UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREAS

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Segundo Semestre de 2015 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea Ω^- un abierto conexo y acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ, y sea Ω^+ la region anular acotada por Γ y una curva cerrada Σ cuyo interior contiene a Γ. Además, sean $\gamma_0^- : H^1(\Omega^-) \to H^{1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_0^+ : H^1(\Omega^+) \to H^{1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Sigma)$ los operadores de trazas respectivos, y denote $\Omega := \Omega^- \cup \Gamma \cup \Omega^+$.

   a) Demuestre que $v \in H^1(\Omega)$ si y sólo si:

   $$v \in L^2(\Omega)\,,\; v|_{\Omega^-} \in H^1(\Omega^-)\,,\; v|_{\Omega^+} \in H^1(\Omega^+)\,,\; \text{ y } \; \gamma_0^-(v|_{\Omega^-}) = \gamma_0^+(v|_{\Omega^+}) \text{ en } \Gamma\,.$$

   Dados $f^- \in L^2(\Omega^-)$, $f^+ \in L^2(\Omega^+)$, $g_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y $g_\Sigma \in H^{-1/2}(\Sigma)$, considere el problema de transmisión: Hallar $(u^-, u^+) \in H^1(\Omega^-) \times H^1(\Omega^+)$ tales que

   $$\begin{gathered} -\Delta u^- = f^- \quad \text{en} \quad \Omega^-\,, \quad -\Delta u^+ = f^+ \quad \text{en} \quad \Omega^+\,, \\ \gamma_0^-(u^-) = \gamma_0^+(u^+) \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^-(\nabla u^-) - \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) = g_\Gamma \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \\ \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) = g_\Sigma \quad \text{en} \quad \Sigma\,, \quad \text{y} \quad \int_{\Omega^-} u^- + \int_{\Omega^+} u^+ = 0\,, \end{gathered} \tag{1}$$

   donde $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^- : H(\mathrm{div}\,;\Omega^-) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+ : H(\mathrm{div}\,;\Omega^+) \to H^{-1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Sigma)$ son los operadores de trazas normales respectivos ($\boldsymbol{\nu}$ apunta hacia Ω^+ en Γ y hacia el exterior de Ω^+ en Σ).

   b) Utilice identidades de Green en espacios de Sobolev convenientes y deduzca una formulación variacional de (1) con incógnita en un subespacio cerrado V de $H^1(\Omega)$.
   c) Identifique una condición de compatibilidad sobre los datos, y demuestre en tal caso que la formulación obtenida en b) posee una única solución, la cual depende continuamente de f^-, f^+, g_Γ, y g_Σ.
   d) Pruebe que el esquema de Galerkin asociado es convergente para cualquier familia numerable $\{V_h\}_{h>0}$ de subespacios de dimensión finita de V tales que $\lim\limits_{h\to 0} \mathrm{dist}(v, V_h) = 0 \;\; \forall\, v \in V$.
   e) Demuestre que la formulación obtenida en b) es equivalente a una formulación variacional mixta con incógnita en $H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$, y verifique que ella satisface las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi.

2. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ Lipschitz-continua y defina

$$\mathcal{D}(\Gamma) := \{ v|_\Gamma : \quad v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \} .$$

Pruebe que $H^{1/2}(\Gamma) \subseteq \overline{\mathcal{D}(\Gamma)}^{\|\cdot\|_{0,\Gamma}}$ y $H^{1/2}(\Gamma) = \overline{\mathcal{D}(\Gamma)}^{\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}}$.

3. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ Lipschitz-continua, y considere la aplicación $|||\cdot||| : H^1(\Omega) \to \mathbf{R}$ definida por

$$|||v||| := \left\{ |v|_{1,\Omega}^2 + \|\gamma_0(v)\|_{0,\Gamma}^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega) ,$$

donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ es el operador de trazas usual. Utilice un argumento análogo al de la demostración de la desigualdad de Poincaré generalizada para probar que $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes en $H^1(\Omega)$.

4. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H, \|\cdot\|_H)$ un espacio de Hilbert real y $A : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada con operador inducido $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H,H)$. Suponga que existen operadores $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2 \in \mathcal{L}(H,H)$ y constantes α_1, $\alpha_2 > 0$ tales que

$$\langle \mathbf{S}_1^* \mathbf{A}(\tau), \tau \rangle_H \geq \alpha_1 \|\tau\|_H^2 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{A}\mathbf{S}_2(\tau), \tau \rangle_H \geq \alpha_2 \|\tau\|_H^2 \quad \forall\, \tau \in H .$$

a) Pruebe que para todo $F \in H'$ existe un único $\sigma \in H$ tal que

$$A(\sigma, \tau) = F(\tau) \qquad \forall\, \tau \in H , \tag{2}$$

y deduzca la existencia de $C > 0$, independiente de F, tal que

$$\|\sigma\|_H \leq C \|F\|_{H'} .$$

b) Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de H tal que $\lim\limits_{h\to 0} \operatorname{dist}(\tau, H_h) = 0 \ \forall\, \tau \in H$, y, dado $F \in H'$, considere el esquema de Galerkin: Hallar $\sigma_h \in H_h$ tal que

$$A(\sigma_h, \tau_h) = F(\tau_h) \qquad \forall\, \tau_h \in H_h . \tag{3}$$

Suponga que para $i = 1$ o para $i = 2$ (pero no para ambos), existen operadores inyectivos $\mathbf{S}_{i,h} \in \mathcal{L}(H_h, H_h)$ para todo $h > 0$, y constantes C_i, $\delta > 0$, independientes de h, tales que

$$\|\mathbf{S}_i(\tau_h) - \mathbf{S}_{i,h}(\tau_h)\|_H \leq C_i\, h^\delta \|\mathbf{S}_i(\tau_h)\|_H \quad \forall\, \tau_h \in H_h .$$

Demuestre que existe $h_0 > 0$ tal que para todo $h \leq h_0$ el problema (3) tiene solución única, es estable, y se verifica la estimación de Cea.

c) Qué puede decir sobre las hipótesis para a) y b) si A es simétrica ?

5. Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X, X)$, $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es $\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y$, y que existen constantes α, $\beta > 0$ tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x \rangle_X \;\geq\; \alpha\,||x||_X^2 \quad \forall\, x \in X \quad \text{y} \quad \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle Q(x), y \rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

   a) Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ tal que
$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

   b) Sea $X_h \times Y_h$ un subespacio de dimensión finita de $X \times Y$. Defina explícitamente el esquema de Galerkin asociado y demuestre que se satisface la estimacion de Céa correspondiente.

6. Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \to X$, $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es $\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y$, que $\mathbf{P}$ es NOLINEAL, y que existen constantes M, α, $\beta > 0$ tales que

$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \;\leq\; M\,||x - \bar{x}||_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x - \bar{x} \rangle_X \;\geq\; \alpha\,||x - \bar{x}||_X^2 \quad \forall\, x,\, \bar{x} \in X\,,$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle Q(x), y \rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

   a) Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que
$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

   b) Sea $X_h \times Y_h$ un subespacio de dimensión finita de $X \times Y$. Defina explícitamente el esquema de Galerkin asociado y demuestre que se satisface la estimación de Céa correspondiente.

7. a) Sea S un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $S^\perp = \bar{S}^\perp$.

   b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Encuentre y caracterice el subespacio V de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1(\Omega) \;=\; H_0^1(\Omega) \,\oplus\, V$.

8. (LEMA DE STRANG). Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere un funcional

$F_n \in H_n'$ y una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbf{R}$. Suponga también que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \,\geq\, \tilde{\alpha}\, \|v_n\|_H^2 \quad \forall\, v_n \in H_n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u,v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in H \qquad \text{y} \qquad A_n(u_n, v_n) \,=\, F_n(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$\|u - u_n\|_H \,\leq\, C \inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H \,+\, \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|A(v_n, w_n) - A_n(v_n, w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}$$

$$+ \quad C \left\{ \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|F(w_n) \,-\, F_n(w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}.$$

9. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina

$$V \,:=\, \left\{ v \,\in\, H^2(\Omega) : \quad \int_\Omega v\, p\, dx \,=\, 0 \quad \forall\, p \in \mathbf{P}_1(\Omega) \right\},$$

donde $\mathbf{P}_1(\Omega)$ es el espacio de polinomios de grado ≤ 1 sobre Ω. Demuestre que la norma $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ son equivalentes en V.

10. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

   a) Demuestre que $\displaystyle \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \,=\, \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

   b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \,\geq\, \beta\, \|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$, y pruebe que $\quad H \,=\, R(\mathbf{B}^*) \,\oplus\, V$.

11. (Lema de Aubin-Nitsche). Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y el operador identidad $\mathbf{i} : V \to H$ es continuo. Sea $A : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y V-elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \to V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface

$$A(v, \mathbf{P}(g)) \,=\, \langle g, v\rangle_H \quad \forall\, v \in V\,.$$

Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V, denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in V\,,$$

y

$$A(u_h, v_h) \;=\; F(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$||u - u_h||_H \;\leq\; C\,||u - u_h||_V \sup_{g\in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{v_h\in V_h} ||\mathbf{P}(g) - v_h||_V \right\}\,.$$

12. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Dada $f \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento* $u \in [H^1(\Omega)]^2$ *y el tensor de esfuerzos* $\sigma \in H(\mathrm{div};\Omega)$ *tal que*

$$\sigma = \mathcal{C}\,\mathbf{e}(u) \;:=\; \lambda\,\mathrm{tr}\;\mathbf{e}(u)\,I_2 + 2\mu\,\mathbf{e}(u) \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

$$\mathrm{div}\;\sigma = -f \quad \text{en} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

donde λ, $\mu > 0$ son las constantes de Lamé, I_2 es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{e}(u) := \dfrac{1}{2}\,(\nabla\,u + (\nabla\,u)^{\mathtt{t}})$ es el tensor de deformaciones. Es fácil verificar que $\mathbf{e}(u)$ puede re-escribirse como

$$\mathbf{e}(u) = \nabla\,u \,-\, \gamma \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

donde $\gamma := \dfrac{1}{2}\,(\nabla\,u - (\nabla\,u)^{\mathtt{t}})$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio $\mathcal{R} := \{\, \eta \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \quad \eta + \eta^{\mathtt{t}} = 0\,\}$.

a) Demuestre que una formulación variacional MIXTA de este problema se reduce a: *Hallar* $(\sigma, (u,\gamma)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) + b(\tau,(u,\gamma)) \;&=\; \quad 0 \quad \forall\,\tau \in H\,, \\ b(\sigma,(v,\eta)) \;&=\; -\int_\Omega f\cdot v\,dx \quad \forall\,(v,\eta) \in Q\,, \end{aligned} \tag{4}$$

donde $H := \{\tau \in H(\mathrm{div};\Omega) : \quad \int_\Omega \mathrm{tr}(\tau) = 0\}$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$, y $a : [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \to \mathbf{R}$, $b : H(\mathrm{div};\Omega) \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\sigma,\tau) := \frac{1}{2\mu}\int_\Omega \sigma : \tau\,dx - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}\int_\Omega \mathrm{tr}\,(\sigma)\,\mathrm{tr}\,(\tau)\,dx \;\forall\,\sigma,\,\tau \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2},$$

$$b(\tau,(v,\eta)) := \int_\Omega v\cdot\mathrm{div}\;\tau\,dx + \int_\Omega \tau : \eta\,dx \quad \forall\,(\tau,(v,\eta)) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times Q\,.$$

b) Demuestre que a y b satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi.

