UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREAS

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Segundo Semestre de 2009 — *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X,X)$, $Q \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es $\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y$, y que existen constantes α, $\beta > 0$ tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x\rangle_X \;\geq\; \alpha\, ||x||_X^2 \quad \forall\, x \in X \quad \text{y} \quad \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle Q(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\, ||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

   a) Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

   b) Sea $X_h \times Y_h$ un subespacio de dimensión finita de $X \times Y$. Defina explícitamente el esquema de Galerkin asociado y demuestre que se satisface la estimacion de Céa correspondiente.

2. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \to X$, $Q \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es $\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y$, que $\mathbf{P}$ es NOLINEAL, y que existen constantes M, α, $\beta > 0$ tales que

$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \;\leq\; M\, ||x - \bar{x}||_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x - \bar{x}\rangle_X \;\geq\; \alpha\, ||x - \bar{x}||_X^2 \quad \forall\, x,\, \bar{x} \in X\,,$$

y

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle Q(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\, ||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

   a) Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

   b) Sea $X_h \times Y_h$ un subespacio de dimensión finita de $X \times Y$. Defina explícitamente el esquema de Galerkin asociado y demuestre que se satisface la estimacion de Céa correspondiente.

3. a) Sea S un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $S^{\perp} = \bar{S}^{\perp}$.

   b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Encuentre y caracterice el subespacio V de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus V$.

4. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y defina los espacios

$$H(\mathrm{div}\,;\Omega) := \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ tal que div } v := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$H(\mathrm{rot}\,;\Omega) := \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ tal que rot } v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\},$$

provistos, respectivamente, de los productos escalares

$$\langle v, w \rangle_{H(\mathrm{rot}\,;\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\ v \ \mathrm{rot}\ w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot}\,;\Omega)\,,$$

$$\langle v, w \rangle_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\ v \ \mathrm{div}\ w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\,.$$

   i) Pruebe que $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$ y $H(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ son espacios de Hilbert.

   ii) Demuestre que existe un operador $\gamma : H(\mathrm{div}\,;\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ lineal y continuo tal que $\gamma(u) = u \cdot \boldsymbol{\nu}\ \forall\, u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector NORMAL unitario de Γ.

   iii) Demuestre que existe un operador $\gamma : H(\mathrm{rot}\,;\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ lineal y continuo tal que $\gamma(u) = u \cdot \tau\ \forall\, u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde τ es el vector TANGENCIAL unitario de Γ.

5. (LEMA DE STRANG). Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere un funcional $F_n \in H_n'$ y una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbf{R}$. Suponga también que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha}\, \|v_n\|_H^2 \quad \forall\, v_n \in H_n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

   a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall\, v \in H \qquad \text{y} \qquad A_n(u_n, v_n) = F_n(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

   b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$\|u - u_n\|_H \leq C \inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H + \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|A(v_n, w_n) - A_n(v_n, w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}$$

$$+ \quad C \left\{ \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|F(w_n) - F_n(w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}.$$

6. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina

$$V \,:=\, \left\{ v \,\in\, H^2(\Omega) : \quad \int_\Omega v\, p\, dx \,=\, 0 \quad \forall\, p \in \mathbf{P}_1(\Omega) \right\},$$

donde $\mathbf{P}_1(\Omega)$ es el espacio de polinomios de grado ≤ 1 sobre Ω. Demuestre que la norma $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ son equivalentes en V.

7. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H,Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

   a) Demuestre que $\displaystyle\sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \,=\, \sup_{\substack{v\in V^\perp\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

   b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{v\in V^\perp\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \,\geq\, \beta\, \|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$, y pruebe que $\quad H \,=\, R(\mathbf{B}^*) \,\oplus\, V$.

8. (Lema de Aubin-Nitsche). Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y el operador identidad $\mathbf{i} : V \to H$ es continuo. Sea $A : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y V-elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \to V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface

$$A(v, \mathbf{P}(g)) \,=\, \langle g, v\rangle_H \quad \forall\, v \in V\,.$$

Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V, denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in V\,,$$

y

$$A(u_h, v_h) \,=\, F(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$||u - u_h||_H \,\leq\, C\, ||u - u_h||_V \sup_{g\in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{v_h\in V_h} ||\mathbf{P}(g) - v_h||_V \right\}.$$

9. Dados $\Omega \,:=\, (0,1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$-\,u'' \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) \,=\, 0\,, \quad u'(1) \,=\, 1\,. \tag{1}$$

   a) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional mixta de (1) se reduce a: *Hallar $(\sigma, (u,\varphi)) \in H \times Q$ tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) + b(\tau,(u,\varphi)) \,&=\, F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma,(v,\psi)) \,&=\, G((v,\psi)) \quad \forall\, (v,\psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$a(\sigma,\tau) := \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx \qquad \forall\,\sigma,\,\tau \in H\,,$$

$$b(\tau,(v,\psi)) := \int_\Omega v\,\tau'\,dx \,+\, \psi\,\tau(1) \quad \forall\,(\tau,(v,\psi)) \in H \times Q\,.$$

b) Defina los funcionales F y G, y aplique la teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que (2) tiene una única solución.

10. Demuestre que las condiciones suficientes del Teorema de Babuška-Brezzi (versión general) son también necesarias.

11. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Dada $f \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento $u \in [H^1(\Omega)]^2$ y el tensor de esfuerzos $\sigma \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que*

$$\sigma = \mathcal{C}\,\mathbf{e}(u) \,:=\, \lambda\,\mathrm{tr}\,\mathbf{e}(u)\,I_2 + 2\mu\,\mathbf{e}(u) \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

$$\mathrm{div}\,\sigma = -f \quad \text{en} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

donde λ, $\mu > 0$ son las constantes de Lamé, I_2 es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{e}(u) := \frac{1}{2}\,(\nabla\,u + (\nabla\,u)^{\mathtt{t}})$ es el tensor de deformaciones. Es fácil verificar que $\mathbf{e}(u)$ puede re-escribirse como

$$\mathbf{e}(u) = \nabla\,u \,-\, \gamma \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

donde $\gamma := \frac{1}{2}\,(\nabla\,u - (\nabla\,u)^{\mathtt{t}})$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio $\mathcal{R} := \{\,\eta \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \quad \eta + \eta^{\mathtt{t}} = 0\,\}$.

