UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

LISTADO DE EJERCICIOS 408601

Análisis Funcional

Segundo Semestre de 2005 — *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. (Teorema de Hahn-Banach sobre $\mathbb{C}$). Sea X un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y sea $p : X \to \mathbf{R}$ tal que

$$p(\alpha\, x) \,=\, |\alpha|\, p(x) \quad \text{y} \quad p(x+y) \,\leq\, p(x) \,+\, p(y) \qquad \forall\, \alpha \,\in\, \mathbb{C}\,,\ \forall\, x\,,\, y \,\in\, X\,.$$

   Además, sean S un subespacio de X y $f \,\in\, S'$ tales que

$$|f(x)| \;\leq\; p(x) \qquad \forall\, x \,\in\, S\,.$$

   Demuestre que f puede extenderse a un funcional $F \,\in\, X'$ tal que

$$|F(x)| \;\leq\; p(x) \qquad \forall\, x \,\in\, X\,.$$

2. (Aplicación simple del Teorema de Hahn-Banach). Sea X un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

   a) Dados un conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ de N vectores linealmente independientes de X y $\{a_1, a_2, ..., a_N\} \subseteq \mathbb{C}$, pruebe que existe $F \in X'$ tal que $F(x_j) \,=\, a_j$ para todo $j \in \{1, ..., N\}$.

   b) Utilice a) para probar que todo subespacio Y de dimensión finita admite un suplemento topógico.

3. Sea $\Omega := (a, b)$ un intervalo acotado de $\mathbf{R}$ y dado $m \in \mathbf{N}$ considere el espacio de Sobolev $H^m(\Omega) := \{\, v \in L^2(\Omega) : \quad v^{(j)} \in L^2(\Omega) \quad \forall j \in \{1, ..., m\}\,\}$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también lo es.

4. Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados y sean $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(Z, X)$. Demuestre que $(AB)' \,=\, B'\, A'$. Suponga que A es invertible y demuestre que A' tambien lo es, con $(A')^{-1} \,=\, (A^{-1})'$.

5. (Inverso a izquierda). Sean E, F espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $N(T) \,=\, \{0\}$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) Existe $S \in \mathcal{L}(F, E)$ tal que $S\, T \,=\, I : E \to E$.

   b) $R(T)$ es cerrado y posee un suplemento topológico en F.

6. (Aplicación de reflexividad). Sean E y F espacios de Banach y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E \to F$ lineal cerrado tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en E. Pruebe que si E es reflexivo entonces

$$N(A)^{\perp} = \overline{R(A^*)}\,.$$

7. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y considere un operador nolineal $T : H \to H$, fuertemente monótono y Lipschitz-continuo. Esto significa, respectivamente, que existen constantes $\alpha, M > 0$ tales que

$$\langle Tv - Tw, v - w\rangle \geq \alpha\, ||v-w||_H^2 \quad \text{y} \quad ||Tv - Tw||_H \leq M\, ||v-w||_H \quad \forall\, v,\, w \in H\,.$$

   a) Dada $f \in H$, demuestre que existe un único $u \in H$ tal que $Tu = f$.

   b) Sea H_n un subespacio de dimensión finita de H y considere el esquema de Galerkin asociado: *Hallar $u_n \in H_n$ tal que*

$$\langle Tu_n, v_n\rangle = \langle f, v_n\rangle \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

   Pruebe que

$$||u - u_n||_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in H_n} ||u - v_n||_H\,.$$

   Ind.: Para **a)**, aplicar el Teorema del Punto Fijo de Banach al operador $P : H \to H$, con $Pv := v - \rho\,(Tv - f)$, donde ρ es un parámetro a elegir de manera conveniente.

8. Sean X, Y espacios de Banach, y sea $A : X \to Y$ un operador lineal cerrado tal que $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$. Demuestre que $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

   Ind.: Considere $\mathcal{D}(A)$ provisto de la norma $||x||_A := ||x|| + ||Ax||$.

9. (Topología débil). Sean E, F espacios de Banach y sea $T : E \to (F, \sigma(F, F'))$ un operador lineal y continuo. Pruebe que $T : E \to F$ también es continuo.

10. (Topología débil estrella). Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E'$. Demuestre que una base de vecindades de f con respecto a la topología $\sigma(E', E)$ está dada por conjuntos de la forma

$$V := \{\, g \in E' : \quad |g(x_j) - f(x_j)| < \epsilon \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., N\}\,\}\,,$$

   con $N \in \mathbf{N}$, $x_j \in E \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., N\}$ y $\epsilon > 0$.

11. (Topologías y espacios de Hilbert). Sea E un espacio de Hilbert.

   a) Defina, con la mayor simplicidad posible, las topologías $\sigma(E, E')$ y $\sigma(E', E)$.

   b) Pruebe explícitamente (sin usar el resultado más general dado en clases) que la bola unitaria cerrada de E es compacta en $\sigma(E, E')$.

12. Sea X un espacio vectorial normado y $f : X \to \mathbf{R}$ un funcional lineal. Pruebe que $f \in X'$ sí y sólo sí $N(f)$ es un subespacio cerrado de X.

13. Sea X un espacio vectorial normado.

    a) Demuestre que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces la sucesión completa converge.

    b) Sea $S := \{x \in X : \quad ||x|| = 1\}$. Pruebe que S es completo sí y sólo sí X es Banach.

14. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{div};\Omega) := \left\{ v \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\, v := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

    provisto del producto escalar

$$\langle v, w \rangle_{H(\mathrm{div};\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\, v \; \mathrm{div}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

    a) Demuestre que $(H(\mathrm{div};\Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\mathrm{div};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

    b) Pruebe que para todo $g \in [L^2(\Omega)]^n$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\, v_g \; \mathrm{div}\, w \, dx = \int_\Omega g \cdot w \, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

    IND.: Dada $v \in [L^2(\Omega)]^n$, se dice que $\mathrm{div}\, v := z \in L^2(\Omega)$ si

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega z \, \varphi \, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

15. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{rot};\Omega) := \{\, v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}\, v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \,\}$$

    provisto del producto escalar

$$\langle v, w \rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \; \mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

    a) Demuestre que $(H(\mathrm{rot};\Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

    b) Pruebe que para todo $g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v_g \; \mathrm{rot}\, w \, dx = \int_\Omega \mathrm{rot}\, g \, \mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

IND.: Notar que $v \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ sí y sólo sí $(v_2, -v_1) \in H(\mathrm{div};\Omega)$. También, dada $v \in [L^2(\Omega)]^2$, se dice que $\mathrm{rot}\, v := z \in L^2(\Omega)$ si

$$-\int_\Omega v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx + \int_\Omega v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\, dx = \int_\Omega z\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

16. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y defina el espacio $V := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, es decir

$$V = \left\{ v \in H^2(\Omega) : \quad v = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \right\}.$$

Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$||v||_{H^1(\Omega)} \leq C\, ||\Delta\, v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in V\,.$$

IND.: Dada $v \in V$, defina $f = -\Delta\, v \in L^2(\Omega)$ y aplique el Lema de Lax-Milgram al problema de valores de contorno: $-\Delta\, u = f$ en Ω, $u = 0$ en Γ.

17. Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dados los polinomios $p_j \in X$, $j \in \{0, 1, ..., n\}$, con $p_j(t) = t^j$ $\forall\, t \in [0,1]$, se define el operador $A : X \to X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

IND.: Para todo $j \in \{0, 1, ..., n\}$ defina $F_j : X \to \mathbf{R}$ por $F_j(u) := \displaystyle\int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt$ $\forall\, u \in X$, y observe que $F_j \in X'$.

18. Considere dos espacios vectoriales normados X e Y.

a) Sea $A_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Demuestre que existe un operador $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y, X))$ tal que $\mathcal{T}_0 A_0 = A_0^{-1}$ y $||\mathcal{T}_0|| = ||A_0^{-1}||/||A_0||$.

b) Pruebe que si Y es Banach y $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y', X'))$ es un operador biyectivo, entonces $\mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(Y', X'), \mathcal{L}(X, Y))$.

19. Sea $\Omega := (0,1)$ y considere el problema de valores de contorno

$$\begin{array}{rll} -(au')' + bu & = f & \text{en} \quad \Omega \\ u'(0) = u'(1) & = 0 & , \end{array} \tag{1}$$

donde $a(x) = x^2 + 2, b(x) = 2 + sen(x)$ y $f(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$. Puede probarse que la formulación débil de (1) consiste en hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_0^1 (au'v' + buv)dx = \int_0^1 fvdx \quad \forall v \in H^1(\Omega)\,. \tag{2}$$

Demuestre que existe un único $u \in H^1(\Omega)$ solución de (2).

