UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Miércoles, 28 de Diciembre de 2016 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. (1 PUNTO) [DESIGUALDAD INVERSA PARA ELEMENTOS FINITOS DE LAGRANGE]

   Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera poliédrica, y sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular y quasi-uniforme de triangulaciones de $\bar{\Omega}$ hechas de n-simplex K de tipo $k \in \mathbb{N}$, con diámetro h_K, todos ellos afín equivalentes a un elemento finito de referencia $\widehat{K}$. Denote $h := \max\{h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h\}$, introduzca el espacio de elementos finitos de Lagrange[1]

   $$X_h^k := \Big\{ v \in C(\bar{\Omega}) : \quad v|_K \in P_k(K) \qquad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

   y demuestre que para cada $\delta \in [0,1]$ existe una constante $C_\delta > 0$ tal que

   $$\|v\|_{\delta,\Omega} \le C_\delta\, h^{-\delta}\, \|v\|_{0,\Omega} \qquad \forall\, v \in X_h^k\,.$$

2. (1 PUNTO) [DESIGUALDAD DE POINCARÉ GENERALIZADA EN $W^{m,p}(\Omega)$]

   Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $m \in \mathbb{N}$ y $p \in [1,+\infty)$, se define el espacio de Sobolev

   $$W^{m,p}(\Omega) := \Big\{ v \in L^p(\Omega) : \quad \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \quad \forall\, \alpha\,,\ |\alpha| \le m \Big\},$$

   el cual es un espacio de Banach provisto de la norma

   $$\|v\|_{m,p;\Omega} := \left\{ \sum_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right\}^{1/p} \qquad \forall\, v \in W^{m,p}(\Omega)\,,$$

   cuya semi-norma asociada se define como

   $$|v|_{m,p;\Omega} := \left\{ \sum_{|\alpha| = m} \|\partial^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right\}^{1/p} \qquad \forall\, v \in W^{m,p}(\Omega)\,.$$

   A su vez, sea $\mathcal{F}$ una familia finita en $W^{m,p}(\Omega)'$ tal que[1] $P_{m-1}(\Omega) \cap {}^o\mathcal{F} = \{0\}$, y defina

   $$\|v\|_{\mathcal{F}} := \left\{ |v|_{m,p;\Omega}^p + \sum_{F\in\mathcal{F}} |F(v)|^p \right\}^{1/p} \qquad \forall\, v \in W^{m,p}(\Omega)\,.$$

   Demuestre que existe $C > 0$, que depende de Ω, tal que

   $$\|v\|_{m,p;\Omega} \le C\, \|v\|_{\mathcal{F}} \qquad \forall\, v \in W^{m,p}(\Omega)\,.$$

[1]Dados un entero $k \ge 0$ y $S \subseteq \mathbb{R}^n$, a través de este documento $P_k(S)$ denota el espacio de polinomios de grado $\le k$ definidos sobre S.

3. (1.5 PUNTOS) [LEMA DE DENY-LIONS EN $W^{k+1,p}(K)$]

   Dados un entero $k \geq 0$, $p \in [1, +\infty)$, y un compacto conexo K de $\mathbb{R}^n$ de clase $C^{0,1}$, el propósito de este ejercicio es probar que existe una constante $C > 0$, que depende sólo de K, tal que

$$\inf_{p \in P_k(K)} \|v - p\|_{k+1,p;K} \;\leq\; C\,|v|_{k+1,p;K} \qquad \forall\, v \,\in\, W^{k+1,p}(K)\,, \tag{1}$$

   para lo cual se sugiere proceder como se indica a continuación.

