

TAREAS

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Segundo Semestre de 2006

Prof. Gabriel N. Gatica.

1. Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X, X)$, $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que \mathbf{S} es semi-definido positivo, esto es $\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \geq 0 \quad \forall y \in Y$, y que existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x \rangle_X \geq \alpha \|x\|_X^2 \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle Q(x), y \rangle_Y}{\|x\|_X} \geq \beta \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

- a) Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

- b) Sea $X_h \times Y_h$ un subespacio de dimensión finita de $X \times Y$. Defina explícitamente el esquema de Galerkin asociado y demuestre que se satisface la estimación de Céa correspondiente.

2. Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \rightarrow X$, $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que \mathbf{S} es semi-definido positivo, esto es $\langle \mathbf{S}(y), y \rangle_Y \geq 0 \quad \forall y \in Y$, que \mathbf{P} es NOLINEAL, y que existen constantes $M, \alpha, \beta > 0$ tales que

$$\|\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}\|_X \leq M \|x - \bar{x}\|_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x - \bar{x} \rangle_X \geq \alpha \|x - \bar{x}\|_X^2 \quad \forall x, \bar{x} \in X,$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\langle Q(x), y \rangle_Y}{\|x\|_X} \geq \beta \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

- a) Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

- b) Sea $X_h \times Y_h$ un subespacio de dimensión finita de $X \times Y$. Defina explícitamente el esquema de Galerkin asociado y demuestre que se satisface la estimación de Céa correspondiente.

3. a) Sea S un subespacio de un Hilbert H . Demuestre que $S^\perp = \bar{S}^\perp$.
 b) Sea Ω un abierto acotado de \mathbf{R}^n con frontera suave Γ , y considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Encuentre y caracterice el subespacio V de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus V$.

4. Considere un abierto acotado Ω de \mathbf{R}^2 con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y defina los espacios

$$H(\text{div}; \Omega) := \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ tal que } \text{div } v := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$H(\text{rot}; \Omega) := \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ tal que } \text{rot } v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\},$$

provistos, respectivamente, de los productos escalares

$$\langle v, w \rangle_{H(\text{rot}; \Omega)} := \int_{\Omega} v \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \text{rot } v \, \text{rot } w \, dx \quad \forall v, w \in H(\text{rot}; \Omega),$$

$$\langle v, w \rangle_{H(\text{div}; \Omega)} := \int_{\Omega} v \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \text{div } v \, \text{div } w \, dx \quad \forall v, w \in H(\text{div}; \Omega).$$

- i) Pruebe que $H(\text{div}; \Omega)$ y $H(\text{rot}; \Omega)$ son espacios de Hilbert.
 ii) Demuestre que existe un operador $\gamma : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ lineal y continuo tal que $\gamma(u) = u \cdot \nu \, \forall u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde ν es el vector NORMAL unitario de Γ .
 iii) Demuestre que existe un operador $\gamma : H(\text{rot}; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ lineal y continuo tal que $\gamma(u) = u \cdot \tau \, \forall u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde τ es el vector TANGENCIAL unitario de Γ .
5. (LEMA DE STRANG). Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H -elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H , y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere un funcional $F_n \in H'_n$ y una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \rightarrow \mathbf{R}$. Suponga también que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n , tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha} \|v_n\|_H^2 \quad \forall v_n \in H_n, \forall n \in \mathbf{N}$.

- a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H \quad \text{y} \quad A_n(u_n, v_n) = F_n(v_n) \quad \forall v_n \in H_n.$$

- b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$\|u - u_n\|_H \leq C \inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H + \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|A(v_n, w_n) - A_n(v_n, w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\} \\ + C \left\{ \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|F(w_n) - F_n(w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}.$$

6. Sea Ω un abierto acotado de \mathbf{R}^n con frontera Γ suficientemente suave, y defina

$$V := \left\{ v \in H^2(\Omega) : \int_{\Omega} v p dx = 0 \quad \forall p \in \mathbf{P}_1(\Omega) \right\},$$

donde $\mathbf{P}_1(\Omega)$ es el espacio de polinomios de grado ≤ 1 sobre Ω . Demuestre que la norma $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ son equivalentes en V .

7. Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ y $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

a) Demuestre que
$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \quad \forall q \in Q.$$

b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que
$$\sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q \rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q,$$
 y pruebe que $H = R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

8. (LEMA DE AUBIN-NITSCHÉ). Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y el operador identidad $\mathbf{i} : V \rightarrow H$ es continuo. Sea $A : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y V -elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \rightarrow V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface

$$A(v, \mathbf{P}(g)) = \langle g, v \rangle_H \quad \forall v \in V.$$

Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V , denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

y

$$A(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|u - u_h\|_H \leq C \|u - u_h\|_V \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{\|g\|_H} \inf_{v_h \in V_h} \|\mathbf{P}(g) - v_h\|_V \right\}.$$

9. Dados $\Omega := (0, 1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$-u'' = f \quad \text{en } \Omega, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 1. \quad (1)$$

a) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional MIXTA de (1) se reduce a: *Hallar $(\sigma, (u, \varphi)) \in H \times Q$ tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, (u, \varphi)) &= F(\tau) \quad \forall \tau \in H, \\ b(\sigma, (v, \psi)) &= G((v, \psi)) \quad \forall (v, \psi) \in Q, \end{aligned} \quad (2)$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$, $b : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$a(\sigma, \tau) := \int_{\Omega} \sigma \tau \, dx \quad \forall \sigma, \tau \in H,$$

$$b(\tau, (v, \psi)) := \int_{\Omega} v \tau' \, dx + \psi \tau(1) \quad \forall (\tau, (v, \psi)) \in H \times Q.$$

b) Defina los funcionales F y G , y aplique la teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que (2) tiene una única solución.

10. Demuestre que las condiciones suficientes del Teorema de Babuška-Brezzi (versión general) son también necesarias.

11. Sea Ω un abierto acotado de \mathbf{R}^2 con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Dada $f \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento $u \in [H^1(\Omega)]^2$ y el tensor de esfuerzos $\sigma \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que*

$$\sigma = \mathcal{C} \mathbf{e}(u) := \lambda \text{tr} \mathbf{e}(u) I_2 + 2\mu \mathbf{e}(u) \quad \text{en } \Omega,$$

$$\text{div} \sigma = -f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \Gamma,$$

donde $\lambda, \mu > 0$ son las constantes de Lamé, I_2 es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2 \times 2}$, y $\mathbf{e}(u) := \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^{\text{t}})$ es el tensor de deformaciones. Es fácil verificar que $\mathbf{e}(u)$ puede re-escribirse como

$$\mathbf{e}(u) = \nabla u - \gamma \quad \text{en } \Omega,$$

donde $\gamma := \frac{1}{2} (\nabla u - (\nabla u)^{\text{t}})$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio $\mathcal{R} := \{ \eta \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2} : \eta + \eta^{\text{t}} = 0 \}$.

a) Demuestre que una formulación variacional MIXTA de este problema se reduce a: *Hallar $(\sigma, (u, \gamma)) \in H \times Q$ tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, (u, \gamma)) &= 0 \quad \forall \tau \in H, \\ b(\sigma, (v, \eta)) &= - \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \forall (v, \eta) \in Q, \end{aligned} \quad (3)$$

donde $H := \{ \tau \in H(\text{div}; \Omega) : \int_{\Omega} \text{tr}(\tau) = 0 \}$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$, y $a : [L^2(\Omega)]^{2 \times 2} \times [L^2(\Omega)]^{2 \times 2} \rightarrow \mathbf{R}$, $b : H(\text{div}; \Omega) \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\sigma, \tau) := \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \sigma : \tau \, dx - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma) \text{tr}(\tau) \, dx \quad \forall \sigma, \tau \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2},$$

$$b(\tau, (v, \eta)) := \int_{\Omega} v \cdot \text{div} \tau \, dx + \int_{\Omega} \tau : \eta \, dx \quad \forall (\tau, (v, \eta)) \in H(\text{div}; \Omega) \times Q.$$

b) Demuestre que a y b satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi.

