UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

SOLUCION DE LA EVALUACION 1

Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401).

Miércoles 19 de Mayo de 2004 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{T} := \{T_1, T_2, ..., T_N\}$ una triangularización de Ω, es decir:

   i) $\bar{T}_j$ es un triángulo con interior no-vacío $\quad \forall\, j \in \{1, ..., N\}$,

   ii) $T_i \cap T_j \,=\, \phi \quad \forall\, i \neq j$, y

   iii) $\bar{\Omega} \,=\, \cup \{ \bar{T}_j : \quad j \in \{1, ..., N\} \}$.

   a) Defina el subespacio de $[L^2(\Omega)]^2$

   $$H \,:=\, \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \,\in\, L^2(T_j) \quad \forall\, j \,\in\, \{1, ..., N\} \} \,,$$

   provisto de la norma

   $$\|\boldsymbol{\tau}\| \,:=\, \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \,+\, \sum_{j=1}^{N} \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{L^2(T_j)} \right\}^{1/2} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H \,,$$

   y demuestre que $(H, \|\cdot\|)$ es un espacio de Hilbert real.
   Indicación: note que la pertenencia local $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \,\in\, L^2(T_j)$ está dada en el sentido distribucional, lo cual significa que existe $z_j \in L^2(T_j)$ tal que

   $$- \int_{T_j} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx \,=\, \int_{T_j} z_j \, \varphi \, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(T_j) \,.$$

   En este caso se escribe $z_j = \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})$ en T_j (distribucionalmente).

   b) Pruebe que existe un único $\boldsymbol{\sigma} \in H$ tal que $\|\boldsymbol{\sigma}\| \,\leq\, |\Omega|^{1/2}$ y

   $$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx \,+\, \sum_{j=1}^{N} \int_{T_j} (\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) \,-\, 1 \,) \, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx \,=\, 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H \,.$$

Solución:

a) *Notemos primero que la norma de H está inducida por el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$, donde*

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle \,:=\, \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx \,+\, \sum_{j=1}^{N} \int_{T_j} \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) \, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx \qquad \forall\, \boldsymbol{\sigma} \,,\ \boldsymbol{\tau} \,\in\, H \,.$$

Ahora, sea $\{\boldsymbol{\sigma}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de Cauchy en* H. *Se sigue que* $\{\boldsymbol{\sigma}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de Cauchy en* $[L^2(\Omega)]^2$ *y* $\{\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}_n)|_{T_j}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de Cauchy en* $L^2(T_j)$ *para cada* $j \in \{1, ..., N\}$. *Así, dado que* $[L^2(\Omega)]^2$ *y* $L^2(T_j)$ *son completos, se deduce que existen* $\boldsymbol{\sigma} \in [L^2(\Omega)]^2$ *y* $z_j \in L^2(T_j)\ \forall\, j \in \{1, ..., N\}$, *tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|_{[L^2(\Omega)]^2} = 0 \ y \ \lim_{n\to\infty} \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}_n) - z_j\|_{L^2(T_j)} = 0 \quad \forall\, j \in \{1, ..., N\}\,.$$

Por otro lado, para cada $\varphi \in C_0^\infty(T_j)$ *se tiene*

$$- \int_{T_j} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\sigma}\, dx = - \lim_{n\to\infty} \int_{T_j} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\sigma}_n\, dx \quad (\textit{porque } \boldsymbol{\sigma}_n \textit{ converge a } \boldsymbol{\sigma} \textit{ en } [L^2(T_j)]^2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{T_j} \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}_n)\, \varphi\, dx \quad (\textit{porque } \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}_n) \in L^2(T_j) \textit{ (distribucionalmente)})$$

$$= \int_{T_j} z_j\, \varphi\, dx \quad (\textit{porque } \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}_n) \textit{ converge a } z_j \textit{ en } L^2(T_j))\,,$$

lo cual prueba que $\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) = z_j$ *en* T_j *(distribucionalmente). De este modo se concluye que* $\boldsymbol{\sigma} \in H$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\| = 0$.

