UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2 [PRIMERA PARTE]

Análisis Funcional (4220014)

Jueves 22 de Agosto de 2013: de 9.00 a 18.00 hrs. *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. [MARIO] Dados X e Y espacios de Banach reales y $\mathcal{A} : X \times Y \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada, defina los operadores $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(X, Y')$ y $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(Y, X')$ por

$$\mathbf{A}(x)(y) := \mathcal{A}(x,y) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(y)(x) := \mathcal{A}(x,y) \qquad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y\,.$$

   a) Defina explícitamente los operadores adjuntos $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$, y demuestre que $\mathbf{B} = \mathbf{A}' \circ J_Y$ y $\mathbf{A} = \mathbf{B}' \circ J_X$, donde $J_Y : Y \to Y''$ y $J_X : X \to X''$ son las inyecciones respectivas.

   b) Demuestre que considerando cualquiera de los pares de hipótesis i)-ii) o iii)-iv) dados a continuación, y asumiendo que X es reflexivo, se tiene que $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ y $\mathbf{A}$ son biyectivos.

      i) existe $\alpha > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{A}(x,y)}{\|x\|} \,\geq\, \alpha\,\|y\| \quad \forall\, y \in Y$,

      ii) $\displaystyle\sup_{y \in Y} \mathcal{A}(x,y) > 0 \qquad \forall\, x \in X,\ x \neq \mathbf{0}$,

      iii) existe $\alpha > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{y \in Y \\ y \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{A}(x,y)}{\|y\|} \,\geq\, \alpha\,\|x\| \quad \forall\, x \in X$,

      iv) $\displaystyle\sup_{x \in X} \mathcal{A}(x,y) > 0 \qquad \forall\, y \in Y,\ y \neq \mathbf{0}\,$,

2. [LIKHI] Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1, $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{K} \in [C(\bar{\Omega})]^{n \times n}$ simétrica y uniformemente definida positiva, y constantes $\kappa_1,\, \kappa_2 \in \mathbb{R}$, considere el problema:

$$-\,\mathrm{div}\,(\mathbf{K}\,\nabla u) \,+\, \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \,+\, \kappa_2\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \mathbf{K}\,\nabla u \cdot \mathbf{n} \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{1}$$

   donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario en Γ. Deduzca la formulación primal de (1) y encuentre la mayor región factible para $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2$ que asegura, mediante el Lema de Lax-Milgram clásico, que dicha formulación tiene una única solución. A su vez, defina el esquema de Galerkin asociado y establezca la estimación de Cea en términos de $\mathbf{K}$, κ_1 y κ_2.

   INDICACIÓN: recordar la fórmula de integración por partes que dice que

$$\int_\Omega v\, \frac{\partial w}{\partial x_i} \,=\, -\int_\Omega w\, \frac{\partial v}{\partial x_i} \,+\, \int_\Gamma v\, w\, \nu_i \qquad \forall\, v,\, w \,\in\, H^1(\Omega)\,, \qquad \forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}\,,$$

   donde $\boldsymbol{\nu} := (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ es el vector normal unitario en Γ.

3. [FELIPE] Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert real y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada cuyo operador inducido $A \in \mathcal{L}(H)$ es biyectivo. Dados un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\} \subseteq H$ y $F \in H'$, considere la formulación variacional: Hallar $u \in H$ tal que

$$a(u,v) - \sum_{j=1}^{N} \langle u, u_j\rangle \langle v, u_j\rangle = F(v) \qquad \forall\, v \in H\,. \tag{2}$$

Deduzca una condición necesaria y suficiente sobre $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\}$ que garantice que para cada $F \in H'$ el problema (3) tiene una única solución.

4. [ELIGIO] Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1, y considere la aplicación $|||\cdot||| : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$|||v||| := \left\{ |v|_{1,\Omega}^2 + \|\gamma_0(v)\|_{0,\Gamma}^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ es el operador de trazas usual. Demuestre que $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes en $H^1(\Omega)$.

5. [FILANDER] Sean $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ y $(X_3, \|\cdot\|_3)$, espacios de Banach, y considere operadores $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ y $K \in \mathcal{K}(X_1, X_3)$ para los cuales existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \le c \left\{ \|A(x)\|_2 + \|K(x)\|_3 \right\} \qquad \forall\, x \in X_1\,.$$

Demuestre que $N(A)$ es de dimensión finita, y luego razone por contradicción para probar que $R(A)$ es cerrado, esto es que existe $C > 0$ tal que

$$\mathrm{dist}(x, N(A)) \le C\, \|A(x)\|_2 \qquad \forall\, x \in X_1\,.$$

ESTA PRIMERA PARTE TIENE UN MÁXIMO DE 3 PUNTOS PARA CADA ALUMNO:

1 de base + 2 por la pregunta asignada.

