiores de $\mathcal{T}_h$. Entonces, dado $e \in \mathcal{E}_h(\Omega)$, $\boldsymbol{\nu}_e$ denota un vector normal unitario fijo sobre e , y $[\nabla u_h]_e$ es el salto de discontinuidad de ∇u_h sobre e en la dirección dada por $\boldsymbol{\nu}_e$. Pruebe que

$$S_h(w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f + \Delta u_h)(w - I_h(w)) - \sum_{e \in \mathcal{E}_h(\Omega)} \int_e [\nabla u_h]_e \cdot \boldsymbol{\nu}_e (w - I_h(w)).$$

- iii) Denote por h_e la medida del lado e , y concluya que existe $C_{\text{re1}} > 0$, independiente de h , tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega}^2 \leq C_{\text{re1}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ h_K^2 \|f + \Delta u_h\|_{0,K}^2 + \sum_{e \subseteq \partial K} h_e \|[\nabla u_h]_e\|_{0,e}^2 \right\}. \quad (41)$$

58. El ejercicio anterior ha proporcionado una cota superior del error de Galerkin, la cual, excepto por la constante C_{re1} , depende explícitamente de la solución discreta u_h obtenida de acuerdo a (40), y por lo tanto es completamente calculable. De acuerdo a ello, la desigualdad (41) recibe usualmente el nombre de *estimación de error a posteriori confiable* (“*reliable*” en inglés). El propósito del presente ejercicio es probar, al menos parcialmente, que también es posible acotar inferiormente el error, módulo una constante usualmente diferente C_{eff} y términos de orden superior, por la expresión a la derecha de (41), lo cual se denomina *estimación de error a posteriori eficiente* (“*efficient*” en inglés). Para este efecto, dado $K \in \mathcal{T}_h$, se considera la función burbuja respectiva $\psi_K \in P_3(K)$, la cual satisface

$$0 \leq \psi_K \leq 1 \quad \text{en } K \quad \text{y} \quad \psi_K = 0 \quad \text{en } \partial K.$$

Se sabe, además, que dado $k \in \mathbf{N}$, existe $c_1 > 0$, que depende sólo de k y la constante del ángulo mínimo, tal que

$$\|q\|_{0,K}^2 \leq c_1 \|\psi_K^{1/2} q\|_{0,K}^2 \quad \forall q \in P_k(K). \quad (42)$$

- i) Sea $\Pi_K : L^2(K) \rightarrow P_0(K)$ el proyector ortogonal, y muestre primero que

$$h_K^2 \|f + \Delta u_h\|_{0,K}^2 \leq 2 h_K^2 \|f - \Pi_K(f|_K)\|_{0,K}^2 + 2 h_K^2 \|\chi_K\|_{0,K}^2,$$

donde $\chi_K := \Pi_K(f|_K) + \Delta u_h$.

- ii) Aplique (42) e integración por partes en K para probar que

$$\|\chi_K\|_{0,K}^2 \leq c_1 \left\{ \int_K \psi_K \chi_K (\Pi_K(f|_K) - f) + \int_K \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(\psi_K \chi_K) \right\}.$$

- iii) Utilice la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la estimación inversa dada por (39) (cf. Ejercicio 3) para demostrar a partir de ii) que

$$\|\chi_K\|_{0,K}^2 \leq C \left\{ \|f - \Pi_K(f|_K)\|_{0,K}^2 + h_K^{-2} \|u - u_h\|_{1,K}^2 \right\}.$$

iv) Concluya que existe $\tilde{C} > 0$, independiente de h , tal que

$$h_K^2 \|f + \Delta u_h\|_{0,K}^2 \leq \tilde{C} \left\{ |u - u_h|_{1,K}^2 + h_K^2 \|f - \Pi_K(f|_K)\|_{0,K}^2 \right\}.$$

v) Suponga que $f|_K \in H^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$, y deduzca en tal caso que

$$h_K^2 \|f + \Delta u_h\|_{0,K}^2 \leq \tilde{C} \left\{ |u - u_h|_{1,K}^2 + h_K^4 |f|_{1,K}^2 \right\}. \quad (43)$$

Notar aquí que $h_K^4 |f|_{1,K}^2$ constituye un *término de orden superior*.

