UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREAS

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Segundo Semestre de 2003 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. **a)** Sea S un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $S^\perp = \bar{S}^\perp$.

   b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Encuentre y caracterice el subespacio V de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus V$.

2. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X,X)$, $Q \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es $\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \ \geq\ 0 \quad \forall\, y \in Y$, y que existen constantes α, $\beta > 0$ tales que
$$\langle \mathbf{P}x, x\rangle_X \ \geq\ \alpha\, ||x||_X^2 \quad \forall\, x \in X\,,$$
y
$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle Q(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \ \geq\ \beta\, ||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

   a) Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ tal que
$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & Q^* \\ Q & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

   b) Sea $X_h \times Y_h$ un subespacio de dimensión finita de $X \times Y$. Defina explícitamente el esquema de Galerkin asociado y demuestre que se satisface la estimacion de Céa correspondiente.

3. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y defina el espacio
$$H(\mathrm{rot}\,;\Omega) \ :=\ \{\, v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ tal que } \mathrm{rot}\ v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \ \in\ L^2(\Omega)\,\}\,,$$
provisto del producto escalar
$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{rot}\,;\Omega)} \ :=\ \int_\Omega v \cdot w\, dx \ +\ \int_\Omega \mathrm{rot}\ v\ \mathrm{rot}\ w\, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot}\,;\Omega)\,.$$
Demuestre que $(H(\mathrm{rot}\,;\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{rot}\,;\Omega)})$ es un espacio de Hilbert. Además, pruebe que existe un operador lineal y continuo $\gamma \ :\ H(\mathrm{rot}\,;\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que $\gamma(u) \ =\ u \cdot \tau\ \forall\ u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde τ es el vector **tangencial** unitario de Γ.

4. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina

$$V \,:=\, \left\{ v \,\in\, H^2(\Omega) : \quad \int_\Omega v\, p\, dx \,=\, 0 \quad \forall\, p \in \mathbf{P}_1(\Omega) \right\},$$

donde $\mathbf{P}_1(\Omega)$ es el espacio de polinomios de grado ≤ 1 definidos sobre Ω. Demuestre que la norma $||\cdot||_{H^2(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ son equivalentes en V.

5. (**Lema de Strang**). Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbf{R}$ tal que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente elíptica. Esto significa que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \,\geq\, \tilde{\alpha}\, \|v_n\|_H^2 \;\forall\, v_n \in H_n, \forall\, n \in \mathbf{N}$.

   a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

   $$A(u, v) \,=\, F(v) \qquad \forall\, v \in H$$

   y

   $$A_n(u_n, v_n) \,=\, F(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

   b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

   $$\|u - u_n\|_H \,\leq\, C \inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H \,+\, \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|A(v_n, w_n) - A_n(v_n, w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}.$$

6. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

   a) Demuestre que $\displaystyle \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \,=\, \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

   b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \,\geq\, \beta\, \|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$, y pruebe que $\quad H \,=\, R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

7. (**Lema de Aubin-Nitsche**). Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y el operador identidad $\mathbf{i} : V \to H$ es continuo. Sea $A : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y V-elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \to V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface

   $$A(v, \mathbf{P}(g)) \,=\, \langle g, v\rangle_H \quad \forall\, v \in V\,.$$

   Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V, denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

   $$A(u, v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in V\,,$$

y

$$A(u_h, v_h) \;=\; F(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h \,.$$

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$||u - u_h||_H \;\le\; C\, ||u - u_h||_V \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{v_h \in V_h} ||\mathbf{P}(g) - v_h||_V \right\} .$$

8. Dados $\Omega := (0,1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$-\,u'' \;=\; f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) \;=\; 0\,, \quad u'(1) \;=\; 1\,. \tag{1}$$

   a) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (1) se reduce a: *Hallar* $(\sigma, (u,\varphi)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) + b(\tau,(u,\varphi)) \;&=\; F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma,(v,\psi)) \;&=\; G((v,\psi)) \quad \forall\, (v,\psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{2}$$

   donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$a(\sigma,\tau) := \int_\Omega \sigma\, \tau\, dx \qquad \forall\, \sigma,\, \tau \in H\,,$$

$$b(\tau,(v,\psi)) := \int_\Omega v\, \tau'\, dx \;+\; \psi\, \tau(1) \quad \forall\, (\tau,(v,\psi)) \in H \times Q\,.$$

   b) Defina los funcionales F y G, y aplique la teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que (2) tiene una única solución.

