UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Martes, 15 de Diciembre de 2009 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean Ω un abierto acotado y convexo de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ, $f \in L^2(\Omega)$, y $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ la única solución de: $-\Delta u = f$ en Ω, $u = 0$ en Γ. Dada una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de $\bar{\Omega}$ hecha de triángulos K y lados e, se definen los espacios de LAGRANGE y de CROUZEIX-RAVIART, respectivamente, como sigue:

$$X_h := \Big\{ v \in C(\bar{\Omega}) : \quad v|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,, \quad v = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \Big\}\,,$$

$$V_h := \Big\{ v \in L^2(\Omega) : \ v|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,,\ v \text{ es continua en los puntos medios de los lados } e \in \mathcal{T}_h\,,\ v = 0 \text{ en los puntos medios de los lados } e \subseteq \Gamma \Big\}\,.$$

   a) Defina $\|v_h\|_h := \left\{ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v_h|_{1,K}^2 \right\}^{1/2} \quad \forall\, v_h \in V_h$, pruebe que $\|\cdot\|_h$ es una norma sobre V_h, y concluya que existe un único $u_h \in V_h$ tal que

   $$a_h(u_h, v_h) := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h = F(v_h) := \int_\Omega f\, v_h \quad \forall\, v_h \in V_h\,.$$

   b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

   $$\|u - u_h\|_h \le C \left\{ \inf_{v_h\in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h\in V_h\backslash 0} \frac{|a_h(u, w_h) - F(w_h)|}{\|w_h\|_h} \right\}\,. \qquad (1)$$

   c) Integre por partes en cada $K \in \mathcal{T}_h$ y pruebe que

   $$\begin{aligned} a_h(u, w_h) - F(w_h) &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}\, w_h = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{e\subseteq\partial K} \int_e \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}\, (w_h - \mathcal{P}_{0,e}(w_h)) \\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{e\subseteq\partial K} \int_e (\nabla u - \nabla \Pi_h(u)) \cdot \boldsymbol{\nu}\, (w_h - \mathcal{P}_{0,e}(w_h)) \qquad \forall\, w_h \in V_h\,, \end{aligned} \qquad (2)$$

   donde $\Pi_h : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to X_h$ es el operador de interpolación global de Lagrange y $\mathcal{P}_{0,e} : L^2(e) \to \mathbb{P}_0(e)$ es el proyector ortogonal.

   d) Deduzca a partir de (1) y (2) que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

   $$\|u - u_h\|_h \le C\, h\, |u|_{2,\Omega}\,.$$

(30 PUNTOS)

2. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. El problema de elasticidad lineal plana asociado a un sólido que ocupa Ω, y que está sometido a la fuerza $\mathbf{f}$, consiste en encontrar el desplazamiento $\mathbf{u}$ tal que:

$$\mathbf{div}\Big\{ \lambda \,\mathrm{tr}\, \mathbf{e}(\mathbf{u})\, \mathbf{I} \,+\, 2\,\mu\, \mathbf{e}(\mathbf{u}) \Big\} \,=\, -\,\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{y} \quad \mathbf{u} \,=\, \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma\,, \tag{3}$$

donde $\lambda\,,\,\mu \,>\, 0$ son las constantes de Lamé, tr denota el operador de trazas matricial, $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ es el tensor de deformaciones, e $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Demuestre que la formulación variacional de (3) se reduce a: Hallar $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ tal que

$$\int_\Omega \Big\{ \lambda \,\mathrm{div}\,(\mathbf{u})\,\mathrm{div}\,(\mathbf{v}) \,+\, 2\,\mu\,\mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \Big\} \,=\, \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2\,,$$

y pruebe que ella tiene solución única, la cual depende continuamente de $\mathbf{f}$.

b) Utilice triángulos de tipo (**1**) para definir detalladamente un esquema de Galerkin asociado, pruebe que tiene solución única, establezca su convergencia e indique la razón de convergencia respectiva.

(10 Puntos)

3. Sea T un triángulo de $\mathbb{R}^2$ con diámetro h_T y sea $\widehat{T}$ el triángulo canónico con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. A su vez, sea $F_T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación afín invertible tal que $F_T(\widehat{T}) \,=\, T$, y defina $\psi_T \,:=\, \widehat{\psi} \circ F_T^{-1}$, donde $\widehat{\psi}$ es la función burbuja de $\widehat{T}$. Además, sea $\mathcal{P}_0$ el proyector ortogonal de $L^2(T)$ en $\mathbb{P}_0(T)$ con respecto al producto escalar

$$\langle f, g\rangle \,:=\, \int_T \psi_T\, f\, g \qquad \forall\, f,\, g \,\in\, L^2(T)\,.$$

Pruebe que para cada $s \,\in\, [0,1]$ existe $C_s > 0$, independiente de T, tal que

$$\|v - \mathcal{P}_0(v)\|_{0,T} \,\leq\, C_s\, h_T^s\, \|v\|_{s,T} \qquad \forall\, v \,\in\, H^s(T)\,.$$

(10 Puntos)

4. Problema sobre funciones burbujas.

(10 Puntos)

5. Tarea individual.

(40 Puntos)

GGP/ggp