b) *Consideremos el funcional* $F : H \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \sum_{j=1}^{N} \int_{T_j} \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,.$$

Es fácil ver que F *es lineal. Además, usando desigualdad triangular y desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene*

$$|\, F(\boldsymbol{\tau})\, | \le \sum_{j=1}^{N} \left| \int_{T_j} \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \right| \le \sum_{j=1}^{N} |T_j|^{1/2}\, \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{L^2(T_j)} \le |\Omega|^{1/2}\, \|\boldsymbol{\tau}\|\,,$$

lo cual prueba que F *es acotado y* $\|F\| \le |\Omega|^{1/2}$. *Por lo tanto, aplicando el Teorema de Representación de Riesz, se deduce que exite un único* $\boldsymbol{\sigma} \in H$ *tal que* $\|\boldsymbol{\sigma}\| = \|F\|$ *y*

$$F(\boldsymbol{\tau}) = \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,$$

lo cual corresponde exactamente a lo pedido.

---

2. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert **complejo**, y sean $u\,,\ v \in H$, $u \neq v$, tales que $\|u\| = \|v\|$. Defina $w := u - v$ y considere la proyección ortogonal $\mathbf{P} : H \to S^\perp$, donde S es el subespacio generado por w. Demuestre que

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{P}(v) = \frac{u+v}{2} + \left\{ \frac{\mathbf{i}\, \mathrm{Im}(\langle u, v \rangle)}{\|w\|^2} \right\} w\,.$$

Qué sucede cuando H es un Hilbert **real** ? Interprete gráficamente.

Solución: *Recordemos primero, en virtud del Teorema de Descomposición Ortogonal, que* $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}$*, donde* $\mathbf{Q}$ *es la proyección ortogonal sobre el subespacio* S*. Se sigue que*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(u) &= u - \mathbf{Q}(u) = u - \frac{\langle u, w\rangle}{\|w\|^2}\, w = u - \frac{\langle w + v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w \\
&= u - \left\{ \frac{\|w\|^2 + \langle v, w\rangle}{\|w\|^2} \right\} w = u - w - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w \\
&= v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w = v - \mathbf{Q}(v) = \mathbf{P}(v)\,.
\end{aligned}$$

Ahora, usando que $\|u\| = \|v\|$*, se deduce que*

$$\begin{aligned}
\langle v, w\rangle &= \langle v, u - v\rangle = \langle v, u\rangle - \|v\|^2 = \langle v, u\rangle - \|u\|^2 \\
&= \langle v, u\rangle - \langle u, u\rangle = \langle v - u, u\rangle = -\langle w, u\rangle = -\overline{\langle u, w\rangle}\,,
\end{aligned}$$

con lo cual podemos escribir

$$\mathbf{P}(u) = u - \frac{\langle u, w\rangle}{\|w\|^2}\, w \quad \text{y} \quad \mathbf{P}(v) = v + \frac{\overline{\langle u, w\rangle}}{\|w\|^2}\, w\,.$$

Sumando estas dos expresiones, usando que $\mathbf{P}(u) = \mathbf{P}(v)$*, y luego dividiendo por 2, resulta*

$$\mathbf{P}(u) = \frac{u + v}{2} - \left\{ \frac{\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(\langle u, w\rangle)}{\|w\|^2} \right\} w\,,$$

donde

$$\mathrm{Im}(\langle u, w\rangle) = \mathrm{Im}(\langle u, u - v\rangle) = \mathrm{Im}(\,\|u\|^2 - \langle u, v\rangle\,) = -\,\mathrm{Im}(\langle u, v\rangle)\,.$$

Por último, si H *es un Hilbert real, entonces* $\mathrm{Im}(\langle u, v\rangle) = 0$ *y en tal caso* $\mathbf{P}(u) = \mathbf{P}(v) = \dfrac{u+v}{2}$.