9. Demuestre que las condiciones suficientes del Teorema de Babuška-Brezzi (versión general) son también necesarias.

10. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Dada $f \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento* $u \in [H^1(\Omega)]^2$ *y el tensor de esfuerzos* $\sigma \in H(\mathrm{div};\Omega)$ *tal que*

$$\sigma = \lambda\, \mathrm{tr}\; \mathbf{e}(u)\, I_2 + 2\mu\, \mathbf{e}(u) \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

$$\mathrm{div}\; \sigma = -f \quad \text{en} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

   donde λ, $\mu > 0$ son las constantes de Lamé, I_2 es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{e}(u) := \frac{1}{2}\,(\nabla\, u + (\nabla\, u)^{\mathbf{T}})$ es el tensor de deformaciones. Es fácil verificar que $\mathbf{e}(u)$ puede re-escribirse como

$$\mathbf{e}(u) = \nabla\, u \;-\; \gamma \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

   donde $\gamma := \frac{1}{2}\,(\nabla\, u - (\nabla\, u)^{\mathbf{T}})$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio $\mathcal{R} := \{\, \eta \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \quad \eta + \eta^{\mathbf{T}} = 0 \,\}$.

a) Demuestre que una formulación variacional **mixta** de este problema se reduce a: *Hallar* $(\sigma,(u,\gamma))\in H\times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau)+b(\tau,(u,\gamma)) &= 0 \quad \forall\,\tau\in H\,,\\ b(\sigma,(v,\eta)) &= -\int_\Omega f\cdot v\,dx \quad \forall\,(v,\eta)\in Q\,, \end{aligned}$$

donde $H:=H(\mathrm{div};\Omega)$, $Q:=[L^2(\Omega)]^2\times\mathcal{R}$, y $a:H\times H\to\mathbf{R}$, $b:H\times Q\to\mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\sigma,\tau):=\frac{1}{2\mu}\int_\Omega \sigma:\tau\,dx-\frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}\int_\Omega \mathrm{tr}\,(\sigma)\,\mathrm{tr}\,(\tau)\,dx \quad \forall\,\sigma,\,\tau\in H\,,$$

$$b(\tau,(v,\eta)):=\int_\Omega v\cdot\mathrm{div}\;\tau\,dx+\int_\Omega \tau:\eta\,dx \quad \forall\,(\tau,(v,\eta))\in H\times Q\,.$$

b) Demuestre que a y b satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi.

11. Sea $a=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$ una partición del intervalo $\Omega:=(a,b)$. Sea H_n un espacio de funciones definidas sobre Ω y para cada $i\in\{1,...,n+1\}$ denote por $H_{n,i}$ el espacio de restricciones de H_n al subintervalo $[x_{i-1},x_i]$.

    a) Demuestre que si $H_n\subseteq C(\bar\Omega)$ y $H_{n,i}\subseteq H^1(x_{i-1},x_i)$ $\forall\,i\in\{1,...,n+1\}$, entonces $H_n\subseteq H^1(\Omega)$.

    b) Demuestre que si $H_n\subseteq C^1(\bar\Omega)$ y $H_{n,i}\subseteq H^2(x_{i-1},x_i)$ $\forall\,i\in\{1,...,n+1\}$, entonces $H_n\subseteq H^2(\Omega)$.

12. **a)** Para cada $j\in\{1,2,3,4\}$ encuentre el único polinomio p_j de grado ≤ 3 tal que $(p_j(0),p_j'(0),p_j(1),p_j'(1))^{\mathbf{T}}=\mathbf{e}_j^{\mathbf{T}}$, donde $\mathbf{e}_j$ es el j-ésimo vector de la base canónica de $\mathbf{R}^4$.

    b) Sea $0=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=1$ una partición **uniforme** de $\Omega:=(0,1)$. Para todo $i\in\{1,...,n+1\}$ y para cada $j\in\{1,2,3,4\}$, encuentre el polinomio $p_{i,j}$ de grado ≤ 3 tal que $(p_{i,j}(x_{i-1}),p_{i,j}'(x_{i-1}),p_{i,j}(x_i),p_{i,j}'(x_i))^{\mathbf{T}}=\mathbf{e}_j^{\mathbf{T}}$. (**Indicación:** Denote $h:=\frac{1}{n+1}$ y utilice lo obtenido en **a)** en conjunto con un cambio de variable afin entre $[0,1]$ y $[x_{i-1},x_i]$).