20. Sean X, Y espacios vectoriales normados y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

a) Demuestre que $R(A)^0 = N(A')$ y que

$$N(A') = \{0\} \quad \text{si y solo si} \quad \overline{R(A)} = Y.$$

b) Pruebe que si $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$, entonces $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

21. Sea M un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado X.

a) Demuestre que $M =^0 (M^0)$.

b) Pruebe que el aniquilador de $(\frac{X}{M})'$ coincide con M.

22. Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea $T : X' \to Y'$ un operador lineal cerrado y biyectivo. Demuestre que $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y', X')$.

23. Sean $I := [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, $f_j : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, j = 1, \cdots, n$, funciones continuas, y considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Hallar $u := (u_1, \cdots, u_n)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du_j}{dt} = f_j(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)) \qquad y \\ \\ u_j(t_0) = \eta_j \qquad \forall j = 1, \cdots, n, \end{cases} \tag{3}$$

donde t_0, τ, η_j, $j = 1, \cdots, n$ son constantes reales dadas y τ es positivo. Suponga además que existe $M > 0$ tal que

$$|f_j(t, z) - f_j(t, w)| \leq M||z - w||_\infty \quad \forall\, z, w \in \mathbf{R}^n, \quad \forall\, t \in I.$$

Demuestre que (3) tiene una única solución $u(t)$ para todo $t \in I$.

IND.: Transforme (3) en una ecuación integral de Volterra y luego aplique algún resultado apropiado sobre puntos fijos.

24. Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall\, G \in Y', \quad$ entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

25. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y considere una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de H tal que $\langle x_n, x_m \rangle = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$. Pruebe que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq ||x||^2 \quad \forall\, x \in H$. Además, dada una sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, demuestre que son equivalentes,

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, x_n \qquad$ converge en H.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$.

26. Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$, se define

$$L^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R} : \quad f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^2\, dx < +\infty \right\}.$$

Dado un multíndice $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, y una función diferenciable u, se denota

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \text{y} \quad \partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Con estas notaciones, para cada $m \in \mathbf{N}$ se define el ESPACIO DE SOBOLEV de orden m, como

$$H^m(\Omega) := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad \forall\, \alpha,\, |\alpha| \le m \quad \text{existe } g_\alpha \in L^2(\Omega)\,, \text{ tal que}$$

$$\int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Big\}$$

En tal caso se escribe $\partial^\alpha u = g_\alpha$, y se define la norma

$$||u||_{H^m(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \le m} ||\partial^\alpha u||^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2}.$$

Asuma que $L^2(\Omega)$ provisto del producto escalar $\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega uv\, dx$, es un espacio de Hilbert, y demuestre que $H^m(\Omega)$ es también un espacio de Hilbert. Muestre además que para todo $f \in (H^m(\Omega))'$ existen funciones $f_\alpha \in L^2(\Omega)$, $|\alpha| \le m$, tales que $f(v) = \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega f_\alpha\, \partial^\alpha v\, dx \quad \forall\, v \in H^m(\Omega)$.

27. Se dice que un espacio de Banach X es UNIFORMEMENTE CONVEXO si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$(\, x, y \in X\,,\ ||x|| \le 1\,,\ ||y|| \le 1 \quad \text{y} \quad ||x - y|| > \epsilon\,) \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta\,.$$

Demuestre que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

28. Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

a) Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.

b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{z \in N(A)} ||x - z|| \le \beta\, ||Ax|| \quad \forall\, x \in X\,.$$

Demuestre que $R(A) = N(A^*)^\perp$.

c) Pruebe que $A^* = R_X\, A'\, R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \to X$ y $R_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^oN(A') = N(A^*)^\perp$.

29. Sea X un espacio de Banach e Y un espacio vectorial normado. Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ existe $\forall x \in X$. Pruebe que existe $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $T_n(x) \to T(x) \quad \forall x \in X$.

IND.: Aplicar TEOREMA DE BANACH-STEINHAUSS.

30. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{ H_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1} \subset H_n \ \forall n \in \mathbf{N}$, y $\cup_{n\in\mathbf{N}} H_n$ es denso en H. Sea $B : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f \in H'$ existe una única sucesión $\{ u_n(f) \}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq H$ tal que

$$u_n(f) \in H_n \quad , \quad B(u_n(f), v_n) = f(v_n) \quad \forall v_n \in H_n ,$$

y $||u_n(f)|| \leq C_0 ||f|| \ \forall n \in \mathbf{N}$, donde C_0 es una constante positiva independiente de n y de f. Suponga además que para todo $f \in H'$ existe un único $u(f) \in H$ tal que

$$B(u(f), v) = f(v) \quad \forall v \in H .$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to+\infty} ||u(f) - u_n(f)|| = 0 \quad \forall f \in H' .$$

IND.: Defina la proyección de Galerkin $P_n : H \to H_n$, donde $\forall v \in H$, $P_n v$ denota la única solución de $B(P_n v, w_n) = B(v, w_n) \quad \forall w_n \in H_n$ y observe que $P_n u(f) = u_n(f)$.

31. Sea H un espacio vectorial normado real. Pruebe que si la norma de H satisface

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2 \left\{ ||x||^2 + ||y||^2 \right\} \quad \forall x, y \in H,$$

entonces ella proviene de un producto escalar.

32. Sean V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada simétrica y coerciva, y $A : V \to V'$ el operador lineal y acotado inducido por a. Dado $f \in V'$ y U un subconjunto de V no vacío convexo y cerrado, es sabido (por TEOREMA DE STAMPACCHIA) que existe un único $u \in U$ tal que

$$a(u, v-u) \geq f(v-u) \quad \forall v \in U.$$

Ahora, sean V_h un subespacio de V de dimensión finita, U_h un subconjunto de V_h no vacío convexo y cerrado, y denote por $u_h \in U_h$ a la única solución del problema discreto:

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq f(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in U_h.$$

Además, sea H un Hilbert tal que $V \subseteq H$, y la inyección canónica $i : V \to H$ es continua y densa. Demuestre que si $Au - f \in H$, entonces existe una constante C independiente de V_h y U_h, tal que

$$||u-u_h||_V \leq C \Big\{ \inf_{v_h\in U_h} \Big(||u-v_h||_V^2 + ||Au-f||_H \, ||u-v_h||_H \Big) + ||Au-f||_H \inf_{v\in U} ||u_h - v||_H \Big\}^{1/2}.$$

33. Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,X)$, con $||A|| < 1$. Demuestre que $(I+A)$ es invertible y que

$$(I+A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X,X)$. Muestre también que

$$||(I+A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||A||}.$$

34. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. El grafo de T se denota por G_T y se define como

$$G_T := \{(x,y) \in X \times Y : \quad x \in D(T),\ y = Tx\}$$

Suponga que $D(T)$ y G_T son subespacios cerrados de X y $X \times Y$, respectivamente. Demuestre que T es acotado sobre $D(T)$.

35. (Lema de Lax-Milgram generalizado). Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $B : H_1 \times H_2 \to \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

a) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u,v)| \leq C_1 ||u||_{H_1} ||v||_{H_2} \quad \forall\, (u,v) \in H_1 \times H_2.$$

b) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{v \in H_2 \\ v \neq 0}} \frac{|B(u,v)|}{||v||_{H_2}} \geq C_2 ||u||_{H_1} \quad \forall\, u \in H_1,$$

y para cada $v \in H_2$, $v \neq 0$, se tiene $\sup_{u \in H_1} |B(u,v)| > 0$.

Demuestre que, dado $F \in H_2'$, existe un único $u \in H_1$ tal que $B(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H_2$, y además $\quad ||u||_{H_1} \leq \frac{1}{C_2} ||F||_{H_2'}$.

36. Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Un operador lineal $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ se dice una *extensión* de T si $D(T) \subseteq D(\tilde{T})$ y $Tx = \tilde{T}x \quad \forall\, x \in D(T)$.

Definición. *Se dice que* $\overline{T} : D(\overline{T}) \subseteq X \to Y$ *es la* clausura *de* T*, si*:

i) $\overline{T}$ *es un operador lineal cerrado*

ii) $\overline{T}$ *es una extensión de* T

iii) Si $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ *es cualquier operador con las propiedades* i) y ii), *entonces* $\tilde{T}$ *es una extensión de* $\overline{T}$.

