UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401).

Viernes 14 de Junio de 2002 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

Problema 1 (10 Puntos). Demuestre que las condiciones suficientes del Teorema de Babuška-Brezzi (versión general) son también necesarias.

Problema 2 (20 Puntos). Sea X un espacio de Hilbert y sea V un subespacio cerrado de X. Demuestre que X/V y $V^{\perp}$ son isomorfos.

Problema 3 (30 Puntos). Sean X, Y espacios de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\mathcal{R}(A) = Y$, y sea $V = N(A)$. Dado el operador de proyección ortogonal $P : X \to V$, considere $B : Y \to X$ tal que $B(y) = x - P(x)$ para todo $y \in Y$, donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$.

a) Demuestre que B está bien definido y que B es una biyección lineal y acotada de Y en $V^{\perp}$. Pruebe, además, que B es un *inverso a derecha* de A, esto es $AB(y) = y$ para todo $y \in Y$.

b) Defina $A_0 : V^{\perp} \to Y$ como $A_0(x) = A(x)$ para todo $x \in V^{\perp}$, es decir $A_0 = A|_{V^{\perp}}$, y pruebe que $A_0^{-1} = B$.

c) Extienda los resultados anteriores al caso en que $\mathcal{R}(A)$ es un subespacio **cerrado** propio de Y.

Problema 4 (Lema de Aubin-Nitsche) (20 Puntos). Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y el operador identidad $\mathbf{i} : V \to H$ es continuo. Sea $A : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y V-elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \to V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface

$$A(v, \mathbf{P}(g)) \,=\, \langle g, v\rangle_H \quad \forall\, v \in V\,.$$

Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V, denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in V\,,$$

y

$$A(u_h, v_h) \,=\, F(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$||u - u_h||_H \,\leq\, C\,||u - u_h||_V \sup_{g\in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{v_h\in V_h} ||\mathbf{P}(g) - v_h||_V \right\}\,.$$

Problema 5 (30 Puntos). Dados $\Omega := (0,1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$-\,u'' \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) \,=\, 0\,, \quad u'(1) \,=\, 1\,. \tag{1}$$

a) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (1) se reduce a: *Hallar* $(\sigma,(u,\varphi)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) + b(\tau,(u,\varphi)) &= F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma,(v,\psi)) &= G((v,\psi)) \quad \forall\,(v,\psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) &:= \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx \qquad \forall\,\sigma,\,\tau \in H\,, \\ b(\tau,(v,\psi)) &:= \int_\Omega v\,\tau'\,dx \,+\, \psi\,\tau(1) \quad \forall\,(\tau,(v,\psi)) \in H \times Q\,. \end{aligned}$$

b) Defina los funcionales F y G, y aplique la teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que (2) tiene una única solución.