    c) Para cada $i\in\{1,...,n+1\}$ denote por $\mathcal{P}_i$ al espacio de funciones definidas sobre $[x_{i-1},x_i]$, generado por los polinomios $p_{i,j}$, $j\in\{1,2,3,4\}$, y defina el espacio de elementos finitos

    $$H_n:=\{\,v\in C^1(\bar\Omega):\ v(0)=v'(0)=v(1)=v'(1)=0,\quad \text{y}$$

    $$v|_{[x_{i-1},x_i]}\in\mathcal{P}_i\quad\forall\,i\in\{1,...,n+1\}\,\}\,.$$

    Pruebe que $H_n\subseteq H_0^2(\Omega):=\{v\in H^2(\Omega):\ v(0)=v'(0)=v(1)=v'(1)=0\}$, y defina explícitamente una base de H_1.

d) Considere el problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} u^{(4)} = \quad & f \quad \text{en} \quad \Omega \,, \\ u(0) = u'(0) = \quad & u(1) = u'(1) = 0 \ , \end{aligned} \tag{3}$$

donde $f(x) = x$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre que la formulación débil de (3) se reduce a encontrar $u \in H_0^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u''\, v''\, dx \, = \int_\Omega x\, v\, dx \quad \forall\, v \in H_0^2(\Omega)\,. \tag{4}$$

Establezca el esquema de Galerkin asociado a (4) utilizando el espacio de elementos finitos H_1 definido en **c)**, y calcule el vector de carga respectivo.

13. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y defina el espacio $V \ := \ \{v \in H^2(\Omega) : \gamma_0 v \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\}$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que $||v||_{H^1(\Omega)} \ \leq \ C\,||\Delta\, v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \,\in\, V$. Concluya que la norma $||\cdot||_{H^2(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ son equivalentes en V.

14. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente regular. Utilice el hecho que la inyección de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta para demostrar que las inyecciones de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ y de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ son compactas.

15. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{\, H_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1} \subset H_n \ \forall\, n \,\in\, \mathbf{N}$, y $\cup_{n\in\mathbf{N}} H_n$ es denso en H. Sea $B \,:\, H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f \in H'$ existe una única sucesión $\{\, u_n(f) \,\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq H$ tal que

$$u_n(f) \,\in\, H_n \quad , \quad B(u_n(f), v_n) \,=\, f(v_n) \quad \forall\, v_n \,\in\, H_n\,,$$

y $||u_n(f)|| \,\leq\, C_0\,||f||\ \forall\, n \in \mathbf{N}$, donde C_0 es una constante positiva independiente de n y de f. Suponga además que para todo $f \,\in\, H'$ existe un único $u(f) \,\in\, H$ tal que

$$B(u(f), v) \,=\, f(v) \quad \forall\, v \,\in\, H\,.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to+\infty} ||u(f) \,-\, u_n(f)|| \,=\, 0 \quad \forall\, f \in H'\,.$$

Ind.: Defina la proyección de Galerkin $P_n \,:\, H \to H_n$, donde $\forall\, v \,\in\, H$, $P_n v$ denota la única solución de $B(P_n v, w_n) \,=\, B(v, w_n) \quad \forall\, w_n \,\in\, H_n$ y observe que $P_n u(f) = u_n(f)$.

16. (**Lema de Lax-Milgram generalizado**). Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $B : H_1 \times H_2 \to \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

i) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u,v)| \leq C_1 ||u||_{H_1} ||v||_{H_2} \quad \forall\, (u,v) \in H_1 \times H_2.$$

ii) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{v\in H_2\\ v\neq 0}} \frac{|B(u,v)|}{||v||_{H_2}} \geq C_2||u||_{H_1} \quad \forall\, u \in H_1,$$

y para cada $v \in H_2$, $v \neq 0$, se tiene $sup_{u\in H_1}|B(u,v)| > 0$.

Demuestre que, dado $F \in H_2'$, existe un único $u \in H_1$ tal que

$$B(u,v) = F(v) \quad \forall v \in H_2,$$

y además, $||u||_{H_1} \leq \frac{1}{C_2}||F||_{H_2'}$.

17. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ. Considere el problema de valores de contorno:

$$-\Delta\, u = f \quad \text{en} \quad \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{en} \quad \Gamma \tag{5}$$

$$\int_\Omega u\, dx = a_1\,,$$

donde $a_1 \in \mathbf{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, y $g \in L^2(\Gamma)$ satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_\Omega f\, dx + \int_\Gamma g\, ds = 0\,.$$

Demuestre que una formulación débil de (5) consiste en: *Hallar* $(u,\lambda) \in H^1(\Omega)\times \mathbf{R}$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx + \lambda\int_\Omega v\, dx = \int_\Omega fv\, dx + \int_\Gamma gv\, ds\ ,$$

$$\mu\int_\Omega u\, dx = \mu a_1\,,$$

para todo $(v,\mu) \in H^1(\Omega)\times\mathbf{R}$. Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene única solución, la cual depende continuamente de los datos.

18. Sea $\Omega := (0,3)$ y considere el problema de valores de contorno: $-u'' + (x+1)\,u = x$ en Ω, $u(0) = u(3) = 0$. Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio

$$H_2 := \{\, v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \quad \text{y} \quad v\,|_{[x_j,x_{j-1}]} \text{ es un polinomio}$$
$$\text{de grado } \leq 1\,, \forall\, j \in \{1,2,3\}\,\}\,.$$

Ind.: Notar que $H_2 =< \{e_1, e_2\} >$, donde $e_j \in H_2$ es tal que $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo $i,\, j \in \{1,2\}$.

19. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $f \in [L^2(\Omega)]^2$. **El problema de Stokes** consiste en encontrar el vector de velocidades $u := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$
\begin{aligned}
-\Delta\, u \,+\, \nabla p \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,,\\
\text{div}\; u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,,\\
u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\, dx \,=\, 0\,.
\end{aligned} \tag{6}
$$

i) Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \{\, q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\, dx \,=\, 0\,\}$, y demuestre que la formulación débil de (6) se reduce a: *encontrar* $(u,p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$
\begin{aligned}
A(u,v) \,+\, B(v,p) \,&=\, F(v) \quad \forall\, v \,\in\, H\,,\\
B(u,q) \,&=\, 0 \quad \forall\, q \,\in\, Q\,,
\end{aligned}
$$

donde $A : H \times H \to \mathbf{R}$, $B : H \times Q \to \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$
A(u,v) \,:=\, \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\, dx\,,
$$

$$
B(v,p) \,:=\, -\int_\Omega p\,\text{div}\; v\, dx \quad , \quad F(v) \,=\, \int_\Omega f \cdot v\, dx\,.
$$

ii) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que esta formulación tiene una única solución.

20. **i)** Calcule las funciones base locales del espacio de elementos finitos V_h asociado a una triangulación $\mathcal{T}_h$ hecha de cuadrados de tipo (2).

ii) Considere el operador Laplaciano y calcule la matriz de rigidez local para el caso particular de un cuadrado de tipo 1 con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$

21. Calcule las coordenadas baricéntricas del 3-simplex (tetraedro) K de $\mathbf{R}^3$ determinado por los vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$, y calcule explícitamente las 4 funciones base de $P_2(K)$ asociadas a dichos vértices.
(Notar que $\dim P_2(K) = \text{card}\,\Sigma_2 \,=\, 10$).

22. Sea Ω un rectángulo de $\mathbf{R}^2$, y sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación uniforme de $\bar{\Omega}$ hecha de cuadrados K con lados (de longitud h) paralelos a los ejes coordenados. Considere la formulación variacional en $H_0^1(\Omega)$ de la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet homogéneas, y calcule la matriz de rigidez local para el cuadrado de tipo (1) con vértices (x_1, y_1), (x_1+h, y_1), (x_1+h, y_1+h) y (x_1, y_1+h).

23. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y defina $H := H^1(\Omega)$ provisto de su producto escalar usual $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Considere un operador **nolineal** $T : H \to H$, **fuertemente monótono** y **Lipschitz-continuo**. Esto significa que existen constantes $\alpha, M > 0$ tales que

$$\langle T(v) - T(w), v - w \rangle_H \,\geq\, \alpha \, ||v - w||_H^2 \quad \text{y} \quad ||T(v) - T(w)||_H \,\leq\, M \, ||v - w||_H$$

para todo v, $w \in H$.

i) Dada $f \in H$, demuestre que existe un único $u \in H$ tal que $T(u) \,=\, f$.

ii) Sea H_h el subespacio de elementos finitos de H que resulta de una triangulación regular $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ hecha con triángulos de tipo (1), y considere el esquema de Galerkin asociado: *Hallar* $u_h \in H_h$ *tal que*

$$\langle T(u_h), v_h \rangle_H \,=\, \langle f, v_h \rangle_H \quad \forall \, v_h \in H_h \,.$$

Suponga que $u \in H^2(\Omega)$ y demuestre que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$||u - u_h||_H \,\leq\, C \, h \, |u|_{H^2(\Omega)} \,.$$

24. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera poligonal, y sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación regular de $\bar{\Omega}$ hecha de n-simplex o n-rectángulos, todos ellos afín-equivalentes a un elemento finito de referencia $\hat{K}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{\, h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h \,\}$, donde h_K es el diámetro de K. Ahora, para todo $K \in \mathcal{T}_h$ se define el operador local $\Pi_K : H^1(K) \to L^2(K)$ como

$$\Pi_K(v) \,:=\, \frac{1}{|K|} \int_K v(x) \, dx \quad \forall \, v \in H^1(K) \,.$$

Además, se define el operador global $\Pi : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ como

$$\Pi(v)\,|_K \,:=\, \Pi_K(v|_K) \quad \forall \, K \in \mathcal{T}_h, \; \forall \, v \in H^1(\Omega) \,.$$

a) Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\hat{K}$, tal que

$$||\, v \,-\, \Pi(v) \,||_{L^2(\Omega)} \,\leq\, C \, h \, |v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \, v \in H^1(\Omega) \,.$$

b) Defina el espacio $H_h := \{\, v_h \in L^2(\Omega) : \quad v_h\,|_K \in P_0(K) \; \forall \, K \in \mathcal{T}_h \,\}$, donde $P_0(K)$ denota el espacio de funciones constantes sobre K, y pruebe que

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \inf_{v_h \in H_h} ||v - v_h||_{L^2(\Omega)} \right\} \,=\, 0 \quad \forall \, v \in L^2(\Omega) \,.$$

25. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ. Una formulación variacional **mixta** para la ecuación de Poisson en Ω, con dato $f \in L^2(\Omega)$, y condición de Dirichlet dada por $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, consiste en: *Hallar* $(\sigma, u) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} A(\sigma, \tau) \,+\, B(\tau, u) \,&=\, \textstyle\int_\Gamma g \, \tau \cdot \nu \, ds \,, \\ B(\sigma, v) \,&=\, -\textstyle\int_\Omega f \, v \, dx \,, \end{aligned} \tag{1}$$

para todo $(\tau, v) \in X \times M$, donde $X := H(\mathrm{div};\Omega)$, $M := L^2(\Omega)$, ν es el vector normal unitario exterior a Γ, y las formas bilineales $A : X \times X \to \mathbf{R}$ y $B : X \times M \to \mathbf{R}$ están definidas por

$$A(\rho, \tau) := \int_\Omega \rho \cdot \tau \, dx \quad \forall \rho,\, \tau \in X\,,$$

$$B(\tau, v) := \int_\Omega v \,\mathrm{div}\, \tau \, dx \quad \forall (\tau, v) \in X \times M\,.$$

a) Demuestre que A y B satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi, y concluya que existe $C_0 > 0$ tal que

$$||(\rho, w)||_{X \times M} \,\leq\, C_0 \sup_{\substack{(\tau,v)\in X\times M \\ ||(\tau,v)||\,\leq\, 1}} \{\, A(\rho, \tau) + B(\tau, w) + B(\rho, v)\,\} \tag{2}$$

para todo $(\rho, w) \in X \times M$.

b) El siguiente objetivo es deducir una **estimación de error a-posteriori** para (1). Para ello, sea $\{\mathcal{T}_h : \quad h \in \mathtt{I}\}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$, donde $\mathtt{I}$ es un conjunto finito de parámetros dado por $\{h_1, ..., h_m\}$, con $h_j \geq h_{j+1}\, \forall\, j \in \{1, ..., m\}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{\, h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h\,\}$, donde h_K es el diámetro de K. Sea $X_h \times M_h$ un subespacio de elementos finitos de $X \times M$, asociado a la triangulación $\mathcal{T}_h$, y sea $(\sigma_h, u_h) \in X_h \times M_h$ la solución del esquema de Galerkin correspondiente para la formulación (1).

