UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Lunes, 23 de Diciembre de 2013 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. (1 PUNTO). Sean K_1 y K_2 triángulos adyacentes de $\mathbb{R}^2$ con diámetros h_1 y h_2, respectivamente, y para cada $j \in \{1,2\}$ considere el proyector ortogonal $\Pi_j : L^2(K_j) \to P_0(K_j)$. Defina el operador $\Pi : L^2(K_1 \cup K_2) \to P_0(K_1 \cup K_2)$ por
$$\Pi(v) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \Pi_j(v|_{K_j}) \qquad \forall\, v \in L^2(K_1 \cup K_2)\,,$$
y muestre que existen $C_1,\ C_2 > 0$, independientes de K_1 y K_2, tales que
$$\|v - \Pi(v)\|_{0,K_j} \,\le\, C_j\, h_j\, |v|_{1,K_1\cup K_2} \qquad \forall\, j \in \{1,2\}\,, \quad \forall\, v \in H^1(K_1 \cup K_2)\,.$$
BONUS TRACK (0.5 PUNTOS). Enuncie y demuestre el resultado que extiende lo anterior al caso de n triángulos "*adyacentes dos a dos*" de $\mathbb{R}^2$.

2. (1.5 PUNTOS). Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de un dominio poligonal Ω de $\mathbb{R}^2$, y para cada $h > 0$ considere el espacio
$$X_h := \Big\{ v_h \in C(\overline{\Omega}) : \quad v_h|_K \,\in\, P_1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\}\,.$$
Además, sea $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ el conjunto de vértices de $\mathcal{T}_h$, y sea $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\}$ la base correspondiente de X_h, es decir, dado $j \in \{1, ..., N\}$, φ_j es la única función en X_h tal que $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall\, i \in \{1, ..., N\}$. A su vez, para cada $j \in \{1, ..., N\}$ se introduce el macro-elemento $w_j := \operatorname{sop}\varphi_j = \cup\{K \in \mathcal{T}_h : \quad x_j \in K\}$, y se define el operador $S_j : L^2(w_j) \to P_0(w_j)$ dado por
$$S_j(v) := \frac{1}{n_j} \sum_{K \subseteq w_j} S_{j,K}(v|_K) \qquad \forall\, v \in L^2(w_j)\,,$$
donde n_j es el número de triángulos de w_j y $S_{j,K} : L^2(K) \to P_0(K)$ es el proyector ortogonal. Defina el interpolante de Clément alternativo $J_h : L^2(\Omega) \to X_h$ dado por $J_h(v) := \sum_{j=1}^{N} S_j(v)\, \varphi_j \quad \forall\, v \in L^2(\Omega)$, y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$, independientes de h, tales que
$$\|v - J_h(v)\|_{0,K} \,\le\, C_1\, h_K\, |v|_{1,w_K} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,, \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,,$$
y
$$\|v - J_h(v)\|_{0,e} \,\le\, C_2\, h_K^{1/2}\, |v|_{1,w_e} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,, \quad \forall \text{lado } e \text{ de } K\,, \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,,$$
donde
$$w_K := \cup\big\{w_j : \quad x_j \in K\big\} \qquad \text{y} \qquad w_e := \cup\big\{w_j : \quad x_j \in e\big\}\,.$$

3. (1 PUNTO). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera poliédrica, y sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de $\bar{\Omega}$ hecha de n-simplex K con diámetro h_K, todos ellos afín-equivalentes a un elemento finito de referencia $\widehat{K}$. Suponga también que dicha familia es *quasi-uniforme*, esto es existe $c > 0$, independiente de h, tal que

$$h \,:=\, \max\Big\{h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h\Big\} \,\leq\, c \,\min\Big\{h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h\Big\}\,,$$

y, dado $k \geq 1$, defina el espacio de elementos finitos de Lagrange

$$X_h^k \,:=\, \Big\{v \in C(\bar{\Omega}) : \quad v|_K \in P_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\Big\}.$$

Pruebe que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|v\|_{1,\Omega} \,\leq\, C\, h^{-1}\, \|v\|_{0,\Omega} \qquad \forall\, v \in X_h^k\,. \tag{1}$$

BONUS TRACK (0.5 PUNTOS). Utilice la teoría de interpolación de espacios de Sobolev para probar que existe $C > 0$, independiente de h, tal que $\|v\|_{\delta,\Omega} \,\leq\, C\, h^{-\delta}\, \|v\|_{0,\Omega} \qquad \forall\, v \in X_h^k\,, \qquad \forall\, \delta \in [0,1]$.

