UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Análisis Funcional (4220014)

Lunes 20 de Agosto de 2012 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. a) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que K transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones convergentes de Y. Pruebe que K es compacto.

   b) Sea X un espacio de Hilbert y sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $x \in X$, tales que $x_n \stackrel{w}{\to} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$. Pruebe que $x_n \to x$.

   c) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador compacto. Aplique a) y b) para probar que $K^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ también es compacto.

   [1 PUNTO]

2. Este problema constituye una versión particular del Lema de Peetre-Tartar.

   a) Sean X, Y y Z, espacios de Banach, y considere operadores $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $B \in \mathcal{L}(X,Z)$, tales que B es compacto. Además, suponga que existe $c > 0$ tal que

   $$\|x\| \,\le\, c\Big\{\,\|A(x)\| \,+\, \|B(x)\|\,\Big\} \qquad \forall\, x \in X\,.$$

   Demuestre que $N(A)$ es de dimensión finita, y luego razone por contradicción para probar que existe $C > 0$ tal que

   $$\mathrm{dist}(x, N(A)) \,\le\, C\,\|A(x)\| \qquad \forall\, x \in X\,.$$

   b) Dado Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ, es fácil ver que se tiene la descomposición $H^1(\Omega) = \tilde{H}^1(\Omega) \oplus \mathbb{P}_0(\Omega)$, donde $\mathbb{P}_0(\Omega)$ es el espacio de polinomios constantes sobre Ω y $\tilde{H}^1(\Omega) := \Big\{\, v \in H^1(\Omega) : \quad \int_\Omega v \,=\, 0 \,\Big\}$. Además, se sabe (no lo demuestre) que la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y la semi-norma $|\cdot|_{1,\Omega}$ son equivalentes en $\tilde{H}^1(\Omega)$. Aplique a), esta equivalencia y el teorema de trazas, para demostrar que existen constantes C_1, $C_2 > 0$, tales que

   $$C_1\,\|v\|^2_{1,\Omega} \,\le\, |v|^2_{1,\Omega} \,+\, \|v\|^2_{0,\Gamma} \,\le\, C_2\,\|v\|^2_{1,\Omega} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,. \tag{1}$$

   [2 PUNTOS]

3. Sean $A, B, C \,:\, \ell_2(\mathbb{R}) \to \ell_2(\mathbb{R})$ los operadores definidos, para cada sucesión $\mathbf{x} := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{R})$, por $A(\mathbf{x}) := \left\{\frac{x_{n+1}}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $B(\mathbf{x}) := \{0\} \cup \left\{\frac{x_{n-1}}{n-1}\right\}_{n\ge 2}$, y $C(\mathbf{x}) := \left\{\frac{x_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Demuestre que $0 \in \sigma_p(A) \cap \sigma_r(B) \cap \sigma_c(C)$.

   [1 PUNTO]

4. Sean H_1, H_2, Q_1, Q_2 espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, y sean $a : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ y $b_j : H_j \times Q_j \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,2\}$, formas bilineales acotadas con operadores inducidos $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ y $\mathbf{B}_j \in \mathcal{L}(H_j, Q_j)$, $j \in \{1,2\}$, respectivamente. También, sea K_j el espacio nulo de $\mathbf{B}_j$, $j \in \{1,2\}$, y sea Π_2 el proyector ortogonal de H_2 en K_2. Suponga que:

   i) $\Pi_2\,\mathbf{A} : K_1 \to K_2$ es un isomorfismo.

   ii) existen $\beta_1,\, \beta_2 > 0$ tales que

$$\|\mathbf{B}_j^*(q)\|_{H_j} := \sup_{\substack{v \in H_j \\ v \neq 0}} \frac{b_j(v,q)}{\|v\|_{H_j}} \geq \beta_j\, \|q\|_{Q_j} \quad \forall\, q \in Q_j, \quad \forall\, j \in \{1,2\}\,.$$

   Pruebe que, dados $F \in H_2'$ y $G \in Q_1'$, existe un único $(u,p) \in H_1 \times Q_2$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) + b_2(v,p) &= F(v) \quad \forall\, v \in H_2\,, \\ b_1(u,q) &= G(q) \quad \forall\, q \in Q_1\,. \end{aligned}$$

   Además, deduzca condiciones del tipo inf-sup que sean equivalentes a i).

   [1 PUNTO]

5. Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $p : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible y positiva. Entonces se define el espacio ponderado

$$E(p) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible} : \quad p^{1/2}\, u \,\in\, L^2(\Omega) \right\}$$

   provisto de la norma $\|u\|_{E(p)} := \|p^{1/2}\, u\|_{0,\Omega} \quad \forall\, u \in E(p)$.

   a) Dadas funciones p, $q : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles y positivas, y un parámetro $\delta \in]0,1[$, demuestre que el espacio de interpolación $(E(p), E(q))_{\delta,2}$ coincide con $E(r)$, donde $r := p^{1-\delta}\, q^{\delta}$. Concluya, además, que

$$|||u|||_{\delta,2} = C_{\delta,2}\, \|u\|_{E(r)} \quad \forall\, u \in E(r)\,, \quad \text{con} \quad C_{\delta,2} := \left\{ \frac{\pi\,(1-\delta)\,\delta}{\operatorname{sen} \pi\,\delta} \right\}^{1/2}.$$

   b) Para cada $t \in \mathbb{R}$ considere $p_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $p_t(\xi) := (1 + \|\xi\|^2)^t$ $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$, y observe, considerando $\Omega = \mathbb{R}^n$, que la transformada de Fourier $\mathcal{F} : H^t(\mathbb{R}^n) \to E(p_t)$ y su inversa $\mathcal{F}^{-1} : E(p_t) \to H^t(\mathbb{R}^n)$ son isometrías. Luego, utilizando a), demuestre que para cada s_0, $s_1 \in \mathbb{R}$ y $\delta \in]0,1[$, se tiene, con $s := (1-\delta)\, s_0 + \delta\, s_1$, que $\mathcal{F} : (H^{s_0}(\mathbb{R}^n), H^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\delta,2} \to E(p_s)$ y $\mathcal{F}^{-1} : E(p_s) \to (H^{s_0}(\mathbb{R}^n), H^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\delta,2}$ son biyecciones continuas. Concluya, a partir de esto último, que $(H^{s_0}(\mathbb{R}^n), H^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\delta,2} = H^s(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\|u\|_{s,\mathbb{R}^n} = C_{\delta,2}^{-1}\, |||u|||_{\delta,2} \qquad \forall\, u \,\in\, H^s(\mathbb{R}^n)\,.$$

   [2 PUNTOS]

ELIJA CUALQUIER COMBINACIÓN DE PROBLEMAS CUYA SUMA DE PUNTOS SEA ≤ 5

GGP/ggp