---

3. Sea $\Omega := (0,1) \times (0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ y considere el espacio de Hilbert $(H(\mathrm{div};\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde

$$H(\mathrm{div};\Omega) := \{\, \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(\Omega)\,\}$$

y

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau}\rangle := \int_\Omega \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dx + \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\zeta})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx \qquad \forall\,\boldsymbol{\zeta},\,\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

Además, sea S el subespacio de $H(\mathrm{div};\Omega)$ dado por

$$S := \{\boldsymbol{\tau} :\ \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma\, x_1, \beta + \gamma\, x_2)\ \forall\, x := (x_1, x_2) \in \Omega;\ \text{con } \alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbb{R}\}\,,$$

y sea $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ definida por $\boldsymbol{\sigma}(x) = (x_1 x_2, x_1 + x_2)\quad \forall\, x := (x_1, x_2) \in \Omega$. Aplique el teorema de caracterización respectivo y encuentre la mejor aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$ por elementos de S, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Solución: *Observemos primero que para cada* $\boldsymbol{\tau} \in S$ *existen escalares* α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\boldsymbol{\tau}(x) \,=\, \alpha\,(1,0) + \beta(0,1) + \gamma\,(x_1,x_2) \qquad \forall\, x := (x_1,x_2) \,\in\, \Omega\,,$$

a partir de lo cual se puede probar que $\{\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3\}$ *es una base de* S*, donde*

$$\boldsymbol{\sigma}_1(x) = (1,0)\,, \quad \boldsymbol{\sigma}_2(x) = (0,1)\,, \quad y \quad \boldsymbol{\sigma}_3(x) = (x_1,x_2) \quad \forall\, x \,\in\, \Omega\,.$$

Entonces, aplicando el teorema de caracterización respectivo, se deduce que la mejor aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$ *por elementos del subespacio* S*, con respecto a la norma inducida por* $\langle\cdot,\cdot\rangle$*, está dada por* $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \,=\, \bar{\alpha}\,\boldsymbol{\sigma}_1 + \bar{\beta}\,\boldsymbol{\sigma}_2 + \bar{\gamma}\,\boldsymbol{\sigma}_3$*, donde*

$$\begin{bmatrix} \langle\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_1\rangle & \langle\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2\rangle & \langle\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_3\rangle \\ \langle\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_1\rangle & \langle\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_2\rangle & \langle\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3\rangle \\ \langle\boldsymbol{\sigma}_3,\boldsymbol{\sigma}_1\rangle & \langle\boldsymbol{\sigma}_3,\boldsymbol{\sigma}_2\rangle & \langle\boldsymbol{\sigma}_3,\boldsymbol{\sigma}_3\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}_1\rangle \\ \langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}_2\rangle \\ \langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}_3\rangle \end{bmatrix}.$$

Ahora, integrando se obtiene

$$\langle\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_1\rangle \,=\, \int_0^1\int_0^1 (1,0)\cdot(1,0)\,dx_1\,dx_2 \,=\, \int_0^1\int_0^1 dx_1\,dx_2 \,=\, 1\,,$$

$$\langle\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2\rangle \,=\, \int_0^1\int_0^1 (1,0)\cdot(0,1)\,dx_1\,dx_2 \,=\, 0\,,$$

$$\langle\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_3\rangle \,=\, \int_0^1\int_0^1 (1,0)\cdot(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \,=\, \int_0^1\int_0^1 x_1\,dx_1\,dx_2 \,=\, 1/2\,,$$

$$\langle\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_2\rangle \,=\, \int_0^1\int_0^1 (0,1)\cdot(0,1)\,dx_1\,dx_2 \,=\, \int_0^1\int_0^1 dx_1\,dx_2 \,=\, 1\,,$$

$$\langle\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3\rangle \,=\, \int_0^1\int_0^1 (0,1)\cdot(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \,=\, \int_0^1\int_0^1 x_2\,dx_1\,dx_2 \,=\, 1/2\,,$$

$$\begin{aligned} \langle\boldsymbol{\sigma}_3,\boldsymbol{\sigma}_3\rangle \,&=\, \int_0^1\int_0^1 (x_1,x_2)\cdot(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \,+\, \int_0^1\int_0^1 4\,dx_1\,dx_2 \\ &=\, \int_0^1\int_0^1 (x_1^2 \,+\, x_2^2)\,dx_1\,dx_2 \,+\, 4 \,=\, 14/3\,, \end{aligned}$$