c) Sea $(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)$ un vector de parámetros positivos y considere las siguientes ecuaciones del tipo Galerkin-residuales:

$$\kappa_1 \int_\Omega \big(\mathbf{e}(u) - \mathcal{C}^{-1}\,\sigma\big) : \big(\mathbf{e}(v) + \mathcal{C}^{-1}\,\tau\big) \;=\; 0\,, \tag{5}$$

$$\kappa_2 \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma) \cdot \operatorname{div}(\tau) \;=\; -\,\kappa_2 \int_\Omega f \cdot \operatorname{div}(\tau)\,, \tag{6}$$

y

$$\kappa_3 \int_\Omega \left(\gamma - \frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^{\mathtt{t}}) \right) : \left(\eta + \frac{1}{2}(\nabla v - (\nabla v)^{\mathtt{t}}) \right) \;=\; 0\,, \tag{7}$$

para todo $(\tau, v, \eta) \in H \times [H_0^1(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$. Demuestre que κ_1, κ_2 y κ_3 pueden elegirse explícitamente, y dependiendo sólo de μ, de modo que la formulación variacional que resulta al restar la segunda de la primera ecuación en (4), y luego sumar (5), (6) y (7), satisface las hipótesis del Lema de Lax-Milgram.

13. Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ una partición del intervalo $\Omega := (a, b)$. Sea H_n un espacio de funciones definidas sobre Ω y para cada $i \in \{1, ..., n+1\}$ denote por $H_{n,i}$ el espacio de restricciones de H_n al subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

    a) Demuestre que si $H_n \subseteq C(\bar{\Omega})$ y $H_{n,i} \subseteq H^1(x_{i-1}, x_i)$ $\forall\, i \in \{1, ..., n+1\}$, entonces $H_n \subseteq H^1(\Omega)$.

    b) Demuestre que si $H_n \subseteq C^1(\bar{\Omega})$ y $H_{n,i} \subseteq H^2(x_{i-1}, x_i)$ $\forall\, i \in \{1, ..., n+1\}$, entonces $H_n \subseteq H^2(\Omega)$.

14. a) Para cada $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ encuentre el único polinomio p_j de grado ≤ 3 tal que $(p_j(0), p_j'(0), p_j(1), p_j'(1))^{\mathtt{t}} = \mathbf{e}_j^{\mathtt{t}}$, donde $\mathbf{e}_j$ es el j-ésimo vector de la base canónica de $\mathbf{R}^4$.

    b) Sea $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$ una partición UNIFORME de $\Omega := (0, 1)$. Para todo $i \in \{1, ..., n+1\}$ y para cada $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, encuentre el polinomio $p_{i,j}$ de grado ≤ 3 tal que $(p_{i,j}(x_{i-1}), p_{i,j}'(x_{i-1}), p_{i,j}(x_i), p_{i,j}'(x_i))^{\mathtt{t}} = \mathbf{e}_j^{\mathtt{t}}$. (INDICACIÓN: Denote $h := \dfrac{1}{n+1}$ y utilice lo obtenido en a) en conjunto con un cambio de variable afin entre $[0, 1]$ y $[x_{i-1}, x_i]$).

    c) Para cada $i \in \{1, ..., n+1\}$ denote por $\mathcal{P}_i$ al espacio de funciones definidas sobre $[x_{i-1}, x_i]$, generado por los polinomios $p_{i,j}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, y defina el espacio de elementos finitos

    $$H_n := \{\, v \in C^1(\bar{\Omega}) : \; v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0, \quad \text{y} \\ v|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathcal{P}_i \quad \forall\, i \in \{1, ..., n+1\} \,\}\,.$$

    Pruebe que $H_n \subseteq H_0^2(\Omega) := \{v \in H^2(\Omega) : \; v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0\}$, y defina explícitamente una base de H_1.

    d) Considere el problema de valores de contorno

    $$\begin{aligned} u^{(4)} \;&=\; f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ u(0) = u'(0) = \;& u(1) = u'(1) = 0\,, \end{aligned} \tag{8}$$

    donde $f(x) = x$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre que la formulación débil de (8) se reduce a encontrar $u \in H_0^2(\Omega)$ tal que

    $$\int_\Omega u''\, v''\, dx \;=\; \int_\Omega x\, v\, dx \quad \forall\, v \in H_0^2(\Omega)\,. \tag{9}$$

Establezca el esquema de Galerkin asociado a (9) utilizando el espacio de elementos finitos H_1 definido en c), y calcule el vector de carga respectivo.

15. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y defina el espacio $V \;:=\; \{v \in H^2(\Omega) : \gamma_0 v \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\}$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que $||v||_{H^1(\Omega)} \;\leq\; C\,||\Delta\, v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \,\in\, V$. Concluya que la norma $||\cdot||_{H^2(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ son equivalentes en V.

16. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{\, H_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1} \subset H_n \;\forall\, n \,\in\, \mathbf{N}$, y $\cup_{n\in\mathbf{N}}\, H_n$ es denso en H. Sea $B \,:\, H\times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f \in H'$ existe una única sucesión $\{\, u_n(f) \,\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq H$ tal que

$$u_n(f) \,\in\, H_n \quad , \quad B(u_n(f), v_n) \,=\, f(v_n) \quad \forall\, v_n \,\in\, H_n\,,$$

y $||u_n(f)|| \,\leq\, C_0\,||f||\;\forall\, n \in \mathbf{N}$, donde C_0 es una constante positiva independiente de n y de f. Suponga además que para todo $f \in H'$ existe un único $u(f) \,\in\, H$ tal que

$$B(u(f), v) \,=\, f(v) \quad \forall\, v \,\in\, H\,.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to+\infty} ||u(f) \,-\, u_n(f)|| \,=\, 0 \quad \forall\, f \in H'\,.$$

Ind.: Defina la proyección de Galerkin $P_n \,:\, H \to H_n$, donde $\forall\, v \,\in\, H$, $P_n v$ denota la única solución de $B(P_n v, w_n) = B(v, w_n) \quad \forall\, w_n \,\in\, H_n$ y observe que $P_n u(f) = u_n(f)$.

17. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ. Considere el problema de valores de contorno:

$$\begin{aligned} -\,\Delta\, u \,&=\, f \quad \text{en} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \,&=\, g \quad \text{en} \quad \Gamma \\ \int_\Omega u\, dx \,&=\, a_1\,, \end{aligned} \tag{10}$$

donde $a_1 \,\in\, \mathbf{R}$, $f \,\in\, L^2(\Omega)$, y $g \,\in\, L^2(\Gamma)$ satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_\Omega f\, dx \,+\, \int_\Gamma g\, ds \,=\, 0\,.$$

Demuestre que una formulación débil de (10) consiste en: *Hallar* $(u, \lambda) \in H^1(\Omega)\times \mathbf{R}$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx \,+\, \lambda \int_\Omega v\, dx \,=\, \int_\Omega f v\, dx \,+\, \int_\Gamma g v\, ds\;,$$

$$\mu \int_\Omega u\, dx \,=\, \mu a_1\,,$$

para todo $(v,\mu) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$. Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene única solución, la cual depende continuamente de los datos.

18. Sea $\Omega := (0,3)$ y considere el problema de valores de contorno: $-u'' + (x+1)\,u = x$ en Ω, $u(0) = u(3) = 0$. Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio

$$H_2 := \{\, v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \quad \text{y} \quad v\,|_{[x_j, x_{j-1}]} \text{ es un polinomio}$$

$$\text{de grado } \leq 1\,, \forall\, j \in \{1,2,3\}\,\}\,.$$

Ind.: Notar que $H_2 =< \{e_1, e_2\} >$, donde $e_j \in H_2$ es tal que $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo i, $j \in \{1,2\}$.

19. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $f \in [L^2(\Omega)]^2$. El problema de Stokes consiste en encontrar el vector de velocidades $u := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$\begin{gathered} -\Delta\, u + \nabla p = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \operatorname{div}\, u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\, dx = 0\,. \end{gathered} \tag{11}$$

i) Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \{\, q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\, dx = 0\,\}$, y demuestre que la formulación débil de (11) se reduce a: *encontrar* $(u,p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} A(u,v) + B(v,p) &= F(v) \quad \forall\, v \in H\,, \\ B(u,q) &= 0 \quad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \to \mathbf{R}$, $B : H \times Q \to \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(u,v) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\, dx\,,$$

$$B(v,p) := -\int_\Omega p \operatorname{div}\, v\, dx \quad , \quad F(v) = \int_\Omega f \cdot v\, dx\,.$$

ii) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que esta formulación tiene una única solución.

20. i) Calcule las funciones base locales del espacio de elementos finitos V_h asociado a una triangulación $\mathcal{T}_h$ hecha de cuadrados de tipo (2).

ii) Considere el operador Laplaciano y calcule la matriz de rigidez local para el caso particular de un cuadrado de tipo 1 con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$

21. Calcule las coordenadas baricéntricas del 3-simplex (tetraedro) K de $\mathbf{R}^3$ determinado por los vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$, y calcule explícitamente las 4 funciones base de $P_2(K)$ asociadas a dichos vértices.
(Notar que $\dim P_2(K) = \operatorname{card} \Sigma_2 \,=\, 10$).

22. Sea Ω un rectángulo de $\mathbf{R}^2$, y sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación uniforme de $\bar{\Omega}$ hecha de cuadrados K con lados (de longitud h) paralelos a los ejes coordenados. Considere la formulación variacional en $H_0^1(\Omega)$ de la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet homogéneas, y calcule la matriz de rigidez local para el cuadrado de tipo (1) con vértices (x_1, y_1), $(x_1 + h, y_1)$, $(x_1 + h, y_1 + h)$ y $(x_1, y_1 + h)$.

23. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y defina $H := H^1(\Omega)$ provisto de su producto escalar usual $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Considere un operador NOLINEAL $T : H \to H$, FUERTEMENTE MONÓTONO y LIPSCHITZ-CONTINUO. Esto significa que existen constantes $\alpha, M > 0$ tales que

$$\langle T(v) - T(w), v - w \rangle_H \,\geq\, \alpha \, ||v - w||_H^2 \quad \text{y} \quad ||T(v) - T(w)||_H \,\leq\, M \, ||v - w||_H$$

para todo v, $w \in H$.

i) Dada $f \in H$, demuestre que existe un único $u \in H$ tal que $T(u) \,=\, f$.

ii) Sea H_h el subespacio de elementos finitos de H que resulta de una triangulación regular $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ hecha con triángulos de tipo (1), y considere el esquema de Galerkin asociado: *Hallar* $u_h \in H_h$ *tal que*

$$\langle T(u_h), v_h \rangle_H \,=\, \langle f, v_h \rangle_H \quad \forall \, v_h \in H_h \, .$$

Suponga que $u \in H^2(\Omega)$ y demuestre que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$||u - u_h||_H \,\leq\, C \, h \, |u|_{H^2(\Omega)} \, .$$

24. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera poligonal, y sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación regular de $\bar{\Omega}$ hecha de n-simplex o n-rectángulos, todos ellos afín-equivalentes a un elemento finito de referencia $\hat{K}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{ \, h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h \, \}$, donde h_K es el diámetro de K. Ahora, para todo $K \in \mathcal{T}_h$ se define el operador local $\Pi_K : H^1(K) \to L^2(K)$ como

$$\Pi_K(v) \,:=\, \frac{1}{|K|} \int_K v(x) \, dx \quad \forall \, v \in H^1(K) \, .$$

Además, se define el operador global $\Pi : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ como

$$\Pi(v) \,|_K \,:=\, \Pi_K(v|_K) \quad \forall \, K \in \mathcal{T}_h, \ \forall \, v \in H^1(\Omega) \, .$$

a) Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\hat{K}$, tal que

$$|| v - \Pi(v) ||_{L^2(\Omega)} \leq C\, h\, |v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega) .$$

b) Defina el espacio $H_h := \{ v_h \in L^2(\Omega) : \quad v_h|_K \in P_0(K)\ \forall\, K \in \mathcal{T}_h \}$, donde $P_0(K)$ denota el espacio de funciones constantes sobre K, y pruebe que

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \inf_{v_h \in H_h} ||v - v_h||_{L^2(\Omega)} \right\} = 0 \quad \forall\, v \in L^2(\Omega) .$$

25. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ. Una formulación variacional MIXTA para la ecuación de Poisson en Ω, con dato $f \in L^2(\Omega)$, y condición de Dirichlet dada por $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, consiste en: *Hallar* $(\sigma, u) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{array}{rcl} A(\sigma,\tau) + B(\tau,u) & = & \int_\Gamma g\, \tau \cdot \nu\, ds\,, \\ B(\sigma,v) & = & -\int_\Omega f\, v\, dx\,, \end{array} \tag{12}$$

para todo $(\tau, v) \in X \times M$, donde $X := H(\mathrm{div};\Omega)$, $M := L^2(\Omega)$, ν es el vector normal unitario exterior a Γ, y las formas bilineales $A : X \times X \to \mathbf{R}$ y $B : X \times M \to \mathbf{R}$ están definidas por

$$A(\rho,\tau) := \int_\Omega \rho \cdot \tau\, dx \quad \forall \rho,\, \tau \in X\,,$$

$$B(\tau,v) := \int_\Omega v\, \mathrm{div}\, \tau\, dx \quad \forall (\tau,v) \in X \times M\,.$$

a) Demuestre que A y B satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi, y concluya que existe $C_0 > 0$ tal que

$$||(\rho, w)||_{X\times M} \leq C_0 \sup_{\substack{(\tau,v)\in X\times M \\ ||(\tau,v)|| \leq 1}} \{ A(\rho,\tau) + B(\tau,w) + B(\rho,v) \} \tag{13}$$

para todo $(\rho, w) \in X \times M$.

b) El siguiente objetivo es deducir una ESTIMACIÓN DE ERROR A-POSTERIORI para (12). Para ello, sea $\{\mathcal{T}_h : \quad h \in \mathtt{I}\}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$, donde $\mathtt{I}$ es un conjunto finito de parámetros dado por $\{h_1, ..., h_m\}$, con $h_j \geq h_{j+1}\ \forall\, j \in \{1, ..., m\}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{ h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h \}$, donde h_K es el diámetro de K. Sea $X_h \times M_h$ un subespacio de elementos finitos de $X \times M$, asociado a la triangulación $\mathcal{T}_h$, y sea $(\sigma_h, u_h) \in X_h \times M_h$ la solución del esquema de Galerkin correspondiente para la formulación (12).

i) Pruebe que existe un único $\bar{\sigma} \in X$ tal que

$$\langle \bar{\sigma}, \tau \rangle_X = A(\sigma - \sigma_h, \tau) + B(\tau, u - u_h) \quad \forall\, \tau \in X\,.$$

ii) Defina $\mathbf{J}(\tau) := \dfrac{1}{2}\,||\tau||_X^2 \;-\; \langle \bar{\sigma}, \tau \rangle_X \quad \forall\, \tau \in X$, y demuestre que

$$-\frac{1}{2}\,||\bar{\sigma}||_X^2 \;=\; \min_{\tau \in X}\, \mathbf{J}(\tau)\,.$$

iii) Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ defina $(\sigma_{h,K}, u_{h,K}) := (\sigma_h, u_h)\,|_K$, $X_K := H(\mathrm{div}\,; K)$, $M_K := L^2(K)$, y denote por $A_K : X_K \times X_K \to \mathbf{R}$ y $B_K : X_K \times M_K \to \mathbf{R}$, respectivamente, las restricciones de A y B al elemento K. Además, sea $\varphi_h \in H^{1/2}(\cup_{K \in \mathcal{T}_h} \partial K)$ una aproximación de u sobre las fronteras de los elementos K tal que $\varphi_h = g$ en Γ. Entonces, pruebe que existe un único $\hat{\sigma}_K \in X_K$ tal que

$$\langle \hat{\sigma}_K, \tau \rangle_{X_K} = -A_K(\sigma_{h,K}, \tau) - B_K(\tau, u_{h,K}) - \int_{\partial K} \varphi_h\, \tau \cdot \nu\, ds \quad \forall\, \tau \in X_K\,.$$

iv) Defina

$$\mathbf{J}_K(\tau) := \frac{1}{2}\,||\tau||_{X_K}^2 + A_K(\sigma_{h,K}, \tau) + B_K(\tau, u_{h,K}) + \int_{\partial K} \varphi_h\, \tau \cdot \nu\, ds$$

para todo $\tau \in X_K$, y pruebe que

$$-\frac{1}{2}\,||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \;=\; \min_{\tau \in X_K}\, \mathbf{J}_K(\tau)\,.$$

v) Use i), ii), iii) y iv) para demostrar que

$$||\bar{\sigma}||_X^2 \;\leq\; \sum_{K \in \mathcal{T}_h} ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2\,.$$

vi) Aplique (13) y v) para concluir que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$||(\sigma, u) - (\sigma_h, u_h)||_{X \times M} \;\leq\; C \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2},$$

donde

$$\eta_K^2 := ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \;+\; ||f + \mathrm{div}\ \sigma_h||_{L^2(K)}^2 \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,.$$

26. Sean $\Omega =]a, b[$, $\varphi \in L^2(\Omega)$ tal que $\displaystyle\int_\Omega \varphi\, dx \;=\; 0$, y considere el problema de valores de contorno: $-\,z'' \;=\; \varphi\,, \quad z'(a) \;=\; z'(b) \;=\; 0\,, \quad \int_\Omega z\, dx \;=\; 0$. Defina el espacio $\tilde{H}^1(\Omega) := \{\, w \in H^1(\Omega) : \displaystyle\int_\Omega w\, dx = 0 \,\}$, deduzca una formulación variacional asociada con incógnita y funciones test en $\tilde{H}^1(\Omega)$, y demuestre que ella tiene una única solución.

27. (Lema de Fortin). Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} \;\geq\; \beta\,\|q\|_Q \qquad \forall\, q \in Q\,. \tag{14}$$

Sean $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe un operador $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ tal que $\quad b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) \;=\; 0 \qquad \forall\, q_n \in Q_n$. Suponga que la familia $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H,H_n)} \;\leq\; C$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de n, tal que

$$\sup_{\substack{v_n \in H_n \\ v_n \neq 0}} \frac{b(v_n,q_n)}{\|v_n\|_H} \;\geq\; \beta^*\,\|q_n\|_Q \qquad \forall\, q_n \in Q_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}\,.$$

28. Sea $\Omega \,:=\,]a,b[$ y para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca una partición

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Además, denote $h \,:=\, \max\left\{ x_j - x_{j-1} : \quad j \in \{1,2,...,n\} \right\}$, defina el espacio

$$V_h \,:=\, \left\{ v \,\in\, L^2(\Omega) : \quad v\,|_{[x_{j-1},x_j]} \,\in\, \mathbf{P}_0([x_{j-1},x_j]) \quad \forall\, j \,\in\, \{1,2,...,n\} \right\},$$

y considere el operador $\Pi_h \;:\; L^2(\Omega) \;\to\; V_h$ que a cada $v \;\in\; L^2(\Omega)$ le asigna su mejor aproximación $\Pi_h(v) \;\in\; V_h$ con respecto al producto escalar de $L^2(\Omega)$. Demuestre que existe una constante $C > 0$, independiente de n y de h, tal que

$$\|\, v \,-\, \Pi_h(v)\,\|_{L^2(\Omega)} \;\leq\; C\,h\,|v|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \,\in\, H^1(\Omega)\,.$$

29. Sean $\Omega \;:=]0,1[$, $f \;\in\; L^2(\Omega)$, $\kappa \;\in]0,2[$, y considere el problema de valores de contorno:

$$u'' \,+\, \kappa\,u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) \,=\, u(1) \,=\, 0\,. \tag{15}$$

Además, para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca la partición uniforme

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1\,,$$

con $x_j - x_{j-1} \;=\; \dfrac{1}{n+1}\ \forall\, j \in \{1,2,...,n+1\}$, y defina el espacio

$$H_n \,:=\, \left\{ v \,\in\, C(\bar{\Omega}) : \quad v\,|_{[x_{j-1},x_j]} \,\in\, \mathbf{P}_1([x_{j-1},x_j]) \quad \forall\, j \,\in\, \{1,2,...,n+1\} \right.$$
$$\left. y \quad v(0) \,=\, v(1) \,=\, 0 \right\}.$$

a) Establezca la formulación variacional de (15) y demuestre que ella posee una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$.

b) Denote por $u_n \in H_n$ la solución (cuando ella existe) del esquema de Galerkin asociado y pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} = 0$.

30. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno:

$$-\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma.$$

a) Demuestre que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \sigma \cdot \tau \, dx + \int_\Omega u \, \mathrm{div}(\tau) \, dx - \int_\Omega v \, \mathrm{div}(\sigma) \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx \tag{16}$$

para todo $(\tau, v) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$.

b) Dados $\delta_1, \ \delta_2 > 0$, fundamente la introducción de las ecuaciones

$$\delta_1 \int_\Omega (\nabla u - \sigma) \cdot (\nabla v + \tau) \, dx = 0 \quad \forall (\tau, v) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega), \tag{17}$$

$$\delta_2 \int_\Omega \mathrm{div}(\sigma) \, \mathrm{div}(\tau) \, dx = -\delta_2 \int_\Omega f \, \mathrm{div}(\tau) \, dx \quad \forall \tau \in H(\mathrm{div};\Omega), \tag{18}$$

luego sume (16), (17) y (18), y obtenga una formulación variacional mixta modificada: Hallar $(\sigma, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\sigma, u), (\tau, v)) = F(\tau, v) \qquad \forall (\tau, v) \in \mathbf{H}, \tag{19}$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es una forma bilineal y $F : \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es un funcional lineal. Entonces, demuestre que, eligiendo δ_1 y δ_2 convenientemente, el problema (19) posee una única solución, la cual depende continuamente del dato f.

31. Demuestre que $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ es denso en $H^1(\mathbf{R}^n_+)$.

32. Sean $\hat{K} = [0,1]$, $K = [x_{j-1}, x_j]$, $h_j := x_j - x_{j-1} > 0$, y considere la aplicación afín $F : \hat{K} \to K$ definida por

$$F(\hat{x}) = h_j \, \hat{x} + x_{j-1} \qquad \forall \hat{x} \in \hat{K}.$$

(a) Dado un entero $r \geq 0$, demuestre que $v \in H^r(K)$ sí y sólo sí $\hat{v} := v \circ F \in H^r(\hat{K})$, y en tal caso pruebe que

$$|\hat{v}|_{H^r(\hat{K})} = h_j^{r-1/2} \, |v|_{H^r(K)}.$$

(b) Sean m, k enteros tal que $0 \leq m \leq k+1$, y sea $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^m(\hat{K}))$ tal que $\hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p} \quad \forall\, \hat{p} \in \mathbf{P}_k$, donde $\mathbf{P}_k$ es el espacio de polinomios de grado $\leq k$. Además, sea Π el operador definido por

$$\Pi v \,=\, (\hat{\Pi}\hat{v}) \circ F^{-1} \qquad \forall\, v \in\, H^{k+1}(K)\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\hat{K}$ y $\hat{\Pi}$, tal que

$$\|v - \Pi v\|_{H^m(K)} \,\leq\, C\, h_j^{k+1-m}\, |v|_{H^{k+1}(K)}\,.$$

33. Sea Ω un dominio poligonal convexo de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ, y dado $f \in L^2(\Omega)$, considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:

$$\Delta u \,+\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{20}$$

i) Introduzca la incógnita auxiliar $\sigma := \nabla u$ en Ω y pruebe que una formulación variacional mixta de (20) se reduce a: Hallar $\sigma \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \sigma\cdot\tau \,-\, \int_\Omega \mathrm{div}\,(\sigma)\,\mathrm{div}\,(\tau) \,=\, -\int_\Omega f\,\mathrm{div}\,(\tau) \quad \forall\,\tau \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)\,. \tag{21}$$

ii) Defina el operador $P : H(\mathrm{div};\Omega) \to [L^2(\Omega)]^2$ que a cada $\tau \in H(\mathrm{div};\Omega)$ le asigna $P(\tau) := \nabla\, z$, donde $z \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución del problema de valores de contorno: $\Delta\, z \,=\, \mathrm{div}\,(\tau)$ en Ω, $z \,=\, 0$ en Γ. Pruebe que P es compacto y que $H(\mathrm{div};\Omega) = P(H(\mathrm{div};\Omega)) \oplus (I-P)(H(\mathrm{div};\Omega))$.

iii) Utilice la descomposición anterior de $H(\mathrm{div};\Omega)$ para demostrar que (21) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $\sigma \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$A(\sigma,\tau) \,+\, K(\sigma,\tau) \,=\, F(\tau) \qquad \forall\,\tau \in H(\mathrm{div};\Omega)\,, \tag{22}$$

donde A y B son formas bilineales acotadas cuyos operadores inducidos $\mathbf{A} : H(\mathrm{div};\Omega) \to H(\mathrm{div};\Omega)$ y $\mathbf{K} : H(\mathrm{div};\Omega) \to H(\mathrm{div};\Omega)$ son biyectivo y compacto, respectivamente, y F es el funcional dado a la derecha de (21).

IND. Defina el operador $S(\tau) := (I \,-\, 2\,P)(\tau)$ y considere la expresión $A(\tau, S(\tau))$ para probar que A satisface las condiciones inf-sup continuas.

iv) Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia de subespacios de dimensión finita de $H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que $\lim\limits_{h\to 0} \mathrm{dist}\,(\tau, H_h) \,=\, 0$ para todo $\tau \in H(\mathrm{div};\Omega)$, y considere el esquema de Galerkin perturbado: Hallar $\sigma_h \in H_h$ tal que

$$A(\sigma_h,\tau_h) \,=\, F(\tau_h) \qquad \forall\,\tau_h \in H_h\,. \tag{23}$$

Suponga que existen operadores lineales $\mathcal{E}_h : [H^1(\Omega)]^2 \to H_h$ tales que

$$\mathrm{div}\;(\mathcal{E}_h\, P(\tau_h)) \,=\, \mathrm{div}\,(\tau_h) \qquad \forall\,\tau_h \,\in\, H_h\,,$$

y

$$\|\tau - \mathcal{E}_h(\tau)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \,\leq\, C\,h\,\|\tau\|_{[H^1(\Omega)]^2} \qquad \forall\,\tau \,\in\, [H^1(\Omega)]^2\,.$$

Demuestre que existe $h_0 > 0$ tal que $\forall\, h \leq h_0$ el problema (23) tiene solución única, la cual es estable y convergente con constantes independientes de h. IND. Defina el operador $S_h(\tau) := (I \,-\, 2\,\mathcal{E}_h\, P)(\tau_h)$ y considere la expresión $A(\tau, S_h(\tau)) = A(\tau, S(\tau)) - A(\tau, S(\tau) - S_h(\tau))$ para probar que A satisface las condiciones inf-sup discretas.

v) Qué se puede decir del esquema de Galerkin respectivo para (22)?.

34. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. El objetivo de este problema es demostrar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;\geq\; \frac{1}{2}\,|\mathbf{v}|^2_{[H^1(\Omega)]^2} \qquad \forall\, \mathbf{v} \,\in\, [H^1_0(\Omega)]^2\,, \tag{24}$$

donde $\mathbf{e}(\mathbf{v}) \;:=\; \dfrac{1}{2}\Big\{\nabla\mathbf{v} \,+\, (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}\Big\}$. Para tal efecto, proceda como sigue.

i) Dados $\sigma \;:=\; (\sigma_{ij})$ y $\tau \;:=\; (\tau_{ij})$ en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, se define el producto tensorial $\sigma : \tau \;:=\; \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}\,\tau_{ij}$ y se introducen los subespacios

$$\mathbf{R}^{2\times 2}_{sim} := \{\tau \in \mathbf{R}^{2\times 2} : \quad \tau^{\mathtt{t}} = \tau\} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}^{2\times 2}_{asim} := \{\tau \in \mathbf{R}^{2\times 2} : \quad \tau^{\mathtt{t}} = -\tau\}\,.$$

Pruebe que $\sigma : \tau \,=\, 0 \quad \forall\, \sigma \,\in\, \mathbf{R}^{2\times 2}_{sim}, \quad \forall\, \tau \,\in\, \mathbf{R}^{2\times 2}_{asim}$.

ii) Note que $\nabla\mathbf{v} \;=\; \mathbf{e}(\mathbf{v}) \,+\, \mathbf{w}(\mathbf{v})\,,$ con $\mathbf{w}(\mathbf{v}) \;:=\; \dfrac{1}{2}\Big\{\nabla\mathbf{v} \,-\, (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}\Big\}$, y recuerde que $\|\tau\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;=\; \displaystyle\int_\Omega \tau : \tau \quad \forall\, \tau \,\in\, [L^2(\Omega)]^{2\times 2}$, para probar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;-\; \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;=\; \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}$$

y

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;+\; \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;=\; \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{v}\,.$$

iii) Deduzca la identidad $\nabla\mathbf{v} : (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}} \;=\; \operatorname{div}\Big\{\,\nabla\mathbf{v}\,\mathbf{v} \,-\, \operatorname{div}(\mathbf{v})\,\mathbf{v}\,\Big\} \,+\, (\operatorname{div}(\mathbf{v}))^2$ y concluya la desigualdad (24).

35. Sean $(X_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{X_1})$, $(X_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{X_2})$, e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_{Y})$ espacios de Hilbert, defina el producto $X \;:=\; X_1 \times X_2$, y considere operadores lineales y acotados $\mathbf{P} : X \to X$, $\mathbf{Q} : X \to Y$, $A : X_1 \to X_1$, $B : X_1 \to X_2$, y $C : X_2 \to X_2$, tales que:

$$\mathbf{P} \;:=\; \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & -C \end{pmatrix}.$$

Sea $V \;:=\; V_1 \times V_2$ el kernel de $\mathbf{Q}$, donde $V_1 \subseteq\; X_1$ y $V_2 \subseteq\; X_2$, y suponga que:

i) existe $\alpha > 0$ tal que $\langle A(x_1), x_1 \rangle_{X_1} \,\geq\, \alpha \, \|x_1\|_{X_1}^2 \qquad \forall\, x_1 \,\in\, V_1$.

ii) existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{x_1 \in V_1 \backslash \mathbf{0}} \frac{\langle B(x_1), x_2 \rangle_{X_2}}{\|x_1\|_{X_1}} \,\geq\, \beta \, \|x_2\|_{X_2} \qquad \forall\, x_2 \,\in\, V_2$.

iii) $\langle C(x_2), x_2 \rangle_{X_2} \,\geq\, 0 \qquad \forall\, x_2 \,\in\, V_2$.

iv) existe $\tilde{\beta} > 0$ tal que $\|\mathbf{Q}^*(y)\|_X \,\geq\, \tilde{\beta}\, \|y\|_Y \qquad \forall\, y \,\in\, Y$.

a) Pruebe que para todo $(f, g) \,\in\, X \times Y$ existe un único $(x, y) \,\in\, X \times Y$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x) \,+\, \mathbf{Q}^*(y) &\;=\; f\,, \\ \mathbf{Q}(x) &\;=\; g\,, \end{aligned} \tag{25}$$

y encuentre explícitamente una constante $C > 0$ tal que

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} \,\leq\, C \left\{ \, \|f\|_X \,+\, \|g\|_Y \, \right\}.$$

b) Defina un esquema de Galerkin para (25) y establezca condiciones suficientes que aseguren su solubilidad única y estabilidad.

c) Demuestre la estimación de Cea para el esquema definido en b).

36. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\| \cdot \|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $| \cdot |_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i \; \forall\, i \in \{1, ..., n\}$, $\forall\, x := (x_1, ..., x_n)^{\mathbf{T}} \in \Omega$.

a) Defina la aplicación

$$|||v||| \,:=\, \left\{ \, |v|_{H^2(\Omega)}^2 \,+\, \sum_{i=0}^{n} |\, \langle v, p_i \rangle_{H^2(\Omega)} \,|^2 \, \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \, |||v||| \,\leq\, \|v\|_{H^2(\Omega)} \,\leq\, C_2 \, |||v||| \quad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,.$$

b) Considere el espacio cuociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma $\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \displaystyle\inf_{p \in P_1(\Omega)} \|v - p\|_{H^2(\Omega)}$, y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \,:=\, |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

Demuestre que $| \cdot |_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} &\,\leq\, \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \\ &\,\leq\, C \, |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \,\in\, H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,. \end{aligned}$$

c) Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p \; \forall\, p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, C\,|v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \,\in\, H^2(\Omega)\,.$$

37. Sea T un triángulo de $\mathbf{R}^2$ con diámetro h_T y sea $\widehat{T}$ el triángulo canónico con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. A su vez, sea $F_T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una aplicación afín invertible tal que $F_T(\widehat{T}) \,=\, T$, y defina $\psi_T \,:=\, \widehat{\psi} \circ F_T^{-1}$, donde $\widehat{\psi}$ es la función burbuja de $\widehat{T}$. Además, sea $\mathcal{P}_0$ el proyector ortogonal de $L^2(T)$ en $\mathbb{P}_0(T)$, el espacio de polinomios constantes sobre T, con respecto al producto escalar

$$\langle f, g\rangle \,:=\, \int_T \psi_T\, f\, g \qquad \forall\, f,\, g \,\in\, L^2(T)\,.$$

Aplique los lemas de Bramble-Hilbert y Deny-Lions para demostrar que existe $C > 0$, independiente de T, tal que:

$$\|v - \mathcal{P}_0(v)\|_{0,T} \,\leq\, C\, h_T\, |v|_{1,T} \qquad \forall\, v \,\in\, H^1(T)\,.$$

Dado $s \in]0,1[$, utilice argumentos de interpolación de espacios normados y el hecho que $(L^2(T), H^1(T))_{s,2} \,=\, H^s(T)$, para probar que existe $C_s > 0$, independiente de T, tal que

$$\|v - \mathcal{P}_0(v)\|_{0,T} \,\leq\, C_s\, h_T^s\, \|v\|_{s,T} \qquad \forall\, v \,\in\, H^s(T)\,.$$

38. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ e $(Y_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$, espacios de Hilbert, y considere el espacio $Y = Y_1 \times Y_2$ provisto del producto escalar

$$\langle z, y\rangle_Y \,:=\, \langle z_1, y_1\rangle_1 \,+\, \langle z_2, y_2\rangle_2 \qquad \forall\, z := (z_1, z_2),\; y = (y_1, y_2) \in Y\,.$$

Entonces, dados $B_j \in \mathcal{L}(X, Y_j)$, $j \in \{1,2\}$, defina el operador $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ por $B(x) \,:=\, (B_1(x), B_2(x)) \quad \forall\, x \in X$. Demuestre que B es sobreyectivo si y sólo si:

i) B_1 **y** B_2 son sobreyectivos.

ii) $X \,=\, N(B_1) \,+\, N(B_2)$.

39. Este problema constituye una versión particular del Lema de Peetre-Tartar.

(a) Sean $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ y $(X_3, \|\cdot\|_3)$, espacios de Banach, y considere operadores $A \,\in\, \mathcal{L}(X_1, X_2)$ y $B \,\in\, \mathcal{L}(X_1, X_3)$, tales que B es compacto. Además, suponga que existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \,\leq\, c\Big\{\, \|A(x)\|_2 \,+\, \|B(x)\|_3 \,\Big\} \qquad \forall\, x \in X_1\,.$$

Demuestre que $N(A)$ es de dimensión finita, y luego razone por contradicción para probar que existe $C > 0$ tal que

$$\mathrm{dist}(x, N(A)) \,\leq\, C\, \|A(x)\|_2 \qquad \forall\, x \in X_1\,.$$

(b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ y considere la descomposición: $H^1(\Omega) = \tilde{H}^1(\Omega) \oplus \mathbb{P}_0(\Omega)$, donde $\mathbb{P}_0(\Omega)$ es el espacio de las funciones constantes sobre Ω y

$$\tilde{H}^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \quad \int_\Omega v = 0 \right\}.$$

Pruebe que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha \, \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq |v|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall \, v \in \tilde{H}^1(\Omega) \,. \tag{26}$$

(c) Aplique (a), (26), y el teorema de trazas, para demostrar que existen constantes C_1, $C_2 > 0$, tales que

$$C_1 \, \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq |v|^2_{H^1(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq C_2 \, \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall \, v \in H^1(\Omega) \,. \tag{27}$$

Indicación: para la desigualdad (27) inferior defina operadores A y B apropiados utilizando los espacios $X_1 := H^1(\Omega)$, $X_2 := [L^2(\Omega)]^2 \times L^2(\Gamma)$ y $X_3 := \mathbb{P}_0(\Omega)$.

40. Sean Ω un abierto acotado y convexo de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ, $f \in L^2(\Omega)$, y $u \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ la única solución de: $-\Delta u = f$ en Ω, $u = 0$ en Γ. Dada una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de $\bar{\Omega}$ hecha de triángulos K y lados e, se definen los espacios de LAGRANGE y de CROUZEIX-RAVIART, respectivamente, como sigue:

$$X_h := \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) : \quad v|_K \in \mathbf{P}_1(K) \quad \forall \, K \in \mathcal{T}_h \,, \quad v = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \right\},$$

$$V_h := \Big\{ v \in L^2(\Omega) : \; v|_K \in \mathbf{P}_1(K) \quad \forall \, K \in \mathcal{T}_h \,, \; v \text{ es continua en los puntos medios de los lados } e \in \mathcal{T}_h \,, \; v = 0 \text{ en los puntos medios de los lados } e \subseteq \Gamma \Big\}.$$

a) Defina $\|v_h\|_h := \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v_h|^2_{1,K} \right\}^{1/2} \quad \forall \, v_h \in V_h$, pruebe que $\| \cdot \|_h$ es una norma sobre V_h, y concluya que existe un único $u_h \in V_h$ tal que

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h = F(v_h) := \int_\Omega f \, v_h \quad \forall \, v_h \in V_h \,.$$

b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|u - u_h\|_h \leq C \left\{ \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h \setminus 0} \frac{|a_h(u, w_h) - F(w_h)|}{\|w_h\|_h} \right\}. \tag{28}$$

c) Integre por partes en cada $K \in \mathcal{T}_h$ y pruebe que

$$\begin{aligned} a_h(u, w_h) - F(w_h) &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}\, w_h = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{e\subseteq\partial K} \int_e \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} \left(w_h - \mathcal{P}_{0,e}(w_h)\right) \\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{e\subseteq\partial K} \int_e \left(\nabla u - \nabla \Pi_h(u)\right) \cdot \boldsymbol{\nu} \left(w_h - \mathcal{P}_{0,e}(w_h)\right) \qquad \forall\, w_h \in V_h\,, \end{aligned} \tag{29}$$

donde $\Pi_h : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to X_h$ es el operador de interpolación global de Lagrange y $\mathcal{P}_{0,e} : L^2(e) \to \mathbf{P}_0(e)$ es el proyector ortogonal.

d) Deduzca a partir de (28) y (29) que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|u - u_h\|_h \,\le\, C\, h\, |u|_{2,\Omega}\,.$$

41. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ y sea $f \in [L^2(\Omega)]^2$. El problema de elasticidad lineal plana asociado a un sólido que ocupa Ω, y que está sometido a la fuerza f, consiste en encontrar el desplazamiento u tal que:

$$\mathbf{div}\Big\{ \lambda\, \mathrm{tr}\, \mathbf{e}(u)\, I \,+\, 2\,\mu\, \mathbf{e}(u) \Big\} \,=\, -\, f \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{y} \quad u \,=\, \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma\,, \tag{30}$$

donde $\lambda\,,\, \mu \,>\, 0$ son las constantes de Lamé, tr denota el operador de trazas matricial, $\mathbf{e}(u)$ es el tensor de deformaciones, e I es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$.

a) Demuestre que la formulación variacional de (30) se reduce a: Hallar $u \in [H_0^1(\Omega)]^2$ tal que

$$\int_\Omega \Big\{ \lambda\, \mathrm{div}\,(u)\, \mathrm{div}\,(\mathbf{v}) \,+\, 2\,\mu\, \mathbf{e}(u) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \Big\} \,=\, \int_\Omega f \cdot \mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2\,,$$

y pruebe que ella tiene solución única, la cual depende continuamente de f.

b) Utilice triángulos de tipo (**1**) para definir detalladamente un esquema de Galerkin asociado, pruebe que tiene solución única, establezca su convergencia e indique la razón de convergencia respectiva.

42. Sea Ω un abierto acotado y conexo de $\mathbf{R}^n$ de clase $C^{0,1}$, y sea $H^{-1}(\Omega)$ (resp. $[H^{-1}(\Omega)]^n$) el dual de $H_0^1(\Omega)$ (resp. $[H_0^1(\Omega)]^n$). Utilizando que $C_0^\infty(\Omega)$ (resp. $[C_0^\infty(\Omega)]^n$) es denso en $H_0^1(\Omega)$ (resp. $[H_0^1(\Omega)]^n$), las aplicaciones identidad $i : L^2(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ y gradiente $\nabla : L^2(\Omega) \to [\mathcal{D}'(\Omega)]^n$ se extienden por densidad a operadores $i : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ y $\nabla : L^2(\Omega) \to [H^{-1}(\Omega)]^n$, respectivamente. En tal caso, se puede probar que existe $c_1 > 0$, que depende sólo de Ω, tal que

$$\|p\|_{0,\Omega} \,\le\, c_1 \Big\{ \|p\|_{-1,\Omega} \,+\, \|\nabla p\|_{-1,\Omega} \Big\} \quad \forall\, p \in L^2(\Omega)\,.$$

a) Considere el operador $B \,:=\, \mathcal{R}\,\nabla$, donde $\mathcal{R} : [H^{-1}(\Omega)]^n \to [H_0^1(\Omega)]^n$ es la aplicación de Riesz asociada, y demuestre que el rango de B es cerrado en $[H_0^1(\Omega)]^n$.

b) Identifique el operador adjunto $B^* : [H_0^1(\Omega)]^n \to L^2(\Omega)$ y utilice resultados clásicos de análisis funcional para probar que $\operatorname{div} : V^\perp \to L_0^2(\Omega)$ es un isomorfismo, donde $V := \Big\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n : \ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \Big\}$, $[H_0^1(\Omega)]^n = V \oplus V^\perp$, y $L_0^2(\Omega) := \Big\{ p \in L^2(\Omega) : \ \int_\Omega p = 0 \Big\}$.

