UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Martes, 15 de Diciembre de 2015 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. [2 PUNTOS] El objetivo de este problema es definir un interpolante tipo Clément sobre una triangulación de rectángulos y probar una de sus propiedades de aproximación.

   a) Sean K_j, $j \in \{1, \ldots, m\}$, m rectángulos adyacentes[1] de $\mathbb{R}^2$ con lados paralelos a los ejes coordenados y diámetros respectivos h_j, introduzca el conjunto $S := \cup\Big\{K_j : j \in \{1, \ldots, m\}\Big\}$, denote $h_S := \max\limits_{j \in \{1,\ldots,m\}} h_j$, y considere el operador lineal $\Pi_S : L^2(S) \to P_0(S)$ dado por

   $$\Pi_S(v) := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{1}{|K_j|} \int_{K_j} v \right\} \qquad \forall\, v \in L^2(S)\,.$$

   Demuestre que para cada $\delta \in [0, 1]$ existe una constante $C_\delta > 0$, independiente de los K_j, tal que

   $$\|v - \Pi_S(v)\|_{0,S} \,\le\, C_\delta\, h_S^\delta\, \|v\|_{\delta,S} \qquad \forall\, v \in H^\delta(S)\,.$$

   b) Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones (hechas de rectángulos con lados paralelos a los ejes coordenados) de una región poligonal Ω de $\mathbb{R}^2$, y para cada $h > 0$ considere el espacio de elementos finitos

   $$X_h := \Big\{ v_h \in C(\overline{\Omega}) : \quad v_h|_K \in Q_1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\}.$$

   Además, sea $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ el conjunto de vértices de $\mathcal{T}_h$, y denote la base correspondiente de X_h por $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\}$. A su vez, para cada $j \in \{1, ..., N\}$ se introduce el macro-elemento S_j dado por la unión de los m_j rectángulos, $m_j \le 4$, que comparten el vértice x_j. Defina el operador $J_h : L^2(\Omega) \to X_h$ por $J_h(v) := \sum\limits_{j=1}^{N} \Pi_{S_j}(v)\, \varphi_j \quad \forall\, v \in L^2(\Omega)$, con Π_{S_j} dado según a), denote $w_K := \cup\big\{S_j : \quad x_j \in K\big\}$, y demuestre que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

   $$\|v - J_h(v)\|_{0,K} \,\le\, C\, h_K\, |v|_{1,w_K} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,, \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,.$$

[1] Se dice que m rectángulos son adyacentes si comparten un vértice común

2. [3 PUNTOS] Dado un triángulo K de $\mathbb{R}^2$, se define el espacio de Raviart-Thomas de orden 0 sobre K como $\mathrm{RT}_0(K) := [P_0(K)]^2 \oplus P_0(K)\,\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} := (x_1, x_2)^{\mathtt{t}}$ denota un vector genérico de K. Equivalentemente, $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{RT}_0(K)$ si y sólo si existen únicas constantes a, b, c tales que

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} a + c\,x_1 \\ b + c\,x_2 \end{pmatrix} \qquad \forall\,\mathbf{x} := (x_1, x_2)^{\mathtt{t}} \in K\,.$$

En lo que sigue, $\boldsymbol{\nu}_K$ es el vector normal en ∂K, y los lados de K se denotan por F_j, $j \in \{1,2,3\}$, de modo que $\boldsymbol{\nu}_K|_{F_j}$ es un vector constante de $\mathbb{R}^2$ $\forall\, j \in \{1,2,3\}$.

a) Pruebe que para cada $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{RT}_0(K)$ se tiene que $\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} \in P_0(K)$ y $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K|_{F_j} \in P_0(F_j)$ $\forall\, j \in \{1,2,3\}$.

b) Demuestre que si $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{RT}_0(K)$ es tal que $\int_{F_j} \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K = 0$ $\forall\, j \in \{1,2,3\}$, entonces necesariamente $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{0}$. Use primero integración por partes para probar que $\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = 0$, y luego concluya utilizando el hecho que los vectores normales sobre los lados de K son l.i. dos a dos.