$$\langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}_1\rangle \,=\, \int_0^1\int_0^1 (x_1x_2, x_1+x_2)\cdot(1,0)\,dx_1\,dx_2 \,=\, \int_0^1\int_0^1 x_1x_2\,dx_1\,dx_2 \,=\, 1/4\,,$$

$$\langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}_2\rangle \,=\, \int_0^1\int_0^1 (x_1x_2, x_1+x_2)\cdot(0,1)\,dx_1\,dx_2 \,=\, \int_0^1\int_0^1 (x_1+x_2)\,dx_1\,dx_2 \,=\, 1\,,$$

y

$$\langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}_3\rangle = \int_0^1\int_0^1 (x_1x_2, x_1+x_2)\cdot(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 + \int_0^1\int_0^1 2\,(x_2+1)\,dx_1\,dx_2 = 15/4.$$

De acuerdo a lo anterior, el sistema nos queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 14/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 15/4 \end{bmatrix},$$

cuya solución está dada por $\bar{\alpha} = -1/8$, $\bar{\beta} = 5/8$ *y* $\bar{\gamma} = 3/4$, *y por lo tanto*

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(x) = (-1/8 + 3\,x_1/4\,,\, 5/8 + 3\,x_2/4) \quad \forall\, x \in \Omega\,.$$

---

4. Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbb{N}$ considere un funcional $F_n \in H_n'$ y una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbb{R}$. Suponga también que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha}\, \|v_n\|_H^2 \quad \forall\, v_n \in H_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

   a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

   $$A(u, v) = F(v) \quad \forall\, v \in H \qquad \text{y} \qquad A_n(u_n, v_n) = F_n(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

   b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbb{N}$, tal que

   $$\|u - u_n\|_H \leq C \left(\inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H + \|\mathbf{A}(v_n) \circ \mathbf{i}_n - \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H_n'} \right\} + \|F \circ \mathbf{i}_n - F_n\|_{H_n'} \right),$$

   donde $\mathbf{A} : H \to H'$ y $\mathbf{A}_n : H_n \to H_n'$ son los operadores lineales y acotados inducidos por A y A_n, respectivamente, e $\mathbf{i}_n : H_n \to H$ es la inyección canónica, esto es $\mathbf{i}_n(v_n) = v_n \quad \forall\, v_n \in H_n$.

Solución:

a) *La existencia y unicidad de* $u \in H$ *y* $u_n \in H_n$ *se sigue de aplicaciones directas del Teorema de Lax-Milgram.*

b) *Sea* $v_n \in H_n$. *Puesto que* $\mathbf{A}(v_n) : H \to \mathbb{R}$ *e* $\mathbf{i}_n : H_n \to H$, *se deduce que* $\mathbf{A}(v_n) \circ \mathbf{i}_n : H_h \to \mathbb{R}$ *es un funcional lineal y acotado, es decir* $\mathbf{A}(v_n) \circ \mathbf{i}_n \in H_n'$, *el cual está definido por*

$$(\mathbf{A}(v_n) \circ \mathbf{i}_n)(w_n) := (\mathbf{A}(v_n))(w_n) := A(v_n, w_n) \qquad \forall\, w_n \in H_n\,.$$

A su vez, $\mathbf{A}_n(v_n) \in H_n'$ *está dado por*

$$(\mathbf{A}_n(v_n))(w_n) := A_n(v_n, w_n) \qquad \forall\, w_n \in H_n\,,$$

con lo cual

$$\|\mathbf{A}(v_n)\circ \mathbf{i}_n - \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H_n'} \;=\; \sup_{\substack{w_n\in H_n\\ w_n\neq 0}} \frac{|\,A(v_n,w_n) - A_n(v_n,w_n)\,|}{\|w_n\|_H}\,.$$