a) Demuestre que una formulación variacional MIXTA de este problema se reduce a: *Hallar $(\sigma,(u,\gamma)) \in H \times Q$ tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) + b(\tau,(u,\gamma)) \;&=\; 0 \quad \forall\,\tau \in H\,,\\ b(\sigma,(v,\eta)) \;&=\; -\int_\Omega f\cdot v\,dx \quad \forall\,(v,\eta) \in Q\,, \end{aligned} \tag{3}$$

donde $H := \{\tau \in H(\mathrm{div};\Omega) : \int_\Omega \mathrm{tr}(\tau) = 0\}$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$, y $a : [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \to \mathbf{R}$, $b : H(\mathrm{div};\Omega) \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\sigma,\tau) := \frac{1}{2\mu}\int_\Omega \sigma : \tau\,dx - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}\int_\Omega \mathrm{tr}\,(\sigma)\,\mathrm{tr}\,(\tau)\,dx \;\forall\,\sigma,\,\tau \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2},$$

$$b(\tau,(v,\eta)) := \int_\Omega v\cdot\mathrm{div}\,\tau\,dx + \int_\Omega \tau : \eta\,dx \quad \forall\,(\tau,(v,\eta)) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times Q\,.$$

b) Demuestre que a y b satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi.

c) Sea $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ un vector de parámetros positivos y considere las siguientes ecuaciones del tipo Galerkin-residuales:

$$\kappa_1 \int_\Omega \big(\mathbf{e}(u) - \mathcal{C}^{-1}\sigma\big) : \big(\mathbf{e}(v) + \mathcal{C}^{-1}\tau\big) \;=\; 0\,, \tag{4}$$

$$\kappa_2 \int_\Omega \mathrm{div}\,(\sigma) \cdot \mathrm{div}\,(\tau) \;=\; -\,\kappa_2 \int_\Omega f \cdot \mathrm{div}\,(\tau)\,, \tag{5}$$

y

$$\kappa_3 \int_\Omega \left(\gamma - \frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^{\mathtt{t}})\right) : \left(\eta + \frac{1}{2}(\nabla v - (\nabla v)^{\mathtt{t}})\right) \;=\; 0\,, \tag{6}$$

para todo $(\tau, v, \eta) \in H \times [H_0^1(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$. Demuestre que κ_1, κ_2 y κ_3 pueden elegirse explícitamente, y dependiendo sólo de μ, de modo que la formulación variacional que resulta al restar la segunda de la primera ecuación en (3), y luego sumar (4), (5) y (6), satisface las hipótesis del Lema de Lax-Milgram.

12. Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ una partición del intervalo $\Omega := (a,b)$. Sea H_n un espacio de funciones definidas sobre Ω y para cada $i \in \{1, ..., n+1\}$ denote por $H_{n,i}$ el espacio de restricciones de H_n al subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

    a) Demuestre que si $H_n \subseteq C(\bar{\Omega})$ y $H_{n,i} \subseteq H^1(x_{i-1}, x_i)$ $\forall\, i \in \{1, ..., n+1\}$, entonces $H_n \subseteq H^1(\Omega)$.

    b) Demuestre que si $H_n \subseteq C^1(\bar{\Omega})$ y $H_{n,i} \subseteq H^2(x_{i-1}, x_i)$ $\forall\, i \in \{1, ..., n+1\}$, entonces $H_n \subseteq H^2(\Omega)$.

13. a) Para cada $j \in \{1,2,3,4\}$ encuentre el único polinomio p_j de grado ≤ 3 tal que $(p_j(0), p_j'(0), p_j(1), p_j'(1))^{\mathtt{t}} \;=\; \mathbf{e}_j^{\mathtt{t}}$, donde $\mathbf{e}_j$ es el j-ésimo vector de la base canónica de $\mathbf{R}^4$.

    b) Sea $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$ una partición UNIFORME de $\Omega := (0,1)$. Para todo $i \in \{1, ..., n+1\}$ y para cada $j \in \{1,2,3,4\}$, encuentre el polinomio $p_{i,j}$ de grado ≤ 3 tal que $(p_{i,j}(x_{i-1}), p_{i,j}'(x_{i-1}), p_{i,j}(x_i), p_{i,j}'(x_i))^{\mathtt{t}} = \mathbf{e}_j^{\mathtt{t}}$. (INDICACIÓN: Denote $h := \frac{1}{n+1}$ y utilice lo obtenido en a) en conjunto con un cambio de variable afin entre $[0,1]$ y $[x_{i-1}, x_i]$).

    c) Para cada $i \in \{1, ..., n+1\}$ denote por $\mathcal{P}_i$ al espacio de funciones definidas sobre $[x_{i-1}, x_i]$, generado por los polinomios $p_{i,j}$, $j \in \{1,2,3,4\}$, y defina el espacio de elementos finitos

$$H_n := \{\, v \in C^1(\bar{\Omega}) : \; v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0, \quad \text{y}$$

$$v|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathcal{P}_i \quad \forall\, i \in \{1, ..., n+1\}\,\}\,.$$

    Pruebe que $H_n \subseteq H_0^2(\Omega) := \{v \in H^2(\Omega) : \; v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0\}$, y defina explícitamente una base de H_1.

d) Considere el problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} u^{(4)} \;=&\; f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ u(0) = u'(0) \;=&\; u(1) = u'(1) = 0\;, \end{aligned} \tag{7}$$

donde $f(x) = x$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre que la formulación débil de (7) se reduce a encontrar $u \in H_0^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u''\, v''\, dx \;=\; \int_\Omega x\, v\, dx \quad \forall\, v \in H_0^2(\Omega)\,. \tag{8}$$

Establezca el esquema de Galerkin asociado a (8) utilizando el espacio de elementos finitos H_1 definido en c), y calcule el vector de carga respectivo.

14. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y defina el espacio $V \;:=\; \{v \in H^2(\Omega) : \gamma_0 v \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\}$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que $||v||_{H^1(\Omega)} \;\leq\; C\,||\Delta\, v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \,\in\, V$. Concluya que la norma $||\cdot||_{H^2(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ son equivalentes en V.

15. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente regular. Utilice el hecho que la inyección de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta para demostrar que las inyecciones de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ y de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ son compactas.

16. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{\,H_n\,\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1} \subset H_n\ \forall\, n \,\in\, \mathbf{N}$, y $\cup_{n\in\mathbf{N}}\, H_n$ es denso en H. Sea $B \,:\, H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f \in H'$ existe una única sucesión $\{\,u_n(f)\,\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq H$ tal que

$$u_n(f) \,\in\, H_n \quad , \quad B(u_n(f), v_n) \,=\, f(v_n) \quad \forall\, v_n \,\in\, H_n\,,$$

y $||u_n(f)|| \,\leq\, C_0\,||f||\ \forall\, n \in \mathbf{N}$, donde C_0 es una constante positiva independiente de n y de f. Suponga además que para todo $f \in H'$ existe un único $u(f) \,\in\, H$ tal que

$$B(u(f), v) \,=\, f(v) \quad \forall\, v \,\in\, H\,.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to+\infty} ||u(f) \,-\, u_n(f)|| \,=\, 0 \quad \forall\, f \in H'\,.$$

Ind.: Defina la proyección de Galerkin $P_n \,:\, H \,\to\, H_n$, donde $\forall\, v \,\in\, H$, $P_n v$ denota la única solución de $B(P_n v, w_n) \,=\, B(v, w_n) \quad \forall\, w_n \,\in\, H_n$ y observe que $P_n u(f) = u_n(f)$.

17. (Lema de Lax-Milgram generalizado). Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $B : H_1 \times H_2 \to \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

   i) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u,v)| \leq C_1 ||u||_{H_1} ||v||_{H_2} \quad \forall\,(u,v) \in H_1 \times H_2.$$

ii) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{v \in H_2 \\ v \neq 0}} \frac{|B(u,v)|}{||v||_{H_2}} \geq C_2 ||u||_{H_1} \quad \forall\, u \in H_1,$$

y para cada $v \in H_2$, $v \neq 0$, se tiene $sup_{u \in H_1} |B(u,v)| > 0$.

Demuestre que, dado $F \in H_2'$, existe un único $u \in H_1$ tal que

$$B(u,v) = F(v) \quad \forall v \in H_2,$$

y además, $||u||_{H_1} \leq \frac{1}{C_2} ||F||_{H_2'}$.

18. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ. Considere el problema de valores de contorno:

$$\begin{aligned} -\Delta u \,&=\, f \quad \text{en} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \,&=\, g \quad \text{en} \quad \Gamma \\ \int_\Omega u\, dx \,&=\, a_1\,, \end{aligned} \tag{9}$$

donde $a_1 \in \mathbf{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, y $g \in L^2(\Gamma)$ satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_\Omega f\, dx \,+\, \int_\Gamma g\, ds \,=\, 0\,.$$

Demuestre que una formulación débil de (9) consiste en: *Hallar* $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx \,+\, \lambda \int_\Omega v\, dx \,=\, \int_\Omega f v\, dx \,+\, \int_\Gamma g v\, ds\ ,$$

$$\mu \int_\Omega u\, dx \,=\, \mu a_1\,,$$

para todo $(v, \mu) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$. Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene única solución, la cual depende continuamente de los datos.

19. Sea $\Omega := (0,3)$ y considere el problema de valores de contorno: $-u'' + (x+1)\, u = x$ en Ω, $u(0) = u(3) = 0$. Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio

$$H_2 \,:=\, \{\, v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \quad \text{y} \quad v\,|_{[x_j, x_{j-1}]} \text{ es un polinomio}$$
$$\text{de grado } \,\leq\, 1\,, \forall\, j \in \{1,2,3\}\,\}\,.$$

IND.: Notar que $H_2 =< \{e_1, e_2\} >$, donde $e_j \in H_2$ es tal que $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo i, $j \in \{1,2\}$.

20. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $f \in [L^2(\Omega)]^2$. El problema de Stokes consiste en encontrar el vector de velocidades $u := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$
\begin{gathered}
-\Delta\, u + \nabla p = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\
\text{div}\, u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\
u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\, dx = 0\,.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

   i) Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \{\, q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\, dx = 0 \,\}$, y demuestre que la formulación débil de (10) se reduce a: *encontrar* $(u, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$
\begin{aligned}
A(u, v) + B(v, p) &= \quad F(v) \quad \forall\, v \in H\,, \\
B(u, q) &= \quad 0 \quad \forall\, q \in Q\,,
\end{aligned}
$$

   donde $A : H \times H \to \mathbf{R}$, $B : H \times Q \to \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$
A(u, v) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx\,,
$$

$$
B(v, p) := -\int_\Omega p\, \text{div}\, v\, dx \quad , \quad F(v) = \int_\Omega f \cdot v\, dx\,.
$$

   ii) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que esta formulación tiene una única solución.

21. i) Calcule las funciones base locales del espacio de elementos finitos V_h asociado a una triangulación $\mathcal{T}_h$ hecha de cuadrados de tipo (2).

    ii) Considere el operador Laplaciano y calcule la matriz de rigidez local para el caso particular de un cuadrado de tipo 1 con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$

22. Calcule las coordenadas baricéntricas del 3-simplex (tetraedro) K de $\mathbf{R}^3$ determinado por los vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, y calcule explícitamente las 4 funciones base de $P_2(K)$ asociadas a dichos vértices.
    (Notar que $\dim P_2(K) = \text{card}\, \Sigma_2 = 10$).

23. Sea Ω un rectángulo de $\mathbf{R}^2$, y sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación uniforme de $\bar{\Omega}$ hecha de cuadrados K con lados (de longitud h) paralelos a los ejes coordenados. Considere la formulación variacional en $H_0^1(\Omega)$ de la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet homogéneas, y calcule la matriz de rigidez local para el cuadrado de tipo (1) con vértices (x_1, y_1), $(x_1 + h, y_1)$, $(x_1 + h, y_1 + h)$ y $(x_1, y_1 + h)$.

24. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y defina $H := H^1(\Omega)$ provisto de su producto escalar usual $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Considere un operador NOLINEAL $T : H \to H$, FUERTEMENTE MONÓTONO y LIPSCHITZ-CONTINUO. Esto significa que existen constantes $\alpha, M > 0$ tales que

$$\langle T(v) - T(w), v - w \rangle_H \, \geq \, \alpha \, ||v - w||_H^2 \quad \text{y} \quad ||T(v) - T(w)||_H \, \leq \, M \, ||v - w||_H$$

para todo v, $w \in H$.

i) Dada $f \in H$, demuestre que existe un único $u \in H$ tal que $T(u) \, = \, f$.

ii) Sea H_h el subespacio de elementos finitos de H que resulta de una triangulación regular $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ hecha con triángulos de tipo (1), y considere el esquema de Galerkin asociado: *Hallar* $u_h \in H_h$ *tal que*

$$\langle T(u_h), v_h \rangle_H \, = \, \langle f, v_h \rangle_H \quad \forall \, v_h \in H_h \, .$$

Suponga que $u \in H^2(\Omega)$ y demuestre que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$||u - u_h||_H \, \leq \, C \, h \, |u|_{H^2(\Omega)} \, .$$

25. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera poligonal, y sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación regular de $\bar{\Omega}$ hecha de n-simplex o n-rectángulos, todos ellos afín-equivalentes a un elemento finito de referencia $\hat{K}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{ \, h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h \, \}$, donde h_K es el diámetro de K. Ahora, para todo $K \in \mathcal{T}_h$ se define el operador local $\Pi_K : H^1(K) \to L^2(K)$ como

$$\Pi_K(v) \, := \, \frac{1}{|K|} \int_K v(x) \, dx \quad \forall \, v \in H^1(K) \, .$$

Además, se define el operador global $\Pi : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ como

$$\Pi(v) \, |_K \, := \, \Pi_K(v|_K) \quad \forall \, K \in \mathcal{T}_h, \; \forall \, v \in H^1(\Omega) \, .$$

a) Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\hat{K}$, tal que

$$|| \, v \, - \, \Pi(v) \, ||_{L^2(\Omega)} \, \leq \, C \, h \, |v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \, v \in H^1(\Omega) \, .$$

b) Defina el espacio $H_h := \{ \, v_h \in L^2(\Omega) : \quad v_h \, |_K \in P_0(K) \; \forall \, K \in \mathcal{T}_h \, \}$, donde $P_0(K)$ denota el espacio de funciones constantes sobre K, y pruebe que

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \inf_{v_h \in H_h} ||v - v_h||_{L^2(\Omega)} \right\} \, = \, 0 \quad \forall \, v \in L^2(\Omega) \, .$$

26. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ. Una formulación variacional MIXTA para la ecuación de Poisson en Ω, con dato $f \in L^2(\Omega)$, y condición de Dirichlet dada por $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, consiste en: *Hallar* $(\sigma, u) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} A(\sigma, \tau) \, + \, B(\tau, u) \, &= \, \int_\Gamma g \, \tau \cdot \nu \, ds \, , \\ B(\sigma, v) \, &= \, - \int_\Omega f \, v \, dx \, , \end{aligned} \tag{1}$$

para todo $(\tau, v) \in X \times M$, donde $X := H(\mathrm{div};\Omega)$, $M := L^2(\Omega)$, ν es el vector normal unitario exterior a Γ, y las formas bilineales $A : X \times X \to \mathbf{R}$ y $B : X \times M \to \mathbf{R}$ están definidas por

$$A(\rho, \tau) := \int_\Omega \rho \cdot \tau \, dx \quad \forall \rho,\, \tau \in X\,,$$

$$B(\tau, v) := \int_\Omega v \,\mathrm{div}\, \tau \, dx \quad \forall (\tau, v) \in X \times M\,.$$

a) Demuestre que A y B satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi, y concluya que existe $C_0 > 0$ tal que

$$||(\rho, w)||_{X\times M} \,\leq\, C_0 \sup_{\substack{(\tau,v)\in X\times M\\ ||(\tau,v)||\,\leq\,1}} \{\, A(\rho,\tau) + B(\tau, w) + B(\rho, v)\,\} \tag{2}$$

para todo $(\rho, w) \in X \times M$.

b) El siguiente objetivo es deducir una estimación de error a-posteriori para (1). Para ello, sea $\{\mathcal{T}_h : \quad h \in \mathtt{I}\}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$, donde $\mathtt{I}$ es un conjunto finito de parámetros dado por $\{h_1, ..., h_m\}$, con $h_j \geq h_{j+1}\; \forall\, j \in \{1, ..., m\}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{\, h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h\,\}$, donde h_K es el diámetro de K. Sea $X_h \times M_h$ un subespacio de elementos finitos de $X \times M$, asociado a la triangulación $\mathcal{T}_h$, y sea $(\sigma_h, u_h) \in X_h \times M_h$ la solución del esquema de Galerkin correspondiente para la formulación (1).

   i) Pruebe que existe un único $\bar{\sigma} \in X$ tal que

$$\langle \bar{\sigma}, \tau\rangle_X \;=\; A(\sigma - \sigma_h, \tau) + B(\tau, u - u_h) \quad \forall\, \tau \in X\,.$$

   ii) Defina $\mathbf{J}(\tau) := \frac{1}{2}\,||\tau||_X^2 \;-\; \langle \bar{\sigma}, \tau\rangle_X \quad \forall\, \tau \in X$, y demuestre que

$$-\frac{1}{2}\,||\bar{\sigma}||_X^2 \;=\; \min_{\tau\in X} \mathbf{J}(\tau)\,.$$

   iii) Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ defina $(\sigma_{h,K}, u_{h,K}) := (\sigma_h, u_h)\,|_K$, $X_K := H(\mathrm{div}\,; K)$, $M_K := L^2(K)$, y denote por $A_K : X_K \times X_K \to \mathbf{R}$ y $B_K : X_K \times M_K \to \mathbf{R}$, respectivamente, las restricciones de A y B al elemento K. Además, sea $\varphi_h \in H^{1/2}(\cup_{K\in\mathcal{T}_h} \partial K)$ una aproximación de u sobre las fronteras de los elementos K tal que $\varphi_h = g$ en Γ. Entonces, pruebe que existe un único $\hat{\sigma}_K \in X_K$ tal que

$$\langle \hat{\sigma}_K, \tau\rangle_{X_K} = -A_K(\sigma_{h,K}, \tau) - B_K(\tau, u_{h,K}) - \int_{\partial K} \varphi_h\, \tau \cdot \nu \, ds \quad \forall\, \tau \in X_K\,.$$

   iv) Defina

$$\mathbf{J}_K(\tau) := \frac{1}{2}\,||\tau||_{X_K}^2 + A_K(\sigma_{h,K}, \tau) + B_K(\tau, u_{h,K}) + \int_{\partial K} \varphi_h\, \tau \cdot \nu \, ds$$

   para todo $\tau \in X_K$, y pruebe que

$$-\frac{1}{2}\,||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \;=\; \min_{\tau\in X_K} \mathbf{J}_K(\tau)\,.$$

v) Use i), ii), iii) y iv) para demostrar que

$$||\bar{\sigma}||_X^2 \;\leq\; \sum_{K\in\mathcal{T}_h} ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \,.$$

vi) Aplique (2) y v) para concluir que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$||(\sigma,u)-(\sigma_h,u_h)||_{X\times M} \;\leq\; C\,\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\eta_K^2\right\}^{1/2},$$

donde

$$\eta_K^2 := ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \,+\, ||f+\mathrm{div}\,\sigma_h||_{L^2(K)}^2 \quad \forall\, K\in\mathcal{T}_h\,.$$