i) Pruebe que existe un único $\bar{\sigma} \in X$ tal que

$$\langle \bar{\sigma}, \tau \rangle_X \;=\; A(\sigma - \sigma_h, \tau) + B(\tau, u - u_h) \quad \forall\, \tau \in X\,.$$

ii) Defina $\mathbf{J}(\tau) := \frac{1}{2}\,||\tau||_X^2 \;-\; \langle \bar{\sigma}, \tau\rangle_X \quad \forall\, \tau \in X$, y demuestre que

$$-\frac{1}{2}\,||\bar{\sigma}||_X^2 \;=\; \min_{\tau\in X} \mathbf{J}(\tau)\,.$$

iii) Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ defina $(\sigma_{h,K}, u_{h,K}) := (\sigma_h, u_h)\,|_K$, $X_K := H(\mathrm{div}\,; K)$, $M_K := L^2(K)$, y denote por $A_K : X_K \times X_K \to \mathbf{R}$ y $B_K : X_K \times M_K \to \mathbf{R}$, respectivamente, las restricciones de A y B al elemento K. Además, sea $\varphi_h \in H^{1/2}(\cup_{K\in\mathcal{T}_h} \partial K)$ una aproximación de u sobre las fronteras de los elementos K tal que $\varphi_h = g$ en Γ. Entonces, pruebe que existe un único $\hat{\sigma}_K \in X_K$ tal que

$$\langle \hat{\sigma}_K, \tau \rangle_{X_K} = -A_K(\sigma_{h,K}, \tau) - B_K(\tau, u_{h,K}) - \int_{\partial K} \varphi_h\, \tau \cdot \nu \, ds \quad \forall\, \tau \in X_K\,.$$

iv) Defina

$$\mathbf{J}_K(\tau) := \frac{1}{2}\,||\tau||_{X_K}^2 + A_K(\sigma_{h,K}, \tau) + B_K(\tau, u_{h,K}) + \int_{\partial K} \varphi_h\, \tau \cdot \nu \, ds$$

para todo $\tau \in X_K$, y pruebe que

$$-\frac{1}{2}\,||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \;=\; \min_{\tau\in X_K} \mathbf{J}_K(\tau)\,.$$

v) Use **i)**, **ii)**, **iii)** y **iv)** para demostrar que

$$||\bar{\sigma}||_X^2 \,\leq\, \sum_{K\in\mathcal{T}_h} ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \,.$$

vi) Aplique (2) y **v)** para concluir que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$||(\sigma,u) - (\sigma_h,u_h)||_{X\times M} \,\leq\, C \left\{ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2} ,$$

donde

$$\eta_K^2 := ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \,+\, ||f + \mathrm{div}\,\sigma_h||_{L^2(K)}^2 \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \,.$$

26. Sean $\Omega =]a,b[$, $\varphi \in L^2(\Omega)$ tal que $\displaystyle\int_\Omega \varphi\,dx \,=\, 0$, y considere el problema de valores de contorno: $-\,z'' \,=\, \varphi\,,\quad z'(a) \,=\, z'(b) \,=\, 0\,,\quad \int_\Omega z\,dx \,=\, 0$. Defina el espacio $\tilde{H}^1(\Omega) := \{\, w \,\in\, H^1(\Omega) : \quad \displaystyle\int_\Omega w\,dx \,=\, 0 \,\}$, deduzca una formulación variacional asociada con incógnita y funciones test en $\tilde{H}^1(\Omega)$, y demuestre que ella tiene una única solución.

27. (**Lema de Fortin**). Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} \,\geq\, \beta\,\|q\|_Q \qquad \forall\, q \in Q\,. \tag{7}$$

Sean $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe un operador $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ tal que $\quad b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) \,=\, 0 \qquad \forall\, q_n \in Q_n$. Suponga que la familia $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H,H_n)} \,\leq\, C$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de n, tal que

$$\sup_{\substack{v_n\in H_n\\ v_n\neq 0}} \frac{b(v_n,q_n)}{\|v_n\|_H} \,\geq\, \beta^*\,\|q_n\|_Q \qquad \forall\, q_n \in Q_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}\,.$$