59. El objetivo de este problema es definir un interpolante tipo Clément sobre una triangulación de rectángulos y probar una de sus propiedades de aproximación.

a) Sean K_j , $j \in \{1, \dots, m\}$, m rectángulos adyacentes¹ de $\mathbf{R}^2$ con lados paralelos a los ejes coordenados y diámetros respectivos h_j , introduzca el conjunto $S := \cup \left\{ K_j : j \in \{1, \dots, m\} \right\}$, denote $h_S := \max_{j \in \{1, \dots, m\}} h_j$, y considere el operador lineal $\Pi_S : L^2(S) \rightarrow P_0(S)$ dado por

$$\Pi_S(v) := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{1}{|K_j|} \int_{K_j} v \right\} \quad \forall v \in L^2(S).$$

Demuestre que para cada $\delta \in [0, 1]$ existe una constante $C_\delta > 0$, independiente de los K_j , tal que

$$\|v - \Pi_S(v)\|_{0,S} \leq C_\delta h_S^\delta \|v\|_{\delta,S} \quad \forall v \in H^\delta(S).$$

b) Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones (hechas de rectángulos con lados paralelos a los ejes coordenados) de una región poligonal Ω de $\mathbf{R}^2$, y para cada $h > 0$ considere el espacio de elementos finitos

$$X_h := \left\{ v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in Q_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Además, sea $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ el conjunto de vértices de $\mathcal{T}_h$, y denote la base correspondiente de X_h por $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$. A su vez, para cada $j \in \{1, \dots, N\}$ se introduce el macro-elemento S_j dado por la unión de los m_j rectángulos, $m_j \leq 4$, que comparten el vértice x_j . Defina el operador

$$J_h : L^2(\Omega) \rightarrow X_h \text{ por } J_h(v) := \sum_{j=1}^N \Pi_{S_j}(v) \varphi_j \quad \forall v \in L^2(\Omega), \text{ con } \Pi_{S_j}$$

dado según a), denote $w_K := \cup \{S_j : x_j \in K\}$, y demuestre que existe $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|v - J_h(v)\|_{0,K} \leq C h_K |v|_{1,w_K} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

¹Se dice que m rectángulos son adyacentes si comparten un vértice común

60. Sea Ω un abierto acotado, conexo, pero no necesariamente convexo, de $\mathbf{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Hilbert $H(\text{div}; \Omega)$ de vectores en $[L^2(\Omega)]^n$ con divergencia en $L^2(\Omega)$, cuya norma inducida se denota por $\|\cdot\|_{\text{div}; \Omega}$. Se dice que $\tau \in H(\text{div}; \Omega)$ admite una DESCOMPOSICIÓN DE HELMHOLTZ ESTABLE si existen $z \in H^2(\Omega)$, $\varphi \in H^1(\Omega)$ con $\int_{\Omega} \varphi = 0$ cuando $n = 2$ (resp. $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$ con $\int_{\Omega} \varphi = \mathbf{0}$ cuando $n = 3$), y una constante $C > 0$, independiente de las variables anteriores, tales que

$$\tau = \nabla z + \mathbf{curl} \varphi \quad \text{en } \Omega \quad \text{y} \quad \|\nabla z\|_{1, \Omega} + \|\varphi\|_{1, \Omega} \leq C \|\tau\|_{\text{div}; \Omega}, \quad (44)$$

$$\text{donde } \mathbf{curl} \varphi := \begin{cases} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^t & \text{si } n = 2 \\ \nabla \times \varphi & \text{si } n = 3 \end{cases}.$$

a) En esta parte se pide deducir (44) para el caso $n = 2$, procediendo de la siguiente manera. Introduzca primero un abierto acotado y **convexo** G de clase $C^{0,1}$ y suficientemente grande tal que $\overline{\Omega} \subset G$. Luego, dado $\tau \in H(\text{div}; \Omega)$, defina $f_{\tau} := \begin{cases} \text{div } \tau & \text{en } \Omega \\ 0 & \text{en } G \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$, y considere el problema de valores de contorno:

$$\Delta w = f_{\tau} \quad \text{en } G, \quad w = 0 \quad \text{en } \partial G. \quad (45)$$