- c) Sea $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ un vector de parámetros positivos y considere las siguientes ecuaciones del tipo Galerkin-residuales:

$$\kappa_1 \int_{\Omega} (\mathbf{e}(u) - \mathcal{C}^{-1} \sigma) : (\mathbf{e}(v) + \mathcal{C}^{-1} \tau) = 0, \quad (4)$$

$$\kappa_2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma) \cdot \operatorname{div}(\tau) = -\kappa_2 \int_{\Omega} f \cdot \operatorname{div}(\tau), \quad (5)$$

y

$$\kappa_3 \int_{\Omega} \left(\gamma - \frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^{\mathfrak{t}}) \right) : \left(\eta + \frac{1}{2}(\nabla v - (\nabla v)^{\mathfrak{t}}) \right) = 0, \quad (6)$$

para todo $(\tau, v, \eta) \in H \times [H_0^1(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$. Demuestre que κ_1 , κ_2 y κ_3 pueden elegirse explícitamente, y dependiendo sólo de μ , de modo que la formulación variacional que resulta al restar la segunda de la primera ecuación en (3), y luego sumar (4), (5) y (6), satisface las hipótesis del Lema de Lax-Milgram.

12. Sea $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ una partición del intervalo $\Omega := (a, b)$. Sea H_n un espacio de funciones definidas sobre Ω y para cada $i \in \{1, \dots, n+1\}$ denote por $H_{n,i}$ el espacio de restricciones de H_n al subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

- a) Demuestre que si $H_n \subseteq C(\bar{\Omega})$ y $H_{n,i} \subseteq H^1(x_{i-1}, x_i) \forall i \in \{1, \dots, n+1\}$, entonces $H_n \subseteq H^1(\Omega)$.
- b) Demuestre que si $H_n \subseteq C^1(\bar{\Omega})$ y $H_{n,i} \subseteq H^2(x_{i-1}, x_i) \forall i \in \{1, \dots, n+1\}$, entonces $H_n \subseteq H^2(\Omega)$.

13. a) Para cada $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ encuentre el único polinomio p_j de grado ≤ 3 tal que $(p_j(0), p_j'(0), p_j(1), p_j'(1))^{\mathfrak{t}} = \mathbf{e}_j^{\mathfrak{t}}$, donde \mathbf{e}_j es el j -ésimo vector de la base canónica de \mathbf{R}^4 .

-) Sea $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$ una partición UNIFORME de $\Omega := (0, 1)$. Para todo $i \in \{1, \dots, n+1\}$ y para cada $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, encuentre el polinomio $p_{i,j}$ de grado ≤ 3 tal que $(p_{i,j}(x_{i-1}), p_{i,j}'(x_{i-1}), p_{i,j}(x_i), p_{i,j}'(x_i))^{\mathfrak{t}} = \mathbf{e}_j^{\mathfrak{t}}$. (INDICACIÓN: Denote $h := \frac{1}{n+1}$ y utilice lo obtenido en a) en conjunto con un cambio de variable afin entre $[0, 1]$ y $[x_{i-1}, x_i]$).

- c) Para cada $i \in \{1, \dots, n+1\}$ denote por \mathcal{P}_i al espacio de funciones definidas sobre $[x_{i-1}, x_i]$, generado por los polinomios $p_{i,j}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, y defina el espacio de elementos finitos

$$H_n := \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0, \quad y$$

$$v|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathcal{P}_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n+1\}\}.$$

Pruebe que $H_n \subseteq H_0^2(\Omega) := \{v \in H^2(\Omega) : v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0\}$, y defina explícitamente una base de H_1 .

d) Considere el problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} u^{(4)} &= f \quad \text{en } \Omega, \\ u(0) = u'(0) &= u(1) = u'(1) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

donde $f(x) = x$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre que la formulación débil de (7) se reduce a encontrar $u \in H_0^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u'' v'' dx = \int_{\Omega} x v dx \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \quad (8)$$

Establezca el esquema de Galerkin asociado a (8) utilizando el espacio de elementos finitos H_1 definido en c), y calcule el vector de carga respectivo.