Sean X, Y espacios de Banach, y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que T tiene una clausura $\overline{T}$ sí y sólo si la siguiente condición se satisface

$$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq D(T),\ x_n \to 0\ ,\ Tx_n \to y \qquad \Rightarrow \qquad y = 0.$$

37. Sea X el espacio vectorial de las funciones continuas sobre $\bar{\Omega} := [0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dados $u_1,\ u_2,\ y \in X$, considere la ecuación integral: *Hallar* $u \in X$ *tal que*

$$u(t) - \int_0^1 u_1(t)\, s^2\, u(s)\, ds - \int_0^1 u_2(t)\,(1 - \frac{3}{2}s)\, u(s)\, ds \ = \ y(t) \quad \forall\, t \in \bar{\Omega}\ . \quad (4)$$

i) Si $u_1(t) = 4t$ y $u_2(t) = 1\ \forall\, t \in \Omega$, deduzca una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (4) tenga al menos una solución.

ii) Pruebe que si $u_1(t) = t$ y $u_2(t) = 1$, entonces para cada $y \in X$ la ecuación integral (4) tiene una única solución.

38. Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados.

i) Pruebe que si $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ es de rango finito, entonces K es compacto.

ii) Demuestre que si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $K \in K(Y,Z)$, entonces KA también es compacto.

39. Sea X un espacio vectorial normado de dimensión INFINITA y sea $K \in K(X,X)$ un operador inyectivo. Demuestre que $K^{-1} \notin \mathcal{L}(X,X)$.

40. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Suponga que existen sucesiones $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X'$, $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq Y$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathbf{R}$ tales que

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} ||F_n||_{X'} < +\infty \quad , \quad \sup_{n\in\mathbf{N}} ||y_n||_Y < +\infty \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty\,,$$

y además

$$A\,x \ = \ \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n\, F_n(x)\, y_n \qquad \forall\, x \in X\,.$$

Demuestre que A es compacto.

41. **i)** Sea $p > 1$ y considere el operador $K : l_p \to l_p$ definido por

$$K\,(x_1, x_2, ..., x_k, ...) \ = \ (x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_k}{k}, ...) \qquad \forall\ (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in l_p\,.$$

Demuestre que K es compacto.

ii) Sean X, Y espacios vectoriales normados y considere el conjunto

$$\mathcal{H} := \{\, F \in (\,\mathcal{L}(X,Y)\,)' : \quad F(K) = 0 \quad \forall\, K \in K(X,Y)\,\}\,.$$

Pruebe que $\mathcal{H} = (\frac{\mathcal{L}(X,Y)}{K(X,Y)})'$.

42. Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0,\pi]$ provisto de la norma uniforme. Dadas las funciones trigonométricas $p_j,\ q_j \in X,\ j \in \{0,1,...,n\}$, con $p_j(t) = \operatorname{sen}(jt)$ y $q_j(t) = \cos(jt)$, $\forall\, t \in [0,\pi]$, se define el operador $A : X \to X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^\pi u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j + \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^\pi u(t)\, q_j(t)\, dt \right\} q_j \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X,X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

43. Sean H y V dos espacios de Hilbert tales que $H \subseteq V$ y la inyección $i : H \to V$ es compacta.

a) Se dice que una forma bilineal acotada A definida sobre $H \times H$ satisface la Desigualdad de Gårding si existen $\alpha > 0$ y una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbf{R}$ tales que

$$A(v,v) \geq \alpha\, ||v||_H^2 - K(v,v) \qquad \forall\, v \in H\,.$$

Dado $F \in H'$, considere el siguiente problema variacional: *Hallar* $u \in H$ *tal que*

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall\, v \in H\,. \tag{5}$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding, entonces (5) tiene solución para cada $F \in H'$ si y solo si $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

b) Se dice que A satisface la Desigualdad de Gårding generalizada si existen $\alpha > 0$, una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbf{R}$, y un isomorfismo $S : H \to H$ tales que

$$A(v,Sv) \geq \alpha\, ||v||_H^2 - K(v,Sv) \qquad \forall\, v \in H\,.$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding generalizada, entonces (5) tiene solución para cada $F \in H'$ si y solo si $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

44. Sean X e Y espacios de Banach tal que X es reflexivo. Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ es compacto si y sólo si A transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones fuertemente convergentes de Y.

45. **a)** Sea $\Omega = (0,1)$ y $X = L^2(\Omega)$. Puede probarse que X provisto del producto escalar

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx \quad \forall\, f,\ g \in X$$

es un espacio de Hilbert, y que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Considere la sucesión $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$ definida por $x_n(t) = \sqrt{2}\, sin(n\pi t)\ \forall\, t \in \Omega$. Demuestre que

$$||x_n|| = 1 \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad , \quad \text{y que} \quad \lim_{n\to\infty} \langle \varphi, x_n\rangle = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Concluya además que $x_n \xrightarrow{w} 0$, y que x_n NO CONVERGE FUERTEMENTE a la función nula.

b) A propósito de lo anterior, demuestre que en un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita, la convergencia débil no es equivalente a la convergencia fuerte.

46. DEFINICIÓN. *Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X'$ un operador* NOLINEAL. *Se dice que T satisface la propiedad (S) si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$ tal que*

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad y \quad (T(x_n))(x_n - x) - (T(x))(x_n - x) \longrightarrow 0 \,,$$

se tiene $x_n \longrightarrow x$.

Sean H, Q, V espacios de Banach tales que $H \subseteq V$ y $\mathbf{i} : H \to V$ es compacta. Sea $X := H \times Q$, y considere una forma bilineal acotada $B : X \times X \to \mathbf{R}$ y un operador nolineal $A : H \to H'$ que satisfacen las siguientes propiedades

i) existe $C_0 > 0$ tal que

$$B((u,\lambda),(u,\lambda)) \geq C_0 \,||\lambda|^2_Q \quad \forall\,(u,\lambda) \in X\,.$$

ii) existen C_1, $C_2 > 0$ tal que para todo $u, v \in H$

$$(A(u))(u - v) - (A(v))(u - v) \geq C_1 \,||u - v||^2_H + R(u,v)\,,$$

donde

$$|R(u,v)| \leq C_2 \{\, 1 + ||u||_H + ||v||_H \,\} \,||u - v||_V \,.$$

Demuestre que el operador nolineal $T : X \to X'$ definido por

$$(T(u,\lambda))(v,\mu) := (A(u))(v) + B((u,\lambda),(v,\mu))\,,$$

satisface la propiedad (S).

47. **a)** Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $N(T) = \{\,0\,\}$ y $R(T) = Y$. Demuestre que X es reflexivo (separable) si y sólo si Y es reflexivo (separable).

b) Sean X, Y espacios de Banach separables. Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también es separable.

c) Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^N$ y $p \in \mathbf{R}$, $2 \leq p < \infty$, se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R} :\ f \text{ medible y } ||f||_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_\Omega |f|^p \, dx \right\}^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Puede probarse que $(L^p(\Omega), ||\cdot||_{L^p(\Omega)})$ es un espacio de Banach separable. Por otra parte, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está dado por

$$W^{1,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega) : \quad \text{existe } g_i \in L^p(\Omega)\,, i = \overline{1,N} \text{ tal que}$$

$$\int_\Omega u\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\,dx \;=\; -\int_\Omega g_i\phi\,dx \qquad \forall\,\phi\;\in\; C_0^\infty(\Omega)\;\Big\}$$

En tal caso se escribe $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, y se define la norma

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \;:=\; ||u||_{L^p(\Omega)} \;+\; \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)} .$$

Puede probarse que $(\,W^{1,p}(\Omega), ||\cdot||_{W^{1,p}(\Omega)}\,)$ también es Banach. Demuestre que $W^{1,p}(\Omega)$ es separable.

48. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se dice que T es DÉBILMENTE COMPACTO si para toda sucesión acotada $\{\,x_n\,\}_{n\in\mathbf{N}}$ de X existe una subsucesión $\{\,x_n^{(1)}\,\}_{n\in\mathbf{N}}$ tal que $\{\,Tx_n^{(1)}\,\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge débilmente en Y. Pruebe que si X o Y es *reflexivo*, entonces todo operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es débilmente compacto.

49. Sean $a,\, b \in \mathbf{R}$ tal que $-\infty < a < b < +\infty$. Asuma que $C[a,b]$ es separable, y demuestre que para todo entero no negativo k, $C^k[a,b]$ también es separable.

50. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ. Considere el problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\,u \;=\; f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \frac{\partial u}{\partial\nu} \;=\; g \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \int_\Omega u\,dx \;=\; a_1\,, \tag{6}$$

donde $a_1 \in \mathbf{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, y $g \in L^2(\Gamma)$ satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_\Omega f\,dx \;+\; \int_\Gamma g\,ds \;=\; 0\,.$$

Demuestre que una formulación débil de (6) consiste en: *Hallar* $(u,\lambda) \in H^1(\Omega)\times\mathbf{R}$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx \;+\; \lambda\int_\Omega v\,dx \;=\; \int_\Omega fv\,dx \;+\; \int_\Gamma gv\,ds\;,$$

$$\mu\int_\Omega u\,dx \;=\; \mu a_1\,,$$

para todo $(v,\mu) \in H^1(\Omega)\times\mathbf{R}$. Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene única solución, la cual depende continuamente de los datos.

51. **a)** Sea X un espacio de Banach, y considere una sucesión $\{\,x_n\,\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Demuestre que $||x|| \le \liminf ||x_n||$.

    b) Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, y sea $\{\,x_n\,\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\limsup ||x_n|| \le ||x||$. Pruebe que $x_n \to x$.

52. Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : X \to Y$ un operador compacto. Demuestre que $\mathcal{R}(T)$ es separable.

IND.: Escriba $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in X : \ ||x|| \leq n \}$, y luego use que todo subconjunto relativamente compacto de un espacio métrico es separable.

53. Un importante resultado establece que *todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo*. En lo que sigue suponga que Ω es un abierto de $\mathbf{R}^n$ y que $p \in \mathbf{R}$ es tal que $p \geq 2$.

a) A partir del hecho que $\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2} \ \forall \, \alpha, \beta \geq 0$, demuestre la desigualdad de *Clarkson*:

$$\left|\left| \frac{f+g}{2} \right|\right|^p_{L^p(\Omega)} + \left|\left| \frac{f-g}{2} \right|\right|^p_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \left\{ ||f||^p_{L^p(\Omega)} + ||g||^p_{L^p(\Omega)} \right\} \quad \forall \, f, g \in L^p(\Omega).$$

b) Utilice la desigualdad anterior para probar que $L^p(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$, es uniformemente convexo y por lo tanto reflexivo. Además, deduzca que $W^{1,p}(\Omega)$ también es reflexivo.

54. Sea V un espacio de Hilbert y $a : V \times V \times V \to \mathbf{R}$ una forma trilineal tal que para todo $w \in V$, la forma bilineal $a(w; \cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbf{R}$ es acotada. Dado $F \in V'$, considere el problema: *Hallar $u \in V$ tal que*

$$a(u; u, v) = F(v) \qquad \forall \, v \in V \, . \tag{7}$$

Suponga que existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(w; v, v) \geq \alpha \, ||v||^2_V \qquad \forall \, v, w \in V \, .$$

Asuma además que existe una constante $C_0 > 0$ tal que para todo w_1, w_2, u, $v \in V$,

$$|a(w_1; u, v) - a(w_2; u, v)| \leq C_0 \, ||w_1 + w_2||_V \, ||u||_V \, ||v||_V \, ||w_1 - w_2||_V \, .$$

Encuentre una constante positiva C_1 tal que para todo $F \in V'$, $|| \, F \, ||_{V'} \leq C_1$, el problema (7) admite una única solución.

55. **a)** El TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER establece que: *Dado un subconjunto S compacto, convexo, y no vacío de un espacio vectorial de dimensión finita, y una aplicación continua T de S en S, entonces T tiene al menos un punto fijo.* Use este resultado de Brouwer para demostrar que si X es un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $|| \cdot ||$, y si F es una aplicación continua de X en X tal que, para algún $\mu > 0$, $\langle F(u), u \rangle \geq 0 \ \ \forall \, u \in X$ con $||u|| = \mu$, entonces existe $u_0 \in X$, $||u_0|| \leq \mu$, tal que $F(u_0) = 0$.

b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. El problema de Navier-Stokes, un problema de suma importancia en mecánica de fluídos, consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$-\Delta \mathbf{u} + \sum_{j=1}^{2} u_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \tag{8}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\, dx = 0\,.$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$, y

$$Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\, dx = 0 \right\}.$$

Demuestre que la formulación débil de (8) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned} \tag{9}$$

donde $a : H \times H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$, y $f \in H'$, están definidas por

$$a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\, dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i\, dx\,,$$

$$b(\mathbf{v}, p) := -\int_\Omega p\, \nabla \cdot \mathbf{v}\, dx \quad , \quad f(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx\,.$$

c) En lo que sigue considere un problema del tipo (9), no necesariamente proveniente de (8), y asuma que las siguientes hipótesis se cumplen: b es una forma bilineal acotada, b satisface la condición de Babuska-Brezzi continua, y para cada $\mathbf{w} \in H$ la aplicación $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es también una forma bilineal acotada. Sea $V := \{\, \mathbf{v} \in H : \quad b(\mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall\, q \in Q \,\}$. Demuestre que (9) puede reducirse, equivalentemente, al siguiente problema no-lineal: *hallar* $\mathbf{u} \in V$ *tal que*

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in V\,. \tag{10}$$

d) Además de lo dicho en **c)**, suponga ahora que: existe una constante $\alpha > 0$ tal que $a(\mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha\, ||\mathbf{v}||^2$ para todo $\mathbf{v} \in V$; V es separable y para cada $\mathbf{v} \in V$, la aplicación $\mathbf{u} \to a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ es *secuencialmente débilmente continua*, es decir

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u} \in V \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} a(\mathbf{u}_n; \mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v})\,.$$

Demuestre que el problema (10) tiene al menos una solución $\mathbf{u} \in V$.

IND.: Muestre primero que existe una sucesión $\{\mathbf{v}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ en V tal que para todo $m \geq 1$ el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m\}$ es linealmente independiente, y las combinaciones lineales finitas de los $\mathbf{v}_n$ constituyen un conjunto denso en V. Luego, denote por V_m al subespacio de V generado por $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m\}$, y aplique el método de Galerkin en conjunto con lo probado en parte **a)** para construir una sucesión de soluciones aproximantes.

56. Dado un abierto Ω de $\mathbf{R}^n$ y $p \in [1, +\infty)$, se define

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R} : \quad f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^p \, dx < +\infty \right\} .$$

Puede probarse que $L^p(\Omega)$, provisto de la norma $||f||_{L^p(\Omega)} := \left\{\int_\Omega |f|^p \, dx\right\}^{1/p}$ es un espacio de Banach. Además, dados $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega |f\, g| \, dx \leq ||f||_{L^p(\Omega)} \, ||g||_{L^q(\Omega)} .$$

Ahora, para un multíndice $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, y una función diferenciable u, se denota $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ y $\partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Con estas notaciones, dado $m \in \mathbf{N}$ se define el ESPACIO DE SOBOLEV de orden (m, p), como

$$W^{m,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega) : \quad \forall\, \alpha,\, |\alpha| \leq m \quad \text{existe } g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ , tal que}$$

$$\int_\Omega u \, \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \, \varphi \, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Big\}$$

En tal caso se escribe $\partial^\alpha u = g_\alpha$, y se define la norma

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right\}^{1/p} .$$

Demuestre que $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

57. Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se define el operador adjunto de Hilbert de A, y se denota A^*, como $A^* : Y \to X$, donde para cada $y \in Y$, $A^* y \in X$ es el único elemento (dado por TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ) tal que $\langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, A^* y\rangle_X \quad \forall\, x \in X$.

a) Pruebe que $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$, $||A^*|| = ||A||$ y que $(A^*)^* = A$.

b) Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.

c) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\inf_{z \in N(A)} ||x - z|| \leq \beta \, ||Ax|| \quad \forall\, x \in X$, y demuestre que $R(A) = N(A^*)^\perp$.

d) Pruebe que $A^* = R_X \, A' \, R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \to X$ y $R_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^o N(A') = N(A^*)^\perp$.

