UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Análisis Funcional I (522401)

Viernes 30 de Junio de 2000 *Prof. Gabriel N. Gatica*

Problema 1 (20 Puntos). Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{div};\Omega) := \{ v \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\, v := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \}$$

provisto del producto escalar

$$< v, w >_{H(\mathrm{div};\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\, v \; \mathrm{div}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

a) Demuestre que $(H(\mathrm{div};\Omega); < \cdot, \cdot >_{H(\mathrm{div};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.
b) Pruebe que para todo $g \in [L^2(\Omega)]^n$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\, v_g \; \mathrm{div}\, w \, dx = \int_\Omega g \cdot w \, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

Ind.: Dada $v \in [L^2(\Omega)]^n$, se dice que $\mathrm{div}\, v := z \in L^2(\Omega)$ si: $-\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega z\, \varphi \, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$

Problema 2 (20 Puntos). Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0, \pi]$ provisto de la norma uniforme. Dadas las funciones trigonométricas p_j, $q_j \in X$, $j \in \{0, 1, ..., n\}$, con $p_j(t) = \mathrm{sen}\,(jt)$ y $q_j(t) = \cos\,(jt)$, $\forall\, t \in [0, \pi]$, se define el operador $A : X \to X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^\pi u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j + \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^\pi u(t)\, q_j(t)\, dt \right\} q_j \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

Problema 3 (20 Puntos). Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados.
i) Pruebe que si $K \in \mathcal{L}\,(X, Y)$ es de rango finito, entonces K es compacto.
ii) Demuestre que si $A \in \mathcal{L}\,(X, Y)$ y $K \in K\,(Y, Z)$, entonces $K\, A \in K\,(X, Z)$.

Problema 4 (20 Puntos). Sean H y V dos espacios de Hilbert tales que $H \subseteq V$ y la inyección $i : H \to V$ es compacta. Se dice que una forma bilineal acotada A definida sobre $H \times H$ satisface la **desigualdad de Gårding** si existen $\alpha > 0$ y una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbf{R}$ tales que

$$A(v,v) \geq \alpha \, ||v||_H^2 - K(v,v) \qquad \forall \, v \in H \, .$$

Dado $F \in H'$, considere el siguiente problema variacional: *Hallar* $u \in H$ *tal que*

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall \, v \in H \, . \tag{1}$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding, entonces (1) tiene solución para cada $F \in H'$ **si y solo si** $u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.

Problema 5 (20 Puntos). Sea $\Omega := (a,b)$ un intervalo acotado de $\mathbf{R}$ y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega) := \{ v \in L^2(\Omega) : \quad v', \, v'' \in L^2(\Omega) \}$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^2(\Omega) \to H^1(\Omega)$ también es compacta.

Problema 6 (20 Puntos). Sean $(X, < \cdot, \cdot >_X)$, $(Y, < \cdot, \cdot >_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X,X)$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$< \mathbf{S}(y), y >_Y \geq 0 \quad \forall \, y \in Y \, ,$$

y que existen constantes α, $\beta > 0$ tales que

$$< \mathbf{P}x, x >_X \geq \alpha \, ||x||_X^2 \qquad \forall \, x \in X$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{< \mathbf{Q}(x), y >_Y}{||x||_X} \geq \beta \, ||y||_Y \quad \forall \, y \in Y \, .$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} .$$

Ind.: Transforme a una ecuación equivalente en Y y luego aplique el Lema de Lax-Milgram.