UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREA / PRUEBA 2

MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS I (525539).

Lunes, 19 de Julio de 2010 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y vector normal $\boldsymbol{\nu}$. Dados $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^n$ y $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^n$, la formulación en desplazamiento del problema de elasticidad lineal con condiciones de contorno de Dirichlet, consiste en: Hallar $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^n$ tal que

$$-\mu\,\Delta\mathbf{u} - (\lambda+\mu)\,\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{1}$$

donde $\lambda\,,\ \mu > 0$ son las constantes de Lamé del material respectivo.

a) Defina el pseudoesfuerzo $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} := \mu\,\nabla\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathbf{I}$ en Ω, y recuerde que $\mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega) = H_0 \oplus \mathbb{R}\,\mathbf{I}$, donde

$$H_0 := \left\{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega) : \int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau}) = 0\right\}$$

e $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Luego, considere la descomposición $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + c\,\mathbf{I}$, con $\boldsymbol{\sigma} \in H_0$, $c \in \mathbb{R}$, denote por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la paridad dual entre $[H^{-1/2}(\Gamma)]^n$ y $[H^{1/2}(\Gamma)]^n$, y demuestre que (1) da origen a la siguiente formulación mixta: Hallar $(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) \in H_0 \times [L^2(\Omega)]^n$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathtt{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}} + \frac{1}{n(n\lambda + (n+1)\,\mu)}\int_\Omega \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} \;&=\; F(\boldsymbol{\tau})\,,\\ \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} \;&=\; G(\mathbf{v})\,,\end{aligned} \tag{2}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \in H_0 \times [L^2(\Omega)]^n$, donde

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \langle\boldsymbol{\tau}\,\boldsymbol{\nu},\mathbf{g}\rangle - \frac{1}{n\,|\Omega|}\int_\Gamma \mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\nu}\int_\Omega \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau} \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega)\,,$$

y

$$G(\mathbf{v}) := -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \qquad \forall\,\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^n\,.$$

b) Use la teoría de Babuška-Brezzi para probar que (2) está bien propuesto.

c) Use la teoría de Babuška-Brezzi discreta para definir, explícitamente, un esquema de Galerkin estable para (2).

2. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Lipschitz continua Γ. Dados $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$, el PROBLEMA DE ELASTICIDAD con condiciones de contorno de tracción (Neumann) consiste en hallar un tensor simétrico $\boldsymbol{\sigma}$ (esfuerzos) y un vector $\mathbf{u}$ (desplazamientos), tales que

$$\boldsymbol{\sigma} \,=\, \mathcal{C}\,\mathbf{e}(\mathbf{u})\,, \quad \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\sigma}) \,=\, -\,\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \boldsymbol{\sigma\nu} \,=\, \mathbf{g} \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{3}$$

Aquí, $\mathcal{C}$ es el operador de elasticidad dado por la ley de Hooke (con constantes de Lamé λ, $\mu > 0$), $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\,(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\mathtt{t}})$ es el tensor de pequeñas deformaciones, $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal a Γ, y los datos satisfacen la condición de compatibilidad:

$$\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\chi} \,+\, \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\chi}\rangle \,=\, 0 \qquad \forall\,\boldsymbol{\chi} \,\in\, \mathbb{RM}(\Omega)\,, \tag{4}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la paridad dual de $[H^{-1/2}(\Gamma)]^2$ y $[H^{1/2}(\Gamma)]^2$ con respecto al producto escalar de $[L^2(\Gamma)]^2$, y $\mathbb{RM}(\Omega) \,:=\, [\mathbb{P}_0(\Omega)]^2 \,\oplus\, \mathbb{P}_0(\Omega) \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ es el espacio de movimientos rígidos en Ω. Puede probarse que (4) constituye una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución de (3).

a) Demuestre que, en primera instancia, la formulación variacional mixta de (3) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{u}}) := (\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\gamma})) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times \mathbf{Q}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \,+\, \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{u}}) \,&=\, 0 \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau} \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)\,, \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{v}}) \,&=\, -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \,+\, \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}\rangle \quad \forall\,\vec{\mathbf{v}} := (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) \,\in\, \mathbf{Q}\,, \end{aligned} \tag{5}$$

donde $\mathbf{Q} := [L^2(\Omega)]^2 \times [H^{1/2}(\Gamma)]^2 \times [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{\mathtt{asym}}$, y

$$\mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{v}}) \,:=\, \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \,+\, \langle \boldsymbol{\tau\nu}, \boldsymbol{\psi}\rangle \,+\, \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta} \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{v}}) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times \mathbf{Q}\,.$$

b) Pruebe que el espacio de soluciones del problema homogéneo asociado a (5) está dado por $\Big\{(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{u}}) :\; \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}\,,\; \vec{\mathbf{u}} = (\boldsymbol{\chi}, -\boldsymbol{\chi}|_\Gamma, \nabla\boldsymbol{\chi})\,,\; \boldsymbol{\chi} \in \mathbb{RM}(\Omega)\Big\}$.

c) Agregue a (5) la condición de unicidad $\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\chi}\cdot\mathbf{u} \,=\, 0\;\forall\,\boldsymbol{\chi} \,\in\, \mathbb{RM}(\Omega)$, y pruebe que la formulación variacional resultante es equivalente a: Hallar $((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}), \vec{\mathbf{u}}) := ((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}), (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\gamma})) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathcal{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\chi} \,+\, \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{u}}) \,+\, \int_\Omega \boldsymbol{\chi}\cdot\mathbf{u} = 0 \quad &\forall\,(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\chi}) \in \mathbf{H}\,, \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{v}}) \,+\, \int_\Omega \boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{v} = -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \,+\, \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}\rangle \quad &\forall\,\vec{\mathbf{v}} := (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{Q}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

donde $\mathbf{H} \,:=\, H(\mathrm{div};\Omega) \times \mathbb{RM}(\Omega)$.

d) Use la teoría de Babuška-Brezzi para probar que (6) está bien propuesto.

3. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ Lipschitz continua, y considere datos $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$. El Problema de Stokes con condiciones de contorno de Neumann consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{aligned} -\mu\,\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mu\,\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - p\,\mathbf{n} &= \mathbf{g} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \end{aligned} \tag{7}$$

donde $\mu > 0$ es la viscosidad del fluido y $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ.

a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\boldsymbol{\varphi} := -\,\mathbf{u}$ en Γ y $\boldsymbol{\sigma} := \mu\,\nabla\mathbf{u} - p\,\mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{2\times 2}$, y pruebe que, eliminando p, se obtiene, en primera instancia, la siguiente formulación variacional mixta: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})) &= 0 \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) &= -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle \quad \forall\,(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in Q\,, \end{aligned} \tag{8}$$

donde $H := \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega)$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times [H^{1/2}(\Gamma)]^2$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la paridad dual entre $[H^{-1/2}(\Gamma)]^2$ y $[H^{1/2}(\Gamma)]^2$, y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales acotadas definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{\mu} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} \quad \text{y} \quad b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) := \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} + \langle \boldsymbol{\tau}\,\mathbf{n}, \boldsymbol{\psi} \rangle\,.$$

b) Asuma condiciones de compatibilidad adecuadas sobre $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$, identifique el espacio de soluciones del problema homogéneo asociado a (8), y luego aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que una versión convenientemente modificada de (8) está bien propuesta.

Cada problema vale 3 puntos. Elija solo 2 de ellos.

GNG/gng