58. Sea X un espacio vectorial normado.

a) Sea Y un subespacio no denso de X. Demuestre que existe un funcional no nulo $F \in X'$ tal que $F(x) = 0$ para todo $x \in Y$.

b) Sean $x_0, x_1 \in X$ tal que $x_0 \neq x_1$. Pruebe que existe una sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X'$ tal que $||F_n|| = ||x_0 - x_1||^n$ y $F_n(x_1) = F_n(x_0) + ||x_1 - x_0||^{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

59. Sea X un espacio de Hilbert con aplicación de Riesz $R_X : X' \to X$, y sean S, T, subconjuntos de X y X', respectivamente. Establezca qué relaciones existen entre S^o y $S^\perp$, y entre ${}^oT$ y $R_X(T)$.

60. Sean U un espacio vectorial normado y V un espacio de Banach. Además, sea $P : U' \to \mathcal{L}(U,V)$ un operador lineal cerrado tal que $N(P)$ es el funcional nulo sobre U y $R(P) = \mathcal{L}(U,V)$. Demuestre que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha\,||F||_{U'} \;\leq\; ||P(F)||_{\mathcal{L}(U,V)} \quad \forall\, F \in \mathcal{D}(P)\,.$$

61. Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X' \quad \forall\, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

IND.: Hacer una demostración alternativa utilizando el TEOREMA DEL GRAFO CERRADO en vez del TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS.

62. Sean H, Q, V y W espacios de Hilbert tales que $H \overset{c}{\hookrightarrow} V$ and $Q \overset{c}{\hookrightarrow} W$. Sean $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ formas bilineales acotadas y defina

$$B : (H \times Q) \times (H \times Q) \to \mathbf{R}$$

$$B((u,\lambda),(v,\mu)) := a(u,v) + b(v,\lambda) + b(u,\mu) \quad \forall\,(u,\lambda),\,(v,\mu) \in H \times Q\,.$$

Suponga que existe una forma bilineal acotada $a_0 : H \times V \to \mathbf{R}$ tal que $\tilde{a} := a + a_0$ es $H-$elíptica; es decir, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\tilde{a}(v,v) \;\geq\; \alpha\,||v||_H^2 \quad \forall\, v \in H\,.$$

También, asuma que existen una forma bilineal acotada $b_0 : V \times W \to \mathbf{R}$ y una constante $\beta > 0$ tales que $\tilde{b} := b + b_0$ verifica

$$\sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{\tilde{b}(v,\lambda)}{||v||_H} \geq \beta||\lambda||_Q \quad \forall\,\lambda \in Q\,.$$

Demuestre que B satisface la DESIGUALDAD DE GÅRDING GENERALIZADA.

63. Sea $(V, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle)$ un espacio de Hilbert y sea $J : V \to \mathbf{R}$ un funcional nolineal. Se dice que J admite una derivada direccional en $v \in V$, en la dirección $\varphi \in V$, si la expresión $\frac{J(v+\epsilon\varphi)-J(v)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $DJ(v,\varphi)$. Entonces, J se dice diferenciable en el sentido de GATEAUX (o G-diferenciable) en $v \in V$, si $DJ(v,\varphi)$ existe para todo $\varphi \in V$.

Ahora, si J es G-diferenciable en $v \in V$ y si $DJ(v,\cdot) \in V'$, se concluye, por el Teorema de Representación de Riesz, que existe un único elemento $z \in V$ tal que $DJ(v,\varphi) = \langle z, \varphi \rangle \ \forall\, \varphi \in V$. En tal caso, se denota $z := J'(v)$ y se llama el GRADIENTE de J en v.

Se dice que J tiene segunda diferencial en el sentido de Gateaux en $v \in V$, en las direcciones φ y $\psi \in V$, si la expresión $\frac{DJ(v+\epsilon\psi,\varphi) - DJ(v,\varphi)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $D^2J(v,\varphi,\psi)$.

a) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ y considere $V := L^2(\Omega)$. Defina $J_0 : V \to \mathbf{R}$ por

$$J_0(v) := \int_\Omega (v^2 + v)\, dx \quad \forall\, v \in V$$

y calcule $J_0'(v)$ para todo $v \in V$. Qué puede decir de $J_0'(v)$ si J_0 se restringe al espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$?

b) Suponga que J es G-diferenciable en $(v + \alpha\varphi)$, en la dirección φ, para todo $\alpha \in [0,1]$. Demuestre que existe $\beta \in (0,1)$ tal que

$$J(v+\varphi) \;=\; J(v) \;+\; DJ(v + \beta\,\varphi, \varphi)\,.$$

c) Suponga que J es α-convexo, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que para todo u, $v \in V$ y para todo $\beta \in [0,1]$:

$$J((1-\beta)\,u + \beta\,v) \;\leq\; (1-\beta)\,J(u) \;+\; \beta\,J(v) \;-\; \frac{\alpha}{2}\,\beta\,(1-\beta)\,||u-v||^2\,.$$

Además, asuma que J es G-diferenciable en todo $v \in V$. Demuestre que para todo u, $v \in V$ se tiene:

$$DJ(u, u-v) \;-\; DJ(v, u-v) \;\geq\; \alpha\,||u-v||^2$$

y

$$J(v) \;\geq\; J(u) \;+\; DJ(u, v-u) \;+\; \frac{\alpha}{2}\,||v-u||^2\,.$$

d) Suponga que J es G-diferenciable en $v \in V$ y que, dada una dirección $\varphi \in V$, $D^2J(v+\alpha\varphi, \varphi, \varphi)$ existe $\forall\, \alpha \in [0,1]$. Demuestre que hay una constante $\beta \in (0,1)$ tal que

$$J(v+\varphi) \;=\; J(v) + DJ(v,\varphi) + \frac{1}{2}\,D^2J(v+\beta\varphi, \varphi, \varphi)\,.$$

64. Sea $(H, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle)$ un espacio de Hilbert y sea V un subespacio cerrado de H. El anulador (o aniquilador) de V se denota por V^o y se define como

$$V^o := \{\, F \in H' : \quad F(x) = 0 \quad \forall\, x \in V \,\}\,.$$

Demuestre que

$$H \;=\; V \,\oplus\, \mathcal{R}(V^o)\,,$$

donde $\mathcal{R} : H' \to H$ denota la aplicación de Riesz.

65. Sea X un espacio vectorial normado y sea $x_0 \in X$ tal que $|\,F(x_0)\,| \leq C_0$ para todo $F \in X'$ con $||F||_{X'} = 1$. Demuestre que $||x_0|| \leq C_0$.

66. Sea H un espacio de Hilbert y sea $B : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal tal que

    i) B es simétrica, es decir

    $$B(u,v) = B(v,u) \quad \forall\,(u,v) \in H \times H\,.$$

    ii) B es acotada, es decir existe $C_1 > 0$ tal que

    $$|B(u,v)| \leq C_1 ||u||_H ||v||_H \quad \forall\,(u,v) \in H \times H.$$

    iii) B es débilmente coerciva, es decir existe $C_2 > 0$ tal que

    $$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|B(u,v)|}{||v||_H} \geq C_2\,||u||_H \quad \forall\, u \in H\,.$$

    Demuestre que, dado $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que $B(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H$, y además, $||u||_H \leq \frac{1}{C_2}||F||_{H'}$.

67. Sea V un subespacio de un Hilbert $(Y, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle)$ y defina

    $$V^\perp := \{y \in Y : \quad \langle y, z\rangle = 0 \quad \forall\, z \in V\}\,.$$

    Si $\overline{V}$ denota la clausura de V, demuestre que $\overline{V}^\perp = V^\perp$. Concluya que V es denso en Y sí y sólo sí $V^\perp = \{0\}$.

68. Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}^n$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también es compacta, para todo entero $m \geq 2$.

69. Sean X y M espacios de Hilbert y sean $a : X \times X \to \mathbf{R}$, $b : X \times M \to \mathbf{R}$ dos formas bilineales acotadas. Suponga además que a es simétrica y semi-definida positiva sobre X. Dados $F \in X'$, $G \in M'$ se define el operador $\mathcal{J} : X \times M \to \mathbf{R}$,

    $$\mathcal{J}(v,\mu) := \frac{1}{2}\,a(v,v) + b(v,\mu) - F(v) - G(\mu)\,.$$

    Considere entonces los siguientes problemas variacionales:

    Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ *tal que*

    $$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= F(v) \quad \forall\, v \in X\,, \\ b(u,\mu) &= G(\mu) \quad \forall\, \mu \in M\,. \end{aligned} \tag{11}$$

    Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ *tal que*

    $$\mathcal{J}(u,\mu) \leq \mathcal{J}(u,\lambda) \leq \mathcal{J}(v,\lambda) \qquad \forall\,(v,\mu) \in X \times M\,. \tag{12}$$

    Demuestre que (u,λ) es solución de (11) si y sólo si (u,λ) es solución de (12).

70. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X,X)$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$

y que existen constantes α, $\beta > 0$ tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x\rangle_X \;\geq\; \alpha\, ||x||_X^2 \qquad \forall\, x \in X$$

y

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\, ||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \\ g \end{bmatrix}\,.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $||\mathbf{P}||$, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \;\leq\; C\,\{\,||f|| + ||g||\,\}\,.$$

IND.: Transforme a una ecuación equivalente en Y y luego aplique el Lema de Lax-Milgram.

71. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \to X$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$

que $\mathbf{P}$ es NOLINEAL, y que existen constantes M, α, $\beta > 0$ tales que

$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \;\leq\; M\,||x-\bar{x}||_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x-\bar{x}\rangle_X \;\geq\; \alpha\,||x-\bar{x}||_X^2 \quad \forall\, x,\, \bar{x} \in X\,,$$

y

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\, ||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \\ g \end{bmatrix}\,.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de M, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \;\leq\; C\,\{\,||f|| + ||g|| + ||\mathbf{P}(0)||\,\}\,.$$

72. Sea $\Omega := (0,3)$ y considere el problema de valores de contorno: $-u'' + (x+1)\,u = x$ en Ω, $u(0) = u(3) = 0$. Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$. Considere la partición uniforme $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio

$$H_2 := \{\, v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \quad \text{y} \quad v\,|_{[x_j, x_{j-1}]} \text{ es un polinomio de grado } \leq 1\,, \forall\, j \in \{1,2,3\}\,\}\,.$$

IND.: Notar que $H_2 = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$, donde $e_j \in H_2$ es tal que $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo $i,\, j \in \{1,2\}$.

73. **a)** Sea S un subconjunto de un Hilbert H y sea M el subespacio cerrado generado por S. Pruebe que $S^\perp$ es un subespacio cerrado de H, $M^\perp = S^\perp$, y $M = (S^\perp)^\perp$.

b) Sea V un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $H = \overline{V} \oplus V^\perp$.

74. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. EL PROBLEMA DE STOKES consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$\begin{aligned} -\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\,dx = 0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q\,dx = 0 \right\}$. Demuestre que la formulación débil de (13) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{v},p) &= F(\mathbf{v}) \quad \forall\,\mathbf{v} \in H\,, \\ B(\mathbf{u},q) &= 0 \quad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \to \mathbf{R}$, $B : H \times Q \to \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\,dx\,,$$

$$B(\mathbf{v},p) := -\int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v}\,dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,dx\,.$$

75. **a)** Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de HILBERT. Dados $n \in \mathbf{N}$, $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq H$ y $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subseteq H'$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} F_j(u)\,p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H,H)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A^* : H \to H$.

b) Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el espacio de HILBERT $L^2(0,1)$ provisto del producto escalar

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u(t)\, v(t)\, dt \qquad \forall\, u\,,\ v \in H\,.$$

Dados los polinomios $p_j \in H$, $j \in \{1, ..., n\}$, con $p_j(t) = t^j\ \forall\, t \in (0,1)$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que A es lineal, acotado y AUTOADJUNTO, esto es $A \in \mathcal{L}(H, H)$ y $A = A^*$.

76. Sean X e Y espacios de Banach, y sea $A : X \to Y$ un operador lineal cerrado con dominio $D(A)$ e imagen $R(A)$. Demuestre que son equivalentes:

a) El operador A es inyectivo, y A^{-1} es acotado sobre $R(A)$.

b) Existe una constante positiva C tal que $\|Ax\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in D(A)$.

c) $R(A)$ es cerrado en Y, y A es inyectivo.

77. Sea M un subespacio cerrado de un Hilbert H. Por el Teorema de Proyección, cada $x \in H$ puede escribirse únicamente en la forma $x = y + z$, con $y \in M$ y $z \in M^{\perp}$. El punto $y \in M$ se llama la PROYECCIÓN de x en M, y el operador $P := X \to M, \quad Px = y$, se llama la proyección sobre M. También se denota $P := P_M$ y se dice que P es una proyección.

i) Pruebe que si P es una proyección, entonces P es autoadjunto, $P^2 = P$, y $\|P\| = 1$ si $P \neq 0$.

ii) Pruebe que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es autoadjunto y $P^2 = P$, entonces P es una proyección sobre algún subespacio cerrado de H.

78. **a)** Sea S un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $S^{\perp} = \bar{S}^{\perp}$.

b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Encuentre y caracterice el subespacio V de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus V$.

79. Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbf{R}$ tal que la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es uniformemente elíptica. Esto significa que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha}\, \|v_n\|_H^2$ $\forall\, v_n \in H_n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u,v) \;=\; F(v) \qquad \forall\, v \in H$$

y

$$A_n(u_n,v_n) \;=\; F(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

b) Demuestre que existe $C>0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$\|u-u_n\|_H \;\leq\; C \inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u-v_n\|_H \;+\; \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|A(v_n,w_n)-A_n(v_n,w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}.$$

80. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbf{R}$ una función continua para la cual existen constantes M, $\beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Defina el conjunto

$$S \;:=\; \left\{\, v \in H_0^1(\Omega) : \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \;\leq\; 1 \,\right\},$$

y demuestre que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ existe un único $g \in S$ tal que

$$\int_\Omega \kappa(x)\, \|\nabla u(x) - \nabla g(x)\|_{\mathbf{R}^n}^2\, dx \;=\; \min_{v \in S} \int_\Omega \kappa(x)\, \|\nabla u(x) - \nabla v(x)\|_{\mathbf{R}^n}^2\, dx\,.$$

81. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H,Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

a) Demuestre que $\displaystyle\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \;=\; \sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{v \in V^\perp \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \;\geq\; \beta\, \|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$, y pruebe que $H \;=\; R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

82. Sean X, Y espacios de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\mathcal{R}(A) = Y$, y sea $V = N(A)$. Dado el operador de proyección ortogonal $P : X \to V$, considere $B : Y \to X$ tal que $B(y) = x - P(x)$ para todo $y \in Y$, donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$.

a) Demuestre que B está bien definido y que B es una biyección lineal y acotada de Y en $V^\perp$. Pruebe, además, que B es un *inverso a derecha* de A, esto es $AB(y) = y$ para todo $y \in Y$.

b) Defina $A_0 : V^\perp \to Y$ como $A_0(x) = A(x)$ para todo $x \in V^\perp$, es decir $A_0 = A|_{V^\perp}$, y pruebe que $A_0^{-1} = B$.

c) Extienda los resultados anteriores al caso en que $\mathcal{R}(A)$ es un subespacio CERRADO propio de Y.

83. (Lema de Aubin-Nitsche). Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y el operador identidad $\mathbf{i} : V \to H$ es continuo. Sea $A : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y V-elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \to V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface

$$A(v, \mathbf{P}(g)) \,=\, \langle g, v\rangle_H \quad \forall\, v \in V\,.$$

Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V, denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in V\,,$$

y

$$A(u_h, v_h) \,=\, F(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$||u - u_h||_H \,\leq\, C\,||u - u_h||_V \sup_{g\in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{v_h\in V_h} ||\mathbf{P}(g) - v_h||_V \right\}.$$

84. Dados $\Omega := (0,1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$-\,u'' \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) \,=\, 0\,, \quad u'(1) \,=\, 1\,. \tag{14}$$

a) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional mixta de (14) se reduce a: *Hallar* $(\sigma, (u, \varphi)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, (u, \varphi)) \,&=\, F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma, (v, \psi)) \,&=\, G((v, \psi)) \quad \forall\, (v, \psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{15}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) :=\, & \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx \qquad \forall\, \sigma,\, \tau \in H\,, \\ b(\tau, (v, \psi)) :=\, & \int_\Omega v\,\tau'\,dx \,+\, \psi\,\tau(1) \quad \forall\, (\tau, (v, \psi)) \in H \times Q\,. \end{aligned}$$

b) Defina los funcionales F y G, y aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (15) tiene una única solución.

85. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert complejo, y sean $u\,,\ v \,\in\, H$, $u \neq v$, tales que $\|u\| \,=\, \|v\|$. Defina $w \,:=\, u - v$ y considere la proyección ortogonal $\mathbf{P} \,:\, H \to S^\perp$, donde S es el subespacio generado por w. Demuestre que

$$\mathbf{P}(u) \,=\, \mathbf{P}(v) \,=\, \frac{u+v}{2} \,+\, \left\{ \frac{\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(\langle u, v\rangle)}{\|w\|^2} \right\} w\,.$$

Qué sucede cuando H es un Hilbert real ? Interprete gráficamente.