   a) Sean $N := \dim P_k(K)$, $\{p_1, p_2, ..., p_N\}$ una base de $P_k(K)$, y denote por $\{f_1, f_2, ..., f_N\}$ la base canónica asociada del dual $P_k(K)'$, la cual verifica $f_j(p_i) = \delta_{ij}\ \ \forall\, i,\, j \in \{1, 2, ..., N\}$. Luego, demuestre que existe un conjunto de funcionales $\{F_1, F_2, ..., F_N\} \subseteq W^{k+1,p}(K)'$ tal que

$$P_k(K) \,\cap\, {}^{o}\{F_1, F_2, ..., F_N\} \;=\; \{0\}\,,$$

   y use problema 2 para deducir que existe una constante $C_K > 0$ tal que

$$\|v\|_{k+1,p;K} \;\leq\; C_K\; |v|_{k+1,p;K} \qquad \forall\, v \,\in\, W^{k+1,p}(K) \,\cap\, {}^{o}\{F_1, F_2, ..., F_N\}\,. \tag{2}$$

   b) Pruebe que para cada $v \in W^{k+1,p}(K)$ existe un único $q_v \in P_k(K)$ tal que $f_i(q_v) = F_i(v) \quad \forall\, i \in \{1, 2, ..., N\}$, y concluya a partir de (2) la desigualdad requerida (1).

4. (1 PUNTO) [LEMA DE BRAMBLE-HILBERT EN $W^{k+1,p}(K)$ Y $W^{m,p}(K)$]

   Además de las notaciones del problema anterior, considere un entero m tal que $0 \leq m \leq k+1$ y un operador $\Pi \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(K), W^{m,p}(K))$ tal que $\Pi(p) = p$ $\forall\, p \in P_k(K)$, y pruebe que existe $C > 0$, que depende de K, tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{m,p;K} \;\leq\; C\,|v|_{k+1,p;K} \qquad \forall\, v \in W^{k+1,p}(K)\,.$$

5. (1 PUNTO) [PROPIEDADES DE ESCALAMIENTO EN $W^{m,p}(K)$ Y $W^{m,p}(\widehat{K})$]

   Sean K y $\widehat{K}$ compactos conexos de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere la aplicación afín $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $F(\widehat{x}) := B\,\widehat{x} + b \quad \forall\,\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$, con $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible y $b \in \mathbb{R}^n$, tal que $K = F(\widehat{K})$. Se puede probar que $v \in W^{m,p}(K)$ si y sólo si $\widehat{v} := v \circ F \in W^{m,p}(\widehat{K})$, y demuestre en tal caso, procediendo análogamente a lo realizado en clases, que existen constantes $C_j := C_j(m, p, n) > 0$, $j \in \{1, 2\}$, tales que

$$|\widehat{v}|_{m,p;\widehat{K}} \;\leq\; C_1\,\|B\|^m\,|\det B|^{-1/p}\,|v|_{m,p;K} \qquad \forall\, v \,\in\, W^{m,p}(K)\,,$$

   y

$$|v|_{m,p;K} \;\leq\; C_2\,\|B^{-1}\|^m\,|\det B|^{1/p}\,|\widehat{v}|_{m,p;\widehat{K}} \qquad \forall\, \widehat{v} \,\in\, W^{m,p}(\widehat{K})\,.$$

6. (1.5 PUNTOS) [PROPIEDAD DE APROXIMACIÓN EN $W^{k+1,p}(K)$ Y $W^{m,p}(K)$]

   Además de las notaciones del problema anterior, considere el proyector ortogonal $\Pi : L^2(K) \longrightarrow P_k(K)$ con respecto al producto escalar de $L^2(K)$, y defina el operador $\widehat{\Pi} : L^2(\widehat{K}) \longrightarrow P_k(\widehat{K})$ por

$$\widehat{\Pi}(\widehat{v}) := \Pi(\widehat{v} \circ F^{-1}) \circ F \qquad \forall\, \widehat{v} \in L^2(\widehat{K}).$$

   a) Demuestre que $\widehat{\Pi}$ coincide con el proyector ortogonal de $L^2(\widehat{K})$ en $P_k(\widehat{K})$.

   b) Denote $\sigma_K := h_K/\rho_K$ (según las notaciones usuales de clases), y aplique lo obtenido en los problemas 4 y 5 para demostrar que existe una constante $C > 0$, independiente de K, tal que

$$|v - \Pi(v)|_{m,p;K} \;\leq\; C\, \sigma_K^m\, h_K^{k+1-m}\, |v|_{k+1,p;K} \qquad \forall\, v \in W^{k+1,p}(K).$$

GGP/ggp