De manera similar se observa que $F\circ \mathbf{i}_n \,\in\, H_n'$, *donde* $(F\circ\mathbf{i}_n)(w_n) \,:=\, F(w_n)$ $\forall\, w_n\in H_n$, *y luego*

$$\|F\circ \mathbf{i}_n \,-\, F_n\|_{H_n'} \;=\; \sup_{\substack{w_n\in H_n\\ w_n\neq 0}} \frac{|\,F(w_n) - F_n(w_n)\,|}{\|w_n\|_H}\,.$$

Ahora, usando desigualdad triangular se obtiene

$$\|u-u_n\|_H \;\le\; \|u-v_n\|_H \,+\, \|u_n - v_n\|_H \qquad \forall\, v_n\in H_n\,.$$

Por otra parte, aplicando la elipticidad uniforme de A_n*, las formulaciones dadas en* **a)***, y sumando y restando expresiones convenientes, resulta*

$$\begin{aligned}
\tilde\alpha\,\|u_n-v_n\|_H^2 \;&\le\; A_n(u_n-v_n,u_n-v_n)\\
&=\; A_n(u_n,u_n-v_n) \,-\, A_n(v_n,u_n-v_n)\\
&=\; F_n(u_n-v_n) - A_n(v_n,u_n-v_n)\\
&=\; F_n(u_n-v_n) - F(u_n-v_n) + F(u_n-v_n) - A_n(v_n,u_n-v_n)\\
&=\; F_n(u_n-v_n) - F(u_n-v_n) + A(u,u_n-v_n) - A_n(v_n,u_n-v_n)\\
&=\; F_n(u_n-v_n) - F(u_n-v_n) + A(u-v_n,u_n-v_n) + A(v_n,u_n-v_n) - A_n(v_n,u_n-v_n)\,.
\end{aligned}$$

Entonces, dividiendo por $\|u_n-v_n\|_H$*, aplicando el acotamiento de* A *(con constante* M*), y utilizando las expresiones deducidas anteriormente para las normas* $\|\mathbf{A}(v_n)\circ\mathbf{i}_n - \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H_n'}$ *y* $\|F\circ\mathbf{i}_n \,-\, F_n\|_{H_n'}$*, se sigue que*

$$\begin{aligned}
\tilde\alpha\,\|u_n-v_n\|_H \;&\le\; \frac{|F_n(u_n-v_n) - F(u_n-v_n)|}{\|u_n-v_n\|_H} \,+\, M\,\|u-v_n\|_H\\
&\quad+\, \frac{|A(v_n,u_n-v_n) - A_n(v_n,u_n-v_n)|}{\|u_n-v_n\|_H}\\
&\le\; \|F\circ\mathbf{i}_n \,-\, F_n\|_{H_n'} \,+\, M\,\|u-v_n\|_H \,+\, \|\mathbf{A}(v_n)\circ\mathbf{i}_n - \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H_n'}\,.
\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando esta estimación en la desigualdad original que acota $\|u-u_n\|_H$*, nos queda*

$$\begin{aligned}
\|u-u_n\|_H \;&\le\; \left(1+\frac{M}{\tilde\alpha}\right)\,\|u-v_n\|_H \,+\, \frac{1}{\tilde\alpha}\,\|\mathbf{A}(v_n)\circ\mathbf{i}_n - \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H_n'}\\
&\quad+\, \frac{1}{\tilde\alpha}\,\|F\circ\mathbf{i}_n \,-\, F_n\|_{H_n'} \qquad \forall\, v_n \,\in\, H_n\,,
\end{aligned}$$

lo cual completa la demostración.

5. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $P \in \mathcal{L}(H,H)$, no trivial. Se dice que P es un **proyector** si satisface $P^2 = P$. En tal caso se dice que P es un **proyector ortogonal** si además verifica que $\langle u, v\rangle = 0 \quad \forall\, u \in R(P), \quad \forall\, v \in N(P)$.

   a) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector entonces $H = N(P) \oplus R(P)$ y $\|P\| \geq 1$.

   b) Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

      i) P es un proyector ortogonal.

      ii) $R(P) = N(P)^{\perp}$.

      iii) P es autoadjunto

   c) Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector ortogonal entonces $\|P\| = 1$.

