UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

P R U E B A 2

Tópicos de Elementos Finitos I (4220018)
Métodos de Elementos Finitos Mixtos (525539)

Lunes 25 de Julio de 2016 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y sea $\boldsymbol{\nu}$ el vector normal a Γ. Dados $\mathbf{f} \in [C(\bar{\Omega})]^2$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, la formulación variacional mixta del problema de Darcy con presión dependiente de la porosidad se reduce a encontrar la velocidad $\mathbf{u} \in H$ y la presión $p \in Q$ de un fluido tales que:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v},p) &= \langle \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu}, g\rangle + \int_\Omega p\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \qquad \forall\, \mathbf{v} \in H\,, \\ \mathbf{b}(\mathbf{u},q) &= 0 \qquad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $H := H(\mathrm{div};\Omega)$, $Q := L^2(\Omega)$, $\mathbf{a} : H \times H \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{b} : H \times Q \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales dadas por

$$\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}(\mathbf{v},q) := \int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} \qquad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in H\,, \quad \forall\, q \in Q\,,$$

y $\langle \cdot,\cdot \rangle$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$.

a) Utilice la teoría de Babuška-Brezzi y el principio de superposición para demostrar que (1) puede re-escribirse, equivalentemente, como una ecuación de punto fijo de la forma $(\mathbf{u},p) = T(\mathbf{u},p)$, donde $T : H \times Q \to H \times Q$ es un operador afín bien definido. Luego, aplique el Teorema del Punto Fijo de Banach para concluir que si $\|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega} := \sup\limits_{x\in\Omega} \|\mathbf{f}(x)\|$ es suficientemente pequeño, entonces el problema (1) tiene una única solucion.

b) Introduzca espacios de elementos finitos H_h y Q_h que generen un esquema de Galerkin estable para (1), y luego aplique una estimación de Strang para establecer las cotas de error a priori y las razones de convergencia asociadas.

2. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones, hechas de triángulos K con diámetro h_K, de una región poligonal Ω de R^2. Además, dados un entero $\ell \geq 0$ y $K \in \mathcal{T}_h$, denote por $\mathrm{P}_\ell(K)$ al espacio de polinomios de grado $\leq \ell$ definidos sobre K, y defina los espacios vectorial y tensorial asociados por $\mathbf{P}_\ell(K) := [\mathrm{P}_\ell(K)]^2$ y $\mathbb{P}_\ell(K) := [\mathrm{P}_\ell(K)]^{2\times 2}$, respectivamente. A su vez, dado $K \in \mathcal{T}_h$, denote por ψ_K la función burbuja correspondiente, esto es, ψ_K es el único polinomio en $\mathrm{P}_3(K)$ tal que

$$\psi_K = 0 \quad \text{en} \quad \partial K \qquad \text{y} \qquad 0 \leq \psi_K \leq 1 \quad \text{en} \quad K\,.$$

a) Utilice las desigualdades que acotan las seminormas de Sobolev hacia y desde el triángulo canónico $\widehat{K}$ para probar que, dados un entero $\ell \geq 0$ y $K \in \mathcal{T}_h$, existen constantes c_1, $c_2 > 0$, dependientes de ℓ e independientes de K, tal que

$$\|p\|_{0,K}^2 \,\leq\, c_1 \,\|\psi_K^{1/2}\, p\|_{0,K}^2 \quad \text{y} \quad |p|_{1,K} \,\leq\, c_2\, h_K^{-1}\, \|p\|_{0,K} \qquad \forall\, p \in \mathrm{P}_\ell(K)\,. \tag{2}$$

b) Dados v, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{\tau}$ campos escalar, vectorial y tensorial, respectivamente, suficientemente suaves, considere los operadores diferenciales

$$\mathbf{curl}(v) := \begin{pmatrix} -\frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathrm{curl}}(\boldsymbol{v}) := \begin{pmatrix} \mathbf{curl}(v_1)^{\mathtt{t}} \\ \mathbf{curl}(v_2)^{\mathtt{t}} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \qquad \mathrm{curl}(\boldsymbol{\tau}) := \begin{pmatrix} \mathrm{rot}\big(\tau_{11}, \tau_{12}\big) \\ \mathrm{rot}\big(\tau_{21}, \tau_{22}\big) \end{pmatrix},$$

y demuestre que para todo $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{H}(\mathrm{curl}; K) \times \mathbf{H}^1(K)$ se tiene

$$\int_K \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{curl}(\boldsymbol{\tau}) \;=\; -\int_K \boldsymbol{\tau} : \underline{\mathrm{curl}}(\boldsymbol{v}) \;+\; \langle \boldsymbol{\tau}\, \mathbf{s}_K, \boldsymbol{v} \rangle_{\partial K}\,, \tag{3}$$

donde $\mathbb{H}(\mathrm{curl}; K) := \Big\{ \boldsymbol{\zeta} \in [\mathrm{L}^2(K)]^{2\times 2} : \mathrm{curl}(\boldsymbol{\zeta}) \in [\mathrm{L}^2(K)]^2 \Big\}$, $\mathbf{H}^1(K) := [\mathrm{H}^1(K)]^2$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial K}$ es la paridad dual entre $[\mathrm{H}^{-1/2}(\partial K)]^2$ y $[\mathrm{H}^{1/2}(\partial K)]^2$, y $\mathbf{s}_K$ es el vector tangencial sobre ∂K.

