UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Análisis Funcional (4220014)

Viernes 15 de Agosto de 2014 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Enuncie y demuestre detalladamente un resultado importante que esté contenido en alguno de los temas que no le correspondió exponer.

2. Dados $g \in X'$, $\varepsilon > 0$ y un conjunto finito $\mathcal{M} \subseteq X$, se define
$$V(g, \varepsilon; \mathcal{M}) := \Big\{ f \in X' : \quad |J(x)(f-g)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in \mathcal{M} \Big\}.$$
Demuestre que todos los conjuntos $V(g, \varepsilon; \mathcal{M})$ con ε y $\mathcal{M}$ variables, constituyen una base de vecindades de $\{g\}$ para la topología $\boldsymbol{\sigma}(X', X)$.

3. Sea Ω un abierto suave de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ, y denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{div};\Omega}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega}$ los productos escalares usuales de $H(\mathrm{div};\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente. Entonces, dados $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$, y constantes $a, b \in \mathbb{R}$, considere el problema variacional: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u, \phi) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ tal que
$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\mathrm{div},\Omega} + \langle u, v \rangle_{1,\Omega} - a \int_\Omega \phi\, v \;&=\; \int_\Omega f \,\mathrm{div} \boldsymbol{\tau}\,, \\ \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\psi - b \int_\Omega \phi\,\psi - b \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi \;&=\; \int_\Gamma g\,\psi\,, \end{aligned} \tag{1}$$
para todo $(\boldsymbol{\tau}, v, \psi) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$.

   a) Introduzca operadores $S := (S_1, S_2) : H^1_0(\Omega) \longrightarrow H(\mathrm{div};\Omega) \times H^1(\Omega)$ y $\widetilde{S} : H^1_0(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow H^1_0(\Omega)$, bien definidos, tales que (1) se reduzca equivalentemente a la ecuación de punto fijo: Hallar $\phi \in H^1_0(\Omega)$ tal que $T(\phi) = \phi$, donde $T(\phi) := \widetilde{S}(\phi, S_2(\phi)) \quad \forall\, \phi \in H^1_0(\Omega)$.

   b) Demuestre que existen constantes $C(a)$, $C(b) \geq 0$ tales que
$$\|S_1(\phi) - S_1(\varphi)\|_{\mathrm{div};\Omega} + \|S_2(\phi) - S_2(\varphi)\|_{1,\Omega} \leq C(a)\, \|\phi - \varphi\|_{0,\Omega}\,,$$
$$\|\widetilde{S}(\phi, u) - \widetilde{S}(\varphi, w)\|_{1,\Omega} \leq C(b) \Big\{ \|\phi - \varphi\|_{0,\Omega} + |u - w|_{1,\Omega} \Big\}\,,$$
   para todo $\phi,\, \varphi \in H^1_0(\Omega),\; u,\, w \in H^1(\Omega)$.

   c) Deduzca a partir de a) y b) que existe una constante $C(a,b) \geq 0$ tal que
$$\|T(\phi) - T(\varphi)\|_{1,\Omega} \leq C(a,b)\, \|\phi - \varphi\|_{0,\Omega} \quad \forall\, \phi,\, \varphi \in H^1_0(\Omega)\,,$$
   pruebe luego que T es compacto, y concluya finalmente que para a y b suficientemente pequeños, el problema original (1) posee una única solución.

4. Utilice una fórmula de integración por partes adecuada, y luego aplique el análisis sobre alternativa de Fredholm y método de Galerkin para estudiar la solubilidad discreta del problema de valores de contorno:

$$\Delta u + k\,u = f \quad \text{en} \quad \Omega :=]0,1[^2\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{en} \quad \Gamma := \partial\Omega\,,$$

donde $k \in [-1, +\infty[$, $f \in L^2(\Omega)$, ν es el vector normal en Γ, y $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

5. Sea X un Banach tal que X' es separable. Pruebe que $\bar{B}_X(\mathbf{0},1)$ es metrizable con respecto a $\boldsymbol{\sigma}(X,X')$. Recíprocamente, si $\bar{B}_X(\mathbf{0},1)$ es metrizable para $\boldsymbol{\sigma}(X,X')$, concluya que X' es separable.

CADA PROBLEMA VALE 1.5 PUNTOS. ELIJA 4 DE ELLOS

GGP/ggp