c) Para cada $i \in \{1,2,3\}$ defina el funcional $m_i(\boldsymbol{\tau}) := \int_{F_i} \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K$ $\forall\,\boldsymbol{\tau} \in [H^1(K)]^2$, y deduzca, a partir de b), que existen únicos $\boldsymbol{\tau}_j \in \mathrm{RT}_0(K)$, $j \in \{1,2,3\}$, tales que $m_i(\boldsymbol{\tau}_j) = \delta_{ij}$ $\forall\, i, j \in \{1,2,3\}$. A su vez, defina el operador de interpolación $\Pi_K : [H^1(K)]^2 \to \mathrm{RT}_0(K)$ por $\Pi_K(\boldsymbol{\tau}) := \displaystyle\sum_{i=1}^{3} m_i(\boldsymbol{\tau})\,\boldsymbol{\tau}_i$ $\forall\,\boldsymbol{\tau} \in [H^1(K)]^2$, y muestre que $\Pi_K(\boldsymbol{\tau})$ es el único elemento en $\mathrm{RT}_0(K)$ tal que $m_j(\Pi_K(\boldsymbol{\tau})) = m_j(\boldsymbol{\tau})$ $\forall\, j \in \{1,2,3\}$.

d) Sea $\widehat{K}$ el triángulo canónico de $\mathbb{R}^2$, y sea $F_K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación afín invertible dada por $F_K(\widehat{\mathbf{x}}) := B_K\,\widehat{\mathbf{x}} + b_K$ $\forall\,\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$, con $B_K \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $b_K \in \mathbb{R}^2$, tal que $K = F_K(\widehat{K})$. Luego, dado $\boldsymbol{\tau} \in [H^m(K)]^2$, $m \in \{0,1\}$, defina $\widehat{\boldsymbol{\tau}} := |\det B_K|\,B_K^{-1}\,\boldsymbol{\tau}\circ F_K$, pruebe que $\widehat{\boldsymbol{\tau}} \in [H^m(\widehat{K})]^2$, y concluya que existe $C > 0$, independiente de K, tal que

$$|\widehat{\boldsymbol{\tau}}|_{m,\widehat{K}} \,\le\, C\,\|B_K^{-1}\|\,\|B_K\|^m\,|\det B_K|^{1/2}\,|\boldsymbol{\tau}|_{m,K}\,.$$

Inversamente, si $\widehat{\boldsymbol{\tau}} \in [H^m(\widehat{K})]^2$, muestre que $\boldsymbol{\tau} := |\det B_K|^{-1}\,B_K\,\widehat{\boldsymbol{\tau}}\circ F_K^{-1} \in [H^m(K)]^2$ y que existe $C > 0$, independiente de K, tal que

$$|\boldsymbol{\tau}|_{m,K} \,\le\, C\,\|B_K\|\,\|B_K^{-1}\|^m\,|\det B_K|^{-1/2}\,|\widehat{\boldsymbol{\tau}}|_{m,\widehat{K}}\,.$$

e) Suponga que K es parte de una triangulación $\mathcal{T}_h$ perteneciente a una familia regular, y utilice la identidad $\Pi_{\widehat{K}}(\widehat{\boldsymbol{\tau}}) = \widehat{\Pi_K(\boldsymbol{\tau})}$ para demostrar que, dado $m \in \{0,1\}$, existe $C := C(\widehat{K}, \Pi_{\widehat{K}}, m) > 0$, tal que

$$|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K(\boldsymbol{\tau})|_{m,K} \,\le\, C\,h_K^{1-m}\,|\boldsymbol{\tau}|_{1,K} \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in [H^1(K)]^2\,.$$

[BONUS TRACK POR 0.5 PUNTOS ADICIONALES: Pruebe que $\operatorname{div}\Pi_K(\boldsymbol{\tau}) = P_K(\operatorname{div}\boldsymbol{\tau})$ $\forall\,\boldsymbol{\tau} \in [H^1(K)]^2$, donde $P_K : L^2(K) \to P_0(K)$ es el proyector ortogonal].

GGP/ggp