UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Sábado, 29 de Diciembre de 2012 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. (2 Puntos) [funciones base locales] Calcule las coordenadas baricéntricas del 3-simplex (tetraedro) K de $\mathbb{R}^3$ determinado por los vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$, y calcule explícitamente 3 funciones base de $P_2(K)$ asociadas a puntos medios de sus aristas (recuerde que $\dim P_2(K) = \operatorname{card} \Sigma_2 = 10$).

2. (2 Puntos) [problema de elasticidad plana] Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. A su vez, sean $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de Ω y k un entero ≥ 1. Defina para cada $h > 0$ el espacio

$$X_h^k := \left\{ \mathbf{v}_h \in [C(\overline{\Omega})]^2 : \quad \mathbf{v}_h|_K \in [\mathbb{P}_k(K)]^2 \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\} \cap [H_0^1(\Omega)]^2 ,$$

y considere el siguiente esquema de Galerkin para el problema de elasticidad lineal plana asociado a un sólido que ocupa la region Ω y que está sujeto a la fuerza representada por $\mathbf{f}$: Hallar $\mathbf{u}_h \in X_h^k$ tal que

$$\int_\Omega \left\{ 2\,\mu\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_h) : \mathbf{e}(\mathbf{v}_h) \,+\, \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \right\} \,=\, \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \quad \forall\, \mathbf{v}_h \in X_h^k , \tag{1}$$

donde $\lambda\,,\, \mu \,>\, 0$ son las constantes de Lamé respectivas y, dado $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2$, $\mathbf{e}(\mathbf{v})$ denota el tensor de deformaciones (o parte simétrica de $\nabla \mathbf{v}$).

a) Pruebe que (1) tiene solución única y establezca la razón de convergencia correspondiente.

b) Denote por $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ la solución del problema continuo respectivo y demuestre, utilizando el interpolante de Clémént $\mathbf{I}_h : [L^2(\Omega)]^2 \to X_h^1 \subseteq X_h^k$, que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \,\leq\, C \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2} ,$$

donde

$$\eta_K^2 \,:=\, h_K^2\, \|\mathbf{f} + \mathbf{div}\, \sigma_h\|_{0,K}^2 \,+\, \sum_{e \subseteq \partial K} h_e\, \|[\sigma_h]_e\|_{0,e}^2 ,$$
$$\sigma_h \,:=\, 2\,\mu\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_h) \,+\, \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}_h\, \mathbb{I} ,$$

h_K es el diámetro de K, h_e es la longitud del lado e de $\mathcal{T}_h$, $[\sigma_h]_e$ denota el salto de discontinuidad de σ_h a través de e, e $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

3. (2 Puntos) [errores de proyección] Dada una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de un dominio poliédrico Ω de $\mathbb{R}^n$ y un entero $k \geq 1$, considere para cada $h > 0$ los proyectores ortogonales $\mathbf{P}_{1,h}^k : H^1(\Omega) \to X_h^k$ (con respecto al producto interior de $H^1(\Omega)$) y $\mathbf{P}_h^k : L^2(\Omega) \to X_h^k$ (con respecto al producto interior de $L^2(\Omega)$), donde $X_h^k := \Big\{ v_h \in C(\overline{\Omega}) : \quad v_h|_K \in \mathbb{P}_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\}$.

a) Pruebe que existen constantes C_1, $C_2 > 0$, independientes de h, tales que

$$\|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} \leq C_1\, h^l\, |v|_{l+1,\Omega} \quad \forall\, v \in H^{l+1}(\Omega)\,, \quad \forall\, l \in \{0,1,...,k\}\,, \quad \text{y}$$

$$\|v - \mathbf{P}_h^k(v)\|_{0,\Omega} \leq C_2\, h^{l+1}\, |v|_{l+1,\Omega} \quad \forall\, v \in H^{l+1}(\Omega)\,, \quad \forall\, l \in \{1,...,k\}\,.$$

b) Use la teoría de interpolación de espacios de Sobolev para probar, a partir de a), que existen constantes C_3, $C_4 > 0$, independientes de h, tales que

$$\|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} \leq C_3\, h^s\, \|v\|_{s+1,\Omega} \quad \forall\, v \in H^{s+1}(\Omega)\,, \quad \forall\, s \in [0,k]\,, \quad \text{y}$$

$$\|v - \mathbf{P}_h^k(v)\|_{0,\Omega} \leq C_4\, h^s\, \|v\|_{s,\Omega} \quad \forall\, v \in H^{s}(\Omega)\,, \quad \forall\, s \in [0,k+1]\,.$$

