UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Análisis Funcional I (522401)

Lunes 18 de Junio de 2001 *Prof. Gabriel N. Gatica*

Problema 1 (25 Puntos). Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

a) Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.

b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{z \in N(A)} ||x - z|| \leq \beta \, ||Ax|| \quad \forall \, x \in X \, .$$

Demuestre que $R(A) = N(A^*)^{\perp}$.

c) Pruebe que $A^* = R_X \, A' \, R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \to X$ y $R_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^oN(A') = N(A^*)^{\perp}$.

Problema 2 (25 Puntos). Sean X, Y espacios de Banach y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. El grafo de T se denota por G_T y se define como

$$G_T := \{(x, T(x)) \in X \times Y / x \in D(T) \}$$

Suponga que $D(T)$ y G_T son subespacios cerrados de X y $X \times Y$, respectivamente. Demuestre que T es acotado sobre $D(T)$.

Problema 3 (25 Puntos).

a) Enuncie el Lema de Lax-Milgram y demuéstrelo utilizando el Teorema del Punto Fijo de Banach.

b) Asuma que la forma bilineal respectiva es **simétrica** y demuestre el Lema de Lax-Milgram utilizando, **exclusivamente**, el Teorema de Representación de Riesz.

Problema 4. (25 ptos) Sea X un espacio vectorial normado, y sean $< \cdot, \cdot >_1$ y $< \cdot, \cdot >_2$ dos productos escalares definidos sobre X, tales que $(X, < \cdot, \cdot >_1)$ y $(X, < \cdot, \cdot >_2)$ son espacios de Hilbert. Demuestre que las normas inducidas por $< \cdot, \cdot >_1$ y $< \cdot, \cdot >_2$ son equivalentes **si y sólo si** existe $\alpha < 0$ tal que

$$1 + \alpha \frac{< x, x >_1}{< x, x >_2} \leq 0 \quad \forall x \in X \, , \quad x \neq 0 \, .$$