SI BIEN CADA ALUMNO DEBE INFORMAR SÓLO SU PROBLEMA CORRESPONDIENTE, SE RECOMIENDA FUERTEMENTE QUE TODOS CONOZCAN EL DETALLE DE TODAS LAS SOLUCIONES OBTENIDAS. DE HECHO, SI LO DESEAN, PUEDEN TRABAJAR EN FORMA GRUPAL TOTAL O PARCIAL, SEGÚN LES ACOMODE MEJOR. LOS 4 PUNTOS RESTANTES CONSTITUIRÁN LA SEGUNDA PARTE DE LA PRUEBA, A RENDIRSE EN SALA, DE 15.30 A 19.30 HRS. DEL VIERNES 23. AQUÍ SE ENCONTRARÁN CON 5 O MÁS PROBLEMAS DE 1 PUNTO, DE LOS CUALES TENDRÁN QUE ELEGIR 4.

GGP/ggp

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2 [SEGUNDA PARTE]
Análisis Funcional (4220014)

SEGUNDA PARTE

Viernes 23 de Agosto de 2013: de 15.30 a 19.30 hrs. *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Enuncie y demuestre detalladamente un teorema o resultado importante que esté contenido en la temática que le correspondió exponer.

2. a) Sean X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ y X'' el dual de X', es decir

$$X'' := \Big\{ \mathcal{F} : X' \to \mathbb{R} : \quad \mathcal{F} \text{ es lineal y acotado} \Big\}.$$

Demuestre que para cada $x \in X$ el funcional $J(x) : X' \to \mathbb{R}$ definido por $J(x)(F) := F(x) \quad \forall F \in X'$ es un elemento de X'', y que el operador resultante $J : X \to X''$ es inyectivo e isométrico. En el caso en que J es además BIYECTIVO, se dice que X es REFLEXIVO. Deduzca entonces que todo espacio normado reflexivo es necesariamente Banach y pruebe también que todo espacio de Hilbert es reflexivo.

b) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pruebe que K es compacto si y sólo si K transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones convergentes de Y.

3. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert real, y sean $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times H \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas tales que a es H-elíptica y b es simétrica. Dados un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\} \subseteq H$ y $F \in H'$, considere la formulación variacional: Hallar $u \in H$ tal que

$$a(u, v) + \sum_{j=1}^{N} a(u, u_j)\, b(v, u_j) = F(v) \qquad \forall\, v \in H\,. \tag{3}$$

Deduzca una condición necesaria y suficiente sobre $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\}$ que garantice que para cada $F \in H'$ el problema (3) tiene una única solución. En particular, qué ocurre si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$b(u_i, u_j) = c\, \delta_{ij} \qquad \forall\, i,\, j \in \{1, 2, ..., N\}\,?$$

Por otro lado, qué podría concluir si $a = b$?

4. Dados X e Y espacios de Banach reales y $\mathcal{A} : X \times Y \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada, defina los operadores $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(X, Y')$ y $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(Y, X')$ por

$$\mathbf{A}(x)(y) := \mathcal{A}(x,y) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(y)(x) := \mathcal{A}(x,y) \qquad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y\,.$$

   a) Defina explícitamente los operadores adjuntos $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$, y demuestre que $\mathbf{B} = \mathbf{A}' \circ J_Y$ y $\mathbf{A} = \mathbf{B}' \circ J_X$, donde $J_Y : Y \to Y''$ y $J_X : X \to X''$ son las inyecciones respectivas.

   b) Demuestre que considerando cualquiera de los pares de hipótesis i)-ii) o iii)-iv) dados a continuación, y asumiendo que Y es reflexivo, se tiene que $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}$ son biyectivos.

      i) existe $\alpha > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{A}(x,y)}{\|x\|} \geq \alpha\,\|y\| \quad \forall\, y \in Y,$

      ii) $\displaystyle\sup_{y\in Y} \mathcal{A}(x,y) > 0 \qquad \forall\, x \in X,\ x \neq \mathbf{0},$

      iii) existe $\alpha > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{\substack{y\in Y\\ y\neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{A}(x,y)}{\|y\|} \geq \alpha\,\|x\| \quad \forall\, x \in X,$

      iv) $\displaystyle\sup_{x\in X} \mathcal{A}(x,y) > 0 \qquad \forall\, y \in Y,\ y \neq \mathbf{0}\,,$

5. Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1, $f \in L^2(\Omega)$, y constantes κ_1, $\kappa_2 \in \mathbb{R}$ con $\kappa_2 \neq 0$, considere el problema:

$$-\,\Delta\, u \,+\, \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \,+\, \kappa_2\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{4}$$

   Defina la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} = \nabla u$ en Ω y deduzca la siguiente formulación variacional mixta de (4): Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\kappa_2 \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} - \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \sigma_j\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} = -\int_\Omega f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

   Dibuje la region $S := \left\{ (\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \kappa_2 > 0 \text{ y } |\kappa_1| < 2\,\min\{\kappa_2, \tfrac{1}{n}\} \right\}$, y pruebe que para todo $(\kappa_1, \kappa_2) \in S$ el problema anterior tiene una única solución $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ que depende continuamente del dato f.

CADA PROBLEMA VALE 1 PUNTO. ELIJA 4 DE ELLOS

GGP/ggp