UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Análisis Funcional (4220014)

Jueves 13 de Agosto de 2015 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert tales que $H \subseteq Q$, y suponga que existe $A \in \mathcal{L}(H, Q)$ such that
$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle_H \,=\, \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle_Q \,+\, \langle A(\boldsymbol{\zeta}), A(\boldsymbol{\tau}) \rangle_Q \qquad \forall\, \boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\tau} \in H\,.$$
A su vez, dados $\boldsymbol{\sigma} \in H$ y $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subespacios de dimension finita de H, considere para cada $n \in \mathbb{N}$ una aproximación $\boldsymbol{\sigma}_n \in H_n$ de $\boldsymbol{\sigma}$ tal que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_n\|_Q < +\infty$. Luego, asuma que $A(\boldsymbol{\sigma})$ es conocido explícitamente, y defina una **aproximación postprocesada** de $\boldsymbol{\sigma}$ como el único elemento $\boldsymbol{\sigma}_n^* \in H_n$ (si es que existe) tal que
$$\langle \boldsymbol{\sigma}_n^*, \boldsymbol{\tau}_n \rangle_H \,=\, \langle \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\tau}_n \rangle_Q \,+\, \langle A(\boldsymbol{\sigma}), A(\boldsymbol{\tau}_n) \rangle_Q \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau}_n \in H_n\,.$$
Pruebe que $\boldsymbol{\sigma}_n^*$ está efectivamente bien definido y concluya que
$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_n^*\|_H \,\le\, \|\boldsymbol{\sigma} - \Pi_n(\boldsymbol{\sigma})\|_H \,+\, \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_Q\,,$$
donde $\Pi_n : H \longrightarrow H_n$ es el proyector ortogonal.

2. Dados X un espacio de Banach, $G \in X'$, $\delta > 0$ y un conjunto finito $\mathcal{S} \subseteq X$, se define
$$V(G,\, \delta;\, \mathcal{S}) := \Big\{ F \in X' : \quad |(F - G)(x)| \,<\, \delta \quad \forall\, x \in \mathcal{S} \Big\}\,.$$
Demuestre que todos los conjuntos $V(G, \delta;\, \mathcal{S})$, con δ y $\mathcal{S}$ variables, constituyen una base de vecindades de $\{G\}$ para la topología débil* $\boldsymbol{\sigma}(X', X)$. A su vez, describa una base de vecindades de $\{G\}$ para la topología débil $\boldsymbol{\sigma}(X', X'')$.

3. Sean H un espacio de Hilbert real y $\mathcal{R} : H' \longrightarrow H$ su operador de Riesz asociado. Demuestre que A es abierto débil* de H' si y sólo si $\mathcal{R}(A)$ es abierto débil de H, esto es: $A \in \sigma(H', H) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{R}(A) \in \sigma(H, H')$.

4. Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se dice que T es DÉBILMENTE COMPACTO si para toda sucesión acotada $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X existe una subsucesión $\{\, x_n^{(1)} \,\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{\, T x_n^{(1)} \,\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en Y. Pruebe que si X o Y es *reflexivo*, entonces todo operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es débilmente compacto.

5. a) Sean X e Y espacios de Hilbert y $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que K transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones convergentes de Y. Pruebe que K es compacto.

   b) Sea X un espacio de Hilbert y sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $x \in X$, tales que $x_n \overset{w}{\to} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$. Pruebe que $x_n \to x$.

   c) Sean X e Y espacios de Hilbert y $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador compacto. Aplique a) y b) para probar que $K^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ también es compacto.

6. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert $(\mathbb{C})$ y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador lineal con $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ tal que A es autoadjunto. Pruebe que $\lambda \in \boldsymbol{\sigma}(A)$ si y sólo si existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_\lambda(x_n)\| = 0$.

CADA PROBLEMA VALE 1.5 PUNTOS. ELIJA 4 DE ELLOS

GGP/ggp