c) Suponga ahora que Ω es convexo, y sea $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^2(\Omega))$ el operador que a cada $r \in L^2(\Omega)$ le asigna la única solución $T(r) \in H^2(\Omega)$ del problema: $-\Delta\, T(r) + T(r) = r$ en Ω, $\nabla T(r) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ en $\partial\Omega$, donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal a $\partial\Omega$. Luego, empleando la formulación débil que define a $T(r)$ y el argumento de dualidad ("*truco de Aubin-Nitsche*") dado por la identidad

$$\|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{0,\Omega} = \sup_{\substack{r \in L^2(\Omega) \\ r \neq 0}} \frac{\langle r, v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\rangle_{0,\Omega}}{\|r\|_{0,\Omega}}\,,$$

demuestre que

$$\|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{0,\Omega} \leq \widetilde{C}\, h\, \|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

y concluya luego que

$$\|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{0,\Omega} \leq \widehat{C}\, h^{l+1}\, |v|_{l+1,\Omega} \quad \forall\, v \in H^{l+1}(\Omega)\,, \quad \forall\, l \in \{0,1,...,k\}\,,$$

con $\widetilde{C}$, $\widehat{C} > 0$, independientes de h, v y k.

d) Además de la convexidad de Ω, suponga también que $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ es quasi-uniforme, y demuestre, utilizando las propiedades de $\mathbf{P}_{1,h}^k$ y $\mathbf{P}_h^k$, y algunas estimaciones obtenidas en clases y en las partes anteriores de este problema, que existen c_1, $c_2 > 0$, independientes de h, tales que

$$c_1\, \|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} \leq \|v - \mathbf{P}_h^k(v)\|_{1,\Omega} \leq c_2\, \|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

IND.: Para la desigualdad que involucra a c_2 pruebe primero que

$$\|v - \mathbf{P}_h^k(v)\|_{1,\Omega} \leq \|v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{P}_h^k\{v - \mathbf{P}_{1,h}^k(v)\}\|_{1,\Omega}\,.$$

4. (2 Puntos) [interpolante de clémént ponderado] Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangularizaciones de un dominio poligonal Ω de $\mathbb{R}^2$, y para cada $h > 0$ considere el espacio de elementos finitos

$$X_h := \Big\{ v_h \in C(\overline{\Omega}) : \quad v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\} .$$

Además, sea $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ el conjunto de vértices de $\mathcal{T}_h$, y sea $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\}$ la base correspondiente de X_h, es decir, dado $j \in \{1, ..., N\}$, φ_j es la única función en X_h tal que $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall\, i \in \{1, ..., N\}$. A su vez, para cada $j \in \{1, ..., N\}$ se introduce el macro-elemento $w_j := \mathrm{sop}\, \varphi_j = \cup\{K \in \mathcal{T}_h : \quad x_j \in K\}$, y dado $K \in \mathcal{T}_h$ se denota por ψ_K su función burbuja respectiva. Luego, para cada $j \in \{1, ..., N\}$ se considera el proyector ortogonal $S_j : L^2(w_j) \to \mathbb{P}_0(w_j)$ con respecto al producto escalar ponderado

$$\langle\!\langle v, z \rangle\!\rangle_{0,w_j} := \sum_{K \subseteq w_j} \int_K \psi_K\, v\, z \qquad \forall\, v,\, z \in L^2(w_j) ,$$

y se introduce un interpolante de Clémént alternativo $J_h : L^2(\Omega) \to X_h$ dado por $J_h(v) := \displaystyle\sum_{j=1}^{N} S_j(v)\, \varphi_j \quad \forall\, v \in L^2(\Omega)$. Demuestre, siguiendo básicamente el mismo análisis de clases, que existen C_1, $C_2 > 0$, independientes de h, tales que

$$\|v - J_h(v)\|_{0,K} \le C_1\, h_K\, |v|_{1,w_K} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega) , \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h ,$$

y

$$\|v - J_h(v)\|_{0,e} \le C_2\, h_K^{1/2}\, |v|_{1,w_e} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega) , \quad \forall\, \text{lado } e \text{ de } K , \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h ,$$

donde

$$w_K := \cup\big\{ w_j : \quad x_j \in K \big\} \qquad \text{y} \qquad w_e := \cup\big\{ w_j : \quad x_j \in e \big\} .$$

---

elija sólo 3 problemas

GGP/ggp