14. Sea Ω un abierto acotado de \mathbf{R}^n con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y defina el espacio $V := \{v \in H^2(\Omega) : \gamma_0 v = 0 \text{ en } \Gamma\}$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V$. Concluya que la norma $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ son equivalentes en V .
15. Sea Ω un abierto acotado de \mathbf{R}^n con frontera Γ suficientemente regular. Utilice el hecho que la inyección de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta para demostrar que las inyecciones de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ y de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ son compactas.
16. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1} \subset H_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$, y $\cup_{n \in \mathbf{N}} H_n$ es denso en H . Sea $B : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f \in H'$ existe una única sucesión $\{u_n(f)\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq H$ tal que

$$u_n(f) \in H_n \quad , \quad B(u_n(f), v_n) = f(v_n) \quad \forall v_n \in H_n,$$

y $\|u_n(f)\| \leq C_0 \|f\| \quad \forall n \in \mathbf{N}$, donde C_0 es una constante positiva independiente de n y de f . Suponga además que para todo $f \in H'$ existe un único $u(f) \in H$ tal que

$$B(u(f), v) = f(v) \quad \forall v \in H.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u(f) - u_n(f)\| = 0 \quad \forall f \in H'.$$

IND.: Defina la proyección de Galerkin $P_n : H \rightarrow H_n$, donde $\forall v \in H$, $P_n v$ denota la única solución de $B(P_n v, w_n) = B(v, w_n) \quad \forall w_n \in H_n$ y observe que $P_n u(f) = u_n(f)$.

17. (LEMA DE LAX-MILGRAM GENERALIZADO). Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $B : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

i) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_2} \quad \forall (u, v) \in H_1 \times H_2.$$

ii) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{v \in H_2 \\ v \neq 0}} \frac{|B(u, v)|}{\|v\|_{H_2}} \geq C_2 \|u\|_{H_1} \quad \forall u \in H_1,$$

y para cada $v \in H_2$, $v \neq 0$, se tiene $\sup_{u \in H_1} |B(u, v)| > 0$.

Demuestre que, dado $F \in H_2'$, existe un único $u \in H_1$ tal que

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_2,$$

y además, $\|u\|_{H_1} \leq \frac{1}{C_2} \|F\|_{H_2'}$.

18. Sea Ω un dominio acotado de \mathbf{R}^2 con frontera suave Γ . Considere el problema de valores de contorno:

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{en } \Gamma \tag{9}$$

$$\int_{\Omega} u \, dx = a_1,$$

donde $a_1 \in \mathbf{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, y $g \in L^2(\Gamma)$ satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_{\Omega} f \, dx + \int_{\Gamma} g \, ds = 0.$$

Demuestre que una formulación débil de (9) consiste en: Hallar $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \lambda \int_{\Omega} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, ds,$$

$$\mu \int_{\Omega} u \, dx = \mu a_1,$$

para todo $(v, \mu) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$. Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene única solución, la cual depende continuamente de los datos.

19. Sea $\Omega := (0, 3)$ y considere el problema de valores de contorno: $-u'' + (x+1)u = x$ en Ω , $u(0) = u(3) = 0$. Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio

$$H_2 := \{v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \text{ y } v|_{[x_j, x_{j-1}]} \text{ es un polinomio}$$

$$\text{de grado } \leq 1, \forall j \in \{1, 2, 3\}\}.$$

IND.: Notar que $H_2 = \langle \{e_1, e_2\} \rangle$, donde $e_j \in H_2$ es tal que $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$.

20. Sea Ω un abierto acotado de \mathbf{R}^2 con frontera suave Γ , y sea $f \in [L^2(\Omega)]^2$. EL PROBLEMA DE STOKES consiste en encontrar el vector de velocidades $u := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluido, tales que

$$-\Delta u + \nabla p = f \quad \text{en } \Omega,$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{en } \Omega, \tag{10}$$

$$u = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad \int_{\Omega} p \, dx = 0.$$

- i) Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, dx = 0\}$, y demuestre que la formulación débil de (10) se reduce a: encontrar $(u, p) \in H \times Q$ tales que:

$$\begin{aligned} A(u, v) + B(v, p) &= F(v) \quad \forall v \in H, \\ B(u, q) &= 0 \quad \forall q \in Q, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$, $B : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(u, v) := \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx,$$

$$B(v, p) := - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx \quad , \quad F(v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx.$$