IND.: Una versión particular del Lema de Peetre-Tartar establece que, dados $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ y $B \in \mathcal{L}(X,Z)$, con X, Y y Z espacios de Banach, tales que para algún $c > 0$ se tiene que $\|x\| \,\le\, c \Big\{ \|A(x)\| \,+\, \|B(x)\| \Big\} \quad \forall\, x \in X$, entonces necesariamente $N(B)$ es de dimensión finita y existe $C > 0$ tal que $\operatorname{dist}(x, N(B)) \,\le\, C\,\|B(x)\| \quad \forall\, x \in X$.

43. Dados Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y constantes κ_1, $\kappa_2 \in \mathbf{R}$, considere el problema:

$$- \Delta u \,+\, \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \,+\, \kappa_2\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \nabla u \cdot \mathbf{n} \,=\, g \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{31}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal en Γ. Deduzca la formulación primal de (31) y encuentre la mayor región factible para $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbf{R}^2$ que asegura elipticidad de la forma bilineal resultante. A su vez, defina el esquema de Galerkin asociado y establezca la estimación de Cea correspondiente en términos de κ_1 y κ_2. Luego, reemplace el dato de Neumann por uno de Dirichlet homogéneo y pruebe en tal caso que la elipticidad indicada sólo depende de κ_2.

44. El propósito de este ejercicio es introducir un esquema de Galerkin no usual para el problema de valores de contorno:

$$-u'' + 3\,u' \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega \,:=]0,2[\,, \quad u(0) = u(2) = 0\,, \tag{32}$$

donde $f \in L^2(\Omega)$. Para este efecto, proceda según se indica a continuación:

a) Para cada $j \in \{1,2,3\}$ encuentre y dibuje el único polinomio p_j de grado ≤ 2 tal que $(p_j(0), p_j(1), p_j'(1/3)) \,=\, \mathbf{e}_j$, donde $\mathbf{e}_j$ es el j-ésimo vector de la base canónica de $\mathbf{R}^3$.

b) Sea $0 \,=\, x_0 \,<\, x_1 \,<\, \cdots \,<\, x_n \,<\, x_{n+1} \,=\, 2$ una partición UNIFORME de $\Omega :=]0,2[$ y denote $h \,:=\, \frac{2}{n+1}$. Dado $i \in \{1, ..., n+1\}$, utilice lo obtenido en a) y el cambio de variables $[x_{i-1}, x_i] \ni x \,=\, x_{i-1} \,+\, t\,h\,, \quad t \in [0,1]$, para encontrar los polinomios $p_{i,j}$ de grado $\le\, 2$, $j \,\in\, \{1,2,3\}$, tales que $(p_{i,j}(x_{i-1}), p_{i,j}(x_i), p_{i,j}'(\widetilde{x}_i)) \,=\, \mathbf{e}_j$, donde $\widetilde{x}_i \,:=\, x_{i-1} \,+\, \frac{1}{3}\,h$.

c) Para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca el espacio de elementos finitos

$$H_n := \Big\{ v \in C(\bar{\Omega}) : \ v(0) = v(2) = 0, \ \text{y } v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathcal{P}_i \ \forall\, i \in \{1, ..., n+1\} \Big\},$$

donde $\mathcal{P}_i \,:=\, \langle \Big\{ p_{i,1}, p_{i,2}, p_{i,3} \Big\} \rangle$, e identifique en particular una base de H_1.

d) Utilice H_n para definir el esquema de Galerkin asociado a (32), demuestre que este sistema discreto tiene solución única, y calcule la matriz de rigidez correspondiente para $n = 1$.

e) Qué ocurre en a) y b) si en vez de $1/3$ y $\widetilde{x}_i := x_{i-1} + \frac{1}{3}h$ se considera $1/2$ y $\widetilde{x}_i := x_{i-1} + \frac{1}{2}h$? Qué ocurre si se elige cualquier $r \in]0,1[$, $r \neq 1/2$, y $\widetilde{x}_i := x_{i-1} + r\,h$?

45. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, y $\mathbf{K} \in [C(\overline{\Omega})]^{n\times n}$ un tensor simétrico y uniformemente definido positivo. Se puede probar que la formulación variacional mixta del problema: $-\operatorname{div}\{\mathbf{K}\,\nabla u\} = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = g \quad \text{en} \quad \Gamma$, consiste en hallar un par $(\sigma, u) \in H(\operatorname{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \mathbf{K}^{-1}\,\sigma\cdot\tau \,+\, \int_\Omega u \operatorname{div}\tau \,-\, \int_\Omega v \operatorname{div}\sigma \,=\, \int_\Omega f\,v \,+\, \langle \tau\cdot\mathbf{n}, g\rangle$$

para todo $(\tau, v) \in H(\operatorname{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal en Γ y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$. Luego, dados δ_1, δ_2, $\delta_3 > 0$, agregue las ecuaciones

$$\delta_1 \int_\Omega (\nabla u - \sigma)\cdot\nabla v = 0 \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,, \quad \delta_2 \int_\Gamma u\,v \,=\, \delta_2 \int_\Gamma g\,v \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

$$\delta_3 \int_\Omega \operatorname{div}\sigma \operatorname{div}\tau \,=\, -\,\delta_3 \int_\Omega f \operatorname{div}\tau \quad \forall\,\tau \in H(\operatorname{div};\Omega)\,,$$

y demuestre que, eligiendo convenientemente estas constantes, la forma bilineal resultante es $H(\operatorname{div};\Omega)\times H^1(\Omega)$-elíptica.

46. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ y sea $f \in [L^2(\Omega)]^2$. A su vez, sean $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de Ω y k un entero ≥ 1. Defina para cada $h > 0$ el espacio

$$X_h^k \,:=\, \left\{ \mathbf{v}_h \in [C(\overline{\Omega})]^2 : \quad \mathbf{v}_h|_K \,\in\, [\mathbb{P}_k(K)]^2 \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\} \,\cap\, [H_0^1(\Omega)]^2\,,$$

y considere el siguiente esquema de Galerkin para el problema de elasticidad lineal plana asociado a un sólido que ocupa la region Ω y que está sujeto a la fuerza representada por f: Hallar $\mathbf{u}_h \in X_h^k$ tal que

$$\int_\Omega \left\{ 2\,\mu\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_h) : \mathbf{e}(\mathbf{v}_h) \,+\, \lambda \operatorname{div}\mathbf{u}_h \operatorname{div}\mathbf{v}_h \right\} \,=\, \int_\Omega f\cdot\mathbf{v}_h \quad \forall\, \mathbf{v}_h \in X_h^k\,, \qquad (33)$$

donde $\lambda\,,\,\mu > 0$ son las constantes de Lamé respectivas y, dado $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2$, $\mathbf{e}(\mathbf{v})$ denota el tensor de deformaciones (o parte simétrica de $\nabla\mathbf{v}$).

a) Pruebe que (33) tiene solución única y establezca la razón de convergencia correspondiente.

b) Denote por $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ la solución del problema continuo respectivo y demuestre, utilizando el interpolante de Clémént $\mathbf{I}_h : [L^2(\Omega)]^2 \to X_h^1 \subseteq X_h^k$, que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \,\le\, C \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2} ,$$

donde

$$\eta_K^2 \,:=\, h_K^2 \, \|f + \mathbf{div}\, \sigma_h\|_{0,K}^2 \,+\, \sum_{e \subseteq \partial K} h_e \, \|[\sigma_h]_e\|_{0,e}^2 \,,$$

$$\sigma_h \,:=\, 2\,\mu\, \mathbf{e}(\mathbf{u}_h) \,+\, \lambda \, \mathrm{div}\, \mathbf{u}_h \, \mathbb{I} \,,$$

h_K es el diámetro de K, h_e es la longitud del lado e de $\mathcal{T}_h$, $[\sigma_h]_e$ denota el salto de discontinuidad de σ_h a través de e, e $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$.

47. Dada una familia regular de triangularizaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de un dominio poliédrico Ω de $\mathbf{R}^n$ y un entero $k \ge 1$, considere para cada $h > 0$ los proyectores ortogonales $\mathbf{P}_{1,h}^k : H^1(\Omega) \to X_h^k$ (con respecto al producto interior de $H^1(\Omega)$) y $\mathbf{P}_h^k : L^2(\Omega) \to X_h^k$ (con respecto al producto interior de $L^2(\Omega)$), donde $X_h^k \,:=\, \Big\{ v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\}$.

a) Pruebe que existen constantes C_1, $C_2 > 0$, independientes de h, tales que

$$\|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} \,\le\, C_1 \, h^l \, |v|_{l+1,\Omega} \quad \forall\, v \in H^{l+1}(\Omega) \,, \quad \forall\, l \in \{0, 1, ..., k\} \,, \quad \text{y}$$

$$\|v - \mathbf{P}_h^k(v)\|_{0,\Omega} \,\le\, C_2 \, h^{l+1} \, |v|_{l+1,\Omega} \quad \forall\, v \in H^{l+1}(\Omega) \,, \quad \forall\, l \in \{1, ..., k\} \,.$$

b) Use la teoría de interpolación de espacios de Sobolev para probar, a partir de a), que existen constantes C_3, $C_4 > 0$, independientes de h, tales que

$$\|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} \,\le\, C_3 \, h^s \, \|v\|_{s+1,\Omega} \quad \forall\, v \in H^{s+1}(\Omega) \,, \quad \forall\, s \in [0, k] \,, \quad \text{y}$$

$$\|v - \mathbf{P}_h^k(v)\|_{0,\Omega} \,\le\, C_4 \, h^s \, \|v\|_{s,\Omega} \quad \forall\, v \in H^s(\Omega) \,, \quad \forall\, s \in [0, k+1] \,.$$

c) Suponga ahora que Ω es convexo, y sea $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^2(\Omega))$ el operador que a cada $r \in L^2(\Omega)$ le asigna la única solución $T(r) \in H^2(\Omega)$ del problema: $-\Delta\, T(r) \,+\, T(r) \,=\, r$ en Ω, $\nabla T(r) \cdot \boldsymbol{\nu} \,=\, 0$ en $\partial\Omega$, donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal a $\partial\Omega$. Luego, empleando la formulación débil que define a $T(r)$ y el argumento de dualidad ("*truco de Aubin-Nitsche*") dado por la identidad

$$\|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{0,\Omega} \,=\, \sup_{\substack{r \in L^2(\Omega) \\ r \ne 0}} \frac{\langle r, v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v) \rangle_{0,\Omega}}{\|r\|_{0,\Omega}} \,,$$

demuestre que

$$\|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{0,\Omega} \,\le\, \widetilde{C}\, h \, \|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega) \,,$$

y concluya luego que

$$\|v - \mathbf{P}^k_{1,h}(v)\|_{0,\Omega} \,\le\, \widehat{C}\, h^{l+1}\, |v|_{l+1,\Omega} \quad \forall\, v \in H^{l+1}(\Omega)\,, \quad \forall\, l \in \{0,1,...,k\}\,,$$

con $\widetilde{C}$, $\widehat{C} > 0$, independientes de h, v y k.