86. Sean $\Omega =]a,b[$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno

$$u^{(4)} \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) \,=\, 0\,. \tag{16}$$

i) Defina la incógnita auxiliar $\sigma := u''$ en Ω y demuestre que una formulación variacional MIXTA de (16) se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx \,+\, \int_\Omega u'\,\tau'\,dx \,&=\, 0 \qquad \forall\,\tau \in H^1(\Omega)\,, \\ \int_\Omega v'\,\sigma'\,dx \,&=\, -\int_\Omega f\,v\,dx \qquad \forall\,v \in H_0^1(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

ii) Aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (17) tiene una única solución que depende continuamente del dato f.

87. (LEMA DE FORTIN). Sean H, Q espacios de Hilbert, y sea $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} \,\geq\, \beta\,\|q\|_Q \qquad \forall\,q \in Q\,. \tag{18}$$

Sean $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{Q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, y asuma que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ tal que

$$b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) \,=\, 0 \qquad \forall\,q_n \in Q_n\,.$$

Suponga que la familia de operadores $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H,H_n)} \leq C$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y demuestre que existe $\beta^* > 0$, independiente de n, tal que

$$\sup_{\substack{v_n \in H_n \\ v_n \neq 0}} \frac{b(v_n, q_n)}{\|v_n\|_H} \,\geq\, \beta^*\,\|q_n\|_Q \qquad \forall\,q_n \in Q_n\,, \quad \forall\,n \in \mathbf{N}\,.$$

88. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i$ $\forall\,i \in \{1, ..., n\}$, $\forall\,x := (x_1, ..., x_n)^{\mathbf{T}} \in \Omega$.

a) (DESIGUALDAD DE POINCARÉ GENERALIZADA). Defina la aplicación

$$|||v||| \,:=\, \left\{ |v|^2_{H^2(\Omega)} \,+\, \sum_{i=0}^{n} |\,\langle v, p_i\rangle_{H^2(\Omega)}\,|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\,v \in H^2(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \, |||v||| \, \leq \, \|v\|_{H^2(\Omega)} \, \leq \, C_2 \, |||v||| \quad \forall \, v \in H^2(\Omega) \, .$$

IND.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que $\forall \, n \in \mathbf{N}$ existe $v_n \in H^2(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} > n \, |||v_n|||$. Luego, defina $w_n := \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}}$, observe que $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$, note que $|||w_n||| < \frac{1}{n}$, y aplique el hecho que la inclusión de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ es compacta.

b) (LEMA DE DENY-LIONS). Considere el espacio cuociente $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ con norma $\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} := \inf\limits_{p \in P_1(\Omega)} \|v - p\|_{H^2(\Omega)}$, y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \, := \, |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall \, [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega) \, .$$

Demuestre que $| \, \cdot \, |_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ está bien definida y que existe $C > 0$ tal que

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \, \leq \, \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$$

$$\leq \, C \, |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \qquad \forall \, [v] \, \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega) \, .$$

IND.: Note que para todo $p \in P_1(\Omega)$ y para todo α con $|\alpha| = 2$ se tiene $\partial^\alpha p = 0$. Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.

C) (LEMA DE BRAMBLE-HILBERT). Sea $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\Pi(p) = p \; \forall \, p \in P_1(\Omega)$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \, \leq \, C \, |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall \, v \, \in \, H^2(\Omega) \, .$$

IND.: Note que $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v - p) \; \forall \, p \in P_1(\Omega)$, y luego aplique el Lema de Deny-Lions.

89. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ y sea $\mathcal{T} := \{T_1, T_2, ..., T_N\}$ una triangularización de Ω, es decir:

i) $\bar{T}_j$ es un triángulo con interior no-vacío $\quad \forall \, j \in \{1, ..., N\}$,

ii) $T_i \cap T_j \, = \, \phi \quad \forall \, i \neq j$, y

iii) $\bar{\Omega} \, = \, \cup \{ \, \bar{T}_j : \quad j \in \{1, ..., N\} \, \}$.

a) Defina el subespacio de $[L^2(\Omega)]^2$

$$H \, := \, \{ \, \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \text{div}(\boldsymbol{\tau}) \, \in \, L^2(T_j) \quad \forall \, j \, \in \, \{1, ..., N\} \, \} \, ,$$

provisto de la norma

$$\|\boldsymbol{\tau}\| \, := \, \left\{ \, \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \, + \, \sum_{j=1}^{N} \, \|\text{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{L^2(T_j)} \, \right\}^{1/2} \qquad \forall \, \boldsymbol{\tau} \in H \, ,$$

y demuestre que $(H, \|\cdot\|)$ es un espacio de Hilbert real.

IND.: note que la pertenencia local $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j)$ está dada en el sentido distribucional, lo cual significa que existe $z_j \in L^2(T_j)$ tal que

$$-\int_{T_j} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx = \int_{T_j} z_j\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(T_j)\,.$$

En este caso se escribe $z_j = \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})$ en T_j (distribucionalmente).

b) Pruebe que existe un único $\boldsymbol{\sigma} \in H$ tal que $\|\boldsymbol{\sigma}\| \leq |\Omega|^{1/2}$ y

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \sum_{j=1}^{N} \int_{T_j} (\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) - 1\,)\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,.$$

90. Sea $\Omega := (0,1)\times(0,1) \subseteq \mathbf{R}^2$ y considere el espacio de Hilbert $(H(\mathrm{div};\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde

$$H(\mathrm{div};\Omega) := \{\, \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(\Omega)\,\}$$

y

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau}\rangle := \int_\Omega \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\zeta})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \qquad \forall\, \boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

Además, sea S el subespacio de $H(\mathrm{div};\Omega)$ dado por

$$S := \{\boldsymbol{\tau} :\ \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma\, x_1, \beta + \gamma\, x_2)\ \forall\, x := (x_1, x_2) \in \Omega;\ \text{con } \alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbf{R}\,\}\,,$$

y sea $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ definida por $\quad \boldsymbol{\sigma}(x) = (x_1 x_2, x_1 + x_2) \quad \forall\, x := (x_1, x_2) \in \Omega$. Aplique el teorema de caracterización respectivo y encuentre la mejor aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$ por elementos de S, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

91. Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere un funcional $F_n \in H_n'$ y una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbf{R}$. Suponga también que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha}\, \|v_n\|_H^2 \quad \forall\, v_n \in H_n, \forall\, n \in \mathbf{N}$.

a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in H \qquad \text{y} \qquad A_n(u_n, v_n) = F_n(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$\|u - u_n\|_H \leq C \left(\inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H + \|\mathbf{A}(v_n)\circ \mathbf{i}_n - \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H_n'} \right\} + \|F\circ \mathbf{i}_n - F_n\|_{H_n'} \right),$$

donde $\mathbf{A} : H \to H'$ y $\mathbf{A}_n : H_n \to H_n'$ son los operadores lineales y acotados inducidos por A y A_n, respectivamente, e $\mathbf{i}_n : H_n \to H$ es la inyección canónica, esto es $\ \mathbf{i}_n(v_n) = v_n \quad \forall\ v_n \in H_n$.

92. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $P \in \mathcal{L}(H,H)$, no trivial. Se dice que P es un PROYECTOR si satisface $P^2 = P$. En tal caso se dice que P es un PROYECTOR ORTOGONAL si además verifica que $\langle u, v\rangle = 0 \quad \forall\, u \in R(P), \quad \forall\, v \in N(P)$.

a) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector entonces $H = N(P) \oplus R(P)$ y $\|P\| \geq 1$.

b) Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) P es un proyector ortogonal.
ii) $R(P) = N(P)^{\perp}$.
iii) P es autoadjunto

c) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector ortogonal entonces $\|P\| = 1$.

93. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno: $-\Delta u = f$ en Ω, $u = 0$ en $\partial\Omega$. Se puede demostrar que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega u\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx - \int_\Omega v\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx \tag{19}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω representa una incógnita adicional. Además, a partir de esta relación, y dado $\delta \in \mathbf{R}$, se deduce que

$$\delta \int_\Omega (\nabla u - \boldsymbol{\sigma})\cdot(\nabla v + \boldsymbol{\tau})\, dx = 0 \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega), \tag{20}$$

y también

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx = -\int_\Omega f\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,. \tag{21}$$

De este modo, sumando (19), (20) y (21), se obtiene una formulación variacional mixta modificada, la cual tiene la forma: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) = F(\boldsymbol{\tau}, v) \qquad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H}\,, \tag{22}$$

donde $A : \mathbf{H}\times\mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es una forma bilineal y $F : \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es un funcional lineal.