- ii) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que esta formulación tiene una única solución.
21. i) Calcule las funciones base locales del espacio de elementos finitos V_h asociado a una triangulación \mathcal{T}_h hecha de cuadrados de tipo (2).
 ii) Considere el operador Laplaciano y calcule la matriz de rigidez local para el caso particular de un cuadrado de tipo 1 con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$
22. Calcule las coordenadas baricéntricas del 3-simplex (tetraedro) K de \mathbf{R}^3 determinado por los vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, y calcule explícitamente las 4 funciones base de $P_2(K)$ asociadas a dichos vértices. (Notar que $\dim P_2(K) = \operatorname{card} \Sigma_2 = 10$).
23. Sea Ω un rectángulo de \mathbf{R}^2 , y sea \mathcal{T}_h una triangulación uniforme de $\bar{\Omega}$ hecha de cuadrados K con lados (de longitud h) paralelos a los ejes coordenados. Considere la formulación variacional en $H_0^1(\Omega)$ de la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet homogéneas, y calcule la matriz de rigidez local para el cuadrado de tipo (1) con vértices (x_1, y_1) , $(x_1 + h, y_1)$, $(x_1 + h, y_1 + h)$ y $(x_1, y_1 + h)$.

24. Sea Ω un abierto acotado de \mathbf{R}^2 con frontera poligonal Γ , y defina $H := H^1(\Omega)$ provisto de su producto escalar usual $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Considere un operador **NOLINEAL** $T : H \rightarrow H$, **FUERTEMENTE MONÓTONO** y **LIPSCHITZ-CONTINUO**. Esto significa que existen constantes $\alpha, M > 0$ tales que

$$\langle T(v) - T(w), v - w \rangle_H \geq \alpha \|v - w\|_H^2 \quad \text{y} \quad \|T(v) - T(w)\|_H \leq M \|v - w\|_H$$

para todo $v, w \in H$.

- i) Dada $f \in H$, demuestre que existe un único $u \in H$ tal que $T(u) = f$.
 ii) Sea H_h el subespacio de elementos finitos de H que resulta de una triangulación regular \mathcal{T}_h de $\bar{\Omega}$ hecha con triángulos de tipo (1), y considere el esquema de Galerkin asociado: *Hallar $u_h \in H_h$ tal que*

$$\langle T(u_h), v_h \rangle_H = \langle f, v_h \rangle_H \quad \forall v_h \in H_h.$$

Suponga que $u \in H^2(\Omega)$ y demuestre que existe $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|u - u_h\|_H \leq C h |u|_{H^2(\Omega)}.$$

25. Sea Ω un abierto acotado de \mathbf{R}^n con frontera poligonal, y sea \mathcal{T}_h una triangulación regular de $\bar{\Omega}$ hecha de n -simplex o n -rectángulos, todos ellos afín-equivalentes a un elemento finito de referencia \hat{K} . Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{h_K : K \in \mathcal{T}_h\}$, donde h_K es el diámetro de K . Ahora, para todo $K \in \mathcal{T}_h$ se define el operador local $\Pi_K : H^1(K) \rightarrow L^2(K)$ como

$$\Pi_K(v) := \frac{1}{|K|} \int_K v(x) dx \quad \forall v \in H^1(K).$$

Además, se define el operador global $\Pi : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ como

$$\Pi(v)|_K := \Pi_K(v|_K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall v \in H^1(\Omega).$$

- a) Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de \hat{K} , tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C h |v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

- b) Defina el espacio $H_h := \{v_h \in L^2(\Omega) : v_h|_K \in P_0(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}$, donde $P_0(K)$ denota el espacio de funciones constantes sobre K , y pruebe que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \inf_{v_h \in H_h} \|v - v_h\|_{L^2(\Omega)} \right\} = 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

26. Sea Ω un abierto acotado de \mathbf{R}^2 con frontera poligonal Γ . Una formulación variacional **MIXTA** para la ecuación de Poisson en Ω , con dato $f \in L^2(\Omega)$, y condición de Dirichlet dada por $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, consiste en: *Hallar $(\sigma, u) \in X \times M$ tal que*

$$\begin{aligned} A(\sigma, \tau) + B(\tau, u) &= \int_{\Gamma} g \tau \cdot \nu ds, \\ B(\sigma, v) &= - \int_{\Omega} f v dx, \end{aligned} \tag{1}$$

para todo $(\tau, v) \in X \times M$, donde $X := H(\text{div}; \Omega)$, $M := L^2(\Omega)$, ν es el vector normal unitario exterior a Γ , y las formas bilineales $A : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ y $B : X \times M \rightarrow \mathbf{R}$ están definidas por

$$A(\rho, \tau) := \int_{\Omega} \rho \cdot \tau \, dx \quad \forall \rho, \tau \in X,$$

$$B(\tau, v) := \int_{\Omega} v \, \text{div} \, \tau \, dx \quad \forall (\tau, v) \in X \times M.$$

