UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Métodos de Elementos Finitos Mixtos (525539).

Diciembre 22, 2004 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ Lipschitz continua, y sean $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$ tal que $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{g}\cdot\mathbf{n}\,ds \,=\, 0$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ. El **problema de Stokes generalizado** consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{aligned} \alpha\,\mathbf{u} \,-\, \nu\,\Delta\,\mathbf{u} \,+\, \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\nu > 0$ es la viscosidad del fluido y α es un parámetro positivo.

(a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\mathbf{t} := \nabla\mathbf{u}$ y $\boldsymbol{\sigma} := \nu\,\nabla\mathbf{u} \,-\, p\,\mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y pruebe que una formulación variacional mixta de (1) se reduce a: Hallar $(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \xi) \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^2 \times H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \nu \int_\Omega \mathbf{t} : \mathbf{s} \,+\, \alpha \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \,-\, \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{s} \,-\, \int_\Omega \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{v} \,-\, \int_\Omega p\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{s}) \quad &= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,, \\ -\int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \mathbf{t} \,-\, \int_\Omega \mathbf{div}\,(\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{u} \qquad\qquad + \quad \xi \int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau}) \quad &= -\,\langle \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}, \mathbf{g}\rangle\,, \\ -\int_\Omega q\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{t}) \,+\, \eta \int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\sigma}) \quad &= 0\,, \end{aligned} \tag{2}$$

para todo $(\mathbf{s}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, q, \eta) \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} \times [L^2(\Omega)]^2 \times H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$.

(b) Defina espacios de Hilbert y operadores (formas bilineales) convenientes y pruebe que (2) puede reformularse en base a una estructura dual-dual.

(c) Utilice lo indicado en (b) para demostrar que (2) tiene una única solución y que existe una constante $C(\alpha, \nu) > 0$ tal que

$$\|(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \xi)\| \;\leq\; C(\alpha, \nu)\;\{\,\|\mathbf{f}\| \,+\, \|\mathbf{g}\|\,\}\,.$$

(d) Extienda el análisis en (c) al caso discreto y **deduzca** espacios de elementos finitos que garanticen que el esquema de Galerkin asociado a (2) tiene una única solución.

(e) Asuma la regularidad necesaria de la solución exacta y demuestre la estimación de error a-priori correspondiente (razón de convergencia).

2. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ. Una formulación variacional **mixta** para la ecuación de Poisson en Ω, con dato $f \in L^2(\Omega)$, y condición de Dirichlet dada por $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, consiste en: *Hallar* $(\sigma, u) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} A(\sigma,\tau) \,+\, B(\tau,u) \,&=\, \int_\Gamma g\,\tau\cdot\nu\,ds\,, \\ B(\sigma,v) \,&=\, -\int_\Omega f\,v\,dx\,, \end{aligned} \tag{3}$$

para todo $(\tau, v) \in X \times M$, donde $X := H(\mathrm{div};\Omega)$, $M := L^2(\Omega)$, ν es el vector normal unitario exterior a Γ, y las formas bilineales $A : X \times X \to \mathbb{R}$ y $B : X \times M \to \mathbb{R}$ están definidas por $A(\rho,\tau) := \displaystyle\int_\Omega \rho\cdot\tau\,dx, \quad B(\tau,v) := \int_\Omega v\,\mathrm{div}\,\tau\,dx\ \forall\,\rho,\,\tau \in X\,,\ \forall v \in M$. Puesto que A y B satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi, se sabe que existe $C_0 > 0$ tal que

$$||(\rho,w)||_{X\times M} \,\le\, C_0 \sup_{\substack{(\tau,v)\in X\times M \\ ||(\tau,v)||\,\le\,1}} \{\, A(\rho,\tau) + B(\tau,w) + B(\rho,v)\,\} \tag{4}$$

para todo $(\rho, w) \in X \times M$.

El objetivo de este problema es deducir una **estimación de error a-posteriori** para (3). Para ello, sea $\{\mathcal{T}_h : \quad h \in \mathtt{I}\}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$, donde $\mathtt{I}$ es un conjunto finito de parámetros dado por $\{h_1, ..., h_m\}$, con $h_j \ge h_{j+1}\ \forall\, j \in \{1, ..., m\}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{\, h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h\,\}$, donde h_K es el diámetro de K. Sea $X_h \times M_h$ un subespacio de elementos finitos de $X \times M$, asociado a la triangulación $\mathcal{T}_h$, y sea $(\sigma_h, u_h) \in X_h \times M_h$ la solución del esquema de Galerkin correspondiente para la formulación (3).

i) Pruebe que existe un único $\bar\sigma \in X$ tal que

$$\langle\bar\sigma,\tau\rangle_X \,=\, A(\sigma-\sigma_h,\tau) + B(\tau,u-u_h) \quad \forall\,\tau\in X\,.$$

ii) Defina $\mathbf{J}(\tau) := \frac{1}{2}\,||\tau||_X^2 \,-\, \langle\bar\sigma,\tau\rangle_X \quad \forall\,\tau \in X$, y demuestre que

$$-\frac{1}{2}\,||\bar\sigma||_X^2 \,=\, \min_{\tau\in X} \mathbf{J}(\tau)\,.$$

iii) Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ defina $(\sigma_{h,K}, u_{h,K}) := (\sigma_h, u_h)\,|_K$, $X_K := H(\mathrm{div}\,;K)$, $M_K := L^2(K)$, y denote por $A_K : X_K \times X_K \to \mathbb{R}$ y $B_K : X_K \times M_K \to \mathbb{R}$, respectivamente, las restricciones de A y B al elemento K. Además, sea $\varphi_h \in H^{1/2}(\cup_{K\in\mathcal{T}_h}\partial K)$ una aproximación de u sobre las fronteras de los elementos K tal que $\varphi_h = g$ en Γ. Entonces, pruebe que existe un único $\hat\sigma_K \in X_K$ tal que

$$\langle\hat\sigma_K,\tau\rangle_{X_K} = -A_K(\sigma_{h,K},\tau) - B_K(\tau,u_{h,K}) - \int_{\partial K} \varphi_h\,\tau\cdot\nu\,ds \quad \forall\,\tau\in X_K\,.$$

iv) Defina

$$\mathbf{J}_K(\tau) := \frac{1}{2}\,||\tau||_{X_K}^2 + A_K(\sigma_{h,K},\tau) + B_K(\tau,u_{h,K}) + \int_{\partial K} \varphi_h\,\tau\cdot\nu\,ds$$

para todo $\tau \in X_K$, y pruebe que

$$-\frac{1}{2}\,||\hat\sigma_K||_{X_K}^2 \,=\, \min_{\tau\in X_K} \mathbf{J}_K(\tau)\,.$$

v) Use **i), ii), iii)** y **iv)** para demostrar que

$$||\bar{\sigma}||_X^2 \;\le\; \sum_{K\in\mathcal{T}_h} ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \,.$$

vi) Aplique (4) y **v)** para concluir que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$||(\sigma, u) - (\sigma_h, u_h)||_{X\times M} \;\le\; C \left\{ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2} ,$$

donde

$$\eta_K^2 := ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \;+\; ||f + \mathrm{div}\;\sigma_h||_{L^2(K)}^2 \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \,.$$

---

3. Establezca y demuestre los lemas de Bramble-Hilbert (ambas versiones) y de Deny-Lions.

4. Establezca y demuestre, con los mayores detalles posible, la propiedad conmutativa del operador de interpolación vectorial $W_h^k : [H^1(\Omega)]^2 \rightarrow H_h$, donde H_h es el espacio de elementos finitos de Raviart-Thomas.