d) Además de la convexidad de Ω, suponga también que $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ es quasi-uniforme, y demuestre, utilizando las propiedades de $\mathbf{P}^k_{1,h}$ y $\mathbf{P}^k_h$, y algunas estimaciones obtenidas en clases y en las partes anteriores de este problema, que existen c_1, $c_2 > 0$, independientes de h, tales que

$$c_1\, \|v - \mathbf{P}^k_{1,h}(v)\|_{1,\Omega} \,\le\, \|v - \mathbf{P}^k_h(v)\|_{1,\Omega} \,\le\, c_2\, \|v - \mathbf{P}^k_{1,h}(v)\|_{1,\Omega} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

IND.: Para la desigualdad que involucra a c_2 pruebe primero que

$$\|v - \mathbf{P}^k_h(v)\|_{1,\Omega} \,\le\, \|v - \mathbf{P}^k_{1,h}(v)\|_{1,\Omega} \,+\, \|\mathbf{P}^k_h\{v - \mathbf{P}^k_{1,h}(v)\}\|_{1,\Omega}\,.$$

48. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de un dominio poligonal Ω de $\mathbf{R}^2$, y para cada $h > 0$ considere el espacio de elementos finitos

$$X_h \,:=\, \Big\{ v_h \in C(\overline{\Omega}) : \quad v_h|_K \,\in\, \mathbb{P}_1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\}\,.$$

Además, sea $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ el conjunto de vértices de $\mathcal{T}_h$, y sea $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\}$ la base correspondiente de X_h, es decir, dado $j \in \{1, ..., N\}$, φ_j es la única función en X_h tal que $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall\, i \in \{1, ..., N\}$. A su vez, para cada $j \in \{1, ..., N\}$ se introduce el macro-elemento $w_j \,:=\, \mathrm{sop}\, \varphi_j \,=\, \cup\{K \in \mathcal{T}_h : \quad x_j \in K\}$, y dado $K \in \mathcal{T}_h$ se denota por ψ_K su función burbuja respectiva. Luego, para cada $j \in \{1, ..., N\}$ se considera el proyector ortogonal $S_j : L^2(w_j) \to \mathbb{P}_0(w_j)$ con respecto al producto escalar ponderado

$$\langle\langle v, z \rangle\rangle_{0,w_j} \,:=\, \sum_{K \subseteq w_j} \int_K \psi_K\, v\, z \qquad \forall\, v,\, z \in L^2(w_j)\,,$$

y se introduce un interpolante de Clémént alternativo $J_h : L^2(\Omega) \to X_h$ dado por $J_h(v) \,:=\, \displaystyle\sum_{j=1}^N S_j(v)\, \varphi_j \quad \forall\, v \in L^2(\Omega)$. Demuestre, siguiendo básicamente el mismo análisis de clases, que existen C_1, $C_2 > 0$, independientes de h, tales que

$$\|v - J_h(v)\|_{0,K} \,\le\, C_1\, h_K\, |v|_{1,w_K} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,, \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,,$$

y

$$\|v - J_h(v)\|_{0,e} \,\le\, C_2\, h_K^{1/2}\, |v|_{1,w_e} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,, \quad \forall\, \text{lado } e \text{ de } K\,, \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,,$$

donde

$$w_K \,:=\, \cup\big\{ w_j : \quad x_j \in K \big\} \qquad \text{y} \qquad w_e \,:=\, \cup\big\{ w_j : \quad x_j \in e \big\}\,.$$

49. Dados Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1, $f \in L^2(\Omega)$, y constantes κ_1, $\kappa_2 \in \mathbf{R}$ con $\kappa_2 \neq 0$, considere el problema:

$$- \Delta u + \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \kappa_2 u = f \quad \text{en} \quad \Omega , \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma . \tag{34}$$

Defina la incógnita auxiliar $\sigma = \nabla u$ en Ω y deduzca la siguiente formulación variacional mixta de (34): Hallar $\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \in H(\text{div};\Omega)$ tal que

$$\kappa_2 \int_\Omega \sigma \cdot \tau + \int_\Omega \text{div}\, \sigma \,\text{div}\, \tau - \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \sigma_j \,\text{div}\, \tau = - \int_\Omega f \,\text{div}\, \tau \quad \forall \tau \in H(\text{div};\Omega) .$$

Dibuje la region $S := \left\{ (\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbf{R}^2 : \ \kappa_2 > 0 \text{ y } |\kappa_1| < 2 \min\left\{\kappa_2, \frac{1}{n}\right\} \right\}$, y pruebe que para todo $(\kappa_1, \kappa_2) \in S$ el problema anterior tiene una única solución $\sigma \in H(\text{div};\Omega)$ que depende continuamente del dato f.

50. Encuentre el único polinomio b_K de grado ≤ 4 que se anula en la frontera del tetraedro K de vértices $(0, 1, 2)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 3)$ y $(0, 0, 0)$, y que vale $1/2$ en el baricentro respectivo.

51. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y sean $\Gamma_D, \Gamma_N \subseteq \Gamma$ tales que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| \neq 0$ y $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Se sabe que

$$H^{1/2}(\Gamma_*) := \left\{ \gamma_0(w)|_{\Gamma_*} : \quad w \in H^1(\Omega) \right\} \qquad \forall * \in \{D, N\} ,$$

con $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_*} := \inf \left\{ \|w\|_{1,\Omega} : \quad w \in H^1(\Omega) , \quad \gamma_0(w)|_{\Gamma_*} = \varphi \right\}$ $\forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_*)$. A su vez, denotando por $E_{N,0} : H^{1/2}(\Gamma_N) \to L^2(\Gamma)$ el operador de extensión nula

$$E_{N,0}(\varphi) := \begin{cases} \varphi & \text{en} \quad \Gamma_N \\ 0 & \text{en} \quad \Gamma \backslash \Gamma_N \end{cases} \qquad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_N) ,$$

se tiene que $H^{1/2}_{00}(\Gamma_N) := \left\{ \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_N) : \quad E_{N,0}(\varphi) \in H^{1/2}(\Gamma) \right\}$, con norma inducida $\|\varphi\|_{1/2,00,\Gamma_N} := \|E_{N,0}(\varphi)\|_{1/2,\Gamma}$ $\forall \varphi \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$.

i) Pruebe que para cada $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ existe un único $w_\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(w_\varphi)|_{\Gamma_D} = \varphi$ y $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_D} = \|w_\varphi\|_{1,\Omega}$.

ii) Dado $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, considere el problema de valores de contorno

$$\Delta z_\varphi = 0 \text{ en } \Omega , \quad \gamma_0(z_\varphi)|_{\Gamma_D} = \varphi \text{ en } \Gamma_D , \quad \gamma_1(z_\varphi) = 0 \text{ en } \Gamma_N , \tag{35}$$

y demuestre fundadamente, utilizando una adecuada fórmula de integración por partes, que $z_\varphi = \widetilde{z}_\varphi + w_\varphi$, donde $\widetilde{z}_\varphi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ es tal que

$$\int_\Omega \nabla \widetilde{z}_\varphi \cdot \nabla v = - \int_\Omega \nabla w_\varphi \cdot \nabla v \qquad \forall v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) . \tag{36}$$

Pruebe que (36) tiene solución única y concluya que $\|z_\varphi\|_{1,\Omega} \leq c \|\varphi\|_{1/2,\Gamma_D}$.

iii) Defina el operador $E_D : H^{1/2}(\Gamma_D) \to H^{1/2}(\Gamma)$ por $E_D(\varphi) := \gamma_0(z_\varphi) \ \forall\, \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, y pruebe que E_D es lineal y acotado.

iv) Pruebe que $H^{1/2}(\Gamma) = E_D(H^{1/2}(\Gamma_D)) \oplus E_{N,0}(H^{1/2}_{00}(\Gamma_N))$. Equivalentemente, dado $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, demuestren que existen únicos $\psi_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ y $\psi_N \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$ tales que $\psi = E_D(\psi_D) + E_{N,0}(\psi_N)$.

v) Deduzca a partir de iv) que, dado $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$, existen $\lambda_D \in H^{-1/2}(\Gamma_D)$ y $\lambda_N \in H^{-1/2}_{00}(\Gamma_N)$ tales que $\langle \lambda, \psi\rangle = \langle \lambda_D, \psi_D\rangle_{\Gamma_D} + \langle \lambda_N, \psi_N\rangle_{\Gamma_N} \ \forall\, \psi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Concluya que si $\lambda|_{\Gamma_N} = 0$, λ se identifica con un funcional en $H^{-1/2}(\Gamma_D)$.

52. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y sean $\Gamma_D,\, \Gamma_N \subseteq \Gamma$ tales que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| \neq 0$ y $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, considere el problema de valores de contorno

$$-\Delta u = f \ \text{ en } \Omega\,, \quad \gamma_0(u)|_{\Gamma_D} = g \ \text{ en } \Gamma_D\,, \quad \gamma_1(u) = 0 \ \text{ en } \Gamma_N\,. \qquad (37)$$

i) Utilice lo que sea necesario del ejercicio anterior para probar que una formulación primal-mixta de (37) se reduce a: Hallar $(u, \lambda) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= F(v) \quad \forall\, v \in H\,,\\ b(u,\xi) &= G(\xi) \quad \forall\, \xi \in Q\,, \end{aligned} \qquad (38)$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := H^{-1/2}(\Gamma_D)$, $a : H \times H \to \mathbf{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales dadas por

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{y} \quad b(v,\xi) := \langle \xi, \gamma_0(v)\rangle_{\Gamma_D} \quad \forall\, u,\, v \in H, \ \ \forall\, \xi \in Q\,,$$

y los funcionales $F \in H'$ y $G \in Q'$ dependen de f y g, respectivamente.

ii) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que existe una única solución de (38), la cual depende continuamente de los datos f y g.

iii) Sea H_h un subespacio arbitrario de dimensión finita de H y, dada una partición $\Big\{e_1, e_2, ..., e_n\Big\}$ de Γ_D, defina

$$Q_h := \Big\{ \xi_h \in L^2(\Gamma_D) : \quad \xi_h|_{e_j} \in P_0(e_j) \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., n\} \Big\}\,.$$

Considere el sistema de Galerkin asociado a (38), suponga que b satisface la condición inf-sup discreta con una constante $\beta > 0$ independiente de las dimensiones de H_h y Q_h, y pruebe que dicho esquema discreto posee una única solución $(u_h, \lambda_h) \in H_h \times Q_h$. Establezca además la estimación de Cea y comente si acaso el error $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ depende o no de $\mathrm{dist}(\lambda, Q_h)$.

53. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera poliédrica, y sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación regular de $\bar{\Omega}$ hecha de n-simplex o n-rectángulos, todos ellos afín-equivalentes a un elemento finito de referencia $\widehat{K}$. Como es usual, el parámetro h está dado por

$h := \max\{\, h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h \,\}$, donde h_K es el diámetro de K. Ahora, para todo $K \in \mathcal{T}_h$ se define el operador local $\Pi_K : H^1(K) \to L^2(K)$ como

$$\Pi_K(v) \,:=\, \frac{1}{|K|} \int_K v \quad \forall\, v \in H^1(K)\,.$$

Además, se define el operador global asociado $\Pi : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ como

$$\Pi(v)\,|_K \,:=\, \Pi_K(v|_K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h,\ \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\widehat{K}$, tal que

$$||\, v \,-\, \Pi(v)\,||_{L^2(\Omega)} \,\leq\, C\, h\, |v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

54. Sean K_1 y K_2 triángulos adyacentes de $\mathbf{R}^2$ con diámetros h_1 y h_2, respectivamente, y para cada $j \in \{1,2\}$ considere el proyector ortogonal $\Pi_j : L^2(K_j) \to P_0(K_j)$. Defina el operador $\Pi : L^2(K_1 \cup K_2) \to P_0(K_1 \cup K_2)$ por

$$\Pi(v) \,:=\, \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \Pi_j(v|_{K_j}) \qquad \forall\, v \in L^2(K_1 \cup K_2)\,,$$

y muestre que existen $C_1,\ C_2 > 0$, independientes de K_1 y K_2, tales que

$$\|v - \Pi(v)\|_{0,K_j} \,\leq\, C_j\, h_j\, |v|_{1,K_1\cup K_2} \qquad \forall\, j \in \{1,2\}\,, \quad \forall\, v \in H^1(K_1 \cup K_2)\,.$$

Además, enuncie y demuestre el resultado que extiende lo anterior al caso de n triángulos "*adyacentes dos a dos*" de $\mathbf{R}^2$.

55. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de un dominio poligonal Ω de $\mathbf{R}^2$, y para cada $h > 0$ considere el espacio

$$X_h \,:=\, \Big\{ v_h \in C(\overline{\Omega}) : \quad v_h|_K \,\in\, P_1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\}\,.$$

Además, sea $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ el conjunto de vértices de $\mathcal{T}_h$, y sea $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\}$ la base correspondiente de X_h, es decir, dado $j \in \{1, ..., N\}$, φ_j es la única función en X_h tal que $\varphi_j(x_i) \,=\, \delta_{ij} \quad \forall\, i \in \{1, ..., N\}$. A su vez, para cada $j \in \{1, ..., N\}$ se introduce el macro-elemento $w_j \,:=\, \mathrm{sop}\, \varphi_j \,=\, \cup\{K \in \mathcal{T}_h : \quad x_j \in K\}$, y se define el operador $S_j : L^2(w_j) \to P_0(w_j)$ dado por

$$S_j(v) \,:=\, \frac{1}{n_j} \sum_{K \subseteq w_j} S_{j,K}(v|_K) \qquad \forall\, v \in L^2(w_j)\,,$$

donde n_j es el número de triángulos de w_j y $S_{j,K} : L^2(K) \to P_0(K)$ es el proyector ortogonal. Defina el interpolante de Clémént alternativo $J_h : L^2(\Omega) \to X_h$ dado por $J_h(v) \,:=\, \displaystyle\sum_{j=1}^{N} S_j(v)\, \varphi_j \quad \forall\, v \,\in\, L^2(\Omega)$, y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$, independientes de h, tales que

$$\|v - J_h(v)\|_{0,K} \,\leq\, C_1\, h_K\, |v|_{1,w_K} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,, \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,,$$

y

$$\|v - J_h(v)\|_{0,e} \,\le\, C_2\, h_K^{1/2}\, |v|_{1,w_e} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,, \quad \forall \,\text{lado } e \text{ de } K\,, \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,,$$

donde

$$w_K \,:=\, \cup\Big\{ w_j : \quad x_j \in K \Big\} \qquad \text{y} \qquad w_e \,:=\, \cup\Big\{ w_j : \quad x_j \in e \Big\}\,.$$

56. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera poliédrica, y sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de $\bar{\Omega}$ hecha de n-simplex K con diámetro h_K, todos ellos afín-equivalentes a un elemento finito de referencia $\widehat{K}$. Suponga también que dicha familia es *quasi-uniforme*, esto es existe $c > 0$, independiente de h, tal que

$$h \,:=\, \max\Big\{ h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h \Big\} \,\le\, c\, \min\Big\{ h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h \Big\}\,,$$

y, dado $k \ge 1$, defina el espacio de elementos finitos de Lagrange

$$X_h^k \,:=\, \Big\{ v \in C(\bar{\Omega}) : \quad v|_K \in P_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\}.$$

Pruebe que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|v\|_{1,\Omega} \,\le\, C\, h^{-1}\, \|v\|_{0,\Omega} \qquad \forall\, v \in X_h^k\,. \tag{39}$$

BONUS TRACK (0.5 PUNTOS). Utilice la teoría de interpolación de espacios de Sobolev para probar que existe $C > 0$, independiente de h, tal que $\|v\|_{\delta,\Omega} \,\le\, C\, h^{-\delta}\, \|v\|_{0,\Omega} \qquad \forall\, v \in X_h^k\,, \qquad \forall\, \delta \in [0,1]$.

57. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y dado $f \in L^2(\Omega)$, sea $u \in H_0^1(\Omega)$ la única solución débil del problema de Poisson: $\quad -\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma$. A su vez, sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de $\bar{\Omega}$ hecha de triángulos K con diámetro h_K. Entonces, dado $k \in \mathbf{N}$, defina el espacio de elementos finitos

$$X_{h,0}^k \,:=\, \Big\{ v \in C(\bar{\Omega}) : \quad v|_K \in P_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,, \quad v = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \Big\}\,,$$

asuma la existencia de un interpolante de Clément $I_h : H_0^1(\Omega) \to X_{h,0}^k$ con las mismas propiedades de aproximación del visto en clases, y considere el esquema de Galerkin: Hallar $u_h \in X_{h,0}^k$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \,=\, \int_\Omega f v_h \qquad \forall\, v_h \in X_{h,0}^k\,. \tag{40}$$

i) Demuestre que existe $\alpha > 0$, dependiente sólo de Ω, tal que

$$\alpha\, \|u - u_h\|_{1,\Omega} \,\le\, \sup_{w \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{S_h(w)}{\|w\|_{1,\Omega}}\,,$$

donde $S_h(w) \,:=\, \int_\Omega f\,\big(w - I_h(w)\big) - \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla\big(w - I_h(w)\big)$.

ii) Sea $\mathcal{E}_h(\Omega)$ el conjunto de lados interiores de $\mathcal{T}_h$. Entonces, dado $e \in \mathcal{E}_h(\Omega)$, $\boldsymbol{\nu}_e$ denota un vector normal unitario fijo sobre e, y $[\nabla u_h]_e$ es el salto de discontinuidad de ∇u_h sobre e en la dirección dada por $\boldsymbol{\nu}_e$. Pruebe que

$$S_h(w) \,=\, \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \big(f + \Delta u_h\big)\big(w - I_h(w)\big) \,-\, \sum_{e\in\mathcal{E}_h(\Omega)} \int_e [\nabla u_h]_e \cdot \boldsymbol{\nu}_e \,\big(w - I_h(w)\big)\,.$$

iii) Denote por h_e la medida del lado e, y concluya que existe $C_{\mathtt{rel}} > 0$, independiente de h, tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega}^2 \,\leq\, C_{\mathtt{rel}} \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left\{ h_K^2\, \|f + \Delta u_h\|_{0,K}^2 \,+\, \sum_{e\subseteq\partial K} h_e\, \|[\nabla u_h]_e\|_{0,e}^2 \right\}\,. \quad (41)$$

58. El ejercicio anterior ha proporcionado una cota superior del error de Galerkin, la cual, excepto por la constante $C_{\mathtt{rel}}$, depende explícitamente de la solución discreta u_h obtenida de acuerdo a (40), y por lo tanto es completamente calculable. De acuerdo a ello, la desigualdad (41) recibe usualmente el nombre de *estimación de error a posteriori confiable* (*"reliable" en inglés*). El propósito del presente ejercicio es probar, al menos parcialmente, que también es posible acotar inferiormente el error, módulo una constante usualmente diferente $C_{\mathtt{eff}}$ y términos de orden superior, por la expresión a la derecha de (41), lo cual se denomina *estimación de error a posteriori eficiente* (*"efficient" en inglés*). Para este efecto, dado $K \in \mathcal{T}_h$, se considera la función burbuja respectiva $\psi_K \in P_3(K)$, la cual satisface

$$0 \leq \psi_K \leq 1 \quad \text{en} \quad K \quad \text{y} \quad \psi_K = 0 \quad \text{en} \quad \partial K\,.$$

Se sabe, además, que dado $k \in \mathbf{N}$, existe $c_1 > 0$, que depende sólo de k y la constante del ángulo mínimo, tal que

$$\|q\|_{0,K}^2 \,\leq\, c_1\, \|\psi_K^{1/2}\, q\|_{0,K}^2 \qquad \forall\, q \in P_k(K)\,. \quad (42)$$

i) Sea $\Pi_K : L^2(K) \to P_0(K)$ el proyector ortogonal, y muestre primero que

$$h_K^2\, \|f + \Delta u_h\|_{0,K}^2 \,\leq\, 2\, h_K^2\, \|f - \Pi_K(f|_K)\|_{0,K}^2 \,+\, 2\, h_K^2\, \|\chi_K\|_{0,K}^2\,,$$

donde $\chi_K := \Pi_K(f|_K) + \Delta u_h$.

ii) Aplique (42) e integración por partes en K para probar que

$$\|\chi_K\|_{0,K}^2 \,\leq\, c_1 \left\{ \int_K \psi_K\, \chi_K\, (\Pi_K(f|_K) - f) \,+\, \int_K \nabla(u - u_h)\cdot\nabla(\psi_K\, \chi_K) \right\}.$$

iii) Utilice la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la estimación inversa dada por (39) (cf. Ejercicio 3) para demostrar a partir de ii) que

$$\|\chi_K\|_{0,K}^2 \,\leq\, C \left\{ \|f - \Pi_K(f|_K)\|_{0,K}^2 \,+\, h_K^{-2}\, |u - u_h|_{1,K}^2 \right\}.$$

iv) Concluya que existe $\widetilde{C} > 0$, independiente de h, tal que

$$h_K^2 \, \|f + \Delta u_h\|_{0,K}^2 \,\leq\, \widetilde{C} \left\{ |u - u_h|_{1,K}^2 \,+\, h_K^2 \, \|f - \Pi_K(f|_K)\|_{0,K}^2 \right\}.$$

v) Suponga que $f|_K \in H^1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h$, y deduzca en tal caso que

$$h_K^2 \, \|f + \Delta u_h\|_{0,K}^2 \,\leq\, \widetilde{C} \left\{ |u - u_h|_{1,K}^2 \,+\, h_K^4 \, |f|_{1,K}^2 \right\}. \tag{43}$$

Notar aquí que $h_K^4 \, |f|_{1,K}^2$ constituye un *término de orden superior*.

Agosto 2015