- a) Demuestre que A y B satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi, y concluya que existe $C_0 > 0$ tal que

$$\|(\rho, w)\|_{X \times M} \leq C_0 \sup_{\substack{(\tau, v) \in X \times M \\ \|(\tau, v)\| \leq 1}} \{ A(\rho, \tau) + B(\tau, w) + B(\rho, v) \} \quad (2)$$

para todo $(\rho, w) \in X \times M$.

- b) El siguiente objetivo es deducir una ESTIMACIÓN DE ERROR A-POSTERIORI para (1). Para ello, sea $\{\mathcal{T}_h : h \in \mathbf{I}\}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$, donde \mathbf{I} es un conjunto finito de parámetros dado por $\{h_1, \dots, h_m\}$, con $h_j \geq h_{j+1} \forall j \in \{1, \dots, m\}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{h_K : K \in \mathcal{T}_h\}$, donde h_K es el diámetro de K . Sea $X_h \times M_h$ un subespacio de elementos finitos de $X \times M$, asociado a la triangulación \mathcal{T}_h , y sea $(\sigma_h, u_h) \in X_h \times M_h$ la solución del esquema de Galerkin correspondiente para la formulación (1).

- i) Pruebe que existe un único $\bar{\sigma} \in X$ tal que

$$\langle \bar{\sigma}, \tau \rangle_X = A(\sigma - \sigma_h, \tau) + B(\tau, u - u_h) \quad \forall \tau \in X.$$

- ii) Defina $\mathbf{J}(\tau) := \frac{1}{2} \|\tau\|_X^2 - \langle \bar{\sigma}, \tau \rangle_X \quad \forall \tau \in X$, y demuestre que

$$-\frac{1}{2} \|\bar{\sigma}\|_X^2 = \min_{\tau \in X} \mathbf{J}(\tau).$$

- iii) Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ defina $(\sigma_{h,K}, u_{h,K}) := (\sigma_h, u_h)|_K$, $X_K := H(\text{div}; K)$, $M_K := L^2(K)$, y denote por $A_K : X_K \times X_K \rightarrow \mathbf{R}$ y $B_K : X_K \times M_K \rightarrow \mathbf{R}$, respectivamente, las restricciones de A y B al elemento K . Además, sea $\varphi_h \in H^{1/2}(\cup_{K \in \mathcal{T}_h} \partial K)$ una aproximación de u sobre las fronteras de los elementos K tal que $\varphi_h = g$ en Γ . Entonces, pruebe que existe un único $\hat{\sigma}_K \in X_K$ tal que

$$\langle \hat{\sigma}_K, \tau \rangle_{X_K} = -A_K(\sigma_{h,K}, \tau) - B_K(\tau, u_{h,K}) - \int_{\partial K} \varphi_h \tau \cdot \nu \, ds \quad \forall \tau \in X_K.$$

- iv) Defina

$$\mathbf{J}_K(\tau) := \frac{1}{2} \|\tau\|_{X_K}^2 + A_K(\sigma_{h,K}, \tau) + B_K(\tau, u_{h,K}) + \int_{\partial K} \varphi_h \tau \cdot \nu \, ds$$

para todo $\tau \in X_K$, y pruebe que

$$-\frac{1}{2} \|\hat{\sigma}_K\|_{X_K}^2 = \min_{\tau \in X_K} \mathbf{J}_K(\tau).$$

v) Use i), ii), iii) y iv) para demostrar que

$$\|\bar{\sigma}\|_X^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\hat{\sigma}_K\|_{X_K}^2.$$

vi) Aplique (2) y v) para concluir que existe $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|(\sigma, u) - (\sigma_h, u_h)\|_{X \times M} \leq C \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2},$$

donde

$$\eta_K^2 := \|\hat{\sigma}_K\|_{X_K}^2 + \|f + \operatorname{div} \sigma_h\|_{L^2(K)}^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

27. Sean $\Omega =]a, b[$, $\varphi \in L^2(\Omega)$ tal que $\int_{\Omega} \varphi dx = 0$, y considere el problema de valores de contorno: $-z'' = \varphi$, $z'(a) = z'(b) = 0$, $\int_{\Omega} z dx = 0$. Defina el espacio $\tilde{H}^1(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} w dx = 0\}$, deduzca una formulaci3n variacional asociada con inc3gnita y funciones test en $\tilde{H}^1(\Omega)$, y demuestre que ella tiene una 3nica soluci3n.