c) Dados un entero $k \geq 0$ y $K \in \mathcal{T}_h$, aplique (2), (3), y la desigualdad de Cauchy-Schwarz para demostrar que existe $C > 0$, dependiente sólo de k, tal que para todo $\big(\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}, \boldsymbol{\zeta}\big) \in \mathbb{P}_k(K) \times \mathbb{H}(\mathrm{curl}; K)$ con $\mathrm{curl}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{0}$, se tiene

$$\|\mathrm{curl}(\widetilde{\boldsymbol{\zeta}})\|_{0,K} \,\leq\, C\, h_K^{-1}\, \|\boldsymbol{\zeta} - \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\|_{0,K}\,. \tag{4}$$

d) Dados enteros k, $\ell \geq 0$ y $K \in \mathcal{T}_h$, proceda de manera similar a c) para demostrar que existe $C > 0$, dependiente sólo de k y ℓ, tal que para todo $\big(\widetilde{\mathbf{p}}, \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}, \mathbf{p}\big) \in \mathbf{P}_k(K) \times \mathbb{P}_\ell(K) \times \mathbf{H}^1(K)$ se tiene

$$\|\nabla \widetilde{\mathbf{p}} - \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\|_{0,K} \,\leq\, C \left\{ h_K^{-1}\, \|\mathbf{p} - \widetilde{\mathbf{p}}\|_{0,K} \,+\, \|\nabla \mathbf{p} - \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\|_{0,K} \right\}. \tag{5}$$

e) Considere el estimador a posteriori para el método de elementos finitos mixtos del problema de Stokes (hecho en clases), y aplique adecuadamente (4) y (5) para deducir las siguientes estimaciones de **eficiencia** para todo $K \in \mathcal{T}_h$:

$$h_K^2 \left\| \mathrm{curl}\Big\{ \frac{1}{2\mu}\, \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathtt{d}} \Big\} \right\|_{0,K}^2 \,\leq\, C_1\, \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,K}^2\,,$$

$$h_K^2 \left\| \nabla \boldsymbol{u}_h - \frac{1}{2\mu}\, \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathtt{d}} \right\|_{0,K}^2 \,\leq\, C_2 \left\{ \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{0,K}^2 \,+\, h_K^2\, \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,K}^2 \right\},$$

donde C_1, $C_2 > 0$ son constantes independientes de h.

3. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ Lipschitz continua, y considere datos $\mathbf{f} := (f_1, f_2)^{\mathtt{t}} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} := (g_1, g_2)^{\mathtt{t}} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$. El Problema de Stokes con condiciones de contorno de Neumann consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{aligned} -\mu\,\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mu\,\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - p\,\mathbf{n} &= \mathbf{g} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \end{aligned} \tag{6}$$

donde $\mu > 0$ es la viscosidad del fluido y $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ.

a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\varphi := -\mathbf{u}$ en Γ y $\boldsymbol{\sigma} := \mu\,\nabla\mathbf{u} - p\,\mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{2\times 2}$, y pruebe que, eliminando p, se obtiene en primera instancia una formulación variacional mixta de la forma siguiente: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \varphi)) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \varphi)) &= 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{v}, \psi)) &= -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \langle \mathbf{g}, \psi\rangle \quad \forall\,(\mathbf{v}, \psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{7}$$

donde $H := H(\mathbf{div};\Omega)$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times [H^{1/2}(\Gamma)]^2$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es la paridad dual entre $[H^{-1/2}(\Gamma)]^2$ y $[H^{1/2}(\Gamma)]^2$, y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales acotadas definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{\mu}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathtt{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}} \quad \text{y} \quad b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \psi)) := \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} + \langle \boldsymbol{\tau}\,\mathbf{n}, \psi\rangle\,.$$

b) Deduzca a partir de la segunda ecuación de (7) que los datos deben satisfacer la condición de compatibilidad: $\int_\Omega f_i + \langle g_i, 1\rangle = 0 \;\; \forall\, i \in \{1,2\}$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota también la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$.

c) Muestre que para todo $c \in \mathbb{R}$, $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \varphi)) := c\big(\mathbf{0}, ((1,1)^{\mathtt{t}}, (-1,-1)^{\mathtt{t}})\big)$ es solución del problema homogéneo asociado a (7), de modo que para evitar la no-unicidad, se sugiere buscar ahora $\mathbf{u}$ en $[L^2_0(\Omega)]^2$. Redefina fundadamente (7) con $Q := [L^2_0(\Omega)]^2 \times [H^{1/2}(\Gamma)]^2$, y aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que esta nueva formulación posee una única solución, la cual depende continuamente de los datos.

d) Defina explícitamente un esquema de Galerkin bien propuesto para la formulación redefinida en c) .

Alumnos de Pregrado: elegir 2 problemas, uno de ellos el 2.

GGP/ggp