Solución:

a) *Dado $u \in H$, podemos escribir*

$$u = (u - P(u)) + P(u)\,.$$

Es claro que $P(u) \in R(P)$ y además

$$P(u - P(u)) = P(u) - P^2(u) = P(u) - P(u) = \theta\,,$$

lo cual muestra que $(u - P(u)) \in N(P)$. Veamos ahora que $N(P) \cap R(P) = \{\theta\}$. En efecto, si $u \in N(P) \cap R(P)$ entonces $P(u) = \theta$ y existe $v \in H$ tal que $u = P(v)$. Se sigue que

$$\theta = P(u) = P(P(v)) = P^2(v) = P(v) = u\,,$$

con lo cual se concluye que $H = N(P) \oplus R(P)$.

A su vez, usando que $P(u) = u$ para todo $u \in R(P)$, se obtiene

$$\|P\| := \sup_{\substack{u\in H\\ u\neq\theta}} \frac{\|P(u)\|}{\|u\|} \geq \sup_{\substack{u\in R(P)\\ u\neq\theta}} \frac{\|P(u)\|}{\|u\|} = \sup_{\substack{u\in R(P)\\ u\neq\theta}} \frac{\|u\|}{\|u\|} = 1\,.$$

b) *A continuación se demuestra la secuencia:* i) $\Rightarrow$ ii), ii) $\Rightarrow$ iii) *y* iii) $\Rightarrow$ i).

i) $\Rightarrow$ ii)

Supongamos que P es un proyector ortogonal, es decir $\quad P^2 = P \;$ y $\; \langle u, v\rangle = 0$ $\forall\, u \in R(P), \quad \forall\, v \in N(P)$. A partir de esta relación de ortogonalidad se deduce que $R(P) \subseteq N(P)^{\perp}$. Recíprocamente, sea $u \in N(P)^{\perp}$. Puesto que $(u - P(u)) \in N(P)$ y $P(u) \in R(P)$, se sigue que

$$\langle u - P(u), u - P(u)\rangle = \langle u, u - P(u)\rangle - \langle P(u), u - P(u)\rangle = 0 - 0 = 0\,,$$

lo cual muestra que $u = P(u) \in R(P)$.

ii) $\Rightarrow$ iii)

Supongamos que $R(P) \,=\, N(P)^{\perp}$. *Entonces, dados* $u,\ v\,\in\,H$, *sabemos que* $(u - P(u)),\ (v - P(v))\,\in\,N(P)$ *y* $P(u),\ P(v)\,\in\,R(P)$. *Se sigue que*

$$\langle u, P(v)\rangle \,=\, \langle u - P(u), P(v)\rangle + \langle P(u), P(v)\rangle \,=\, \langle P(u), P(v)\rangle$$

$$=\, \langle P(u), P(v) - v\rangle \,+\, \langle P(u), v\rangle \,=\, \langle P(u), v\rangle\,,$$

lo cual muestra que $P^* \,=\, P$, *es decir* P *es autoadjunto.*

iii) $\Rightarrow$ i)

Supongamos que P *es autoadjunto, es decir* $P \,=\, P^*$. *Entonces, dados* $u \in R(P)$ *y* $v \in N(P)$, *se sabe que* $u = P(u)$ *y* $P(v) \,=\, \theta$, *y luego*

$$\langle u, v\rangle \,=\, \langle P(u), v\rangle \,=\, \langle u, P(v)\rangle \,=\, \langle u, \theta\rangle \,=\, 0\,,$$

lo cual prueba que P *es ortogonal.*

c) *Sea* $P\,\in\,\mathcal{L}(H,H)$ *un proyector ortogonal, es decir* $P^2 \,=\, P$ *y* $P^* \,=\, P$. *Aplicando estas propiedades, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el acotamiento de* P, *se obtiene*

$$\|P\|^2 \,:=\, \sup_{\substack{u\in H\\ u\neq\theta}} \frac{\|P(u)\|^2}{\|u\|^2} \,=\, \sup_{\substack{u\in H\\ u\neq\theta}} \frac{\langle P(u), P(u)\rangle}{\|u\|^2} \,=\, \sup_{\substack{u\in H\\ u\neq\theta}} \frac{\langle u, P(u)\rangle}{\|u\|^2} \,\leq\, \|P\|\,,$$

de donde se sigue que $\|P\| \,\leq\, 1$. *Esta estimación y la que se probó en* **a)** *implican que* $\|P\| \,=\, 1$, *lo cual completa la demostración.*