27. Sean $\Omega =]a,b[$, $\varphi \in L^2(\Omega)$ tal que $\displaystyle\int_\Omega \varphi\,dx \,=\, 0$, y considere el problema de valores de contorno: $-\,z'' \,=\, \varphi\,,\quad z'(a) \,=\, z'(b) \,=\, 0\,,\quad \int_\Omega z\,dx \,=\, 0$. Defina el espacio $\tilde{H}^1(\Omega) := \{\, w \in H^1(\Omega) : \displaystyle\int_\Omega w\,dx \,=\, 0\,\}$, deduzca una formulación variacional asociada con incógnita y funciones test en $\tilde{H}^1(\Omega)$, y demuestre que ella tiene una única solución.

28. (Lema de Fortin). Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H\times Q \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} \;\geq\; \beta\,\|q\|_Q \qquad \forall\, q\in Q\,. \tag{11}$$

Sean $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, y asuma que para cada $n\in\mathbf{N}$ existe un operador $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H,H_n)$ tal que $\;b(v-\mathcal{P}_n(v),q_n) \,=\, 0 \quad \forall\, q_n\in Q_n$. Suponga que la familia $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C>0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H,H_n)} \,\leq\, C$ para todo $n\in\mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^*>0$, independiente de n, tal que

$$\sup_{\substack{v_n\in H_n\\ v_n\neq 0}} \frac{b(v_n,q_n)}{\|v_n\|_H} \;\geq\; \beta^*\,\|q_n\|_Q \qquad \forall\, q_n\in Q_n\,,\quad \forall\, n\in\mathbf{N}\,.$$

29. Sea $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $\mathbf{P}\in\mathcal{L}(H,H)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : H\to H$, y tal que $\mathbf{P}^2 \,=\, \mathbf{P}$. El objetivo de este ejercicio es probar que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} \,=\, \|I-\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$, para cuyo efecto se pide proceder como se indica a continuación.

a) Sea S un subespacio de dimensión 2 de H y sea $Q\in\mathcal{L}(S,S)$, no trivial, distinto del operador identidad $I : S\to S$, y tal que $Q^2 \,=\, Q$. Pruebe que $S \,=\, R(Q)\oplus R(I-Q)$ y concluya que existen vectores no nulos p, q, r, $s\,\in\, S$ que satisfacen $\langle p,q\rangle = \langle r,s\rangle = 1$, tales que

$$Q(v) \,=\, \langle q,v\rangle\,p \qquad \text{y} \qquad (I-Q)(v) \,=\, \langle s,v\rangle\,r \qquad \forall\, v\in S\,.$$

b) A partir de la identidad $v = Q(v) + (I - Q)(v) \quad \forall\, v \in S$, deduzca que $\|p\|^2\,\|q\|^2 = \|r\|^2\,\|s\|^2 = 1 - \langle p, r\rangle\,\langle q, s\rangle$ y concluya así que

$$\|Q\|_{\mathcal{L}(S,S)} = \|I - Q\|_{\mathcal{L}(S,S)}.$$

c) Dado $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$, considere el subespacio S generado por los vectores x y $\mathbf{P}(x)$ y defina $Q := \mathbf{P}|_S$. Demuestre que $Q \in \mathcal{L}(S,S)$, observe que la dimensión de S es ≤ 2, y luego pruebe, usando b), que $\|(I - \mathbf{P})(x)\| \leq \|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

d) Concluya, a partir de c), que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|I - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

30. Sea $\Omega :=]a, b[$ y para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca una partición

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Además, denote $h := \max\Big\{ x_j - x_{j-1} : \quad j \in \{1, 2, ..., n\} \Big\}$, defina el espacio

$$V_h := \Big\{ v \in L^2(\Omega) : \quad v\,|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathbf{P}_0([x_{j-1}, x_j]) \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., n\} \Big\}\,,$$

y considere el operador $\Pi_h : L^2(\Omega) \rightarrow V_h$ que a cada $v \in L^2(\Omega)$ le asigna su mejor aproximación $\Pi_h(v) \in V_h$ con respecto al producto escalar de $L^2(\Omega)$. Demuestre que existe una constante $C > 0$, independiente de n y de h, tal que

$$\|\, v - \Pi_h(v)\,\|_{L^2(\Omega)} \leq C\, h\, |v|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

31. Sean $\Omega :=]0, 1[$, $f \in L^2(\Omega)$, $\kappa \in]0, 2[$, y considere el problema de valores de contorno:

$$u'' + \kappa\, u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) = u(1) = 0\,. \tag{12}$$

Además, para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca la partición uniforme

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1\,,$$

con $x_j - x_{j-1} = \dfrac{1}{n+1}$ $\forall\, j \in \{1, 2, ..., n+1\}$, y defina el espacio

$$H_n := \Big\{ v \in C(\bar{\Omega}) : \quad v\,|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathbf{P}_1([x_{j-1}, x_j]) \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., n+1\} \\ y \quad v(0) = v(1) = 0 \Big\}\,.$$

a) Establezca la formulación variacional de (12) y demuestre que ella posee una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$.

b) Denote por $u_n \in H_n$ la solución (cuando ella existe) del esquema de Galerkin asociado y pruebe que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} = 0$.

32. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,.$$

a) Demuestre que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \sigma \cdot \tau \, dx \,+\, \int_\Omega u \,\mathrm{div}(\tau)\, dx \,-\, \int_\Omega v \,\mathrm{div}(\sigma)\, dx \,=\, \int_\Omega f\, v\, dx \qquad (13)$$

para todo $(\tau, v) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$.

b) Dados $\delta_1\,,\ \delta_2 > 0$, fundamente la introducción de las ecuaciones

$$\delta_1 \int_\Omega (\nabla u - \sigma)\cdot(\nabla v + \tau)\, dx = 0 \quad \forall\,(\tau, v) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega), \ (14)$$

$$\delta_2 \int_\Omega \mathrm{div}(\sigma)\,\mathrm{div}(\tau)\, dx \;=\; -\,\delta_2 \int_\Omega f\,\mathrm{div}(\tau)\, dx \quad \forall\,\tau \in H(\mathrm{div};\Omega)\,, \qquad (15)$$

luego sume (13), (14) y (15), y obtenga una formulación variacional mixta modificada: Hallar $(\sigma, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\sigma, u), (\tau, v)) \;=\; F(\tau, v) \qquad \forall\,(\tau, v) \in \mathbf{H}\,, \qquad (16)$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es una forma bilineal y $F : \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es un funcional lineal. Entonces, demuestre que, eligiendo δ_1 y δ_2 convenientemente, el problema (16) posee una única solución, la cual depende continuamente del dato f.

33. Demuestre que $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ es denso en $H^1(\mathbf{R}^n_+)$.

34. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y defina el espacio

$$\mathcal{D}(\Gamma) \;:=\; \{\, v|_\Gamma : \quad v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \,\}\,.$$

Pruebe que $\mathcal{D}(\Gamma)$ es denso en $H^{1/2}(\Gamma)$.

35. Sean $\hat{K} = [0, 1]$, $K = [x_{j-1}, x_j]$, $h_j := x_j - x_{j-1} > 0$, y considere la aplicación afín $F : \hat{K} \to K$ definida por

$$F(\hat{x}) = h_j\, \hat{x} \,+\, x_{j-1} \qquad \forall\, \hat{x} \in \hat{K}\,.$$

(a) Dado un entero $r \geq 0$, demuestre que $v \in H^r(K)$ sí y sólo sí $\hat{v} := v \circ F \in H^r(\hat{K})$, y en tal caso pruebe que

$$|\hat{v}|_{H^r(\hat{K})} \;=\; h_j^{r-1/2}\, |v|_{H^r(K)}\,.$$

(b) Sean m, k enteros tal que $0 \leq m \leq k+1$, y sea $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^m(\hat{K}))$ tal que $\hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p} \quad \forall\, \hat{p} \in \mathbf{P}_k$, donde $\mathbf{P}_k$ es el espacio de polinomios de grado $\leq k$. Además, sea Π el operador definido por

$$\Pi v \,=\, (\hat{\Pi}\hat{v}) \circ F^{-1} \qquad \forall\, v \in\, H^{k+1}(K)\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\hat{K}$ y $\hat{\Pi}$, tal que

$$\|v - \Pi v\|_{H^m(K)} \;\leq\; C\, h_j^{k+1-m}\, |v|_{H^{k+1}(K)}\,.$$

36. Sea Ω un dominio poligonal convexo de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ, y dado $f \in L^2(\Omega)$, considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:

$$\Delta u \,+\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{17}$$

i) Introduzca la incógnita auxiliar $\sigma := \nabla u$ en Ω y pruebe que una formulación variacional mixta de (17) se reduce a: Hallar $\sigma \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \sigma \cdot \tau \,-\, \int_\Omega \mathrm{div}\,(\sigma)\,\mathrm{div}\,(\tau) \,=\, -\int_\Omega f\,\mathrm{div}\,(\tau) \quad \forall\,\tau \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)\,. \tag{18}$$

ii) Defina el operador $P : H(\mathrm{div};\Omega) \to [L^2(\Omega)]^2$ que a cada $\tau \in H(\mathrm{div};\Omega)$ le asigna $P(\tau) := \nabla z$, donde $z \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución del problema de valores de contorno: $\Delta z = \mathrm{div}\,(\tau)$ en Ω, $z = 0$ en Γ. Pruebe que P es compacto y que $H(\mathrm{div};\Omega) = P(H(\mathrm{div};\Omega)) \oplus (I-P)(H(\mathrm{div};\Omega))$.

iii) Utilice la descomposición anterior de $H(\mathrm{div};\Omega)$ para demostrar que (18) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $\sigma \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$A(\sigma,\tau) \,+\, K(\sigma,\tau) \,=\, F(\tau) \qquad \forall\,\tau \in H(\mathrm{div};\Omega)\,, \tag{19}$$

donde A y B son formas bilineales acotadas cuyos operadores inducidos $\mathbf{A} : H(\mathrm{div};\Omega) \to H(\mathrm{div};\Omega)$ y $\mathbf{K} : H(\mathrm{div};\Omega) \to H(\mathrm{div};\Omega)$ son biyectivo y compacto, respectivamente, y F es el funcional dado a la derecha de (18).

IND. Defina el operador $S(\tau) := (I - 2\,P)(\tau)$ y considere la expresión $A(\tau, S(\tau))$ para probar que A satisface las condiciones inf-sup continuas.

iv) Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia de subespacios de dimensión finita de $H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que $\lim\limits_{h\to 0} \mathrm{dist}\,(\tau, H_h) \,=\, 0$ para todo $\tau \in H(\mathrm{div};\Omega)$, y considere el esquema de Galerkin perturbado: Hallar $\sigma_h \in H_h$ tal que

$$A(\sigma_h,\tau_h) \,=\, F(\tau_h) \qquad \forall\,\tau_h \in H_h\,. \tag{20}$$

Suponga que existen operadores lineales $\mathcal{E}_h : [H^1(\Omega)]^2 \to H_h$ tales que

$$\mathrm{div}\,(\mathcal{E}_h\,P(\tau_h)) \,=\, \mathrm{div}\,(\tau_h) \qquad \forall\,\tau_h \,\in\, H_h\,,$$

y

$$\|\tau - \mathcal{E}_h(\tau)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \,\leq\, C\,h\,\|\tau\|_{[H^1(\Omega)]^2} \qquad \forall\,\tau \,\in\, [H^1(\Omega)]^2\,.$$

Demuestre que existe $h_0 > 0$ tal que $\forall\, h \leq h_0$ el problema (20) tiene solución única, la cual es estable y convergente con constantes independientes de h.
IND. Defina el operador $S_h(\tau) := (I - 2\,\mathcal{E}_h\, P)(\tau_h)$ y considere la expresión $A(\tau, S_h(\tau)) = A(\tau, S(\tau)) - A(\tau, S(\tau) - S_h(\tau))$ para probar que A satisface las condiciones inf-sup discretas.

v) Qué se puede decir del esquema de Galerkin respectivo para (19)?.

37. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. El objetivo de este problema es demostrar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;\geq\; \frac{1}{2}\,|\mathbf{v}|^2_{[H^1(\Omega)]^2} \qquad \forall\, \mathbf{v} \,\in\, [H^1_0(\Omega)]^2\,, \tag{21}$$

donde $\mathbf{e}(\mathbf{v}) \,:=\, \dfrac{1}{2}\Big\{\nabla\mathbf{v} \,+\, (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}\Big\}$. Para tal efecto, proceda como sigue.

i) Dados $\sigma \;:=\; (\sigma_{ij})$ y $\tau \;:=\; (\tau_{ij})$ en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, se define el producto tensorial $\sigma : \tau \,:=\, \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}\,\tau_{ij}$ y se introducen los subespacios

$$\mathbf{R}^{2\times 2}_{sim} := \{\tau \in \mathbf{R}^{2\times 2} : \quad \tau^{\mathtt{t}} = \tau\} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}^{2\times 2}_{asim} := \{\tau \in \mathbf{R}^{2\times 2} : \quad \tau^{\mathtt{t}} = -\tau\}\,.$$

Pruebe que $\sigma : \tau \,=\, 0 \quad \forall\, \sigma \,\in\, \mathbf{R}^{2\times 2}_{sim}, \quad \forall\, \tau \,\in\, \mathbf{R}^{2\times 2}_{asim}$.

ii) Note que $\nabla\mathbf{v} \;=\; \mathbf{e}(\mathbf{v}) \,+\, \mathbf{w}(\mathbf{v})\,,$ con $\mathbf{w}(\mathbf{v}) \;:=\; \dfrac{1}{2}\Big\{\nabla\mathbf{v} \,-\, (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}\Big\}$, y recuerde que $\|\tau\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;=\; \displaystyle\int_\Omega \tau : \tau \quad \forall\, \tau \,\in\, [L^2(\Omega)]^{2\times 2}$, para probar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;-\; \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;=\; \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}$$

y

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;+\; \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;=\; \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{v}\,.$$

iii) Deduzca la identidad $\nabla\mathbf{v} : (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}} \,=\, \mathrm{div}\,\Big\{\nabla\mathbf{v}\,\mathbf{v} \,-\, \mathrm{div}\,(\mathbf{v})\,\mathbf{v}\Big\} \,+\, (\mathrm{div}\,(\mathbf{v}))^2$ y concluya la desigualdad (21).

38. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ poligonal y sea $f \in [L^2(\Omega)]^2$. El problema de elasticidad lineal plana asociado a un sólido que ocupa Ω, y que está sometido a la fuerza f, consiste en encontrar el desplazamiento u tal que:

$$\mathrm{div}\Big\{\lambda\,\mathrm{tr}\,\mathbf{e}(u)\,I \,+\, 2\,\mu\,\mathbf{e}(u)\Big\} \;=\; -\,f \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{y} \quad u \,=\, \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma\,, \tag{22}$$

donde $\lambda\,,\,\mu \,>\, 0$ son las constantes de Lamé, tr denota el operador de trazas matricial, $\mathbf{e}(u)$ es el tensor de deformaciones (definido en el problema anterior), e I es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$. Demuestre que la formulación variacional de (22) se reduce a: Hallar $u \in [H_0^1(\Omega)]^2$ tal que

$$\int_\Omega \Big\{ \lambda \,\mathrm{div}\,(u)\,\mathrm{div}\,(\mathbf{v}) \,+\, 2\,\mu\,\mathbf{e}(u) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \Big\} \,=\, \int_\Omega f \cdot \mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2\,,$$

y pruebe que ella tiene solución única, la cual depende continuamente del dato f. Utilice triángulos de tipo (1) para definir detalladamente un esquema de Galerkin asociado, pruebe que tiene solución única, establezca su convergencia e indique la razón de convergencia respectiva.

39. Sean $(X_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{X_1})$, $(X_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{X_2})$, e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert, defina el producto $X := X_1 \times X_2$, y considere operadores lineales y acotados $\mathbf{P} : X \to X$, $\mathbf{Q} : X \to Y$, $A : X_1 \to X_1$, $B : X_1 \to X_2$, y $C : X_2 \to X_2$, tales que:

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & -C \end{pmatrix}.$$

Sea $V := V_1 \times V_2$ el kernel de $\mathbf{Q}$, donde $V_1 \subseteq X_1$ y $V_2 \subseteq X_2$, y suponga que:

i) existe $\alpha > 0$ tal que $\langle A(x_1), x_1\rangle_{X_1} \,\geq\, \alpha\,\|x_1\|_{X_1}^2 \qquad \forall\, x_1 \,\in\, V_1$.

ii) existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{x_1 \in V_1 \backslash \mathbf{0}} \frac{\langle B(x_1), x_2\rangle_{X_2}}{\|x_1\|_{X_1}} \,\geq\, \beta\,\|x_2\|_{X_2} \qquad \forall\, x_2 \,\in\, V_2$.

iii) $\langle C(x_2), x_2\rangle_{X_2} \,\geq\, 0 \qquad \forall\, x_2 \,\in\, V_2$.

iv) existe $\tilde{\beta} > 0$ tal que $\|\mathbf{Q}^*(y)\|_X \,\geq\, \tilde{\beta}\,\|y\|_Y \qquad \forall\, y \,\in\, Y$.

a) Pruebe que para todo $(f, g) \,\in\, X \times Y$ existe un único $(x, y) \,\in\, X \times Y$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x) \,+\, \mathbf{Q}^*(y) &= f\,, \\ \mathbf{Q}(x) &= g\,, \end{aligned} \tag{23}$$

y encuentre explícitamente una constante $C > 0$ tal que

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} \,\leq\, C \Big\{ \|f\|_X \,+\, \|g\|_Y \Big\}.$$

b) Defina un esquema de Galerkin para (23) y establezca condiciones suficientes que aseguren su solubilidad única y estabilidad.

c) Demuestre la estimación de Cea para el esquema definido en b).

40. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i\ \forall\, i \in \{1, ..., n\}$, $\forall\, x := (x_1, ..., x_n)^{\mathbf{T}} \in \Omega$.

a) Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|^2_{H^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{n} |\langle v, p_i \rangle_{H^2(\Omega)}|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\, |||v||| \,\leq\, \|v\|_{H^2(\Omega)} \,\leq\, C_2\, |||v||| \quad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,.$$

b) Considere el espacio cuociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma $\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \inf\limits_{p \in P_1(\Omega)} \|v - p\|_{H^2(\Omega)}$, y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

Demuestre que $|\cdot|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \;&\leq\; \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \\ &\leq\; C\, |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \,\in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,. \end{aligned}$$

c) Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p \;\forall\, p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, C\, |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \,\in\, H^2(\Omega)\,.$$

41. Sea T un triángulo de $\mathbf{R}^2$ con diámetro h_T y sea $\widehat{T}$ el triángulo canónico con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. A su vez, sea $F_T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una aplicación afín invertible tal que $F_T(\widehat{T}) = T$, y defina $\psi_T := \widehat{\psi} \circ F_T^{-1}$, donde $\widehat{\psi}$ es la función burbuja de $\widehat{T}$. Además, sea $\mathcal{P}_0$ el proyector ortogonal de $L^2(T)$ en $\mathbb{P}_0(T)$, el espacio de polinomios constantes sobre T, con respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle := \int_T \psi_T\, f\, g \qquad \forall\, f,\, g \,\in\, L^2(T)\,.$$

Aplique los lemas de Bramble-Hilbert y Deny-Lions para demostrar que existe $C > 0$, independiente de T, tal que:

$$\|v - \mathcal{P}_0(v)\|_{0,T} \,\leq\, C\, h_T\, |v|_{1,T} \qquad \forall\, v \,\in\, H^1(T)\,.$$

Dado $s \in]0,1[$, utilice argumentos de interpolación de espacios normados y el hecho que $(L^2(T), H^1(T))_{s,2} = H^s(T)$, para probar que existe $C_s > 0$, independiente de T, tal que

$$\|v - \mathcal{P}_0(v)\|_{0,T} \,\leq\, C_s\, h_T^s\, \|v\|_{s,T} \qquad \forall\, v \,\in\, H^s(T)\,.$$

42. Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ e $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) A es sobreyectivo.

ii) $A^* : Y \to X$ es inyectivo y de rango cerrado.

iii) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|A^*(y)\|_X \;\geq\; \alpha\,\|y\|_Y \qquad \forall\, y \,\in\, Y\,.$$

iv) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|\langle A(x), y\rangle_Y\,|}{\|x\|_X} \;\geq\; \alpha\,\|y\|_Y \qquad \forall\, y \,\in\, Y\,.$$

43. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach, $\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,X)$ y $B \in \mathcal{L}(X,X)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|B_n(x) - B(x)\|_X \;=\; 0$ para todo $x \in X$. Razone por contradicción y luego aplique el teorema del acotamiento uniforme para probar que

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n\,K \;-\; B\,K\|_{\mathcal{L}(X,X)} = 0$$

para todo $K \,\in\, \mathcal{K}(X,X)$.

44. Sean X, Y espacios de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\mathcal{R}(A) = Y$, y sea $V = N(A)$. Dado el operador de proyección ortogonal $P : X \to V$, considere $B : Y \to X$ tal que $B(y) = x - P(x)$ para todo $y \in Y$, donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$.

   i) Demuestre que B está bien definido y que B es una biyección lineal y acotada de Y en $V^\perp$. Pruebe, además, que B es un *inverso a derecha* de A, esto es $AB(y) = y$ para todo $y \in Y$.

   ii) Defina $A_0 \,:\, V^\perp \;\to\; Y$ como $A_0(x) \;=\; A(x)$ para todo $x \,\in\, V^\perp$, es decir $A_0 = A|_{V^\perp}$, y pruebe que $A_0^{-1} = B$.

   iii) Aplique lo anterior para definir explicitamente un inverso a derecha del operador de trazas $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$.

45. Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}^n$. Asuma que la inyección $i \,:\, H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i \,:\, H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también es compacta, para todo entero $m \geq 2$.

46. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ e $(Y_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$, espacios de Hilbert, y considere el espacio $Y = Y_1 \times Y_2$ provisto del producto escalar

$$\langle z, y\rangle_Y \;:=\; \langle z_1, y_1\rangle_1 \;+\; \langle z_2, y_2\rangle_2 \qquad \forall\, z := (z_1, z_2),\; y = (y_1, y_2) \in Y\,.$$

Entonces, dados $B_j \in \mathcal{L}(X, Y_j)$, $j \in \{1,2\}$, defina el operador $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ por $B(x) \;:=\; (B_1(x), B_2(x)) \quad \forall\, x \in X$. Demuestre que B es sobreyectivo si y sólo si:

   i) B_1 **y** B_2 son sobreyectivos.

   ii) $X \;=\; N(B_1) \;+\; N(B_2)$.

47. Este problema constituye una versión particular del Lema de Peetre-Tartar.

(a) Sean $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ y $(X_3, \|\cdot\|_3)$, espacios de Banach, y considere operadores $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ y $B \in \mathcal{L}(X_1, X_3)$, tales que B es compacto. Además, suponga que existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \,\leq\, c\Big\{ \|A(x)\|_2 \,+\, \|B(x)\|_3 \Big\} \qquad \forall\, x \in X_1\,.$$

Demuestre que $N(A)$ es de dimensión finita, y luego razone por contradicción para probar que existe $C > 0$ tal que

$$\mathrm{dist}(x, N(A)) \,\leq\, C\,\|A(x)\|_2 \qquad \forall\, x \in X_1\,.$$

(b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ y considere la descomposición: $H^1(\Omega) = \tilde{H}^1(\Omega) \oplus \mathbb{P}_0(\Omega)$, donde $\mathbb{P}_0(\Omega)$ es el espacio de las funciones constantes sobre Ω y

$$\tilde{H}^1(\Omega) \,:=\, \left\{ v \in H^1(\Omega) : \quad \int_\Omega v \,=\, 0 \right\}.$$

Pruebe que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha\,\|v\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, |v|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in \tilde{H}^1(\Omega)\,. \tag{24}$$

(c) Aplique (a), (24), y el teorema de trazas, para demostrar que existen constantes C_1, $C_2 > 0$, tales que

$$C_1\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \,\leq\, |v|^2_{H^1(\Omega)} \,+\, \|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \,\leq\, C_2\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,. \tag{25}$$

Indicación: para la desigualdad (25) inferior defina operadores A y B apropiados utilizando los espacios $X_1 := H^1(\Omega)$, $X_2 := [L^2(\Omega)]^2 \times L^2(\Gamma)$ y $X_3 := \mathbb{P}_0(\Omega)$.

Agosto 2009