Pruebe que (45) está bien propuesto, observe que $\text{div}(\nabla w) = \text{div } \tau$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, y entonces concluya utilizando el resultado que dice que “ $\zeta \in [L^2(\Omega)]^2$ satisface $\text{div } \zeta = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si y sólo si existe $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que $\zeta = \mathbf{curl} \phi$ en Ω ”, y notando que para $n = 2$ se tiene que $\|\mathbf{curl} \phi\|_{0, \Omega} = |\phi|_{1, \Omega}$.

b) Cuando $n = 3$ se puede proceder de la misma manera anterior, utilizando ahora que “ $\zeta \in [L^2(\Omega)]^3$ satisface $\text{div } \zeta = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si y sólo si existe $\phi \in [H^1(\Omega)]^3$ tal que $\zeta = \mathbf{curl} \phi$ en Ω ”, pero en tal caso no es verdad que $\|\mathbf{curl} \phi\|_{0, \Omega} = |\phi|_{1, \Omega}$, y por lo tanto la cota de estabilidad (desigualdad al lado derecho de (15)) sólo resulta válida si el dominio original Ω es convexo. Con el objeto de subsanar esta dificultad, se propone el siguiente procedimiento, el cual hace uso de la misma geometría ya descrita para definir una extensión apropiada desde Ω hacia todo G . Más precisamente, dado $\tau \in H(\text{div}; \Omega)$, denote por $\mathbf{n}$ el vector normal interior en $\partial\Omega$, y considere el siguiente problema de valores de contorno en $G \setminus \overline{\Omega}$:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } G \setminus \overline{\Omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \tau \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \partial\Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \partial G. \quad (46)$$

Pruebe que (46) está bien propuesto, defina $\tilde{\tau} := \begin{cases} \tau & \text{en } \Omega \\ \nabla u & \text{en } G \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$, muestre que $\tilde{\tau} \in H(\text{div}; G)$, y concluya el resultado requerido haciendo uso primero de (15) para $\tilde{\tau}$ y el dominio convexo G , y luego restringiendo lo obtenido a Ω .

61. Dado un triángulo K de $\mathbf{R}^2$, se define el espacio de Raviart-Thomas de orden 0 sobre K como $\text{RT}_0(K) := [P_0(K)]^2 \oplus P_0(K) \mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} := (x_1, x_2)^\top$ denota un vector genérico de K . Equivalentemente, $\tau \in \text{RT}_0(K)$ si y sólo si existen únicas constantes a, b, c tales que $\tau(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} a + cx_1 \\ b + cx_2 \end{pmatrix} \quad \forall \mathbf{x} := (x_1, x_2)^\top \in K$.

En lo que sigue, $\boldsymbol{\nu}_K$ es el vector normal en ∂K , y los lados de K se denotan por F_j , $j \in \{1, 2, 3\}$, de modo que $\boldsymbol{\nu}_K|_{F_j}$ es un vector constante de $\mathbf{R}^2 \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$.

- a) Pruebe que para cada $\tau \in \text{RT}_0(K)$ se tiene que $\text{div } \tau \in P_0(K)$ y $\tau \cdot \boldsymbol{\nu}_K|_{F_j} \in P_0(F_j) \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$.

- b) Demuestre que si $\tau \in \text{RT}_0(K)$ es tal que $\int_{F_j} \tau \cdot \boldsymbol{\nu}_K = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$, entonces necesariamente $\tau \equiv \mathbf{0}$. Use primero integración por partes para probar que $\text{div } \tau = 0$, y luego concluya utilizando el hecho que los vectores normales sobre los lados de K son l.i. dos a dos.