---

6. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno: $\;-\Delta\, u \,=\, f\;$ en $\;\Omega\,,\;\; u \,=\, 0\;$ en $\;\partial\Omega$. Se puede demostrar que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u)\,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)\times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dx \,+\, \int_\Omega u\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx \,-\, \int_\Omega v\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\,dx \,=\, \int_\Omega f\,v\,dx \qquad (1)$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v)\,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)\times L^2(\Omega)$, donde $\boldsymbol{\sigma} \,:=\, \nabla u$ en Ω representa una incógnita adicional. Además, a partir de esta relación, y dado $\delta \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$\delta\int_\Omega (\nabla u - \boldsymbol{\sigma})\cdot(\nabla v + \boldsymbol{\tau})\,dx = 0 \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega)\times H^1_0(\Omega), \qquad (2)$$

y también

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx \;=\; -\int_\Omega f\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx \quad \forall\,\boldsymbol{\tau}\,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)\,. \qquad (3)$$

De este modo, sumando (1), (2) y (3), se obtiene una formulación variacional mixta modificada, la cual tiene la forma: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) \;=\; F(\boldsymbol{\tau}, v) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H}\,, \tag{4}$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal y $F \,:\, \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal.

Demuestre que, eligiendo δ convenientemente, el problema (4) tiene una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Indicación: La norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$, es decir existe $c > 0$ tal que $\quad c\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \,\leq\, |v|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$.

Solución: *Al sumar (1), (2) y (3), se obtiene la formulación variacional mixta (4), donde la forma bilineal* $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ *y el funcional lineal* $F \,:\, \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ *están dados, respectivamente, por*

$$A(\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) \;:=\; \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx \;+\; \int_\Omega u\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \;-\; \int_\Omega v\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\, dx$$

$$+\; \delta \int_\Omega (\nabla u - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla v + \boldsymbol{\tau})\, dx \;+\; \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx$$

y

$$F(\boldsymbol{\tau}, v) \;=\; \int_\Omega f\, v\, dx \;-\; \int_\Omega f\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx\,.$$

Es fácil ver (hacerlo !) que $F \in \mathbf{H}'$ *y que* A *es acotada. Además, tomando* $(\boldsymbol{\sigma}, u) \;=\; (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H}$, *y aplicando la equivalencia entre la norma* $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ *y la seminorma* $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ *en* $H_0^1(\Omega)$, *se obtiene*

$$A((\boldsymbol{\tau}, v), (\boldsymbol{\tau}, v)) \;=\; \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^2}, + \delta\, \left\{\, |v|^2_{H_0^1(\Omega)} \;-\; \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \right\} \;+\; \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\geq\; (1 - \delta)\, \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \;+\; \delta\, c\, \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \;+\; \|\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Así, eligiendo $\delta \in (0, 1)$, *la forma bilineal* A *resulta* $\mathbf{H}$*-elíptica, y por lo tanto, una aplicación directa del Teorema de Lax-Milgram demuestra que (4) posee una única solución.*

---

7. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X \;:=\; \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, provisto del producto escalar $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^t\, B)$ $\forall\, A,\, B \in X$.