4. (1.5 PUNTOS). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y dado $f \in L^2(\Omega)$, sea $u \in H_0^1(\Omega)$ la única solución débil del problema de Poisson: $-\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma$. A su vez, sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de $\bar{\Omega}$ hecha de triángulos K con diámetro h_K. Entonces, dado $k \in \mathbb{N}$, defina el espacio de elementos finitos

$$X_{h,0}^k \,:=\, \Big\{v \in C(\bar{\Omega}) : \quad v|_K \in P_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,, \quad v = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\Big\}\,,$$

asuma la existencia de un interpolante de Clément $I_h : H_0^1(\Omega) \to X_{h,0}^k$ con las mismas propiedades de aproximación del visto en clases, y considere el esquema de Galerkin: Hallar $u_h \in X_{h,0}^k$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \,=\, \int_\Omega f v_h \qquad \forall\, v_h \in X_{h,0}^k\,. \tag{2}$$

i) Demuestre que existe $\alpha > 0$, dependiente sólo de Ω, tal que

$$\alpha\, \|u - u_h\|_{1,\Omega} \,\leq\, \sup_{w \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{S_h(w)}{\|w\|_{1,\Omega}}\,,$$

donde $S_h(w) \,:=\, \int_\Omega f\,\big(w - I_h(w)\big) - \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla\big(w - I_h(w)\big)$.

ii) Sea $\mathcal{E}_h(\Omega)$ el conjunto de lados interiores de $\mathcal{T}_h$. Entonces, dado $e \in \mathcal{E}_h(\Omega)$, $\boldsymbol{\nu}_e$ denota un vector normal unitario fijo sobre e, y $[\nabla u_h]_e$ es el salto de discontinuidad de ∇u_h sobre e en la dirección dada por $\boldsymbol{\nu}_e$. Pruebe que

$$S_h(w) \,=\, \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \big(f + \Delta u_h\big)\big(w - I_h(w)\big) \,-\, \sum_{e \in \mathcal{E}_h(\Omega)} \int_e [\nabla u_h]_e \cdot \boldsymbol{\nu}_e \,\big(w - I_h(w)\big)\,.$$

iii) Denote por h_e la medida del lado e, y concluya que existe $C_{\mathtt{rel}} > 0$, independiente de h, tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega}^2 \,\leq\, C_{\mathtt{rel}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ h_K^2\, \|f + \Delta u_h\|_{0,K}^2 \,+\, \sum_{e \subseteq \partial K} h_e\, \|[\nabla u_h]_e\|_{0,e}^2 \right\}\,. \tag{3}$$

5. (1 PUNTO). El problema 4 ha proporcionado una cota <u>superior</u> del error de Galerkin, la cual, excepto por la constante $C_{\texttt{rel}}$, depende explícitamente de la solución discreta u_h obtenida de acuerdo a (2), y por lo tanto es completamente calculable. De acuerdo a ello, la desigualdad (3) recibe usualmente el nombre de *estimación de error a posteriori confiable* (*"reliable" en inglés*). El propósito del presente ejercicio es probar, al menos parcialmente, que también es posible acotar <u>inferiormente</u> el error, módulo una constante usualmente diferente $C_{\texttt{eff}}$ y términos de orden superior, por la expresión a la derecha de (3), lo cual se denomina *estimación de error a posteriori eficiente* (*"efficient" en inglés*). Para este efecto, dado $K \in \mathcal{T}_h$, se considera la función burbuja respectiva $\psi_K \in P_3(K)$, la cual satisface

$$0 \le \psi_K \le 1 \quad \text{en} \quad K \quad \text{y} \quad \psi_K = 0 \quad \text{en} \quad \partial K \,.$$

Se sabe, además, que dado $k \in \mathbb{N}$, existe $c_1 > 0$, que depende sólo de k y la constante del ángulo mínimo, tal que

$$\|q\|_{0,K}^2 \;\le\; c_1 \, \|\psi_K^{1/2} \, q\|_{0,K}^2 \qquad \forall\, q \in P_k(K)\,. \tag{4}$$

i) Sea $\Pi_K : L^2(K) \to P_0(K)$ el proyector ortogonal, y muestre primero que

$$h_K^2 \, \|f + \Delta u_h\|_{0,K}^2 \;\le\; 2\, h_K^2 \, \|f - \Pi_K(f|_K)\|_{0,K}^2 \;+\; 2\, h_K^2 \, \|\chi_K\|_{0,K}^2 \,,$$

donde $\chi_K := \Pi_K(f|_K) \,+\, \Delta u_h$.

ii) Aplique (4) e integración por partes en K para probar que

$$\|\chi_K\|_{0,K}^2 \;\le\; c_1 \left\{ \int_K \psi_K \, \chi_K \, (\Pi_K(f|_K) - f) \;+\; \int_K \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(\psi_K \, \chi_K) \right\} .$$

iii) Utilice la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la estimación inversa dada por (1) (cf. Ejercicio 3) para demostrar a partir de ii) que

$$\|\chi_K\|_{0,K}^2 \;\le\; C \left\{ \|f - \Pi_K(f|_K)\|_{0,K}^2 \;+\; h_K^{-2} \, |u - u_h|_{1,K}^2 \right\} .$$

iv) Concluya que existe $\widetilde{C} > 0$, independiente de h, tal que

$$h_K^2 \, \|f + \Delta u_h\|_{0,K}^2 \;\le\; \widetilde{C} \left\{ |u - u_h|_{1,K}^2 \;+\; h_K^2 \, \|f - \Pi_K(f|_K)\|_{0,K}^2 \right\} .$$

v) Suponga que $f|_K \in H^1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h$, y deduzca en tal caso que

$$h_K^2 \, \|f + \Delta u_h\|_{0,K}^2 \;\le\; \widetilde{C} \left\{ |u - u_h|_{1,K}^2 \;+\; h_K^4 \, |f|_{1,K}^2 \right\} . \tag{5}$$

Notar aquí que $h_K^4 \, |f|_{1,K}^2$ constituye un *término de orden superior.*