Demuestre que, eligiendo δ convenientemente, el problema (22) tiene una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

IND.: La norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$, es decir existe $c > 0$ tal que

$$c\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq |v|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

94. Sean $n \in \mathbf{N}$ y $X := \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$, el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, provisto del producto escalar $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^t\, B)$ $\forall\, A,\, B \in X$.

a) Demuestre que $X = X_{\mathtt{sim}} \oplus X_{\mathtt{asim}}$, donde

$$X_{\mathtt{sim}} = \{\, A \in X : \quad A^t = A \,\} \quad \text{y} \quad X_{\mathtt{asim}} = \{\, A \in X : \quad A^t = -\,A \,\}\,.$$

b) Sea $C := (c_{ij})_{n\times n} \in X$ tal que $\quad c_{ij} = 1 \;\; \forall\, i \geq j \quad$ y $\quad c_{ij} = 0 \;\; \forall\, i < j$. Encuentre las mejores aproximaciones de C por matrices de $X_{\mathtt{sim}}$ y $X_{\mathtt{asim}}$, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

95. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H.

a) Sea $y \in H$ y suponga que existe $\tilde{y} \in H$ tal que

$$\langle A(x), y\rangle \;=\; \langle x, \tilde{y}\rangle \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\,.$$

Demuestre que dicho $\tilde{y}$ es único.

b) Considere el conjunto

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) := \{y \in H :\ \text{existe } \tilde{y} \in H \text{ tal que } \langle A(x), y\rangle \;=\; \langle x, \tilde{y}\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\}\,,$$

y defina el operador $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \to H$ dado por $\tilde{A}(y) := \tilde{y} \quad \forall\, y \in H$. Demuestre que $\tilde{A}$ es lineal y cerrado.

96. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(H, H)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : H \to H$, y tal que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. El objetivo de este ejercicio es probar que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$, para cuyo efecto proceda como se indica:

a) Sea S un subespacio de dimensión 2 de H y sea $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S, S)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : S \to S$, y tal que $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}$. Pruebe que $S = R(\mathbf{Q}) \oplus R(\mathbf{I} - \mathbf{Q})$ y concluya que existen vectores no nulos p, q, r, $s \in S$ que satisfacen $\langle p, q\rangle = \langle r, s\rangle = 1$, tales que

$$\mathbf{Q}(v) \;=\; \langle q, v\rangle\, p \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) \;=\; \langle s, v\rangle\, r \qquad \forall\, v \in S\,.$$

b) A partir de la identidad $\; v \;=\; \mathbf{Q}(v) \;+\; (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) \quad \forall\, v \in S$, deduzca que $\|p\|^2\, \|q\|^2 \;=\; \|r\|^2\, \|s\|^2 \;=\; 1 \;-\; \langle p, r\rangle\, \langle q, s\rangle$ y concluya así que

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S,S)} \;=\; \|\mathbf{I} - \mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S,S)}.$$

c) Dado $x \in H$ tal que $\|x\| \;=\; 1$, considere el subespacio S generado por los vectores x y $\mathbf{P}(x)$ y defina $\mathbf{Q} := \mathbf{P}|_S$. Demuestre que $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S, S)$, observe que la dimensión de S es ≤ 2, y luego pruebe, usando b), que $\|(\mathbf{I} - \mathbf{P})(x)\| \;\leq\; \|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

d) Concluya, a partir de c), que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} \;=\; \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

97. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ.

a) Considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ con norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y semi-norma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$. Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|^2_{H^1(\Omega)} + \left(\int_\Omega v\, dx \right)^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\, |||v||| \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2\, |||v||| \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

IND.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que $\forall\, k \in \mathbf{N}$ existe $v_k \in H^1(\Omega)$ tal que $\|v_k\|_{H^1(\Omega)} > k\, |||v_k|||$. Recuerde que la inclusión de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, y que si $w \in L^2(\Omega)$ es tal que $\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \quad \forall\, i \in \{1, ..., n\}$, entonces necesariamente w es constante en Ω.

b) Considere el problema de valores de contorno:

$$-\Delta\, u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \int_\Omega u\, dx = 0\,,$$

donde $f \in L^2(\Omega)$ es tal que $\displaystyle\int_\Omega f\, dx = 0$, y demuestre que su formulación débil se reduce a: Hallar $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \lambda \int_\Omega v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

$$\mu \int_\Omega u\, dx = 0 \qquad \forall\, \mu \in \mathbf{R}\,.$$

Utilice la teoría de Babuska-Brezzi para probar que este problema tiene solución única, la cual depende continuamente de f.

98. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ una base de un subespacio U de X.

a) Demuestre que existen $F_1, F_2, ..., F_n \in X'$ tales que $F_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\}$.

b) Pruebe que $X = U \oplus V$, donde $V := {}^\circ\{F_1, F_2, ..., F_n\}$.

99. Dado $p \geq 1$, considere el espacio vectorial normado

$$\ell_p(\mathbb{C}) := \{\, \mathbf{x} := \{x_n\}_{n \in N} : \quad x_n \in \mathbb{C} \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^p < +\infty \,\}\,,$$

provisto de la suma y multiplicación por escalar usuales, y cuya norma está dada por $\|\mathbf{x}\| := \left\{ \displaystyle\sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^p \right\}^{1/p}$. Demuestre que $\ell_p(\mathbb{C})$ es separable.

100. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $J : V \to \mathbf{R}$ un funcional NO-LINEAL. Se dice que J es CONTINUO (resp. DÉBILMENTE CONTINUO) si para toda sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq V$ tal que $v_n \to v \in V$ (resp. $v_n \overset{w}{\to} v \in V$) se tiene que

$$J(v_n) \to J(v) \in \mathbf{R}\,.$$

a) Determine cual de estos dos conceptos de continuidad implica al otro.

Un subconjunto U de V se dice DÉBILMENTE COMPACTO si toda sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de U posee una subsucesión débilmente convergente en U.

b) Pruebe que si U es un subconjunto compacto de V y $J : V \to \mathbf{R}$ es continuo (o bien si U es un subconjunto débilmente compacto de V y $J : V \to \mathbf{R}$ es débilmente continuo), entonces existe $u \in U$ tal que

$$J(u) = \min_{v\in U} J(v)\,.$$

Un subconjunto U de V se dice DÉBILMENTE CERRADO si el límite de toda sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de U que converge débilmente, pertenece a U.

c) Demuestre que si V es reflexivo, U es un subconjunto acotado y débilmente cerrado de V, y $J : V \to \mathbf{R}$ es débilmente continuo, entonces existe $u \in U$ tal que

$$J(u) = \min_{v\in U} J(v)\,.$$

101. (OPERADOR NORMAL). Sea H un Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Se dice que $A \in \mathcal{L}(H, H)$ es un operador normal si $A^* A = A A^*$. Pruebe en este caso que:

a) $\lambda \in VP(A)$ si y sólo si $\bar{\lambda} \in VP(A^*)$. Concluya además que $N(A - \lambda I) = N(A^* - \bar{\lambda} I)$.

b) Si $\lambda, \mu \in VP(A)$, $\lambda \neq \mu$, entonces $N(A - \lambda I) \perp N(A^* - \mu I)$.

102. (VALORES PROPIOS DE Δ). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Lipschitz-continua. Demuestre que existen una base Hilbertiana $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de $L^2(\Omega)$, y una sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de números reales con $\lambda_n > 0$, y $\lambda_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$, tales que $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, y $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$ en Ω. Se dice aquí que los λ_n son los valores propios del Laplaciano (con condición de Dirichlet), y que las e_n son las funciones propias asociadas.

103. (ESPECTRO AUTOADJUNTO). Sean H un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(H, H)$ un operador autoadjunto. Dado un subespacio cerrado S de H invariante con respecto a A, denote por $\sigma(A, S)$ y $\sigma(A, S^\perp)$ los espectros de las restricciones $A|_S$ y $A|_{S^\perp}$, respectivamente. Demuestre que $\sigma(A) = \sigma(A, S) \cup \sigma(A, S^\perp)$.