28. (LEMA DE FORTIN). Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condici3n inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_H} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q. \quad (11)$$

Sean $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensi3n finita de H y Q , respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe un operador $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ tal que $b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) = 0 \quad \forall q_n \in Q_n$. Suponga que la familia $\{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H, H_n)} \leq C$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de n , tal que

$$\sup_{\substack{v_n \in H_n \\ v_n \neq 0}} \frac{b(v_n, q_n)}{\|v_n\|_H} \geq \beta^* \|q_n\|_Q \quad \forall q_n \in Q_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

29. Sean Ω un abierto acotado de \mathbf{R}^n , $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno: $-\Delta u = f$ en Ω , $u = 0$ en $\partial\Omega$. Se puede demostrar que una formulaci3n variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H(\operatorname{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \tau dx + \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\tau) dx - \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\sigma) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (12)$$

para todo $(\tau, v) \in H(\operatorname{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $\sigma := \nabla u$ en Ω representa una inc3gnita adicional. Adem3s, a partir de esta relaci3n, y dado $\delta \in \mathbf{R}$, se deduce que

$$\delta \int_{\Omega} (\nabla u - \sigma) \cdot (\nabla v + \tau) dx = 0 \quad \forall (\tau, v) \in \mathbf{H} := H(\operatorname{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad (13)$$

y también

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma) \operatorname{div}(\tau) dx = - \int_{\Omega} f \operatorname{div}(\tau) dx \quad \forall \tau \in H(\operatorname{div}; \Omega). \quad (14)$$

De este modo, sumando (12), (13) y (14), se obtiene una formulación variacional mixta modificada, la cual tiene la forma: Hallar $(\sigma, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\sigma, u), (\tau, v)) = F(\tau, v) \quad \forall (\tau, v) \in \mathbf{H}, \quad (15)$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}$ es una forma bilineal y $F : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}$ es un funcional lineal.

Demuestre que, eligiendo δ convenientemente, el problema (15) satisface las hipótesis del Lema de Lax-Milgram.

30. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert y sea $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(H, H)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : H \rightarrow H$, y tal que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. El objetivo de este ejercicio es probar que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)} = \|I - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)}$, para cuyo efecto se pide proceder como se indica a continuación.

- a) Sea S un subespacio de dimensión 2 de H y sea $Q \in \mathcal{L}(S, S)$, no trivial, distinto del operador identidad $I : S \rightarrow S$, y tal que $Q^2 = Q$. Pruebe que $S = R(Q) \oplus R(I - Q)$ y concluya que existen vectores no nulos $p, q, r, s \in S$ que satisfacen $\langle p, q \rangle = \langle r, s \rangle = 1$, tales que

$$Q(v) = \langle q, v \rangle p \quad \text{y} \quad (I - Q)(v) = \langle s, v \rangle r \quad \forall v \in S.$$

- b) A partir de la identidad $v = Q(v) + (I - Q)(v) \quad \forall v \in S$, deduzca que $\|p\|^2 \|q\|^2 = \|r\|^2 \|s\|^2 = 1 - \langle p, r \rangle \langle q, s \rangle$ y concluya así que

$$\|Q\|_{\mathcal{L}(S, S)} = \|I - Q\|_{\mathcal{L}(S, S)}.$$

- c) Dado $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$, considere el subespacio S generado por los vectores x y $\mathbf{P}(x)$ y defina $Q := \mathbf{P}|_S$. Demuestre que $Q \in \mathcal{L}(S, S)$, observe que la dimensión de S es ≤ 2 , y luego pruebe, usando b), que $\|(I - \mathbf{P})(x)\| \leq \|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)}$.

- d) Concluya, a partir de c), que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)} = \|I - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H, H)}$.

Agosto 2006