- c) Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ defina el funcional $m_i(\tau) := \int_{F_i} \tau \cdot \boldsymbol{\nu}_K \quad \forall \tau \in [H^1(K)]^2$, y deduzca, a partir de b), que existen únicos $\tau_j \in \text{RT}_0(K)$, $j \in \{1, 2, 3\}$, tales que $m_i(\tau_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$. A su vez, defina el operador de interpolación $\Pi_K : [H^1(K)]^2 \rightarrow \text{RT}_0(K)$ por $\Pi_K(\tau) := \sum_{i=1}^3 m_i(\tau) \tau_i \quad \forall \tau \in [H^1(K)]^2$, y muestre que $\Pi_K(\tau)$ es el único elemento en $\text{RT}_0(K)$ tal que $m_j(\Pi_K(\tau)) = m_j(\tau) \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$.

- d) Sea $\widehat{K}$ el triángulo canónico de $\mathbf{R}^2$, y sea $F_K : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ la aplicación afín invertible dada por $F_K(\widehat{\mathbf{x}}) := B_K \widehat{\mathbf{x}} + b_K \quad \forall \widehat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^2$, con $B_K \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ y $b_K \in \mathbf{R}^2$, tal que $K = F_K(\widehat{K})$. Luego, dado $\tau \in [H^m(K)]^2$, $m \in \{0, 1\}$, defina $\widehat{\tau} := |\det B_K| B_K^{-1} \tau \circ F_K$, pruebe que $\widehat{\tau} \in [H^m(\widehat{K})]^2$, y concluya que existe $C > 0$, independiente de K , tal que

$$|\widehat{\tau}|_{m, \widehat{K}} \leq C \|B_K^{-1}\| \|B_K\|^m |\det B_K|^{1/2} |\tau|_{m, K}.$$

Inversamente, si $\widehat{\tau} \in [H^m(\widehat{K})]^2$, muestre que $\tau := |\det B_K|^{-1} B_K \widehat{\tau} \circ F_K^{-1} \in [H^m(K)]^2$ y que existe $C > 0$, independiente de K , tal que

$$|\tau|_{m, K} \leq C \|B_K\| \|B_K^{-1}\|^m |\det B_K|^{-1/2} |\widehat{\tau}|_{m, \widehat{K}}.$$

- e) Suponga que K es parte de una triangulación $\mathcal{T}_h$ perteneciente a una familia regular, y utilice la identidad $\Pi_{\widehat{K}}(\widehat{\tau}) = \widehat{\Pi_K(\tau)}$ para demostrar que, dado $m \in \{0, 1\}$, existe $C := C(\widehat{K}, \Pi_{\widehat{K}}, m) > 0$, tal que

$$|\tau - \Pi_K(\tau)|_{m, K} \leq C h_K^{1-m} |\tau|_{1, K} \quad \forall \tau \in [H^1(K)]^2.$$

- f) Pruebe que $\text{div } \Pi_K(\tau) = P_K(\text{div } \tau) \quad \forall \tau \in [H^1(K)]^2$, donde $P_K : L^2(K) \rightarrow P_0(K)$ es el proyector ortogonal.

62. Sean K_1 y K_2 triángulos adyacentes de $\mathbf{R}^2$ con diámetros h_1 y h_2 , respectivamente, denote $h := \max\{h_1, h_2\}$, y considere el operador lineal $\Pi : L^2(K_1 \cup K_2) \rightarrow P_0(K_1 \cup K_2)$ definido por

$$\Pi(v) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{1}{|K_j|} \int_{K_j} v \right\} \quad \forall v \in L^2(K_1 \cup K_2).$$

Demuestre que para cada $\delta \in [0, 1]$ existe una constante $C_\delta > 0$, independiente de K_1 y K_2 , tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{0, K_1 \cup K_2} \leq C_\delta h^\delta \|v\|_{\delta, K_1 \cup K_2} \quad \forall v \in H^\delta(K_1 \cup K_2).$$

Agosto 2016