   a) Demuestre que $X \;=\; X_{\mathtt{sim}} \oplus X_{\mathtt{asim}}$, donde

   $$X_{\mathtt{sim}} \;=\; \{\, A \in X : \quad A^t \;=\; A \,\} \quad \text{y} \quad X_{\mathtt{asim}} \;=\; \{\, A \in X : \quad A^t \;=\; -\, A \,\}\,.$$

   b) Sea $C \;:=\; (c_{ij})_{n\times n} \;\in\; X$ tal que $\quad c_{ij} \;=\; 1 \;\; \forall\, i \geq j \quad$ y $\quad c_{ij} \;=\; 0 \;\; \forall\, i < j$. Encuentre las mejores aproximaciones de C por matrices de $X_{\mathtt{sim}}$ y $X_{\mathtt{asim}}$, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Solución:

a) *Dada* $A \in X$, *tratemos de encontrar* $A_{\mathtt{sim}} \in X_{\mathtt{sim}}$ *y* $A_{\mathtt{asim}} \in X_{\mathtt{asim}}$, *tales que*

$$A = A_{\mathtt{sim}} + A_{\mathtt{asim}}\,.$$

Tomando transpuesta y usando las definiciones de $X_{\mathtt{sim}}$ *y* $X_{\mathtt{asim}}$, *se obtiene*

$$A^t = A_{\mathtt{sim}} - A_{\mathtt{asim}}\,.$$

Luego, sumando y restando estas ecuaciones, se deduce, respectivamente, que

$$A_{\mathtt{sim}} = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) \quad y \quad A_{\mathtt{asim}} = \frac{1}{2}\left(A - A^t\right)\,.$$

Ahora, si $A \in X_{\mathtt{sim}} \cap X_{\mathtt{asim}}$, *entonces* $A^t = A$ *y* $A^t = -A$, *de donde* $A = -A$, *y por lo tanto* $A = \Theta$, *la matriz nula. Hemos probado así que* $X = X_{\mathtt{sim}} \oplus X_{\mathtt{asim}}$.

b) *Veamos primero que* $X_{\mathtt{sim}}^{\perp} = X_{\mathtt{asim}}$. *En efecto, dadas* $A \in X_{\mathtt{sim}}$ *y* $B \in X_{\mathtt{asim}}$, *se tiene*

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^t\,B) = \mathrm{tr}(A\,B) = \mathrm{tr}(B\,A) = -\,\mathrm{tr}(B^t\,A) = -\,\langle B, A\rangle = -\langle A, B\rangle\,,$$

lo cual implica que $\langle A, B\rangle = 0$, *y por lo tanto* $X_{\mathtt{asim}} \subseteq X_{\mathtt{sim}}^{\perp}$. *Recíprocamente, sea* $A \in X_{\mathtt{sim}}^{\perp}$. *Se sigue que*

$$0 = \langle A, A_{\mathtt{sim}}\rangle = \langle A_{\mathtt{sim}} + A_{\mathtt{asim}}, A_{\mathtt{sim}}\rangle = \|A_{\mathtt{sim}}\|^2 + \langle A_{\mathtt{asim}}, A_{\mathtt{sim}}\rangle = \|A_{\mathtt{sim}}\|^2\,,$$

de donde $A_{\mathtt{sim}} = \Theta$ *y luego* $A = A_{\mathtt{asim}} \in X_{\mathtt{asim}}$.

De acuerdo a lo anterior y al teorema de caracterización respectivo, se deduce que la mejor aproximación de C *por matrices de* $X_{\mathtt{sim}}$ *está dada por la única matriz* $\bar{C}$ *en* $X_{\mathtt{sim}}$ *tal que* $C - \bar{C} \in X_{\mathtt{sim}}^{\perp} = X_{\mathtt{asim}}$, *es decir* $\bar{C} = C_{\mathtt{sim}} := \frac{1}{2}\,(C + C^t)$. *De manera similar, la mejor aproximación de* C *por matrices de* $X_{\mathtt{asim}}$ *está dada por la única matriz* $\hat{C}$ *en* $X_{\mathtt{asim}}$ *tal que* $C - \hat{C} \in X_{\mathtt{asim}}^{\perp} = X_{\mathtt{sim}}$, *es decir* $\hat{C} = C_{\mathtt{asim}} := \frac{1}{2}\,(C - C^t)$. *Haciendo los cálculos correspondientes resulta*

$$\bar{C} = C_{\mathtt{sim}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\hat{C} = C_{\mathtt{asim}} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 & \cdots & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & \cdots & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & -1/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\,.$$

GGP/ggp